

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Шишкина Ольга Андреевна

**МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ И МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ
ЭЙЛЕРА – МАКЛОРЕНА**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, доцент
Лейнартас Е. К

Красноярск – 2017

Оглавление

Введение	3
1 Многочлены Бернулли от нескольких переменных, их свойства	20
1.1 Оператор Тодда, числа Бернулли и многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом	24
1.2 Основное свойство многочленов Бернулли	28
1.3 Аналог формулы Бернулли для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа	31
1.4 Формулы сложения, умножения, дополнения и дифференцирования для многочленов Бернулли от нескольких переменных	35
2 Многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена	41
2.1 Дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница в задаче суммирования функций нескольких переменных по рациональному унимодулярному параллелотопу	45
2.2 Формула Эйлера – Маклорена в случае суммирования по унимодулярному рациональному параллелотопу	51
2.3 Суммирование по рациональному параллелотопу в общем случае	56
2.4 О суммировании по целым точкам рационального симплекса	64
Заключение	73
Список литературы	74

Введение

Исследование функций при дискретном изменении аргумента велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей выделилось только в 18 веке. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, и роль дифференциалов играют конечные разности функции. Вычисление конечных разностей аналогично дифференцированию, а интегрированию здесь соответствует суммирование разностей, роль дифференциальных уравнений играют конечно-разностные уравнения.

Начала исчисления конечных разностей содержатся в трудах П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбница. Развивалась конечно-разностная теория параллельно с основными разделами математического анализа. В 18 веке теория конечных разностей приобрела характер самостоятельной математической дисциплины, изложение начал которой принадлежит Б. Тейлору (1717 г.), но подлинным основателем следует все же считать Д. Стирлинга (1730 г.). Первое систематическое исследование по теории конечных разностей было написано Л. Эйлером в 1755 году, в нем впервые использовалось обозначение Δ для разностного оператора.

Сумму степеней последовательных натуральных чисел вычислил еще Я. Бернулли [25], его исследования дали толчок к возникновению целого ряда разделов комбинаторного анализа. В своей работе „Искусство предположений“, изданной в 1713 году, Я. Бернулли привел общее выражение для нахождения этой суммы. Кроме того, он вывел рекуррентное правило, позволяющее вычислять числа Бернулли.

Леонард Эйлер применил числа Бернулли в теории конечных разностей и исследовал их свойства. Некоторые из этих результатов он изложил в своем сочинении „Дифференциальное исчисление“, вышедшем в свет в 1755 г. В „Дифференциальном исчислении“ им предложено шесть способов

нахождения чисел Бернулли.

Числа Бернулли являются значениями в нуле многочленов Бернулли, которые для натуральных значений аргумента рассматривал Бернулли, а для произвольных изучал Эйлер, использовавший в 1738 году для этого производящую функцию.

Также полиномы Бернулли изучал J.L. Raabe (1801-1859) [44], который нашел для них две важные формулы и ввел термин многочлены Бернулли (J.L. Raabe, 1851). Полиномы Бернулли и Эйлера позднее изучались Nörlund [41].

Числа и многочлены Бернулли хорошо изучены, они нашли широкое применение в различных областях теоретической и прикладной математики. ([1], [7], [19]) Числа Бернулли используются в комбинаторном [36], [16], [45], [2], [4], [5], [12], [50] и численном анализе [33]. Gould [35] заметил, что для многих сумм, содержащих биномиальные коэффициенты, использование чисел Бернулли дает существенное улучшение формул. Различным обобщениям чисел и многочленов Бернулли посвящено большое количество работ [30], [29], [31], [37], [46], [48] из различных областей математики. В частности, Temme [47] вводит обобщенные многочлены Бернулли, у которых степени комплекснозначные.

Одной из основных задач в исчислении конечных разностей является задача суммирования. В общем случае задачу суммирования функций одного аргумента решает известная формула Эйлера – Маклорена, позволяющая выражать дискретные суммы значений функции через производные и интеграл от этой функции. Эйлер получил свою формулу при вычислении медленно сходящегося ряда, а Маклорен использовал ее для вычисления интегралов. Их вывод формул был не строгим, первое серьезное исследование остаточного члена предпринял Пуассон (1823), а первое строгое доказательство формулы дал Якоби (1834) ([34]). В частности, многие асимптотические разложения функций получаются именно через эту формулу. Известны различные методы доказательства этой формулы: средствами вещественного анализа, опирающегося на свойства многочленов Бернулли, и средствами комплексного анализа (Пуассон). В диссертационной работе рассматривается подход Эйлера, при котором задача суммирования сводится к решению разностного уравнения и использованию дифференци-

ального оператора бесконечного порядка.

В последнее время всплеск интереса к задачам суммирования связан с разработкой символьных алгоритмов суммирования рациональных функций в статьях Абрамова С.А [22] и Полякова С.П [42], которые использовали для этих задач название „неопределенное суммирование“. Отметим, что в некоторых случаях для суммирования рациональной функции вместо простейшего разностного уравнения целесообразно использовать уравнение более общего вида.

Проблема суммирования функций нескольких дискретных аргументов менее исследована. Можно отметить работу [43], в которой доказанная теорема Римана – Роха может быть интерпретирована как многомерное обобщение формулы Эйлера – Маклорена для квазиполиномов. Функцию нескольких дискретных аргументов представляется естественным суммировать по целым точкам рациональных многогранников. Например, в работах [27], [28], [24] в связи с задачей о числе целых точек в выпуклом многограннике рассматривалась задача неопределенного суммирования многочленов нескольких переменных, и получены аналоги формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной таких многочленов.

Цель диссертационной работы — исследовать задачу неопределенного суммирования функций нескольких дискретных аргументов. В частности, определить многомерные аналоги чисел Бернулли и многочленов Бернулли и доказать их свойства, получить многомерный аналог формулы Бернулли для суммы мономов по целым точкам рационального параллелотопа. Кроме того, для функций нескольких аргументов определить понятие дискретной первообразной и получить соответствующий аналог формулы Ньютона – Лейбница для решения задачи неопределенного суммирования. Далее, найти многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для отыскания дискретной первообразной и формулу для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа с переменной вершиной.

Основные результаты работы:

1. Определены многомерные аналоги чисел Бернулли и многочленов Бернулли, найдено представление многочленов Бернулли через оператор

Тогда, приведены многомерные варианты основного свойства многочленов Бернулли и формул умножения, сложения, дополнения и дифференцирования. Получен многомерный аналог формулы Бернулли для суммы мономов по целым точкам рационального параллелотопа.

2. Введено понятие дискретной первообразной для функций нескольких переменных и получен дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница для решения задачи неопределенного суммирования функций нескольких аргументов.

3. Найдена формула Эйлера – Маклорена для нахождения дискретной первообразной и формула для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа с переменной вершиной, а также аналогичные формулы в задаче суммирования функции по целым точкам симплекса.

Все основные результаты диссертации являются новыми и представляют научный интерес.

Методы исследования. В работе использованы методы комплексного анализа, теории многомерных разностных уравнений и производящих функций, а также теории дифференциальных операторов бесконечного порядка.

Практическая и теоретическая ценность.

Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в теории многомерных разностных уравнений и производящих функций, в комбинаторном перечислительном анализе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

1) Красноярском городском семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2014–2017 гг.);

2) The 21st International Conference on Difference Equations and Applications (Poland, Białystok, 19–25 July 2015);

3) International Workshop on Multidimensional Complex Analysis and

Differential Equations (Krasnoyarsk, 20–23 October 2014);

4) международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2015», посвященной 70-летию Великой Победы (Красноярск, 15–25 апреля 2015 г.);

5) международной конференции по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре (Коряжма, 3–9 августа 2016 г.);

6) Barcelona Analysis Conference 2016 (Spain, Barcelona, 5–9 September 2016);

7) VI Российско-Армянском совещании по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (Ростов-на-Дону, 11–16 сентября 2016 г.);

8) международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2016», посвященной Году образования и Содружества Независимых Государств (Красноярск, 15–25 апреля 2016 г.);

9) The 23rd International Conference on Difference Equations and Applications (Romania, Timisoara, 24–28 July 2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях ([51], [52], [53], [54]), 2 материалах конференций ([56], [57]) и 4 тезисах ([55], [58], [59], [60]). Все статьи опубликованы ведущих рецензируемых изданиях, входящих в Перечень периодических научных изданий, рекомендованных ВАК Министерством образования и науки Российской Федерации.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав основного содержания, заключения. Список цитированной литературы состоит из 60 наименований, а список работ автора по теме диссертации — из 10 наименований. Вся диссертация состоит из 80 страниц.

В **первой главе** диссертационной работы рассматривается некоторое обобщение чисел и многочленов Бернулли на случай нескольких перемен-

ных, а именно, определяются числа Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, и соответствующие им многочлены Бернулли. Получено представление многочленов Бернулли через оператор Тодда, доказаны основные свойства многочленов Бернулли и формулы умножения, сложения, дополнения и дифференцирования. Найдена формула для суммы мономов по целым точкам рационального параллелотопа.

Приведем наиболее важные сведения о классических числах и многочленах Бернулли.

Числа Бернулли b_μ — это коэффициенты разложения функции $T(\xi) = \frac{\xi}{e^\xi - 1}$ в степенной ряд:

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} b_\mu \frac{\xi^\mu}{\mu!}.$$

Многочлены Бернулли можно определить следующим образом:

$$B_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\mu} C_\mu^k b_{\mu-k} x^k,$$

где $C_\mu^k = \frac{\mu!}{k!(\mu-k)!}$, а $b_\mu = B_\mu(0)$ — числа Бернулли.

При выводе формулы суммирования Эйлер использовал соотношение вида $\frac{D}{e^D - 1} = \sum_{\mu \geq 0} b_\mu \frac{D^\mu}{\mu!}$, где D — оператор дифференцирования. Правую часть этого соотношения сейчас называют оператором Тодда и обозначают $Td(D)$. Он устанавливает связь между решением разностного уравнения

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$$

и дифференциального

$$Df(x) = Td(D)\varphi(x).$$

Многочлены Бернулли можно представить как действие оператора Тодда на моном x^μ :

$$B_\mu(x) = \frac{D}{e^D - 1} x^\mu.$$

Основное свойство многочленов Бернулли состоит в том, что они удо-

влетворяют разностному уравнению

$$B_{\mu}(x+1) - B_{\mu}(x) = \mu x^{\mu-1} \equiv (x^{\mu})', \quad (0.1)$$

и поэтому многочлены Бернулли играют в исчислении конечных разностей ту же роль, что и степенные функции в дифференциальном исчислении.

Из равенства 0.1 сразу получается формула Бернулли для суммы степеней последовательных натуральных чисел:

$$\sum_{t=0}^x t^{\mu} = \frac{1}{\mu+1} [B_{\mu+1}(x+1) - B_{\mu+1}(0)], \quad (0.2)$$

а интегрируя 0.1 по отрезку $[0, x]$ можно получить другое выражения для искомой суммы

$$\sum_{t=0}^x t^{\mu} = \int_0^{x+1} B_{\mu}(t) dt, \quad (0.3)$$

в которой она выражается через интеграл от многочлена Бернулли.

Для многочленов Бернулли справедливы следующие свойства.
Формула сложения аргументов

$$B_{\mu}(x+y) = \sum_{k=0}^{\mu} C_{\mu}^k B_k(x) y^{\mu-k}; \quad (0.4)$$

формула дифференцирования

$$B'_{\mu}(x) = \mu B_{\mu-1}(x); \quad (0.5)$$

формула дополнения

$$B_{\mu}(x) = (-1)^{\mu} B_{\mu}(1-x); \quad (0.6)$$

формула умножения аргумента

$$B_{\mu}(mx) = m^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\mu-1} B_{\mu} \left(x + \frac{k}{m} \right). \quad (0.7)$$

Для определения чисел и многочленов Бернулли от нескольких переменных и формулировки аналогов свойств 0.4–0.7 нам потребуются следующие обозначения.

Пусть $a^1, \dots, a^n$ — линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — целые числа.

Рациональным конусом, построенным на векторах $a^1, \dots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}$.

Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие *единственным* образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим*, т. е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geqslant} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v . Кроме того, будем писать $u \not\underset{K}{\geqslant} v$, если $u \in K \setminus \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \underset{K}{\geqslant} v$ не выполняется. Любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ — вектора-столбцы, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Конус, построенный на таких векторах $a^1, \dots, a^n$, что определитель матрицы A , столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1, называется *унимодулярным конусом*.

В **параграфе 1.1** определяются числа Бернулли и многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом. Для функций нескольких переменных строится оператор Тодда $Td^A(\partial) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \partial \rangle}{e^{\langle a^j, \partial \rangle} - 1}$, ассоциированный с конусом K , и доказывается, что многочлены Бернулли есть результат

действия оператора Тодда на мономы.

Коэффициенты b_μ^A ряда

$$T(\xi) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \xi^\mu,$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu! = \mu_1! \dots \mu_n!$, $\xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_n^{\mu_n}$, а $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, назовем *числами Бернулли, ассоциированными с конусом K* .

Для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ многочленом Бернулли нескольких переменных назовем многочлен вида

$$B_\mu^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{(\mu - k)!k!} b_{\mu-k}^A x^k,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\mu - k = (\mu_1 - k_1, \dots, \mu_n - k_n)$, b_k^A — числа Бернулли.

Теорема 1. Если $Td^A(\partial)$ — оператор Тодда, а $B_\mu^A(x)$ — многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, то справедливо равенство

$$Td^A(\partial) x^\mu = B_\mu^A(x).$$

В параграфе 1.2 строится полиномиальный разностный оператор, действующий на функциях $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, вида $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$, где $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, δ_j — оператор сдвига, $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n)$, $\delta^{a^j} = \delta_1^{a_1^j} \dots \delta_n^{a_n^j}$. Кроме того вводятся операторы дифференцирования по направлению векторов a^j : $D_j = \langle a^j, \partial \rangle = \sum_{k=1}^n a_k^j \partial_k$ где ∂_j — операторы дифференцирования по j -ой переменной, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}$ $j = 1, \dots, n$, $D = D_1 \dots D_n$, и методами теории производящих функций (см., например, [7], [17]) доказывается многомерный аналог основного свойства, состоящего в том, что многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению.

Теорема 2. Многочлены Бернулли $B_\mu^A(x)$, ассоциированные с рациональным конусом K , удовлетворяют разностному уравнению вида

$$Q(\delta) B_\mu^A(x) = Dx^\mu.$$

В параграфе 1.3 вычислен интеграл от многочленов Бернулли по параллелотопу и для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа найден многомерный аналог формулы Бернулли 0.3, в котором сумма выражается через интеграл от многочлена Бернулли по параллелотопу с „переменной“ вершиной.

Теорема 3. Пусть конус K — унимодулярный, и точка x лежит на подрешетке Λ решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, \dots, a^n$. Для суммы значений мономов t^μ в целых точках рационального параллелотопа

$$\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} x\}$$

справедлива формула:

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} t^\mu = \int_{\Pi_K(x+a)} B_\mu^A(\tau) d\tau,$$

где $a = a^1 + \dots + a^n$ — вершина фундаментального параллелотопа.

В параграфе 1.4 доказаны свойства сложения, умножения, дополнения и дифференцирования для многочленов Бернулли, ассоциированных с рациональным конусом.

Теорема 4. Справедливы следующие многомерные аналоги свойств (0.4) — (0.7) многочленов Бернулли:

1) Формула сложения аргументов

$$B_\mu^A(x+y) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!} B_k^A(x) y^{\mu-k};$$

2) Формула дифференцирования

$$DB_\mu^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu, \|k\|=n} \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!} B_{\mu-k}^A(x) \frac{M_k}{k!},$$

где $\|k\| = k_1 + \dots + k_n$, M_k — коэффициенты однородного многочлена:

$$\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle = \sum_{\|k\|=n} M_k \frac{\xi^k}{k!};$$

3) *Формула дополнения*

$$B_\mu^A(x) = (-1)^{\|\mu\|} B_\mu^A(a - x),$$

где $a = a^1 + \dots + a^n$, $\|\mu\| = \mu_1 + \dots + \mu_n$;

4) *Формула умножения аргумента*

$$B_\mu^A(mx) = m^{\mu-I} \sum_{0 \leq k \leq \mu-I} B_\mu^A\left(x + \frac{1}{m}Ak\right),$$

где $I = (1, \dots, 1)$, $\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right)$ — вектор-строка, $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец.

