ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Галушина Елена Николаевна

О МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
Щуплев Алексей Валерьевич

Красноярск — 2017

Оглавление

Введение

Всем хорошо известны примеры периодических функций на комплексной плоскости: $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg} z$, $\mathrm{ctg} z$ с периодами 2π и π соответственно. Поднимая вопрос о существовании функций с большим количеством периодов, можно легко убедиться в том, что не существует более двух линейно независимых (над полем вещественных чисел) периодов, а функции, обладающие двумя такими периодами, называются двоякопериодическими.

Из теоремы Лиувилля следует, что аналитические двоякопериодические функции без особых точек являются константами. Среди аналитических двоякопериодических функций с особенностями выделяется класс *эллиптических функций* — не имеющих никаких других особых точек, кроме полюсов в узлах решётки на плоскости.

Изучению эллиптических функций предшествовало накопление знаний об эллиптических интегралах, систематическое описание которых дал А. Лежандр. Развитие эллиптических функций шло двумя путями: К. Якоби в основу теории положил эллиптические функции, которые позже были названы в его честь, и вспомогательные тэта-функции; К. Вейерштрассом был предложен другой подход, базирующийся на $\wp$-функции. С её помощью можно описать все эллиптические функции, так как они все представляются в виде алгебраических выражений от $\wp$-функции и её производной. В современной математике теория эллиптических функций занимает одно из центральных мест: объединяя алгебраические, аналитические и арифметические методы, она связывает различные её области.

В случае нескольких переменных хорошо известны [10] многомерные тэта-функции, заданные в виде экспоненциальных рядов, и построенные с их помощью многомерные эллиптические функции. В начале 1980-х годов итальянский математик П. Заппа дал иное многомерное обобщение $\wp$- и ζ-функций Вейерштрасса в виде дифференциальных форм [53]. Напомним, что для решётки Γ изоморфной $\mathbb{Z}^2$ *ζ-функция Вейерштрасса* задаётся в виде ряда

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2}\right).$$

Слагаемые вида $\frac{1}{z-\gamma}$ можно рассматривать как ядра Коши без дифференциала dz. Тогда, если теперь Γ — решётка максимального ранга в $\mathbb{C}^n$, и $\psi_{BM}\left(z-\gamma\right)$ — ядро Бохнера-Мартинелли с особенностью в γ без голоморфных дифференциалов $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, то ζ-*форма* определяется рядом

$$\zeta\left(z\right) = \psi_{BM}\left(z\right) + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} \left(\psi_{BM}\left(z-\gamma\right) + \psi_{BM}\left(\gamma\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\psi_{BM}}{\partial z_i}\left(\gamma\right) z_i + \frac{\partial\psi_{BM}}{\partial \bar{z}_i}\left(\gamma\right) \bar{z}_i\right)\right).$$

Аналоги $\wp$-функции Вейерштрасса — это формы $\wp^i\left(z\right)$, определённые равенством

$$\wp^i\left(z\right) = -\frac{\partial}{\partial z_i}\zeta\left(z\right).$$

Свойства таким образом определённых дифференциальных форм напоминают свойства классических $\wp$- и ζ-функций Вейерштрасса. Кроме того, они сохраняют воспроизводящее свойство, присущее форме Бохнера-Мартинелли.

В 1995 году Р. Диаз и С. Робинс [31] дали новое доказательство известной формулы Пика:

$$I + \frac{B}{2} - 1 = S,$$

связывающей число I целых точек целочисленного многоугольника внутри него, число B целых точек на границе многоугольника и площадь S этого многоугольника, при помощи ζ-функции Вейерштрасса. Оно основано на том, что интеграл от ζ-функции по замкнутому контуру сводится к интегралам от ядра Коши. Так как вычет ядра Коши равен 0 либо 1 в зависимости от того, попадает ли его особенность внутрь контура или нет, этот факт можно использовать для подсчёта числа особых точек ζ-функции внутри контура.

Аналогичным образом воспроизводящее свойство ζ-формы можно использовать для исследования проблемы числа точек решётки в многомерной области.