Вторая глава посвящена суммированию функций нескольких дискретных аргументов. Прежде чем формулировать постановку задачи, приведем некоторые сведения о классической задаче суммирования функций одной переменной.

Задача суммирования функций одного аргумента состоит в отыскании для заданной функции $\varphi(t)$ суммы ее значений в целых точках отрезка $[0, x]$:

$$S(x) = \sum_{t=0}^x \varphi(t). \quad (0.8)$$

По аналогии с задачей интегрирования функций сумму в правой части равенства 0.8 можно назвать суммой с переменным „верхним пределом суммирования“, а задачу отыскания суммы $S(x)$ — *задачей неопределенного суммирования* (см., например, [22], [42]). Сумму 0.8 можно найти, зная решение $f(x)$ разностного уравнения

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x), \quad (0.9)$$

т.к. в этом случае $S(x) = f(x+1) - f(0)$, т.е. выражается через значения f в концах отрезка $[0, x+1]$.

Функцию $f(x)$ называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$, а формулу $S(x) = f(x+1) - f(0)$ — *дискретным аналогом формулы Ньютона – Лейбница*.

Эйлер нашел формулу, в которой производная решения $f(x)$ разностного уравнения 0.9 выражается через производные от функции $\varphi(t)$ и числа Бернулли

$$f'(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu}}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(x). \quad (0.10)$$

После интегрирования равенства 0.10 по промежутку от 0 до $x+1$ получим формулу, которая решает задачу суммирования:

$$\sum_{t=0}^x \varphi(t) = \int_0^{x+1} \varphi(t) dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{b_{\mu}}{\mu!} \left[\varphi^{(\mu-1)}(x+1) - \varphi^{(\mu-1)}(0) \right]. \quad (0.11)$$

Независимо от Эйлера эту формулу нашел и Маклорен (1742). Их вывод формулы был не строгим, первое серьезное исследование остаточного члена предпринял Пуассон (1823), а первое строгое доказательство формулы дал Якоби (1834) ([34]). Среди современных работ, посвященных формулам суммирования, отметим работы [19] и [20], в которых рассматриваются дискретные аналоги формул суммирования Эйлера и Пуассона.

В диссертационной работе рассматривается задача отыскания суммы значений функций нескольких переменных $\varphi(t)$ по всем целым точкам $t = (t_1, \dots, t_n)$, принадлежащим рациональному параллелотопу с „переменной“ вершиной x .

Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq_K t \leq_K x\}$, построенный на образующих рационального конуса. Рациональность означает, что вершины параллелотопа имеют целые координаты. Для заданной функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ *задача состоит в отыскании суммы* ее значений по всем целочисленным точкам параллелотопа $\Pi_K(x)$:

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t). \quad (0.12)$$

По аналогии со случаем одного переменного такую задачу также назовем *задачей неопределенного суммирования*.

В параграфе 2.1 для случая унимодулярного рационального конуса реализован подход Эйлера к задаче суммирования, основанный на понятии дискретной первообразной функции. А именно, используя методы теории многомерных разностных уравнений, вводится понятие дискретной первообразной, и доказывается дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница.

Дискретной первообразной функции $\varphi(y)$, $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ называется всякое решение разностного уравнения $Q(\delta)f(y) = \varphi(y)$, $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$, где $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$.

Для любой точки $y \in K$ обозначим $\pi_j y$ ее проекцию вдоль вектора a^j , т.е. для $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, где $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, положим

$$\pi_j y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_{j-1} a^{j-1} + \lambda_{j+1} a^{j+1} + \dots + \lambda_n a^n.$$

Пусть V — множество всех 2^n упорядоченных наборов

$$J = (j_1, \dots, j_k) \subset \{1, \dots, n\},$$

включая и пустое множество. Если обозначить

$$\pi_J = \pi_{j_1} \circ \dots \circ \pi_{j_k},$$

то множество вершин параллелотопа $\Pi_K(x)$ можно записать в виде $vert(x) = \{\pi_J x, J \in V\}$. Отметим, что $\pi_\emptyset x = x$.

Теорема 5. Пусть K унимодулярный рациональный конус, тогда для любой дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлив следующий дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница:

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + a)),$$

где $\#J$ означает число элементов множества J .

В параграфе 2.2 получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для задачи суммирования целых функций экспоненциального типа по целым точкам рациональных параллелотопов. Получена формула для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа, построенного на образующих унимодулярного конуса. С помощью методов теории дифференциальных операторов бесконечного порядка построен необходимый для многомерного аналога формулы Эйлера – Маклорена оператор Тодда и обоснована сходимость функционального ряда, который участвует в этой формуле.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $|z| = |z_1| + \dots + |z_n|$.

Для фиксированного $R > 0$ и произвольного $r < R$ обозначим через $Exp_R(\mathbb{C}^n)$ пространство целых функций экспоненциального типа $\varphi(z)$ таких, что для некоторого $M > 0$ и любого $r < R$ справедливо равенство

$$|\partial^\alpha \varphi(z)| \leq M r^{|\alpha|} e^{r|z|}$$

для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $z \in \mathbb{C}^n$. Здесь $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

В следующей теореме приведен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной функции $\varphi(z)$.

Теорема 6. Пусть $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$, тогда всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения

$$Df(z) = Td^A(\partial)\varphi(z), \quad (0.13)$$

является дискретной первообразной для функции $\varphi(z)$.

После интегрирования равенства 0.13 по параллелотопу $\Pi_K(x+a)$ с „переменной“ вершиной $x+a$, где $a = a^1 + \dots + a^n$ получим формулу для суммы значений функций в целых точках рационального параллелотопа.

Теорема 7. Справедлива следующая формула

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \int_{\Pi_K(x+a)} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \partial^\mu \varphi(t) dt. \quad (0.14)$$

В параграфе 2.3 в отличие от 2.2 рассматривается случай, когда уни-модулярность конуса не требуется. Доказан дискретный вариант формулы Ньютона – Лейбница для задачи суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа, и для функций экспоненциального типа получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной. Кроме того, решена задача суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа.

Для заданных векторов $a^1, \dots, a^n$ обозначим

$$\Pi_a = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} a \right\},$$

где $a = a^1 + \dots + a^n$. Параллелотоп Π_a назовем фундаментальным.

Нам потребуется следующее преобразование векторов

$$v = \xi_1 a^1 + \dots + \xi_n a^n,$$

заданных в базисе $a^1, \dots, a^n$ координатами $(\xi_1, \dots, \xi_n)$:

$$\chi_a(v) = \sum_k \chi(\xi_k) a^k,$$

где

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = 0; \\ 0, & \xi \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 8. Пусть точка $x \in \Lambda$ и $f(t)$ — дискретная первообразная функции $\varphi(t)$, тогда справедлив следующий дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница:

$$S(x) := \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(v + \pi_J(x + \chi_a(v))),$$

где $\#J$ означает число элементов множества J .

После интегрирования равенства 0.13 по параллелотопу

$$\Pi_K^v(x) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : v \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} v + x + \chi_a(v) \right\}$$

получим следующую формулу для суммы (0.12) .

Теорема 10. *Справедлива формула вида*

$$S(x) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \int_{\Pi_K^v} T d^A(\partial) \varphi(t) dt.$$

В параграфе 2.4 методы теории дифференциальных операторов бесконечного порядка использованы для определения дискретной первообразной и обобщения формулы Эйлера – Маклорена на случай суммирования по симплексу, т.е к задаче отыскания суммы вида

$$S(x) = \sum_{\|t\| \leq x} \varphi(t),$$

где $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\|t\| = t_1 + \dots + t_n$, и суммирование ведется по целым точкам n -мерного симплекса $\{t \in \mathbb{R}_+^n : \|t\| \leq x\}$. Этот случай оказался сложнее случая суммирования по параллелотопу и решить задачу удалось только для функций вида $\varphi(t) = \psi(\|t\|)$, где $\psi(\tau)$ — функция одного переменного, для которой сумма имеет вид

$$S(x) = \sum_{\|t\| \leq x} \varphi(x - \|t\|). \quad (0.15)$$

В качестве дискретной первообразной рассматривается решение $f(x)$ разностного уравнения

$$(\delta - 1)^n f(x) = \psi(x),$$

а аналогом оператора Тодда является оператор

$$A\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{\frac{d^n}{dx^n}}{\left(e^{\frac{d}{dx}} - 1\right)^n}.$$

Теорема 12. Если $\varphi(z) \in \text{Exp}_{2\pi}(\mathbb{C})$, то для суммы (0.15) справедлива формула

$$S(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{b_{\mu}(n)}{\mu!} P_{n-\mu} \varphi(x+n) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu+n}(n)}{(\mu+n)!} D^{\mu} \varphi(x+n), \quad (0.16)$$

где $b_{\mu}(n) = \sum_{\|k\|=\mu} \frac{\|k\|!}{k!} b_k^*$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k! = k_1! \dots k_n!$, $b_k^* = b_{k_1} \cdot \dots \cdot b_{k_n}$, а b_{k_j} — классические числа Бернулли, D — оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$, и $P_{n-\mu}$ — первообразная порядка $n - \mu$.

Глава 1

Многочлены Бернулли от нескольких переменных, их свойства

Приведем некоторые сведения о числах и многочленах Бернулли от одной переменной.

Числа Бернулли b_μ — это коэффициенты разложения функции $T(\xi) = \frac{\xi}{e^\xi - 1}$ в ряд Тейлора в точке $\xi = 0$:

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} b_\mu \frac{\xi^\mu}{\mu!}.$$

Числа Бернулли были впервые использованы Я. Бернулли (1654-1705) [25] в связи с задачей суммирования степеней последовательных натуральных чисел: $1^\mu + 2^\mu + \dots + x^\mu$.

Многочлены Бернулли можно определить следующим образом

$$B_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\mu} C_\mu^k b_{\mu-k} x^k, \quad C_\mu^k = \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!},$$

где $b_\mu = B_\mu(0)$ — числа Бернулли. Для натурального x многочлены $B_\mu(x)$ рассматривал Я. Бернулли (1713), а для произвольного x эти многочлены впервые изучал Эйлер [32], который в 1738 году использовал для этого

производящую функцию:

$$\frac{\xi}{e^\xi - 1} e^{x\xi} = \sum_{\mu \geq 0} B_\mu(x) \frac{\xi^\mu}{\mu!}.$$

Также полиномы Бернулли изучал J. L. Raabe (1801-1859) [44], который нашел для них две важные формулы и ввел термин многочлены Бернулли (J. L. Raabe, 1851). Полиномы Бернулли и Эйлера позднее изучались Nörlund [41].

Числа Бернулли широко используются в комбинаторном [36], [16], [45] и численном анализе [33]. Gould [35] заметил, что для многих сумм, содержащих биномиальные коэффициенты, использование чисел Бернулли дает существенное улучшение формул. Различным обобщениям чисел и многочленов Бернулли посвящено большое количество работ [30], [29], [31], [37], [46], [48] из различных областей математики. В частности, Temme [47] вводит обобщенные многочлены Бернулли, у которых степени комплекснозначные.

В 1880 Appell (1855-1930) [23] охарактеризовал последовательности многочленов $B_\mu(x)$ свойством $DB_\mu(x) = \mu B_{\mu-1}(x)$. Многочлены, удовлетворяющие этому свойству, называют многочленами Аппеля. Для многочленов Бернулли эту формулу можно назвать формулой дифференцирования.

Эйлер впервые определил дифференциальный оператор бесконечного порядка $\frac{D}{e^D - 1} = \sum_{\mu \geq 0} b_\mu \frac{D^\mu}{\mu!}$, где D — оператор дифференцирования, этот оператор сейчас называют оператором Тодда и обозначают $Td(D)$. Этот оператор устанавливает связь между решением разностного уравнения $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$ и дифференциального $Df(x) = Td(D)\varphi(x)$. Многочлены Бернулли можно представить как действие оператора Тодда на моном x^μ :

$$B_\mu(x) = \frac{D}{e^D - 1} x^\mu.$$

Основное свойство многочленов Бернулли состоит в том, что они удовлетворяют разностному уравнению

$$B_\mu(x+1) - B_\mu(x) = \mu x^{\mu-1} \equiv (x^\mu)', \quad (1.17)$$

и поэтому многочлены Бернулли играют в исчислении конечных разностей ту же роль, что и степенные функции в дифференциальном исчислении.

Из соотношения 1.17 сразу получается формула Бернулли для суммы степеней последовательных натуральных чисел:

$$\sum_{t=0}^x t^\mu = \frac{1}{\mu+1} [B_{\mu+1}(x+1) - B_{\mu+1}(0)]. \quad (1.18)$$

Интегрируя 1.17 по отрезку $[0, x]$ можно получить другое выражения для искомой суммы:

$$\sum_{t=0}^x t^\mu = \int_0^{x+1} B_\mu(t) dt, \quad (1.19)$$

в которой она выражается через интеграл от многочлена Бернулли.

Числа и многочлены Бернулли хорошо изучены, нашли широкое применение в различных областях теоретической и прикладной математики. ([1], [7])

Суммированию функций нескольких переменных по целым точкам рациональных многогранников посвящены работы [27], [28], [24], [51], [52], в которых получены различные варианты формулы Эйлера-Маклорена. В [27], [28], [24] решается задача суммирования многочлена нескольких переменных, но не определяются понятие многочлена Бернулли и аналогов формул 1.18, 1.19 в этих работах нет.

Для многочленов Бернулли справедливы следующие свойства.

Формула сложения аргументов

$$B_\mu(x+y) = \sum_{k=0}^{\mu} C_{\mu}^k B_k(x) y^{\mu-k}; \quad (1.20)$$

формула дифференцирования

$$B'_\mu(x) = \mu B_{\mu-1}(x); \quad (1.21)$$

формула дополнения

$$B_\mu(x) = (-1)^\mu B_\mu(1-x); \quad (1.22)$$

формула умножения аргумента

$$B_{\mu}(mx) = m^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\mu-1} B_{\mu} \left(x + \frac{k}{m} \right). \quad (1.23)$$

В **первой главе** диссертационной работы рассматривается некоторое обобщение чисел Бернулли и многочленов Бернулли на случай нескольких переменных, а именно, определяются числа Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, и соответствующие им многочлены Бернулли, доказывается, что многочлены Бернулли есть результат действия оператора Тодда на мономы, и доказано основное свойство многочленов Бернулли, получены формулы сложения, умножения, дополнения и дифференцирования. Вычислен интеграл от многочленов Бернулли по рациональному параллелотопу и найдена сумма мономов в целых точках рационального параллелотопа

В **параграфе 1.1** вводятся определения чисел Бернулли и многочленов Бернулли, ассоциированных с рациональным конусом. Для функций нескольких переменных строится оператор Тодда $Td^A(\partial) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \partial \rangle}{e^{\langle a^j, \partial \rangle} - 1}$, ассоциированный с конусом K , и доказывается, что многочлены Бернулли есть результат действия оператора Тодда на мономы.

В **параграфе 1.2** строится полиномиальный разностный оператор вида, действующий на функциях, определенных в рациональном конусе, и операторы дифференцирования по направлению векторов, и методами теории производящих функций (см. [7], [17]) доказывается многомерный аналог основного свойства, состоящего в том, что многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению.

В **параграфе 1.3** вычислен интеграл от многочленов Бернулли по рациональному параллелотопу, и для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа найден многомерный аналог формулы Бернулли 1.19, в которой сумма выражается через интеграл от многочлена Бернулли по параллелотопу с „переменной“ вершиной.

В **параграфе 1.4** доказаны свойства сложения, умножения, дополнения и дифференцирования для многочленов Бернулли, ассоциированных с рациональным конусом.

1.1 Оператор Тодда, числа Бернулли и многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом

В данном параграфе вводятся определения чисел и многочленов Бернулли, ассоциированных с рациональным конусом. Для функций нескольких переменных строится оператор Тодда, ассоциированный с конусом K , и доказывается, что многочлены Бернулли есть результат действия оператора Тодда на мономы.

Многомерный аналог, введенного Эйлером оператора бесконечного порядка $\frac{D}{e^D - 1}$, называется оператором Тодда (см., например, [39]). Оператор Тодда [43] помог установить замечательную связь между объемами и количеством целых точек в выпуклых многогранниках. Эта формула тесно связана с теоремой Хирцебруха-Римана-Роха для гладких проективных торических многообразий. Отметим также работы [27], [28], [49], [24] в которых рассматривается оператор вида $\frac{D_1}{e^{a_1 D_1} - 1} \cdots \frac{D_n}{e^{a_n D_n} - 1}$, где a_j — некоторые константы.

Определим теперь числа, многочлены Бернулли и оператор Тодда, ассоциированные с рациональным конусом K . Пусть $a^1, \dots, a^n$ линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — целые числа. Рациональным конусом, построенным на векторах $a^1, \dots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}$.

Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие *единственным* образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим*, т. е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\geq_K$ следующим образом:

$$u \geq_K v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v . Кроме того, будем писать $u \not\geq_K v$, если $u \in K \setminus \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \geq_K v$ не выполняется. Обозначим $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$, и отметим, что любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно предста-

вить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ — вектора-столбцы, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Для $j = 1, \dots, n$ рассмотрим гиперплоскости

$$L_{j,k} = \{ \xi : \langle a^j, \xi \rangle = 2k\pi i \},$$

где i — мнимая единица, $j = 1, \dots, n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и отметим, что для мероморфной функции

$$T(\xi) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1},$$

где $\langle a^j, \xi \rangle = \sum_{k=1}^n a_k^j \xi_k$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, гиперплоскости $L_{j,0}$, $j = 1, \dots, n$, являются "устраняемыми" особыми множествами, поэтому функция $T(\xi)$ голоморфна в некоторой окрестности начала координат, точнее для

$$R = 2\pi / \max_j \|a^j\|$$

она голоморфна в полицилиндре

$$U_R = \{ \xi : |\xi_j| < R, j = 1, \dots, n \},$$

а гиперплоскости $L_{j,k}$ для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ не пересекаются с полицилиндром U_R . Следовательно, функция $T(\xi)$ разлагается в этом полицилиндре в ряд

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \xi^\mu, \quad (1.24)$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu! = \mu_1! \dots \mu_n!$, $\xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_n^{\mu_n}$, а $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Коэффициенты b_μ^A ряда (1.24) назовем *числами Бернулли, ассоциированными с рациональным конусом K* .

Для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ многочленами Бернулли, ассоциированными с рациональным конусом K , назовем многочлены вида

$$B_\mu^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{(\mu - k)!k!} b_{\mu-k}^A x^k,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\mu - k = (\mu_1 - k_1, \dots, \mu_n - k_n)$, b_k^A — числа Бернулли.

Для $n = 1$ и $a = 1$ определенные нами числа и многочлены Бернулли совпадают с классическими.

Пример. Для конуса K , порожденного векторами $a^1 = (1, 0)$ и $a^2 = (1, 1)$, несколько первых чисел Бернулли равны: $b_{00} = 1$, $b_{10} = -1$, $b_{01} = -\frac{1}{2}$, $b_{11} = \frac{5}{12}$, а для $\mu = (1, 1)$ многочлен Бернулли имеет вид $B_{11}^A(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1 - x_2 + \frac{5}{12}$.

Отображением Тодда назовем мероморфную функцию $Td^A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, определяемую равенством $Td^A(\xi) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1}$. Она раскладывается в ряд $Td^A(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \xi^\mu$, и оператором Тодда является результат подстановки оператора дифференцирования $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ вместо переменных ξ в это разложение:

$$Td^A(\partial) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \partial^\mu,$$

где $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Напомним, что $D_j = \langle a^j, \partial \rangle$ — операторы дифференцирования по направлению вектора a^j , $j = 1, \dots, n$ и $D = D_1 \dots D_n$.

Замечание. В определении чисел, многочленов Бернулли и оператора Тодда рациональность конуса вообще говоря не требуется, т.е. координатами векторов a^j могут быть любые вещественные числа. Однако в задаче суммирования условие рациональности конуса представляется естественным.

Во второй главе диссертационной работы будут описаны пространства функций, на которых оператор Тодда действует корректно, в данном параграфе нам достаточно следующего определения. ([43])

Будем говорить, что *функция h допускает оператор Тодда*, если ряд $Td(\partial)h$ абсолютно сходится в области определения h равномерно на компактных подмножествах. Очевидно, что полиномы допускают оператор Тодда, а для мономов $x^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если $Td^A(\partial)$ — оператор Тодда, а $B_\mu^A(x)$ — многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, то справедливо равенство*

$$Td^A(\partial) x^\mu = B_\mu^A(x)$$

Доказательство. Отметим сначала справедливость равенства

$$\frac{\partial^\alpha x^\mu}{\alpha!} = \frac{\mu!}{\alpha! (\mu - \alpha)!} x^{\mu - \alpha}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\alpha x^\mu}{\alpha!} = \\ &= \frac{\mu_1 (\mu_1 - 1) \dots (\mu_1 - \alpha_1 + 1)}{\alpha_1!} \dots \frac{\mu_n (\mu_n - 1) \dots (\mu_n - \alpha_n + 1)}{\alpha_n!} x^{\mu_1 - \alpha_1} \dots x^{\mu_n - \alpha_n} = \\ &= \frac{\mu!}{\alpha! (\mu - \alpha)!} x^{\mu - \alpha}. \end{aligned}$$

Далее, из определения оператора Тодда и с учетом предыдущего равенства получаем

$$\begin{aligned} Td(\partial) x^\mu &= \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \partial \rangle}{e^{\langle a^j, \partial \rangle} - 1} x^\mu = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{b_\alpha^A}{\alpha!} \partial^\alpha x^\mu = \\ &= \sum_{0 \leq \alpha \leq \mu} b_\alpha^A \frac{\mu!}{\alpha! (\mu - \alpha)!} x^{\mu - \alpha} = \sum_{0 \leq k \leq \mu} b_{\mu - k}^A \frac{\mu!}{k! (\mu - k)!} x^k = B_\mu^A(x). \end{aligned}$$

□

1.2 Основное свойство многочленов Бернулли

В данном параграфе построим разностный оператор, действующий на функциях, определенных на подрешетке целочисленной решетки, порожденной векторами $a^1, \dots, a^n$. Этот оператор позволяет перенести основное свойство классических многочленов Бернулли на случай нескольких переменных.

Для того, чтобы сформулировать многомерный вариант основного свойства 1.17 многочленов Бернулли нам потребуются некоторые понятия и обозначения из теории многомерных разностных уравнений. (см., например, [11], [14], [38])

На комплекснозначных функциях $f(y)$ целочисленных аргументов $y = (y_1, \dots, y_n)$ определим оператор δ_j сдвига по j -ой переменной $\delta_j f(y) = f(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j + 1, y_{j+1}, \dots, y_n)$ и обозначим $P(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega$ — полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами c_ω , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in K \cap \mathbb{Z}^n$, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \dots \delta_n^{\omega_n}$. Здесь Ω — конечное множество точек из $K \cap \mathbb{Z}^n$. Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(y)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta) f(y) = \varphi(y), y \in K \cap \mathbb{Z}^n.$$

Полиномиальные разностные операторы $P_1(\delta)$, $P_2(\delta)$ с постоянными коэффициентами перестановочны, т.е $P_1(\delta) P_2(\delta) = P_2(\delta) P_1(\delta)$.

Далее нам потребуется полиномиальный разностный оператор, который удобно записать в виде $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$, где $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\delta^{a^j} = \delta_1^{a_1^j} \dots \delta_n^{a_n^j}$. Кроме того, рассмотрим операторы дифференцирования по направлению векторов a^j

$$D_j = \langle a^j, \partial \rangle = \sum_{k=1}^n a_k^j \partial_k,$$

где ∂_j — операторы дифференцирования по j -ой переменной, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}$ $j = 1, \dots, n$. Обозначим $D = D_1 \dots D_n$.

Теорема 2. *Многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным ко-*

нусом K , удовлетворяют разностному уравнению

$$Q(\delta) B_\mu^A(x) = Dx^\mu. \quad (1.25)$$

Для $n = 1$ и $a = 1$ уравнение 1.25 совпадает с 1.17.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся методами теории производящих функций.

Производящим рядом (функцией) кратной последовательности $f(\mu)$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^n$ будем называть степенной ряд вида $F(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} f(\mu) \frac{\xi^\mu}{\mu!}$.

Производящую функцию для последовательности многочленов Бернулли $B_\mu^A(x)$ обозначим $F(x; \xi)$, т.е.

$$F(x; \xi) := \sum_{\mu \geq 0} B_\mu^A(x) \frac{\xi^\mu}{\mu!}. \quad (1.26)$$

Покажем, что как и для $n = 1$ многочлены Бернулли являются коэффициентами разложения в степенной ряд некоторой мероморфной функции.

Лемма 1. *Производящий ряд (функция) 1.26 для многочленов Бернулли сходится для любого x и его сумма равна*

$$F(x; \xi) = T(\xi) e^{\langle x, \xi \rangle} \equiv \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle x, \xi \rangle}, \quad (1.27)$$

где $\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

Доказательство. Функция $\prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1}$ голоморфна и раскладывается в ряд $\sum_{k \geq 0} b_\mu^A \frac{\xi^k}{k!}$ в некотором полицилиндре U_R с центром в точке $\xi = 0$, а функция $e^{\langle x, \xi \rangle}$ для любого x раскладывается в ряд вида

$$e^{\langle x, \xi \rangle} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k \xi^k}{k!}.$$

Перемножим эти ряды

$$T(\xi) e^{\langle x, \xi \rangle} = \sum_{\mu \geq 0, k \geq 0} b_\mu^A x^k \frac{\xi^{\mu+k}}{\mu! k!},$$

и после перегруппировки полученного ряда с учетом определения многочленов Бернулли найдем

$$T(\xi) e^{\langle x, \xi \rangle} = \sum_{\mu \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{(\mu - k)! k!} b_{\mu - k}^A x^k \right) \frac{\xi^\mu}{\mu!} = \sum_{\mu \geq 0} B_\mu^A(x) \frac{\xi^\mu}{\mu!} = F(x; \xi).$$

□

В следующей лемме показано, как разностный оператор $Q(\delta)$ и дифференциальный D действуют по переменной x на производящую функцию $F(x; \xi)$ многочленов Бернулли.

Лемма 2. *Для производящей функции 1.27 многочленов Бернулли справедливы следующие равенства*

$$Q(\delta) F(x; \xi) = \prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle e^{\langle x, \xi \rangle},$$

$$Q(\delta) F(x; \xi) = D e^{\langle x, \xi \rangle},$$

где операторы $Q(\delta)$ и D действуют по переменной x .

Доказательство. Так как

$$(\delta^{a^j} - 1) e^{\langle x, \xi \rangle} = (e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1) e^{\langle x, \xi \rangle}$$

и

$$Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1),$$

то

$$Q(\delta) e^{\langle x, \xi \rangle} = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1) e^{\langle x, \xi \rangle} = \prod_{j=1}^n (e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1) e^{\langle x, \xi \rangle}.$$

Тогда

$$Q(\delta) F(x; \xi) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} Q(\delta) e^{\langle x, \xi \rangle} = \prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle e^{\langle x, \xi \rangle},$$

и так как

$$D_j e^{\langle x, \xi \rangle} = \langle a^j, \xi \rangle e^{\langle x, \xi \rangle},$$

то

$$De^{\langle x, \xi \rangle} = \prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle e^{\langle x, \xi \rangle}.$$

□

Доказательство теоремы 2. По лемме 1 производящая функция (ряд) $F(x; t) := \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}$ для многочлена Бернулли сходится. Применяя разностный оператор $Q(\delta)$ по переменной x , получим

$$Q(\delta) F(x; t) = \sum_{\mu \geq 0} Q(\delta) B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}.$$

Согласно лемме 2 имеем $Q(\delta) F(x; t) = De^{\langle x, \xi \rangle}$, а значит

$$De^{\langle x, \xi \rangle} = \sum_{\mu \geq 0} Q(\delta) B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}.$$

Разлагая функцию $e^{\langle x, \xi \rangle}$ в ряд, получим тождество

$$D \sum_{\mu \geq 0} \frac{x^{\mu} \xi^{\mu}}{\mu!} = \sum_{\mu \geq 0} Q(\delta) B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!},$$

из которого после приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ следует утверждение теоремы. □

1.3 Аналог формулы Бернулли для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа

Сформулируем общую задачу суммирования функций по целым точкам рационального конуса. Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq x\}$, построенный на образующих конуса K . Рациональность означает, что вершины параллелотопа имеют целые координаты. Для заданной функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ задача состоит в отыскании суммы ее значений по всем целочисленным

нам точкам параллелотопа $\Pi_K(x)$ с „переменной“ вершиной x :

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t). \quad (1.28)$$

В данной параграфе нас интересует случай, когда $\varphi(t) = t^\mu$. Введем необходимые определения и обозначения.

Для любой точки $x \in K$ обозначим $\pi_j x$ ее проекцию вдоль вектора a^j , т.е. если $x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, то $\pi_j x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_{j-1} a^{j-1} + \lambda_{j+1} a^{j+1} + \dots + \lambda_n a^n$.

Пусть ν — множество всех 2^n наборов $J = (j_1, \dots, j_k) \subset \{1, \dots, n\}$, включая и пустое множество. Если обозначить $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \dots \circ \pi_{j_k}$, то множество вершин параллелотопа можно записать в виде $V(x) = \{\pi_J x, J \in \nu\}$. Отметим, что $\pi_\emptyset x = x$.

Обозначим $\Lambda = \{y \in \mathbb{Z}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$ подрешетка решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, \dots, a^n$. Обозначим Π_a — фундаментальный параллелотоп $\Pi_a = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq_K t \leq_K a \right\}$, где $a = a^1 + \dots + a^n$. Отметим, что множество точек с целыми координатами, лежащих в фундаментальном параллелотопе Π_a конечно и равно $d(\Lambda)$ — индексу подрешетки Λ в решетке $\mathbb{Z}^n$, кроме того, $d(\Lambda) = \Delta$. (см., например, [6])

Конус, построенный на таких векторах $a^1, \dots, a^n$, что определитель матрицы A , столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1, называется *унимодулярным конусом*.

Для унимодулярного конуса K и функции $f(x)$, которая является решением разностного уравнения $Q(\delta)f(x) = \varphi(x)$, в параграфе 2.1 доказано (теорема 5), что для суммы 1.28 справедлива формула

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + a)), \quad x \in K \cap \mathbb{Z}^n, \quad (1.29)$$

где $\#J$ означает число элементов множества J , $a = a^1 + \dots + a^n$.

Формула 1.29 означает, что искомая сумма 1.28 выражается через значения решения $f(x)$ разностного уравнения в вершинах $V(x + a)$ параллелотопа $\Pi_K(x + a)$.

В частности, в силу теоремы 2 многочлен Бернулли $B_\mu^A(x)$ удовлетво-

ряет разностному уравнению $Q(\delta) B_\mu^A(x) = Dx^\mu$, поэтому по формуле 1.29 для $\varphi(x) = Dx^\mu$ получим выражение для суммы значений „производной“ Dt^μ монома t^μ в целых точках рационального параллелотопа

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} Dt^\mu = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\#J} B_\mu^A(\pi_J(x+a)).$$

Эту формулу можно рассматривать как многомерный аналог формулы Бернулли 1.18.

Для отыскания суммы 1.28 в случае, когда $\varphi(t) = t^\mu$, нужно „проинтегрировать“ последнюю формулу, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть K — унимодулярный конус, точка x лежит на подрешетке Λ решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, \dots, a^n$. Для суммы значений мономов t^μ в целых точках рационального параллелотопа $\Pi_K(x)$ справедлива формула:

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} t^\mu = \int_{\Pi_K(x+a)} B_\mu^A(\tau) d\tau. \quad (1.30)$$

Отметим, что при $n = 1$ и $a = 1$ из 1.30 получаем формулу Бернулли 1.19.

Обозначим $\Pi_K(x; x+a) = \{t \in \mathbb{R}^n : x \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} x+a\}$ — сдвиг фундаментального параллелотопа Π_a на вектор x .

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая лемма, причем унимодулярность конуса в ней не предполагается.