Целью данной работы является изучение свойств многомерных аналогов эллиптических функций Вейерштрасса и их применение к задаче оценки числа точек решётки в замыкании области.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать свойства многомерных аналогов эллиптических функций Вейерштрасса.
2. Доказать возможность почленного дифференцирования ряда для ζ-формы.
3. Вычислить такую форму η, чтобы форма $\zeta - \eta$ стала Γ-инвариантной.
4. Получить интегральное представление для разности взвешенного числа точек произвольной решётки максимального ранга в $\mathbb{C}^n$ в замыкании области с кусочно-гладкой границей и её объёма:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \Theta_{\gamma,D} - \mathrm{Vol}\,(D)\,.$$

Научная новизна: Результаты работы являются новыми. Впервые была исследована сходимость рядов для производных ζ-формы, вычислена дифференциальная форма η с линейными коэффициентами такая, что форма $\zeta - \eta$ является Γ-инвариантной. Доказано новое интегральное представление для разности взвешенного числа точек решётки в замыкании области и её объёма.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные автором, являются теоретическими. Их ценность состоит в том, что они могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, алгебраической геометрии, комбинаторике и теории чисел, а также в компьютерной алгебре.

Практическое применение полученных результатов состоит в их внедрении в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов по современным проблемам многомерного комплексного анализа кафедры теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Методология и методы исследования. В работе используются методы многомерного комплексного анализа, в частности, техника теории интегрального представления Бохнера-Мартинелли, теория сходимости многомерных числовых и функциональных рядов.

При вычислении суммы двойного числового ряда использовались методы теории специальных функций и асимптотические оценки, а при исследовании сходимости функционального ряда оценивалась величина производной ядра Бохнера-Мартинелли на компакте.

Доказательство основного результата опирается на фундаментальные свойства интегрального представления Бохнера-Мартинелли. В исследованиях последнего раздела диссертации важную роль сыграла симметрия рассматриваемых множеств.

В процессе исследований для выполнения расчётов и верификации полученных результатов активно использовались методы численного моделирования, а также системы компьютерной алгебры.

Основные результаты:

1. Получена интегральная формула для разности взвешенного числа точек произвольной решётки максимального ранга в $\mathbb{C}^n$ в замыкании области с кусочно-гладкой границей и её объёма. Указанная разность представляется в виде интеграла по границе этой области.
2. Получено новое представление числа π в виде двойного ряда по решётке гауссовых чисел.
3. Получено аналитическое доказательство многомерного аналога формулы Пика для многогранника с вершинами в узлах решётки и центрально-симметричными гипергранями.

Достоверность полученных результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

1. Красноярском городском научном семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (СФУ, 2010-2017 гг);
2. 50-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012 г.);
3. Четвёртом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, 2012 г.);
4. Пятом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, 2014 г.);
5. Международной школе-конференции по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, 2014 г.);
6. Третьей российско-китайской научной конференции по комплексному анализу, алгебре, алгебраической геометрии и математической физике (Москва, 2016 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях и 4 тезисах. Все статьи ([5; 48; 49]) опубликованы в изданиях из перечня, рекомендованного ВАК. Одна статья ([49]) совместная, её результаты получены в нераздельном соавторстве с А.В. Щуплевым. Две другие ([5; 48]) подготовлены лично автором диссертации. Кроме того, для проведения компьютерных экспериментов была разработана программа «Tex2Cpp», зарегистрированная в Федеральной службе по интеллектуальной собственности [18].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 65 страниц, включая 1 рисунок и 2 таблицы. Список литературы содержит 53 наименования.

В **первой главе** даются необходимые сведения об эллиптических функциях одной комплексной переменной, то есть двоякопериодических мероморфных функциях.

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и решётку Γ на ней

$$\Gamma = \{n\gamma_1 + m\gamma_2 | n,m \in \mathbb{Z}\},$$

определённую парой комплексных чисел γ_1 и γ_2 со свойством $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Очевидно, что линейным преобразованием любая такая решётка приводится к виду $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, где $\mathrm{Im}\tau > 0$, поэтому в рамках первой главы будем считать, что решётка Γ задана именно в таком виде. Будем рассматривать эллиптические функции с множеством периодов Γ. В основе подхода К. Якоби к определению эллиптических функций лежат вспомогательные тэта-функции.