Лемма 3. Пусть $x \in \Lambda$, $\Delta = \det A$, $B_\mu^A(\tau)$ — многочлены Бернулли, тогда для любого $J \in \nu$ справедливо равенство

$$\int_{\Pi_K(\pi_J t; \pi_J t+a)} B_\mu^A(\tau) d\tau = \Delta (\pi_J t)^\mu, \mu \geq 0,$$

и, в частности, для $J = \emptyset$

$$\frac{1}{\Delta} \int_{\Pi_K(t; t+a)} B_\mu^A(\tau) d\tau = t^\mu. \quad (1.31)$$

Доказательство. Воспользуемся доказанным в лемме 1 равенством справедливым для любых τ

$$\sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(\tau) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle \tau, \xi \rangle}. \quad (1.32)$$

Для $J \in \nu$ проинтегрируем 1.32 по параллелотопу $\Pi_K(\pi_J t; \pi_J t + a)$, получим

$$\sum_{\mu \geq 0} \int_{\Pi_K(\pi_J t; \pi_J t + a)} B_{\mu}^A(\tau) d\tau \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} \int_{\Pi_K(\pi_J t; \pi_J t + a)} e^{\langle \tau, \xi \rangle} d\tau. \quad (1.33)$$

Непосредственно проверяется, что

$$\int_{\Pi_K(\pi_J t; \pi_J t + a)} e^{\langle \tau, \xi \rangle} d\tau = \Delta \prod_{j=1}^n \frac{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1}{\langle a^j, \xi \rangle} e^{\langle \pi_J t, \xi \rangle}, \quad (1.34)$$

поэтому после разложения функции $e^{\langle \pi_J t, \xi \rangle}$ в ряд по переменной ξ и подстановки полученного для интеграла выражения 1.34 в 1.33, получим

$$\sum_{\mu \geq 0} \int_{\Pi_K(\pi_J t; \pi_J t + a)} B_{\mu}^A(\tau) d\tau \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \Delta \sum_{\mu \geq 0} (\pi_J t)^{\mu} \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , убедимся в справедливости утверждения леммы 3. $\square$

Формула 1.31 означает, что интеграл от многочлена Бернулли $B_{\mu}^A(t)$ по сдвигам $\Pi_K(t; t + a)$ фундаментального параллелотопа Π_a выражается через значение монома в вершине t параллелотопа $\Pi_K(t)$.

Доказательство теоремы 3. Т.к. для унимодулярного конуса определитель $\Delta = 1$, то просуммировав равенство 1.31 по целым точкам $t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n$, получим

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} t^{\mu} = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \int_{\Pi_K(t; t+a)} B_{\mu}^A(\tau) d\tau.$$

Так как $\Pi_K(x+a) = \bigcup_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \Pi_K(t, t+a)$, то из свойства аддитивности интеграла следует утверждение теоремы. $\square$

Пример. Для унимодулярного конуса K , порожденного векторами $a^1 = (1, 0)$ и $a^2 = (1, 1)$, параллелограмм $\Pi_K(x)$ для $x = (x_1, x_2) \in K$ можно задать неравенствами $0 \leq t_1 - t_2 \leq x_1 - x_2$, $0 \leq t_2 \leq x_2$, а сумма значений монома $t_1^{\mu_1} t_2^{\mu_2}$ по его целым точкам (для $\mu_1 = \mu_2 = 1$) согласно формуле 1.30 после вычисления интеграла равна

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) = & \sum_{0 \leq t_1 - t_2 \leq x_1 - x_2, 0 \leq t_2 \leq x_2} t_1 t_2 = \frac{5}{12} (x_1 - x_2 + 1) (x_2 + 1) - \\ & - \frac{1}{4} (x_1 - x_2 + 1)^2 (x_2 + 1) - \frac{3}{4} (x_1 - x_2 + 1) (x_2 + 1)^2 + \\ & + \frac{1}{3} (x_1 - x_2 + 1) (x_2 + 1)^3 + \frac{1}{4} (x_1 - x_2 + 1)^2 (x_2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки получим, что искомая сумма равна

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{12} (3x_1 x_2^2 - 2x_1 x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2 - 2x_2^3 - x_2^4 + 5x_1 x_2 + 3x_1^2 x_2 + 2x_2 + x_2^2). \end{aligned}$$

1.4 Формулы сложения, умножения, дополнения и дифференцирования для многочленов Бернулли от нескольких переменных

Для формулировки аналога свойства дифференцирования для многочленов Бернулли $B_\mu^A(x)$ нам потребуются операторы дифференцирования по направлениям векторов a^j , по которым построен конус K :

$$D_j = \langle a^j, \partial \rangle = \sum_{k=1}^n a_k^j \partial_k,$$

где ∂_j — операторы дифференцирования по j -ой переменной, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}$ $j = 1, \dots, n$. Кроме того, обозначим $D = D_1 \dots D_n$.

Теорема 4. *Справедливы следующие многомерные аналоги свойств*

(1.20) – (1.23) многочленов Бернулли:

1) Формула сложения аргументов

$$B_{\mu}^A(x+y) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!} B_k^A(x) y^{\mu-k};$$

2) Формула дифференцирования

$$DB_{\mu}^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu, \|k\|=n} \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!} B_{\mu-k}^A(x) \frac{M_k}{k!},$$

где M_k — коэффициенты однородного многочлена:

$$\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle = \sum_{\|k\|=n} M_k \frac{\xi^k}{k!};$$

3) Формула дополнения

$$B_{\mu}^A(x) = (-1)^{\|\mu\|} B_{\mu}^A(a-x),$$

где $a = a^1 + \dots + a^n$, $\|\mu\| = \mu_1 + \dots + \mu_n$;

4) Формула умножения аргумента

$$B_{\mu}^A(mx) = m^{\mu-I} \sum_{0 \leq k \leq \mu-I} B_{\mu}^A\left(x + \frac{1}{m} Ak\right),$$

где $I = (1, \dots, 1)$, $\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right)$ — вектор-строка, $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец.

Доказательство. Для доказательства теоремы удобнее использовать определение многочленов Бернулли с помощью производящих функций (см. лемму 1, параграф 1.2):

$$\prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle x, \xi \rangle} = \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!},$$

где $\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

1) Докажем формулу сложения аргументов. Воспользуемся определением многочленов Бернулли через производящую функцию:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(x+y) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} &= \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle x+y, \xi \rangle} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle x, \xi \rangle} e^{\langle y, \xi \rangle} = \\ &= \sum_{k \geq 0} B_k^A(x) \frac{\xi^k}{k!} \sum_{\alpha \geq 0} y^{\alpha} \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!}. \end{aligned}$$

После перемножения степенных рядов и приведения подобных получим

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(x+y) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} &= \sum_{\mu \geq 0} \left(\sum_{k+\alpha=\mu} \frac{\mu!}{k! \alpha!} B_k^A(x) y^{\alpha} \right) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \\ &= \sum_{\mu \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!} B_k^A(x) y^{\mu-k} \right) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}. \end{aligned}$$

Осталось приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ξ .

2) Доказательство формулы дифференцирования. Применим оператор дифференцирования D к обеим частям равенства

$$\sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle x, \xi \rangle},$$

и, учитывая (см. лемму 2, параграф 1.2), что $D e^{\langle x, \xi \rangle} = e^{\langle x, \xi \rangle} \prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle$, получим

$$\sum_{\mu \geq 0} D B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle x, \xi \rangle} \prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle.$$

Обозначим M_k — коэффициенты однородного многочлена $\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle$ при степенях $\frac{\xi^k}{k!}$:

$$\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle = \sum_{\|k\|=n} M_k \frac{\xi^k}{k!},$$

тогда

$$\sum_{\mu \geq 0} DB_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \sum_{\alpha \geq 0} B_{\alpha}^A(x) \frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!} \sum_{\|k\|=n} M_k \frac{\xi^k}{k!}.$$

Перемножив степенные ряды, имеем

$$\sum_{\mu \geq 0} DB_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \sum_{\mu \geq 0} \left(\sum_{\alpha+k=\mu, \|k\|=n} \frac{\mu!}{k!\alpha!} B_{\alpha}^A(x) M_k \right) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}.$$

После замены индексов и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ξ получим искомое свойство.

3) Доказательство формулы дополнения.

$$\sum_{\mu \geq 0} (-1)^{\|\mu\|} B_{\mu}^A(a-x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(a-x) \frac{(-\xi)^{\mu}}{\mu!} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, -\xi \rangle}{e^{\langle a^j, -\xi \rangle} - 1} e^{\langle a-x, -\xi \rangle} =$$

$$= \prod_{j=1}^n \frac{-\langle a^j, \xi \rangle}{\frac{1}{e^{\langle a^j, \xi \rangle}} - 1} e^{\langle a-x, -\xi \rangle} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{1 - \frac{1}{e^{\langle a^j, \xi \rangle}}} e^{\langle a-x, -\xi \rangle} =$$

$$= \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{\frac{e^{\langle a^j, \xi \rangle}}{e^{\langle a^j, \xi \rangle}} - \frac{1}{e^{\langle a^j, \xi \rangle}}} e^{\langle a-x, -\xi \rangle} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle a^j, \xi \rangle} e^{-\langle a, \xi \rangle} e^{\langle x, \xi \rangle}.$$

Учитывая, что $e^{-\langle a, \xi \rangle} = \prod_{j=1}^n e^{\langle a^j, \xi \rangle}$, получим

$$\sum_{\mu \geq 0} (-1)^{\|\mu\|} B_{\mu}^A(a-x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle a^j, \xi \rangle} e^{-\langle a^j, \xi \rangle} e^{\langle x, \xi \rangle} = \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(x) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ξ и получим формулу дополнения.

4) Доказательство формулы умножения. По определению многочленов Бер-

нулли имеем

$$\sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(mx) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} e^{\langle mx, \xi \rangle}. \quad (1.35)$$

Воспользуемся формулой геометрической прогрессии со знаменателем $e^{\langle a^j, \xi \rangle}$ и получим равенство

$$\frac{1}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} = \frac{1 + e^{\langle a^j, \xi \rangle} + \dots + e^{\langle (m_j-1)a^j, \xi \rangle}}{e^{\langle m_j a^j, \xi \rangle} - 1},$$

подстановка которого в правую часть (1.35) после некоторых преобразований дает

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(mx) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} &= \prod_{j=1}^n \frac{1 + e^{\langle a^j, \xi \rangle} + \dots + e^{\langle (m_j-1)a^j, \xi \rangle}}{e^{\langle m_j a^j, \xi \rangle} - 1} \langle m_j a^j, \xi \rangle m_j^{-1} e^{\langle mx, \xi \rangle} = \\ &= m^{-I} \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, m_j \xi \rangle}{e^{\langle a^j, m_j \xi \rangle} - 1} e^{\langle x, m_j \xi \rangle} \prod_{j=1}^n \left(1 + e^{\langle a^j, \xi \rangle} + \dots + e^{\langle (m_j-1)a^j, \xi \rangle} \right). \end{aligned}$$

Т.к.

$$\prod_{j=1}^n \left(1 + e^{\langle a^j, \xi \rangle} + \dots + e^{\langle (m_j-1)a^j, \xi \rangle} \right) = \sum_{0 \leq k \leq m-I} e^{\langle k_1 a^1 + \dots + k_n a^n, \xi \rangle},$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(mx) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} &= m^{-I} \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, m_j \xi \rangle}{e^{\langle a^j, m_j \xi \rangle} - 1} e^{\langle x, m_j \xi \rangle} \sum_{0 \leq k \leq m-I} e^{\langle k_1 a^1 + \dots + k_n a^n, \xi \rangle} = \\ &= \sum_{0 \leq k \leq m-I} m^{-I} \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, m_j \xi \rangle}{e^{\langle a^j, m_j \xi \rangle} - 1} e^{\langle mx + k_1 a^1 + \dots + k_n a^n, \xi \rangle}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $k_1 a^1 + \dots + k_n a^n = Ak$, где $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ и обозначе-

ния $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$, $\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right)$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A(mx) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} &= \sum_{0 \leq k \leq m-I} m^{-I} \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, m_j \xi \rangle}{e^{\langle a^j, m_j \xi \rangle} - 1} e^{\langle x + \frac{1}{m} Ak, m \xi \rangle} = \\ &= m^{-I} \sum_{0 \leq k \leq m-I} \sum_{\mu \geq 0} B_{\mu}^A \left(x + \frac{1}{m} Ak \right) m^{\mu} \frac{\xi^{\mu}}{\mu!} = \\ &= \sum_{\mu \geq 0} \left(m^{\mu-I} \sum_{0 \leq k \leq m-I} B_{\mu}^A \left(x + \frac{1}{m} Ak \right) \right) \frac{\xi^{\mu}}{\mu!}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты ряда при одинаковых степенях ξ , докажем
нужное нам утверждение □

Глава 2

Многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена

Суммирование функций дискретного аргумента относится к числу классических задач исчисления конечных разностей. Задача суммирования функций состоит в отыскании для заданой функции $\varphi(t)$ суммы ее значений в целых неотрицательных точках отрезка $[0, x]$:

$$S(x) = \sum_{t=0}^x \varphi(t). \quad (2.36)$$

По аналогии с теорией интегрирования функций сумму в правой части равенства 2.36 можно назвать суммой с переменным „верхним пределом суммирования“, а задачу отыскания суммы $S(x)$ — *задачей неопределенного суммирования* (см., например, [22], [42]). Для $\varphi(t) = t^m$ задачу суммирования решил Якоб Бернулли, и эти исследования дали толчок к возникновению целого ряда разделов комбинаторного анализа, связанных с такими понятиями как числа и многочлены Бернулли ([1]). Сумму 2.36 можно найти, зная решение $f(x)$ разностного уравнения

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x), \quad (2.37)$$

т.к. в этом случае $S(x) = f(x+1) - f(0)$, т.е. выражается через значения

f в концах отрезка $[0, x + 1]$.

Функцию $f(x)$ называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$, а формулу $S(x) = f(x + 1) - f(0)$ — *дискретным аналогом формулы Ньютона – Лейбница*.

Эйлер нашел формулу (опубликовано в 1738), в которой производная решения $f(x)$ разностного уравнения 2.37 выражается через производные от функции $\varphi(t)$:

$$f'(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_{\mu}}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(x), \quad (2.38)$$

где B_{μ} — числа Бернулли. После интегрирования равенства 2.38 по промежутку от 0 до $x + 1$ получим формулу, которая решает задачу суммирования:

$$\sum_{t=0}^x \varphi(t) = \int_0^{x+1} \varphi(t) dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{B_{\mu}}{\mu!} \left[\varphi^{(\mu-1)}(x+1) - \varphi^{(\mu-1)}(0) \right]. \quad (2.39)$$

Независимо от Эйлера эту формулу нашел и Маклорен (1742). Их вывод формулы был не строгим, первое серьезное исследование остаточного члена предпринял Пуассон (1823), а первое строгое доказательство формулы дал Якоби (1834) ([34]). Среди современных работ, посвященных формулам суммирования, отметим работы [19] и [20], в которых рассматриваются дискретные аналоги формул суммирования Эйлера и Пуассона.

В последнее время всплеск интереса к задачам суммирования связан с разработкой символьных алгоритмов суммирования рациональных функций в статьях Абрамова С.А [22] и Полякова С.П [42], который использовал для этих задач название „неопределенное суммирование“. В некоторых случаях для суммирования рациональной функции $\varphi(x)$ вместо простейшего разностного уравнения (2.37) целесообразно использовать уравнение более общего вида.

Функцию нескольких дискретных аргументов представляется естественным суммировать по целым точкам рациональных многогранников. Известны аналоги формулы Эйлера – Маклорена в задаче суммирования многочлена по произвольному рациональному многограннику [27], [28], [24].

В диссертационной работе рассматривается задача отыскания суммы

значений функций нескольких переменных $\varphi(t)$ по всем целым точкам $t = (t_1, \dots, t_n)$, принадлежащим рациональному параллелотопу с „переменной“ вершиной x . Приведем необходимые обозначения и определения. Пусть $a^1, \dots, a^n$ — линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$.

Рациональным конусом, порожденным векторами $a^1, \dots, a^n$ назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}$.

Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие *единственным* образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим*, т. е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geqslant} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v . Кроме того, будем писать $u \not\underset{K}{\geqslant} v$, если $u \in K \setminus \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \underset{K}{\geqslant} v$ не выполняется. Любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ — вектора-столбцы, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Конус, построенный на таких векторах $a^1, \dots, a^n$, что определитель матрицы A , столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1, называется *унимодулярным конусом*.

Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} x\}$, построенный на образующих унимодулярного конуса. Рациональность означает, что вершины параллелотопа имеют целые координаты. Для заданной функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ задача состоит в отыскании суммы ее значений по всем целочисленным

точкам параллелотопа $\Pi_K(x)$:

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t). \quad (2.40)$$

По аналогии со случаем одного переменного такую задачу также называют *задачей неопределенного суммирования*.

В **параграфе 2.1** для случая унимодулярного рационального конуса реализован подход Эйлера к задаче суммирования, основанный на понятии дискретной первообразной функции. А именно, используя методы теории многомерных разностных уравнений, вводится понятие дискретной первообразной, и доказывается дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница.

В **параграфе 2.2** получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для задачи суммирования целых функций экспоненциального типа по целым точкам рациональных параллелотопов. Получена формула для суммы значений функций в целых точках рационального параллелотопа, построенного на образующих унимодулярного конуса. Методы теории дифференциальных операторов бесконечного порядка позволяют построить необходимый для многомерного аналога формулы Эйлера – Маклорена оператор Тодда и обосновать сходимость функционального ряда, который участвует в этой формуле.

В **параграфе 2.3** в отличие от 2.2 рассматривается случай, когда унимодулярность конуса не требуется. Доказан дискретный вариант формулы Ньютона-Лейбница для задачи суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа, и для функций экспоненциального типа получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной. Кроме того, решена задача суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа.

В **параграфе 2.4** методы теории дифференциальных операторов бесконечного порядка использованы для определения дискретной первообразной и обобщения формулы Эйлера – Маклорена на случай суммирования по симплексу.

2.1 Дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница в задаче суммирования функций нескольких переменных по рациональному унимодулярному параллелотопу

В параграфе 2.1 для случая унимодулярного рационального конуса реализован подход Эйлера к задаче суммирования, основанный на понятии дискретной первообразной функции. А именно, используя методы теории многомерных разностных уравнений, вводится понятие дискретной первообразной, и доказывается дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница.

Нам потребуются некоторые обозначения и определения из теории многомерных разностных уравнений. *Рациональным конусом*, построенным на векторах $a^1, \dots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}$. На комплекснозначных функциях $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \dots, x_n)$ определим оператор δ_j сдвига по j -ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$ и обозначим $P(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega$ — полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами c_ω , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in K \cap \mathbb{Z}^n$, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \dots \delta_n^{\omega_n}$. Здесь Ω — конечное множество точек из $K \cap \mathbb{Z}^n$. Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta) f(x) = \varphi(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n.$$

Отметим, что уравнения такого вида в случае, когда $K = \mathbb{Z}_+^n$, т.е. конус порожден единичными векторами e^j , $j = 1, \dots, n$, исследовались в работах [26], [8], а случай произвольного рационального конуса рассматривался в [10], [13], [14], [15], [40].

Для реализации подхода Эйлера к задаче суммирования функции $\varphi(t)$ нескольких переменных нужно определить многомерный аналог понятия ее дискретной первообразной. Пусть $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$ и рассмотрим

разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ вида:

$$Q(\delta) f(x) = \varphi(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n.$$

Дискретной первообразной функции $\varphi(x)$, $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ называется всякое решение этого разностного уравнения.

Для любой точки $x \in K$ обозначим $\pi_j x$ ее проекцию вдоль вектора a^j , т.е. если $x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, то $\pi_j x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_{j-1} a^{j-1} + \lambda_{j+1} a^{j+1} + \dots + \lambda_n a^n$.

Пусть V — множество всех 2^n упорядоченных наборов

$$J = (j_1, \dots, j_k) \subset \{1, \dots, n\},$$

включая и пустое множество. Если обозначить $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \dots \circ \pi_{j_k}$, то множество вершин параллелотопа можно записать в виде $vert(x) = \{\pi_J x, J \in V\}$. Отметим, что $\pi_\emptyset x = x$.

Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} x\}$, построенный на образующих унимодулярного конуса. Рациональность означает, что вершины параллелотопа имеют целые координаты. Обозначим Π_a — фундаментальный параллелотоп $\Pi_a = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} a \right\}$, где $a = a^1 + \dots + a^n$.

В следующей теореме утверждается, что для всякой функции $\varphi(x)$ дискретная первообразная существует и для суммы 2.40 справедлив дискретный аналог формулы Ньютона — Лейбница.

Теорема 5. Пусть K — унимодулярный рациональный конус, тогда для любой дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлива следующая формула

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + a)),$$

где $\#J$ означает число элементов множества J .

Если предположить, что дискретная первообразная имеет частные производные нужных порядков, то искомую сумму $S(x)$ можно выразить и через интеграл по параллелотопу.

Предложение 1. Пусть $D_j = \langle a^j, \partial \rangle$ — производные по направлению векторов a^j , тогда для любой дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлива формула

$$\int_{\Pi_K(x+a)} Df(t) dt = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x+a)),$$

где $D = D_1 \dots D_n$, $a dt = dt_1 \dots dt_n$.

Теорему 5 и предложение 1 докажем сначала для случая, когда конус $K = \mathbb{Z}_+^n$, т.е. a^j — единичные векторы. В этом случае суммирование идет по n -мерному параллелепипеду

$$\Pi_K(x) = \Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}_+^n : 0 \leq t_j \leq x_j, j = 1, \dots, n\}$$

и сумму 2.40 можно записать одним из следующих способов:

$$S(x) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \dots \sum_{t_n=0}^{x_n} \varphi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{0 \leq t \leq x} \varphi(t), \quad (2.41)$$

а разностный оператор, участвующий в определении дискретной первообразной, имеет вид $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta_j - 1)$.

Следующее предложение объясняет почему в определении дискретной первообразной участвует разностный оператор $Q(\delta)$.

Предложение 2. Для всякой функции $\varphi(x+I)$ сумма 2.41 является дискретной первообразной, т.е. $Q(\delta) S(x) = \varphi(x+I)$, где $I = (1, \dots, 1)$.

Доказательство. Последовательно действуя операторами $\delta_j - 1$, $j = 1, \dots, n$, на сумму 2.41, получим на первом шаге

$$(\delta_1 - 1) S(x) = S(x + e^1) - S(x) = \sum_{t_2=0}^{x_2} \dots \sum_{t_n=0}^{x_n} \varphi(x_1 + 1, t_2, \dots, t_n).$$

На втором шаге

$$\begin{aligned} (\delta_1 - 1)(\delta_2 - 1) S(x) &= (\delta_2 - 1) \sum_{t_2=0}^{x_2} \dots \sum_{t_n=1}^{x_n} \varphi(x_1 + 1, t_2, \dots, t_n) = \\ &= \sum_{t_3=0}^{x_3} \dots \sum_{t_n=1}^{x_n} \varphi(x_1 + 1, x_2 + 1, t_3, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Продолжая вычисление, на последнем шаге получим

$$\prod_{j=1}^n (\delta_j - 1) S(x) = \varphi(x + I), \quad x \in \mathbb{Z}_+^n. \quad \square$$

Предложение 3. Для любой дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлив следующий дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница:

$$\sum_{0 \leq t \leq x} \varphi(t) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + I)),$$

где $I = (1, \dots, 1)$.

Доказательство. Учитывая, что $\sum_{t_j=0}^{x_j} (\delta_j - 1) f(t) = (\delta_j - \pi_j) f(t) |_{t_j=x_j}$, получим $\sum_{0 \leq t \leq x} \varphi(t) = \prod_{j=1}^n (\delta_j - \pi_j) f(x)$.

Раскрывая скобки в произведении $\prod_{j=1}^n (\delta_j - \pi_j)$ с учетом определения π_J и тем, что π_j и δ_k перестановочны для $j \neq k$, получим

$$\prod_{j=1}^n (\delta_j - \pi_j) = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\#J} \pi_J \delta_{\bar{J}} = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\#J} \pi_J \delta.$$

Здесь $\bar{J} = \{1, \dots, n\} \setminus J$, $\delta = \delta_1 \dots \delta_n$.

Таким образом, сумма

$$\sum_{0 \leq t \leq x} \varphi(t) = \prod_{j=1}^n (\delta_j - \pi_j) f(x) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + I))$$

выражается через значение функции $f(x)$ в вершинах параллелепипеда $\Pi(x + I) = \{t : 0 \leq t_j \leq x_j + 1, j = 1, \dots, n\}$. $\square$

Нам потребуется формула, выражающая искомую сумму через интеграл по параллелепипеду.

Предложение 4. Для любой дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлива формула

$$\int_{\Pi(x+I)} \partial f(t) dt = \sum_{0 \leq t \leq x} \varphi(t),$$

где $I = (1, \dots, 1)$, $\partial = \partial_1 \dots \partial_n$, $dt = dt_1 \dots dt_n$, а интегрирование ведется по n -мерному параллелепипеду $\Pi(x + I) = \{t : 0 \leq t_j \leq x_j + 1, j = 1, \dots, n\}$.

Доказательство. Отметим прежде всего для $j = 1, 2, \dots, n$ справедливость равенств

$$\int_0^{x_j+1} \partial_j f(t) dt_j = (\delta_j^{x_j+1} - 1) \pi_j f(t),$$

используя которые, результат повторного интегрирования можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Pi(x+I)} \partial f(t) dt &= \prod_{j=1}^n (\delta_j^{x_j+1} - 1) \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n f(t) = \prod_{j=1}^n (\delta_j^{x_j+1} - 1) f(0) = \\ &= \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + I)), \end{aligned}$$

а из предложения 3 следует равенство

$$\int_{\Pi(x+I)} \partial f(t) dt = \sum_{0 \leq t \leq x} \varphi(t).$$

□

Отметим, что сумма 2.40 является дискретной первообразной функции $\varphi(x + a)$, т.е. $Q(\delta) S(x) = \varphi(x + a)$, $x \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n$ и $a = a^1 + \dots + a^n$.

Действительно, после замены переменных $t = A\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ сумма $S(x)$, где $x = A\tau$ преобразуется следующим образом $S(A\tau) = \sum_{0 \leq \lambda \leq \tau} \varphi(A\lambda)$, а разностный оператор примет вид

$$Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1) = \prod_{j=1}^n (s_j - 1) = \tilde{Q}(s).$$

Поэтому с учетом предложения 2 получим $\tilde{Q}(s) \tilde{S}(\tau) = \tilde{\varphi}(\lambda + I)$. После возвращения к переменным x получим $Q(\delta) S(x) = \varphi(x + a)$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 5. Установим связь между разностными уравнениями в рациональных конусах и более изученными

уравнениями в положительном октанте $\mathbb{Z}_+^n$. Существенным является требование, состоящее в том, что мы рассматриваем *унимодулярные конусы* т.е. конусы, построенные на таких векторах $a^1, \dots, a^n$, что определитель матрицы A , столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1. Это означает, что определяемое матрицей A отображение $t = A\lambda$ является взаимно однозначным отображением между $\mathbb{Z}_+^n$ и $K \cap \mathbb{Z}^n$. Если s_j — операторы сдвига, действующие на функции $f(A\lambda)$ переменных λ_j , то они связаны с операторами δ_j , действующим на функции $f(t)$ переменных t_j , следующим образом

$$\begin{aligned} s_j f(A\lambda) &= f(A(\lambda + e^j)) = f(A\lambda + Ae^j) = \\ &= f(A\lambda + a^j) = f(t + a^j) = \delta^{a^j} f(t), \end{aligned}$$

т.е.

$$s_j f(A\lambda) = \delta^{a^j} f(t), j = 1, \dots, n. \quad (2.42)$$

Таким образом, в силу формулы 2.42 всякий разностный оператор $Q(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega$, $\Omega \subset K \cap \mathbb{Z}^n$ действует на функциях $f(t)$, $t \in K \cap \mathbb{Z}^n$, так же как и оператор $\tilde{Q}(s) = \sum_{\tilde{\omega} \in \mathbb{Z}_+^n} c_{A\tilde{\omega}} s^{\tilde{\omega}}$, где $\omega = A\tilde{\omega}$ на функциях $\tilde{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$, а для определения дискретной первообразной получаем уравнение

$$\tilde{Q}(s) \tilde{f}(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Доказательство теоремы 5. После замены переменных $t = A\lambda$ и $x = A\tau$, а также используя 2.42 получим, что $f(A\lambda)$ является решением разностного уравнения $\tilde{Q}(s) f(A\lambda) = \varphi(A\lambda)$. В силу предложения 3 для суммы $S(A\tau) = \sum_{0 \leq \lambda \leq \tau} \varphi(A\lambda)$ справедлива формула $S(A\tau) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(A(\lambda + I)))$, которая после возвращения к переменным x примет вид $S(x) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + a))$. $\square$

Доказательство предложения 1. Сделаем замену переменных $t = A\lambda$, $\lambda \in \Pi(\tau + I) = \{\lambda : 0 \leq \lambda_j \leq \tau_j + 1, j = 1, \dots, n\}$, $x = A\tau$. При этой замене $D_j f(t) = \partial_j f(A\lambda)$, $j = 1, \dots, n$, и с учетом унимодулярности конуса K

получим

$$\int_{\Pi_K(x+a)} Df(t) dt = \int_{\Pi(\tau+I)} \partial_1 \dots \partial_n f(A\lambda_1, \dots, A\lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

С учетом Предложения 4 последний интеграл равен

$$\sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(A(\lambda + I))) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + a)),$$

а из теоремы 5 следует, что

$$\int_{\Pi_K(x+a)} Df(t) dt = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t).$$

□

2.2 Формула Эйлера – Маклорена в случае суммирования по унимодулярному рациональному параллелотопу

В параграфе 2.2 получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для задачи суммирования целых функций экспоненциального типа по целым точкам рациональных параллелотопов. Получена формула для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа, построенного на образующих унимодулярного конуса. С помощью методов теории дифференциальных операторов бесконечного порядка построен необходимый для многомерного аналога формулы Эйлера – Маклорена оператор Тодда и обоснована сходимость функционального ряда, который участвует в этой формуле.

В данном параграфе построим необходимые для многомерного аналога формул Эйлера – Маклорена 2.38 и 2.39 пространство функций и дифференциальный оператор бесконечного порядка, действующий на этом пространстве, и докажем формулу 0.14, которая и решает задачу неопределенного суммирования. Воспользуемся обозначениями и определениями из

[3].

Обозначим через $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство, $z = (z_1, \dots, z_n)$ — точки этого пространства. Пусть $Exp(\mathbb{C}^n)$ пространство целых функций $\varphi(z)$ экспоненциального типа, т.е. целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi(z)| \leq M e^{r|z|},$$

где $M > 0$, $r \geq 0$ — некоторые числа (для каждой функции свои), и $|z| = |z_1| + \dots + |z_n|$.

Далее для фиксированного $R > 0$ и произвольного $r < R$ обозначим через $Exp_R(\mathbb{C}^n)$ пространство целых функций экспоненциального типа $\varphi(z)$ таких, что для некоторого $M > 0$ и любого $r < R$ справедливо равенство

$$|\partial^\alpha \varphi(z)| \leq M r^{|\alpha|} e^{r|z|}$$

для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $z \in \mathbb{C}^n$. Здесь $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

Пусть $F(\xi)$ — голоморфная в полицилиндре

$$U_R = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| < R, j = 1, \dots, n\}$$

функция, и дано ее разложение в степенной ряд $F(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha$. Сопоставим функции $F(\xi)$ дифференциальный оператор бесконечного порядка $F(\partial)$, формально заменяя аргументы $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ символами операторов дифференцирования $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$. Функцию $F(\xi)$ называют *символом оператора* $F(\partial)$.

Действие оператора $F(\partial)$ на функцию $\varphi(z)$ определяется формулой

$$F(\partial) \varphi(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(z).$$

Обозначим $H(U_R)$ — пространство функций голоморфных в U_R , и пусть $F(\xi) \in H(U_R)$. Как известно ([3], теорема 5.1), для любой функции $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$ функция $F(\partial) \varphi(z)$ определена и также принадлежит

пространству $Exp_R(\mathbb{C}^n)$. Более того, отображение

$$F(\partial) : Exp_R(\mathbb{C}^n) \rightarrow Exp_R(\mathbb{C}^n)$$

непрерывно, а совокупность операторов бесконечного порядка $\{F(\partial)\}$ образует алгебру ([3], теорема 5.2), которую будем обозначать $\aleph$. В частности, если наряду с $F(\xi)$ функция $F^{-1}(\xi) = \frac{1}{F(\xi)}$ аналитична в U_R , то оператор $F^{-1}(\partial)$ является обратным к $F(\partial)$.

Определим теперь нужные дифференциальные операторы бесконечного порядка. Прежде всего, покажем, что полиномиальный разностный оператор $P(\delta) = \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega \delta^\omega$, где $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \dots \delta_n^{\omega_n}$, действует на пространстве $H(\mathbb{C})$ целых функций так же, как и некоторый дифференциальный оператор бесконечного порядка, который строится по характеристическому многочлену $P(\xi)$.