Определение 1. Тэта-функцией называется сумма ряда

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i n z}.$$

Сами тэта-функции являются квазипериодическими функциями, то есть сдвигу аргумента на любой элемент решётки периодов соответствует умножение функции на экспоненциальный множитель. Однако, отношение двух тэта-фукнций, ассоциированных с одной и той же решёткой, представляет собой двоякопериодическую функцию.

Другой подход в теории эллиптических функций был предложен К. Вейерштрассом, который перестроил всю теорию, используя $\wp$-функцию

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right), \tag{1}$$

где $\Gamma' = \Gamma \setminus \{0\}$, и связанные с ней функции

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \right),$$

$$\sigma(z) = z \prod_{\gamma \in \Gamma'} \left(1 - \frac{z}{\gamma} \right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\gamma}}.$$

Несмотря на разницу в подходах к построению теории эллиптических функций, между основополагающими функциями существуют связывающие их формулы. Одна из них заключается в следующем тождестве

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2} \ln \Theta_{11}(z) + c,$$

где $\Theta_{11}(z) = -\theta\left(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}, \tau\right)$.

В случае гауссовой решётки $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ константа c равна $-\pi$. Для этой константы существует интегральное представление

$$\pi = -c = \int\limits_0^1 \wp(x - p)\, dx,$$

откуда можно получить представление для π в виде двойного ряда

Теорема 1.

$$\pi = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Также мы приводим прямое вычисление суммы этого ряда, опубликованное в [5].

В рамках исследования были проведены компьютерные эксперименты по вычислению знаков числа π с помощью полученного представления в виде двойного ряда. Скорость сходимости данного ряда невысокая и зависит от выбора точки p. В ходе компьютерных экспериментов была разработана компьютерная программа, которая преобразует математические формулы, записанные в формате TEX, в программы для их вычисления на языке программирования C++ [18]. Программа способна интерпретировать арифметические операции, операции с комплексными числами, элементарные математические функции, индексированные суммы, операции с векторами.

Во **второй главе** приводятся многомерные аналоги $\wp$- и ζ-функций, исследуются их свойства.

Пусть ψ_{BM} — ядро интегрального представления Бохнера-Мартинелли с особенностью в нуле без голоморфных дифференциалов:

$$\psi_{BM}\left(z\right)=\frac{\left(n-1\right)!}{\left(2\pi i\right)^{n}}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k-1}\bar{z}_{k}d\bar{z}\left[k\right]}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left|z_{j}\right|^{2}\right)^{n}},$$

где $d\bar{z}\left[k\right]=d\bar{z}_1\wedge...\wedge d\bar{z}_{k-1}\wedge d\bar{z}_{k+1}\wedge...\wedge d\bar{z}_n$. Обозначим через $\varphi_i\left(z,\gamma\right)$ производную смещённой на γ формы Бохнера-Мартинелли по z_i:

$$\varphi_i\left(z,\gamma\right)=-\frac{\partial}{\partial z_i}\psi_{BM}\left(z-\gamma\right),$$

Пусть Γ — решётка максимального ранга в пространстве $\mathbb{C}^n$. Следуя [53], введём аналоги $\wp$-функции Вейерштрасса:

$$\wp^{i}\left(z\right)=\varphi_i\left(z,0\right)+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\left(\varphi_i\left(z,\gamma\right)-\varphi_i\left(0,\gamma\right)\right)$$

и ζ-функции Вейерштрасса

$$\zeta\left(z\right)=\psi_{BM}\left(z\right)+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\Bigg(\psi_{BM}\left(z-\gamma\right)+\psi_{BM}\left(\gamma\right)-\\-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_{BM}}{\partial z_i}\left(\gamma\right)z_i+\frac{\partial\psi_{BM}}{\partial\bar{z}_i}\left(\gamma\right)\bar{z}_i\right)\Bigg).$$

Свойства ζ- и $\wp^i$-форм напоминают свойства ζ- и $\wp$-функций Вейерштрасса. В частности, формы $\wp^i$ являются Γ-инвариантными и

$$\wp^{i}=-\frac{\partial}{\partial z_i}\zeta.$$

Кроме того, и ζ-, и $\wp^i$-формы обладают восстанавливающим свойством.