Рассмотрим целую функцию $P(e^\xi) = P(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) = \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega e^{\langle \omega, \xi \rangle}$, и сопоставим ей дифференциальный оператор бесконечного порядка $P(e^\partial)$, действующий на пространстве функций $Exp(\mathbb{C}^n)$, где $e^\xi = (e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n})$, $\langle \omega, \xi \rangle = \omega^1 \xi_1 + \dots + \omega^n \xi_n$.

Предложение 5. На пространстве $Exp(\mathbb{C}^n)$ справедливо равенство

$$P(\delta) \varphi(z) = P(e^\partial) \varphi(z).$$

Доказательство. Используя формулу Тейлора, для любой функции $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}^n)$ получим

$$\begin{aligned} P(\delta) \varphi(z) &= \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega \varphi(z + \omega) = \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial^k \varphi(z) \omega^k = \\ &= \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\omega \partial)^k \varphi(z), \end{aligned}$$

где $(\omega \partial)^k = (\omega_1 \partial_1)^{k_1} \dots (\omega_n \partial_n)^{k_n}$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(e^\partial) \varphi(z) &= \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega (e^\partial)^\omega \varphi(z) = \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega e^{\omega \partial} \varphi(z) = \\ &= \sum_{|\omega| \leq m} c_\omega \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\omega \partial)^k \varphi(z). \end{aligned}$$

Таким образом, $P(\delta) \varphi(z) = P(e^\partial) \varphi(z)$ для любой $\varphi(z) \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$. $\square$

Для разностного оператора $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$, участвующего в определении дискретной первообразной, утверждение предложения 5 означает, что $Q(e^\partial) = \prod_{j=1}^n (e^{\langle a^j, \partial \rangle} - 1)$. Отметим, что символ этого оператора является целой функцией $Q(e^{a\xi})$, где $a\xi = (\langle a^1, \xi \rangle, \dots, \langle a^n, \xi \rangle)$, и множество ее нулей состоит из объединения счетного числа комплексных гиперплоскостей вида

$$L_{j,k} = \{ \xi : \langle a^j, \xi \rangle = 2k\pi i \},$$

где i — мнимая единица, $j = 1, \dots, n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для мероморфной функции

$$T(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle}{\prod_{j=1}^n (e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1)} \quad (2.43)$$

гиперплоскости $L_{j,0}$, $j = 1, \dots, n$ являются „устраняемыми“ особыми множествами, поэтому $T(\xi)$ голоморфна в некоторой окрестности начала координат. Найдем максимальное R такое, что функция 2.43 голоморфна в полицилиндре $U_R = \{ \xi : |\xi_j| < R, j = 1, \dots, n \}$, т.е. гиперплоскости $L_{j,k}$ для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ не пересекаются с полицилиндром U_R .

Обозначим $\|a^j\| = |a_1^j| + \dots + |a_n^j|$ и возьмем $R = \frac{2\pi}{\max_j \|a^j\|}$. Тогда для $\xi \in U_R$, $j = 1, \dots, n$ справедливы неравенства

$$|\langle a^j, \xi \rangle| \leq |a_1^j| |\xi_1| + \dots + |a_n^j| |\xi_n| < R \|a^j\| \leq 2\pi,$$

из которых и следует, что $L_{j,k} \cap U_R = \emptyset$ для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Таким образом функция 2.43 голоморфна в полицилиндре U_R , где $R = \frac{2\pi}{\max_j \|a^j\|}$, и, следовательно, разлагается в этом полицилиндре в ряд

$$T(\xi) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_{\mu}^A}{\mu!} \xi^{\mu}. \quad (2.44)$$

Напомним (см. параграф 1.1), что коэффициенты b_{μ}^A ряда 2.44 называются *числами Бернулли, ассоциированными с рациональным конусом K* .

Соответствующий 2.44 дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$Td^A(\partial) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_{\mu}^A}{\mu!} \partial^{\mu} \quad (2.45)$$

— это *оператор Тодда*.

Поскольку для голоморфных в полицилиндре U_R функций $T(\xi)$ и $Q(e^{\xi})$ справедливы соотношения $T(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle}{Q(e^{\xi})}$ и $Q(e^{\xi}) = \prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle^{\frac{1}{T(\xi)}}$, то в алгебре $\mathfrak{N}$ справедливо равенство

$$Q(e^{\partial}) = D \frac{1}{Td^A(\partial)}.$$

Напомним, что $D_j = \langle a^j, \partial \rangle$ — операторы дифференцирования по направлению вектора a^j , $j = 1, \dots, n$, и обозначим $D = D_1 \circ \dots \circ D_n$.

Теорема 6. Пусть $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C}^n)$ и $Td^A(\partial)$ — оператор Тодда, тогда всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения

$$Df(z) = Td^A(\partial) \varphi(z), \quad (2.46)$$

является дискретной первообразной для функции $\varphi(z)$.

Доказательство. Т.к. $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C}^n)$ и $Td^A(\partial) \in \mathfrak{N}$, то и

$$Td(\partial) \varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C}^n).$$

Поэтому уравнение 2.46 всегда имеет решение, также принадлежащее

$Exp_R(\mathbb{C}^n)$. Это следует, например, из того, что после замены $z = \theta^A$ с учетом унимодулярности матрицы A оно примет вид $\partial_1 \dots \partial_n \tilde{f}(\theta) = \tilde{g}(\theta)$.

Покажем, что всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения 2.46 является обобщенной дискретной первообразной, т.е. решением разностного уравнения $Q(\delta)f(z) = \varphi(z)$. Действительно, функцию 2.43 можно преобразовать следующим образом

$$T(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle}{\prod_{j=1}^n (e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1)} = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle}{\prod_{j=1}^n \sum_{\mu_j=0}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j}}{\mu_j!}} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sum_{\mu_j=1}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j-1}}{\mu_j!}}.$$

Поэтому функция $\frac{1}{T(\xi)} = \prod_{j=1}^n \sum_{\mu_j=1}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j-1}}{\mu_j!}$ является целой функцией, а оператор $\frac{1}{Td^A(\partial)}$ — обратным к оператору $Td^A(\partial)$.

Действуя оператором $\frac{1}{Td^A(\partial)}$ на обе части дифференциального уравнения 2.46, получим $D \frac{1}{Td^A(\partial)} f(z) = Td^A(\partial) \frac{1}{Td^A(\partial)} \varphi(z)$. Учитывая, что $D \frac{1}{Td^A(\partial)} = Q(e^\partial)$ и предложение 5, окончательно имеем $Q(\delta)f(z) = \varphi(z)$. $\square$

Теорема 7. После интегрирования равенства 2.46 по параллелотопу $\Pi_K(x+a)$ с „переменной“ вершиной $x+a$, где $a = a^1 + \dots + a^n$ получим аналог формулы 2.39:

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \int_{\Pi_K(x+a)} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \partial^\mu \varphi(t) dt.$$

Доказательство. Доказательство получается интегрированием дифференциального уравнения 2.46 по параллелотопу $\Pi_K(x+a)$, т.к.

$$\int_{\Pi_K(x+a)} Df(t) dt = S(x) \text{ согласно предложению 1.} \quad \square$$

2.3 Суммирование по рациональному параллелотопу в общем случае

В параграфе 2.3 в отличие от 2.2 рассматривается случай, когда унимодулярность конуса не требуется. Доказан дискретный вариант формулы

Ньютона – Лейбница для задачи суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа, и для функций экспоненциального типа получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной. Кроме того, решена задача суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа.

Для реализации подхода Эйлера к задаче суммирования функции $\varphi(y)$ нескольких переменных нужно определить понятие ее дискретной первообразной. Напомним (см. параграф 2.1) это определение.

Дискретной первообразной функции $\varphi(y)$, $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ называется всякое решение разностного уравнения $Q(\delta)f(y) = \varphi(y)$, $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$, где $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$.

Обозначим $\Lambda = \{y \in \mathbb{Z}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$ подрешетка решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, \dots, a^n$. Обозначим Π_a — фундаментальный параллелотоп $\Pi_a = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leq} t \underset{K}{<} a \right\}$, где $a = a^1 + \dots + a^n$. Пусть $\{v\}$ — множество точек с целыми координатами, лежащих в параллелотопе Π_a , и $0 \leq \xi_j < 1$, $j = 1, \dots, n$ — координаты этих точек в базисе $a^1, \dots, a^n$:

$$v = \xi_1 a^1 + \dots + \xi_n a^n.$$

Для любой точки $y \in K$ обозначим $\pi_j y$ ее проекцию вдоль вектора a^j , т.е. если $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, где $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, то $\pi_j y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_{j-1} a^{j-1} + \lambda_{j+1} a^{j+1} + \dots + \lambda_n a^n$.

Пусть V — множество всех 2^n наборов $J = (j_1, \dots, j_k) \subset \{1, \dots, n\}$, включая и пустое множество. Если обозначить $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \dots \circ \pi_{j_k}$, то множество вершин параллелотопа $\Pi_K(x)$ можно записать в виде $vert(x) = \{\pi_J x, J \in V\}$. Отметим, что $\pi_\emptyset x = x$.

Нам потребуется следующее преобразование векторов

$$v = \xi_1 a^1 + \dots + \xi_n a^n,$$

заданных в базисе $a^1, \dots, a^n$ координатами $(\xi_1, \dots, \xi_n)$:

$$\chi_a(v) = \sum_k \chi(\xi_k) a^k,$$

где

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, \xi = 0; \\ 0, \xi \neq 0. \end{cases}$$

Для заданной точки $x \in \Lambda$ сумму $S_v(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap (v + \Lambda)} \varphi(t)$ можно теперь записать в виде

$$S_v(x) = \sum_{\substack{v \leq_K t \leq_K v+x-a+\chi_a(v)}} \varphi(t),$$

при этом суммирование ведется по точкам $t \in v + \Lambda$.

Теорема 8. Пусть точка $x \in \Lambda$, и $f(t)$ — дискретная первообразная функции $\varphi(t)$, тогда справедлив следующий дискретный аналог формулы Ньютона — Лейбница:

$$S(x) := \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(v + \pi_J(x + \chi_a(v))),$$

где $\#J$ означает число элементов множества J .

Отметим некоторые существенные моменты доказательства теоремы 8. Если $K = \mathbb{R}_+^n$, и a^j — единичные векторы, то

$$\Pi(x) := \Pi_{\mathbb{R}_+^n}(x) = \{t \in \mathbb{R}_+^n : 0 \leq t_j \leq x_j, j = 1, \dots, n\}$$

— параллелепипед, а сумма имеет вид

$$S(x) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \dots \sum_{t_n=0}^{x_n} \varphi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{0 \leq t \leq x} \varphi(t). \quad (2.47)$$

Аналогом уравнения $(\delta - 1)f(y) = \varphi(y)$ для определения дискретной первообразной является уравнение $\prod_{j=1}^n (\delta_j - 1)f(y) = \varphi(y), y \in \mathbb{Z}_+^n$. В предложениях 2, 3, 4 для задачи суммирования 2.47 по параллелепипеду доказано существование дискретной первообразной и найден дискретный аналог формулы Ньютона — Лейбница.

В общем случае рационального конуса K замена $y = A\lambda$ переводит параллелепипед $\Pi(\tau) = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^n : 0 \leq \lambda_j \leq \tau_j, j = 1, \dots, n\}$ в параллелотоп

$\Pi_K(x)$, где $x = A\tau$. Однако возникают трудности при замене переменных в разностном уравнении $Q(\delta)f(y) = \varphi(y)$. Они связаны с тем, что образом целых точек y рационального конуса K могут оказаться и точки $\lambda \in \Pi(\tau)$, координаты которых не являются целыми числами.

В то же время эта замена взаимнооднозначно переводит $\mathbb{Z}^n$ на подрешетку $\Lambda = \{y \in \mathbb{Z}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$ решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, \dots, a^n$.

Пусть Π_a — фундаментальный параллелотоп $\Pi_a = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} a \right\}$, где $a = a^1 + \dots + a^n$. Пусть $\{v\}$ — множество точек с целыми координатами, лежащих в параллелотопе Π_a , и $0 \leq \xi_j < 1, j = 1, \dots, n$ — координаты этих точек в базисе $a^1, \dots, a^n$:

$$v = \xi_1 a^1 + \dots + \xi_n a^n.$$

Их число конечно и равно $d(\Lambda) = \det \|a_i^j\|$ — индексу подрешетки Λ в решетке $\mathbb{Z}^n$ (см. [6]). Очевидно, что $\mathbb{Z}^n = \bigcup_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} (v + \Lambda)$, поэтому искомую сумму 2.40 можно представить в виде

$$S(x) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} S_v(x),$$

где

$$S_v(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap (v + \Lambda)} \varphi(t).$$

В сумме $S_v(x)$ функция $\varphi(t)$ суммируется по точкам t параллелотопа $\Pi_K(x)$, лежащим на сдвиге подрешетки Λ на вектор $v \in \Pi_a$. Отображение $t = v + A\lambda$ множества $\mathbb{Z}^n$ на множество $(v + \Lambda) \cap \mathbb{Z}^n$ взаимнооднозначно, что и позволяет осуществить замену переменных в уравнении $Q(\delta)f(y) = \varphi(y)$.

Для случая, когда конус $K = \mathbb{Z}_+^n$, т.е. a^j — единичные векторы, и суммирование идет по n -мерному параллелепипеду

$$\Pi_K(x) = \Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}_+^n : 0 \leq t_j \leq x_j, j = 1, \dots, n\},$$

утверждение теоремы было доказано в предложениях 2, 3, 4 (параграф

2.1).

Перейдем к доказательству теоремы 8.

Доказательство. Пусть v — точка с целочисленными координатами, принадлежащая фундаментальному параллелотопу Π_a . Определяемое матрицей A отображение $t = v + A\lambda$ является взаимно однозначным отображением между $\mathbb{Z}_+^n$ и $K \cap (v + \Lambda)$. Если s_j — операторы сдвига, действующие на функции $f(v + A\lambda)$ переменных λ , то они связаны с операторами δ_j , действующим на функции $f(t)$ переменных t , следующим образом:

$$\begin{aligned} s_j f(v + A\lambda) &= f(v + A(\lambda + e^j)) = f(v + A\lambda + Ae^j) = \\ &= f(v + A\lambda + a^j) = f(t + a^j) = \delta^{a^j} f(t), \end{aligned}$$

т.е.

$$s_j f(v + A\lambda) = \delta^{a^j} f(t), j = 1, \dots, n. \quad (2.48)$$

Таким образом, в силу формулы 2.48 всякий разностный оператор $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$ действует на функцию $f(t)$, $t \in (v + \Lambda) \cap K$, так же, как и оператор $\tilde{Q}(s) = \prod_{j=1}^n (s_j - 1)$ на функцию $f_v(\lambda) = f(v + A\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$, а вместо уравнения $Q(\delta) f(t) = \varphi(t)$ для отыскания обобщенной дискретной первообразной функции $\varphi_v(\lambda) = \varphi(v + A\lambda)$, получаем уравнение

$$\tilde{Q}(s) f_v(\lambda) = \varphi_v(\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}_+^n.$$

После замены переменных $t = v + A\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$, $x = A\tau$ сумма $S_v(x) = \sum_{\substack{v \leq t \leq v+x-a+\chi_a(v) \\ K \quad K}} \varphi(t)$, где суммирование ведется по $t \in v + \Lambda$ примет следующий вид

$$\sum_{0 \leq \lambda \leq \tau - e + \chi_e(\xi)} \varphi_v(\lambda) := \sigma_v(\tau - e - \chi_e(\xi)),$$

где $e = e^1 + \dots + e^n$, e^j — единичные вектора.

В силу предложения 3 справедлива формула

$$\sigma_v(\tau - I - \chi_e(\xi)) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\xi + \pi_J(\tau + \chi_e(\xi))),$$

которая после возвращения к переменным x примет вид

$$S_v(x) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(v + \pi_J(x + \chi_a(v)))$$

и утверждение теоремы доказано. $\square$

Теорема 9. Пусть $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C}^n)$, тогда всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения

$$Df(z) = Td^A(\partial)\varphi(z) \quad (2.49)$$

принадлежит $\text{Exp}_R(\mathbb{C}^n)$ и является дискретной первообразной для функции $\varphi(z)$.

Доказательство. Т.к. $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C}^n)$ и $Td^A(\partial) \in \mathfrak{N}$, то и

$$Td^A(\partial)\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C}^n).$$

Поэтому уравнение 2.49 всегда имеет решение, также принадлежащее $\text{Exp}_R(\mathbb{C}^n)$.

Покажем, что всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения 2.49 является дискретной первообразной функции $\varphi(z)$, т.е. решением разностного уравнения $Q(\delta)f(z) = \varphi(z)$. Действительно, функцию $T(\xi)$ для $\xi \in U_R$ можно преобразовать следующим образом

$$T(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle}{\prod_{j=1}^n (e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1)} = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle}{\prod_{j=1}^n \sum_{\mu_j=0}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j}}{\mu_j!}} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sum_{\mu_j=1}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j-1}}{\mu_j!}}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{T(\xi)} = \prod_{j=1}^n \sum_{\mu_j=1}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j-1}}{\mu_j!}$$

является целой функцией, то оператор $1/Td^A(\partial)$ будет обратным к оператору $Td^A(\partial)$.

Действуя оператором $1/Td^A(\partial)$ на обе части дифференциального уравнения 2.49, получим

$$D \frac{1}{Td^A(\partial)} f(z) = Td^A(\partial) \frac{1}{Td^A(\partial)} \varphi(z).$$

Учитывая, что

$$D \frac{1}{Td^A(\partial)} = Q(e^\partial)$$

и предложение 4, окончательно имеем $Q(\delta) f(z) = \varphi(z)$. $\square$

Теорема 10. После интегрирования равенства 2.49 по параллелотопу

$$\Pi_K^v(x) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : v \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} v + x + \chi_a(v) \right\} \text{ получим формулу}$$

$$S(x) := \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} S_v(x) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \int_{\Pi_K^v} Td^A(\partial) \varphi(t) dt.$$

Доказательство. Проинтегрируем 2.49 по параллелотопу $\Pi_K^v(x)$, получим

$$\int_{\Pi_K^v(x)} Df(z) = \int_{\Pi_K^v(x)} Td^A(\partial) \varphi(z) \text{ и в интеграле для левой части равенства}$$

сделаем замену переменных $t = v + A\lambda$, где

$$\lambda \in \Pi(\xi + \tau + \chi_e(\xi)) = \{ \lambda : 0 \leq \lambda_j \leq \xi_j + \chi_{e_j}(\xi_j) + \tau_j, j = 1, \dots, n \},$$

$x = A\tau$. Так как при этой замене $D_j f(t) = \partial_j f(v + A\lambda)$, $j = 1, \dots, n$, то

$$\int_{v \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} v+x+\chi_a(v)} Df(t) dt = \int_{\Pi(\xi+\tau+\chi_e(\xi))} \partial f(\xi + A\lambda) d(A\lambda).$$

С учетом Предложения 3 и теоремы 8 последний интеграл равен

$$\sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(v + \pi_J(x + \chi_a(v))) = S_v(x).$$

Таким образом,

$$S(x) := \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} S_v(x) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \int_{\Pi_K^v} Td^A(\partial) \varphi(t) dt.$$

□

Пример. В качестве примера применения формулы Эйлера-Маклорена найдем сумму конечной геометрической прогрессии по целым точкам произвольного рационального параллелотопа $\Pi_K(x)$:

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} q^t,$$

где $q^t = q_1^{t_1} \dots q_n^{t_n}$.

Обозначим $\ln q = (\ln q_1, \dots, \ln q_n)$ и $\ln^\mu q = \ln^{\mu_1} q_1 \dots \ln^{\mu_n} q_n$. Действуя оператором $Td^A(\partial)$ на q^t и с учетом теоремы 9, получим соотношение

$$Df(t) = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \ln q \rangle}{\prod_{j=1}^n (q^{a^j} - 1)} q^t.$$

Проинтегрируем последнее равенство по параллелотопам $\Pi_K^v(x)$ и просуммируем по $v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n$. С учетом следствия найдем

$$S(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \langle a^j, \ln q \rangle}{\prod_{j=1}^n (q^{a^j} - 1)} \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \int_{\Pi_K^v} q^t dt.$$

Обозначим $x^j = \pi_1 \circ \dots [j] \dots \circ \pi_n x$, где $[j]$ означает, что π_j пропущено (x^j – проекция x на вектор a^j). Вычисляя интеграл в правой части последнего равенства, получим

$$S(x) = \frac{\sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} q^v \prod_{j=1}^n (q^{x^j + \chi_{a^j}(v)} - 1)}{\prod_{j=1}^n (q^{a^j} - 1)}. \quad (2.50)$$

Формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии $\sum_{t \in K} q^t$ получается из формулы 2.50, если $|q^{a^j}| < 1$, $j = 1, \dots, n$. Тогда при $x^{a^j} = \tau_j a^j \rightarrow \infty$ имеем $q^{x^j} \rightarrow 0$ и $\sum_{t \in K} q^t = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \frac{q^v}{\prod_{j=1}^n (1 - q^{a^j})}$. Эта формула получена в [17] (лемма 4.6.7, следствие 4.6.8) другим методом.

2.4 О суммировании по целым точкам рационального симплекса

В параграфе 2.4 методы теории дифференциальных операторов бесконечного порядка использованы для нахождения решений разностных уравнений и обобщения формулы Эйлера – Маклорена на случай кратного суммирования по симплексу, а именно к задаче отыскания суммы вида $\sum_{\|t\| \leq x} \varphi(t)$, где $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ — заданная функция и $\|t\| = t_1 + \dots + t_n$, t_j — целые неотрицательные числа. Такое суммирование иногда называют "по симплексам" или "по треугольникам". Рассмотрим случай, когда φ — функция одного переменного, тогда эту сумму можно записать в виде

$$S(x) = \sum_{\|t\| \leq x} \varphi(x - \|t\|). \quad (2.51)$$

Подобные суммы возникают, например, в некоторых задачах перечислительного комбинаторного анализа и называется суммами с линейными ограничениями на индексы суммирования [4], [8], [9].

В случае, когда $\varphi(x)$ — функция одного переменного, после несложных преобразований сумму (2.51) можно записать следующим образом

$$S(x) = \sum_{k=0}^x C_{k+n-1}^k \varphi(x - k), \quad (2.52)$$

где $C_{k+n-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ — число целых неотрицательных решений $t = (t_1, \dots, t_n)$ уравнения

$$t_1 + \dots + t_n = k.$$

В правой части (2.52) стоит однократная сумма, однако в отличие от классического случая приходится суммировать по k функцию

$C_{k+n-1}^k \varphi(x-k)$, зависящую от параметра x . Это аналогично задаче вычисления интеграла зависящего от параметра с переменным верхним пределом интегрирования. Например, для $n = 2$ эта сумма выглядит следующим образом

$$S(x) = \sum_{k=0}^x (k+1) \varphi(x-k) = \sum_{t=0}^x (x-t+1) \varphi(t).$$

В предложении 7 показано, что для определения дискретной первообразной нужно использовать разностное уравнение $(\delta - 1)^n f(x) = \varphi(x)$.

Аналог оператора Тодда в данном случае определяется формулой 2.54, и в теореме 11 приводится обобщение формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной, а в теореме 12 доказана формула для суммы (2.52).

Обозначим через $\mathbb{C}^d$ комплексное пространство размерности d , а его точки через $z = (z_1, \dots, z_d)$. Пусть $Exp(\mathbb{C}^d)$ пространство целых функций $\varphi(z)$ экспоненциального типа, т.е. целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi(z)| \leq M e^{r|z|},$$

где $M > 0$, $r \geq 0$ - некоторые числа (для каждой функции свои), и $|z| = |z_1| + \dots + |z_d|$.

Обозначим $D = (D_1, \dots, D_d)$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}$ для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

Пусть $R > 0$ фиксированное число и $r < R$ произвольно. Обозначим через $Exp_R(\mathbb{C}^d)$ пространство целых функций экспоненциального типа $\varphi(z)$ таких, что для некоторого $M > 0$ и любого $r < R$

$$|D^\alpha \varphi(z)| \leq M r^{|\alpha|} e^{r|z|}$$

для всех мультииндексов α и всех $z \in \mathbb{C}^d$.

Пусть $A(\xi)$ аналитическая в цилиндре

$$U_R = \{\xi \in \mathbb{C}^d : |\xi_j| < R, j = 1, \dots, d\}$$

функция, и дано ее разложение в степенной ряд $A(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} \xi^{\alpha}$. Сопоставим функции $A(\xi)$ дифференциальный оператор бесконечного порядка $A(D)$, формально заменяя аргумент $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ символом дифференцирования $D = (D_1, \dots, D_d)$. Функцию $A(\xi)$ будем называть символом оператора $A(D)$.

Действие оператора $A(D)$ на функцию $\varphi(z)$ определяется формулой

$$A(D) \varphi(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} D^{\alpha} \varphi(z).$$

Обозначим $H(U_R)$ пространство функций голоморфных в U_R , и пусть $A(\xi) \in H(U_R)$. Как известно ([3], теорема 5.1), для любой функции $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C}^d)$ функция $A(D) \varphi(z)$ определена и также принадлежит пространству $\text{Exp}_R(\mathbb{C}^d)$. Более того, отображение

$$A(D) : \text{Exp}_R(\mathbb{C}^d) \rightarrow \text{Exp}_R(\mathbb{C}^d)$$

непрерывно, а совокупность дифференциальных операторов бесконечного порядка $\{A(D)\}$ образует алгебру. ([3], теорема 5.2). В частности, если наряду с $A(\xi)$ функция $1/A(\xi)$ аналитична в U_R , то оператор $1/A(D)$ обратный к $A(D)$.

Прежде всего, покажем, что полиномиальный разностный оператор $Q(\delta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} \delta^{\alpha}$, где $\delta^{\alpha} = \delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_d^{\alpha_d}$, действует так же, как и некоторый дифференциальный оператор бесконечного порядка.

Рассмотрим целую функцию $Q(e^{\xi}) = Q(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_d})$ переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{C}^d$, тогда дифференциальный оператор бесконечного порядка $Q(e^D) = Q(e^{D_1}, \dots, e^{D_d})$ определен на пространстве функций $\text{Exp}(\mathbb{C}^d)$.

Предложение 6. На пространстве $\text{Exp}(\mathbb{C}^d)$ справедливо равенство $Q(\delta) = Q(e^D)$.

Доказательство. Для любой функции $\varphi(z)$ экспоненциального типа име-

ем

$$Q(\delta) \varphi(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \delta^\alpha \varphi(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \varphi(z + \alpha),$$

и разлагая $\varphi(z + \alpha)$ по степеням α , получим

$$Q(\delta) \varphi(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(z)}{k!} \alpha^k = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(\alpha D)^k}{k!} \varphi(z).$$

С другой стороны, $Q(e^\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (e^\xi)^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha e^{\alpha \xi} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(\alpha \xi)^k}{k!}$.

Поэтому, $Q(e^D) \varphi(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(\alpha D)^k}{k!} \varphi(z)$.

Таким образом, $Q(\delta) \varphi(z) = Q(e^D) \varphi(z)$ для любой $\varphi(z) \in \text{Exp}(\mathbb{C}^d)$.

□

Определим теперь нужные нам дифференциальные операторы бесконечного порядка. Пусть $z = 1$ корень кратности m характеристического многочлена $P(z)$ разностного уравнения

$$P(\delta) f(x) = \varphi(x). \quad (2.53)$$

Кратность m может принимать значения то 0 до p . Построим дифференциальный оператор бесконечного порядка, связанный с этим многочленом. Обозначим R - расстояние от $\xi = 0$ до другого ближайшего нуля функции $P(e^\xi) = 0$. Рассмотрим функцию

$$A(\xi) = \frac{\xi^m}{P(e^\xi)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu(m)}{\mu!} \xi^\mu, \quad (2.54)$$

где m - кратность корня $\xi = 0$.

Числа $b_\mu(m)$ назовем *обобщенными числами Бернулли*.

Функция 2.54 голоморфна в круге $U_R = \{\xi \in \mathbb{C}^1 : |\xi| < R\}$, поэтому дифференциальный оператор $A(D)$ определен на пространстве $\text{Exp}_R(\mathbb{C})$. Обозначим алгебру операторов, определенных на $\text{Exp}_R(\mathbb{C})$, через $\mathfrak{K}$.

Очевидно, что в алгебре $\aleph$ справедливо следующее равенство

$$P(e^D) A(D) = D^m. \quad (2.55)$$

Действительно, операторы $P(e^D)$ и $A(D)$ принадлежат алгебре $\aleph$, и так как для их символов $P(e^\xi)$ и $A(\xi)$ в круге U_R справедливо равенство $P(e^\xi) A(\xi) = \xi^m$, то для любой $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$ справедливо равенство $P(e^D) A(D) \varphi(z) = D^m \varphi(z)$.

Теорема 11. Пусть $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$, и $z = 1$ — корень кратности m характеристического многочлена. Функция $f(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$ является решением разностного уравнения (2.53) тогда и только тогда, когда $f(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$D^m f(z) = A(D) \varphi(z), \quad (2.56)$$

где $A(D) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu(m)}{\mu!} D^\mu$, а $b_\mu(m)$ — обобщенные числа Бернулли.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$ и $f(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$ — решение уравнения (2.53). По предложению 6 имеем $P(\delta) = P(e^D)$. Тогда из (2.53) получим $P(e^D) f(z) = \varphi(z)$. Далее после умножения на $A(D)$ имеем $P(e^D) A(D) f(z) = A(D) \varphi(z)$. Учитывая равенство (2.55) $D^m f(z) = A(D) \varphi(z)$, т.е. f удовлетворяет соотношению (2.56).

Достаточность. Сначала докажем, что, если функция $u(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$, то любая его первообразная также принадлежит $\text{Exp}_R(\mathbb{C})$. Действительно, если предположить, что $u(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$, а ее первообразная $\tilde{u}(z) \notin \text{Exp}_R(\mathbb{C})$, то для любых $M > 0$ и $r < R$ существуют α_0 и точка $z_0 \in \mathbb{C}$, такие, что $|D^{\alpha_0} \tilde{u}(z_0)| > Mr^{|\alpha_0|} e^{r|z_0|}$, тогда $|D^{\alpha_0-1} u(z_0)| > Mr^{|\alpha_0|} e^{r|z_0|}$, и $|D^{\alpha_0-1} u(z_0)| > Mr r^{|\alpha_0-1|} e^{r|z_0|}$. Это означает, что $u(z)$ не принадлежит $\text{Exp}_R(\mathbb{C})$.

Теперь докажем, что, если $f(z)$ — решение дифференциального уравнения (2.56), то $f(z)$ — решение разностного уравнения (2.53). Так как $D^m f(z) = A(D) \varphi(z)$ и согласно равенству (2.55) $D^m = P(e^D) A(D)$, то $P(e^D) A(D) f(z) = A(D) \varphi(z)$. Применим к обеим частям последнего равенства оператор $A^{-1}(D)$, получим $P(e^D) f(z) = \varphi(z)$, а с учетом

предложения 1

$$P(\delta) f(z) = \varphi(z).$$

Таким образом, если $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$, то решение $f(z)$ разностного уравнения (2.53) также лежит в этом классе. $\square$

Последовательно интегрируя (2.56), получим в качестве следствия из теоремы 1 формулу для решения разностного уравнения (2.53):

Следствие из теоремы 11. В условиях теоремы 11 функция $f(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$ является решением (2.53) тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{b_{\mu}(m)}{\mu!} P_{m-\mu} \varphi(z) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu+m}(m)}{(\mu+m)!} D^{\mu} \varphi(z),$$

где $P_{n-\mu} \varphi(z)$ — первообразная порядка $n - \mu$ функции $\varphi(z)$, а $b_{\mu}(m)$ — обобщенные числа Бернулли.

Пример. В качестве примера применения теоремы 11 решим уравнение (2.53) в случае, когда $\varphi(z) = q^z$, $q > 0$. Так как $q^z = e^{z \ln q}$, то $\varphi(z) \in \text{Exp}_R(\mathbb{C})$ при $q < e^R$. Пусть m - кратность корня $z = 1$ характеристического многочлена $P(z)$, тогда по теореме 11 $D^m f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu}(m)}{\mu!} D^{\mu} q^z$.

Преобразуем это равенство следующим образом

$$D^m f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu}(m)}{\mu!} (\ln q)^{\mu} q^z = q^z \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu}(m)}{\mu!} (\ln q)^{\mu} = \frac{q^z (\ln q)^m}{P(e^{\ln q})} = \frac{q^z \ln^m q}{P(q)},$$

и, интегрируя его, для $m \geq 1$ получим формулу для решения уравнения $P(\delta) f(z) = q^z$

$$f(z) = \frac{q^z}{P(q)} + C_1 z^{m-1} + \dots + C_{m-1} z + C_m, \quad (**)$$

где C_j - произвольные константы.

Теорема 12. Если $\varphi(z) \in \text{Exp}_{2\pi}(\mathbb{C})$, то для суммы (2.52) справедлива формула

$$S(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{b_{\mu}(n)}{\mu!} P_{n-\mu} \varphi(x+n) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu+n}(n)}{(\mu+n)!} D^{\mu} \varphi(x+n), \quad (2.57)$$

где $b_{\mu}(n) = \sum_{\|k\|=\mu} \frac{\|k\|!}{k!} b_k^*$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k! = k_1! \dots k_n!$, $b_k^* = b_{k_1} \cdot \dots \cdot b_{k_n}$, а b_{k_j} — классические числа Бернулли, и $P_{n-\mu}$ — первообразная порядка $n-\mu$.

Для доказательства нам потребуется следующее предложение.

Предложение 7. Функция $S(x)$, определяемая формулой (2.52) удовлетворяет разностному уравнению

$$(\delta - 1)^n S(x) = \varphi(x+n). \quad (2.58)$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для $t = 1, 2, \dots, n-1$ справедлива формула

$$(\delta - 1)^t S(x) = \sum_{k=0}^{x+t} C_{n+k-t-1}^k \varphi(x+t-k). \text{ Возьмем } t = n-1, \text{ тогда}$$

$$(\delta - 1)^{n-1} S(x) = \sum_{k=0}^{x+n-1} C_k^k \varphi(x+n-1-k) = \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(x+n-1). \quad (2.59)$$

Применяя к (2.59) оператор δ , получим

$$\delta(\delta - 1)^{n-1} S(x) = \sum_{k=0}^{x+n} C_k^k \varphi(x+n-k) = \quad (2.60)$$

$$= \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(x+n-1) + \varphi(x+n). \quad (2.61)$$

Если из равенства (2.59) вычесть равенство (2.60), то получим

$$(\delta - 1)^n S(x) = \delta(\delta - 1)^{n-1} S(x) - (\delta - 1)^{n-1} S(x) = \varphi(x+n)$$

□

Доказательство теоремы 12. Согласно предложению 7, сумма (2.52)

удовлетворяет разностному уравнению (2.58), характеристический многочлен которого равен $P(z) = (z - 1)^n$. Для функции $P(e^\xi) = (e^\xi - 1)^n$ точка $\xi = 0$ - корень кратности n , а расстояние от этого корня до другого ближайшего равно $R = 2\pi$. Не трудно проверить, что функция $A(\xi) = \frac{\xi^n}{(e^\xi - 1)^n}$ является аналитической в точке $\xi = 0$, а ряд $A(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu(n)}{\mu!} \xi^\mu$ сходится в круге $U_{2\pi} = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 2\pi\}$.

Соответствующий функции $A(\xi)$ дифференциальный оператор бесконечного порядка определен на функциях из пространства $Exp_{2\pi}(\mathbb{C})$, поэтому из теоремы 11 получим, что для $\varphi(z) \in Exp_{2\pi}(\mathbb{C})$ всякое решение $S(z)$ уравнения (2.52) из $Exp_{2\pi}(\mathbb{C})$ удовлетворяет уравнению

$$D^n S(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu(n)}{\mu!} D^\mu \varphi(z + n).$$

Если обозначим $P_1 u(z) = \int_{z_0}^z u(\tau) d\tau$ — первообразную функции $u(z)$, то получим на вещественной оси следующую формулу для искомой суммы

$$\begin{aligned} S(x) &= P_n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu(n)}{\mu!} D^\mu \varphi(x + n) = \\ &= \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{b_\mu(n)}{\mu!} P_{n-\mu} \varphi(x + n) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu+n}(n)}{(\mu + n)!} D^\mu \varphi(x + n), \end{aligned} \quad (2.62)$$

где $P_{n-\mu} \varphi(x + n)$ — первообразная порядка $n - \mu$ функции $\varphi(x + n)$.

Обобщенные числа Бернулли $b_\mu(n)$ можно выразить через классические b_μ . Как известно, числа Бернулли — это разложение в степенной ряд функции $\frac{\xi}{e^\xi - 1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{\mu!} \xi^\mu$. После возведения равенства в n -ую степень, получим $b_\mu(n) = \sum_{\|k\|=\mu} \frac{\|k\|!}{k!} b_k^*$, где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k! = k_1! \dots k_n!$, $b_k^* = b_{k_1} \cdot \dots \cdot b_{k_n}$. Отметим, что для $n = 1$ формула (2.62) — это формула Эйлера — Маклорена. $\square$

Пример. Для суммы геометрической прогрессии $S(x) = \sum_{k=0}^x q^k$ по предположению 7 эта задача сводится к решению уравнения $(\delta - 1) S(x) = q^{x+1}$,

$S(0) = 1$. В данном случае $P(z) = z - 1$ и $R = 2\pi$, а $q < e^{2\pi}$. Воспользуемся формулой (**), получим $S(x) = \frac{q^{x+1}}{q-1} + C$. Используя условие $S(0) = 1$, найдем константу C и получим известную формулу $S(x) = \frac{q^{x+1}-1}{q-1}$.

Пример. Менее тривиальным является задача отыскания суммы (2.52) для $\varphi(x) = q^x$ при $n = 2$, $S(x) = \sum_{k=0}^x (k+1)q^{x-k}$. По предложению 7 необходимо решить уравнение $(\delta - 1)^2 S(x) = q^{x+2}$, удовлетворяющее начальным данным $S(0) = 1$, $S(1) = q + 2$.

В данном случае $P(z) = (z - 1)^2$ и $R = 2\pi$, а $q < e^{2\pi}$. Воспользуемся формулой (**), получим $S(x) = \frac{q^{x+2}}{(q-1)^2} + C_1 z + C_2$. Константы найдем, используя начальные данные, тогда

$$S(x) = \frac{q^{x+2}}{(q-1)^2} - \frac{1}{q-1}x + \frac{1-2q}{(q-1)^2}.$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Определены многомерные аналоги чисел Бернулли и многочленов Бернулли, найдено представление многочленов Бернулли через оператор Тодда, приведены многомерные варианты основного свойства многочленов Бернулли и формул умножения, сложения, дополнения и дифференцирования. Получен многомерный аналог формулы Бернулли для суммы мономов по целым точкам рационального параллелотопа.

2. Введено понятие дискретной первообразной для функций нескольких переменных и получен дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница для решения задачи неопределенного суммирования функций нескольких аргументов.

3. Найдена формула Эйлера – Маклорена для нахождения дискретной первообразной и формула для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа с переменной вершиной, а также аналогичные формулы в задаче суммирования функции по целым точкам симплекса.

Список литературы

- [1] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М.: КомКнига, 2006. — 376 с.
- [2] Данилов О. А. Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора / О. А. Данилов, А. Д. Медных // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. — Т. 9, вып. 2. — С. 38–46.
- [3] Дубинский Ю. А. Задача Коши в комплексной области / Ю. А. Дубинский. — М.: Издательство МЭИ, 1996. — 180 с.
- [4] Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев — Новосибирск: Наука, 1977. — 288 с.
- [5] Егорычев Г. П. Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$ / Г. П. Егорычев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. — Т. 3 — №4. — С. 39–44.
- [6] Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел / Дж. В. С. Касселс — Москва: Издательство „Мир“, 1965. — 421 с.
- [7] Ландо С. К. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.
- [8] Лейнартас Е. К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений / Е. К. Лейнартас // Сиб. мат. журн. 2007. — Т. 48. — №2. — С. 335–340.
- [9] Лейнартас Е. К. Многомерная композиция Адамара и суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования / Е. К. Лейнартас // Сиб. мат. журн. 1989. — Т. 30. — №2. — С. 102–107.

- [10] Лейнартас Е. К. Устойчивость задачи Коши для многомерного разностного оператора и амеба характеристического множества / Е. К. Лейнартас // Сиб. мат. журн. 2011. — Т. 52. — №5. — С. 1087–1095.
- [11] Лейнартас Е. К. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов / Е. К. Лейнартас, М. С. Рогозина // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56. — №1. — С. 111–121.
- [12] Медных А. Д. Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора / А. Д. Медных // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Сб. науч. тр. — Наук. думка, Киев. — 1982. — С. 137–144.
- [13] Некрасова Т. И. Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки / Т. И. Некрасова // Журнал Сибирского Федерального Университета. 2012. — Т. 5, вып. 4. — С. 576–580.
- [14] Некрасова Т. И. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Известия Иркутского государственного университета. 2013. — Т. 6. — №3. — С. 88–96.
- [15] Некрасова Т. И. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Известия Иркутского государственного университета. 2014. — Т. 9. — С. 91–103.
- [16] Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. — М.: Наука, 1982. — 255 с.
- [17] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. — М.: Мир, 1990. — 440 с.
- [18] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции / Р. Стенли. — М.: Мир, 2009. — 767 с.
- [19] Устинов А. В Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера / А. В. Устинов // Матем. заметки. — 2002. V. 71. — №6. — Р. 931–936.

- [20] Устинов А. В Дискретный аналог формулы суммирования Пуассона / А. В. Устинов // Матем. заметки. — 2003. V. 73. — №1. — P. 106–112.
- [21] Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. — перевод с лат., М.-Л., 1949.
- [22] Abramov S.A. On the summation of rational functions / S.A. Abramov // USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1971. — V. 11. — №4. — P. 324–330.
- [23] Appell P. Sur une classe de polynômes / P.Appell // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure Sér. — 1880. V.2. — №9. — P. 119–144.
- [24] Berline N. Local Euler-Maclaurin formula for polytopes / N.Berline, M.Vergne // Moscow Mathematical Society Journal. — 2007. — V. 7. — №3. — P. 355–386.
- [25] Bernoulli J. Ars Conjectandi / Jacob Bernoulli. — Basel, 1713.
- [26] Bousquet-Mélou M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Mélou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics. — 2000. — V. 225. — P. 51–75.
- [27] Brion M. Lattice points in simple polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. — 1997. — V. 10. — №2. — P. 371–392.
- [28] Brion M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of AMS. — 1997. — V. 10. — №4. — P. 797–833.
- [29] Carlitz L. Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials / L. Carlitz // Duke Math. J. — 1959. — V. 26. — P. 694–711.
- [30] Ernst T. q-Bernoulli and q-Euler polynomials, an umbral approach / T. Ernst // International Journal of Difference Equations. — 2006. — V. 1 — №1. — P. 31–80.
- [31] Ernst T. The history of q-calculus and a new method / T. Ernst. — Uppsala, 2000.

- [32] Euler L. Institutiones calculi differentialis / L. Euler. — 1755, new printing Birkhäuser, 1913.
- [33] Fröberg C.-E. Lärobok i numerisk analys / C.-E. Fröberg — Stockholm, 1962.
- [34] Hardy G. Divergent series / G. Hardy. — Oxford University Press. London, 1949.
- [35] Gould H. W. Combinatorial identities / H.W.Gould. — Morgantown printing and binding co., Morgantown WV-USA, 1972.
- [36] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete mathematics / R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. — A foundation for computer science. Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994. xiv+657 pp.
- [37] Lehmer D. H. Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler / D.H. Lehmer // Ann. of Math. — 1935. — V. 36(2). — №3. P. 637–649.
- [38] Leinartas E. K. Constant coefficient linear difference equations on the rational cones of the integer lattice / E. K. Leinartas, T. I. Nekrasova // Siberian Mathematical Journal. — 2016. — V. 57. — №1. — P. 74–85.
- [39] Lenz M. Lattice points in polytopes, box splines, and Todd operators / M. Lenz // International Mathematics Research Notices. — 2015. — V. 14. — P. 5289-5310.
- [40] Nekrasova T. I. On the Cauchy problem for multidimensional difference equations in rational cone / T. I. Nekrasova // Journal of Siberian Federal University. — 2015. — V. 8(2). — P. 184–191.
- [41] Nörlund N.E. Differenzenrechnung/ N.E. Nörlund — Berlin, 1924.
- [42] Polyakov S. A. Indefinite summation of rational functions with factorization of denominators / S.A. Polyakov // Programming and Computer Software. — 2011. — V. 37. — №6. — P. 322-325.

- [43] Pukhlikov A. V. The Riemann–Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes / A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii // St. Petersburg Mathematical Journal. — 1993. — V. 4. — №4. — P. 789–812.
- [44] Raabe J. - L. Die Jacob Bernoullische Funktion / J.-L. Raabe — Zürich, 1848.
- [45] Rota G. - C. The classical umbral calculus / G.-C. Rota, B.D. Taylor // SIAM J. Math. Anal. — 1994. — V. 25. — №2. — P. 694–711.
- [46] Srivastava H. M. Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials / H.M. Srivastava, A. Pintér // Appl. Math. Lett. — 2004. — V. 17. — №4. — P. 375–380.
- [47] Temme N. M. Bernoulli polynomials old and new: Generalization and asymptotics / N. M. Temme // CWI Quarterly. — 1995. — V. 1. — P. 47–66.
- [48] Vandiver H. S. Simple explicit expressions for generalized Bernoulli numbers of the first order / H. S. Vandiver // Duke Math. J. — 1941. — V. 8. — P. 575–584.
- [49] Vergne M. Residue formulae for Verlinde sums, and for number of integral points in convex rational polytopes / M.Vergne // European women in mathematics (Malta, 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ. — 2003. — P. 225–285.
- [50] Zeilberger D. A New Basis for Discrete Analytic Polynomials / D. Zeilberger // J. Austral. Math. Soc. — 1977. — V. 23. — P. 95–104.

Работы автора по теме диссертации

- [51] Шишкина О. А. Формула Эйлера – Маклорена для рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2015. — Т. 13. — С. 56–71.

- [52] Shishkina O. A. The Euler – Maclaurin Formula and Differential Operator of Infinite Order / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. — 2015. V. 8(1). — P. 86–93.
- [53] Шишкина О. А. Многочлены Бернулли от нескольких переменных и суммирование мономов по целым точкам рационального параллелограмма / О. А. Шишкина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2016. — Т. 16 . — С. 89–101.
- [54] Shishkina O. A. Multidimensional Analog of the Bernoulli polynomials and its Properties / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. — 2016. — V. 9(3). — P. 384–392.
- [55] Shishkina O. A. On the generalization of the Euler – Maclaurin formula / O. A. Shishkina // Abstracts of ICDEA 2015 (The 21st International Conference on Difference Equations and Applications, 19-25 July 2015, Białystok, Poland). P. 102-103.
- [56] Шишкина О. А. Формула Эйлера – Маклорена в задаче суммирования функции нескольких переменных / О. А. Шишкина // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: просpekt Свободный - 2015», посвященной 70-летию Великой Победы. Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015. — С. 44–46.
- [57] Шишкина О. А. Метод Эйлера в задаче суммирования функции нескольких переменных по целым точкам рационального параллелограмма / О. А. Шишкина // Сборник материалов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Просpekt Свободный - 2016», посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств. «Математика, информатика: математический анализ и теория функций». Красноярск, 15–25 апреля 2016. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016. — С. 35–38.
- [58] Шишкина О. А. Многочлены Бернулли нескольких переменных в за-

даче суммирования мономов / О. А. Шишкина // тезисы международной конференции по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре (г. Коряжма Архангельской области, Филиал С(А)ФУ им. М. В. Ломоносова, 3–9 августа 2016 года). — С. 123–124.

- [59] Shishkina O. A. Multidimensional analogue of the Bernoulli polynomials and summation of monomials over lattice points of a rational parallelotope. / O. A. Shishkina // Abstracts of Barcelona Analysis Conference 2016. — P.35.
- [60] Шишкина О. А. Обобщение оператора Тодда и многомерный аналог формулы Эйлера-Маклорена /Е.К. Лейнартас, О. А. Шишкина // [Электронный ресурс]: материалы VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (г. Ростов-на-Дону, 11-16 сентября 2016 г.)/ под общ. ред. А.Н. Карапетянца; Дон. гос. техн. ун-т, 2016 – С. 23.