В **разделе 2.2** мы исследуем свойства ζ-формы. Равномерная сходимость ряда для ζ-формы и её голоморфных производных, то есть для $\wp^i$-форм, доказана П. Заппой [51]. Мы доказываем сходимость рядов, представляющих антиголоморфные производные ζ-формы:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\zeta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\frac{(-1)^{i-1}\|z\|^2 d\bar{z}[i] - n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} z_i\bar{z}_k d\bar{z}[k]}{\|z\|^{2n+2}} + \right.$$
$$+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\left[\frac{(-1)^{i-1}\|z-\gamma\|^2 d\bar{z}[i] - n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(z_i-\gamma_i)(\bar{z}_k-\bar{\gamma}_k)d\bar{z}[k]}{\|z-\gamma\|^{2n+2}} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{(-1)^{i-1}\|\gamma\|^2 d\bar{z}[i] - n\sum_{k=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_k d\bar{z}[k]}{\|\gamma\|^{2n+2}}\right]\right). \quad (2)$$

Предложение 2. *Ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$.*

Таким образом, ряд для ζ-формы можно почленно дифференцировать. Кроме того, доказывается, что для $\gamma \in \Gamma$ разность

$$\zeta(z+\gamma) - \zeta(z)$$

зависит только от γ.

Для вычисления характеристик областей в $\mathbb{C}^n$, инвариантных относительно сдвига на элемент решётки, каковой, очевидно, является число точек решётки в ней, естественно использовать Γ-периодические выражения, в то время как ζ-форма не Γ-периодическая. Поэтому в **разделе 2.3** мы вычисляем форму $\eta(z)$ с коэффициентами, линейно зависящими от γ и $\bar{\gamma}$

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(L^1_{kj}z_j + N^1_{kj}\bar{z}_j\right)\alpha_{mk} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\left(L^2_{kj}z_j + N^2_{kj}\bar{z}_j\right)\beta_{mk}\right)d\bar{z}[m], \quad (3)$$

где матрицы L^1, N^1, L^2, N^2 и константы α_{mk}, β_{mk} зависят от векторов, порождающих решётку Γ.

Предложение 3. *Для любой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus \Gamma$ и точки $\gamma \in \Gamma$*

$$\zeta(z+\gamma) - \zeta(z) = \eta(\gamma),$$

где $\eta(z)$ задана формулой (3).

Затем определяем форму $\tau(z)$ такую, что имеет место

Теорема 3. *Форма $\tau(z) = \zeta(z) - \eta(z)$ является Γ-инвариантной.*

В случае целочисленной решётки $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^n$ матрицы L^1, N^1, L^2, N^2 имеют вид $L^1 = \frac{1}{2}E$, $L^2 = -\frac{i}{2}E$, $N^1 = \frac{1}{2}E$, $N^2 = \frac{i}{2}E$, где E — единичная матрица, а форма η значительно упрощается:

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{mk} \cdot \mathrm{Re} z_k + \beta_{mk} \cdot \mathrm{Im} z_k)\, d\bar{z}[m]$$

Кроме того, между коэффициентами α_{mk} и β_{mk} существует следующая связь.

Предложение 4. *Если $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^n$, то*

$$\begin{aligned} \beta_{mk} &= \alpha_{mk}, \quad k \neq m, \\ \beta_{mk} &= -i\alpha_{mk}, \quad k = m. \end{aligned}$$

Таким образом, для целочисленной решётки форму $\eta(z)$ можно записать следующим образом [49]:

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} (\delta_{mk} \bar{z}_k + (1 - \delta_{mk}) (\mathrm{Re} z_k + \mathrm{Im} z_k)) \cdot d\bar{z}[m].$$

В **третьей главе** полученные результаты о свойствах ζ-формы применяются к исследованию проблемы числа точек решётки в замыканиях областей.

Раздел 3.1 посвящён доказательству основного результата диссертации — интегрального представления для разности взвешенного числа точек решётки в замыкании области и её объёма.

Обозначим $\Theta_{z_0,D}$ величину телесного угла области D в точке z_0. Очевидно, что если $z_0 \in D$, то телесный угол D в точке z_0 есть полный телесный угол, и $\Theta_{z_0,D} = 1$. Аналогично, если $z_0 \notin \overline{D}$, то $\Theta_{z_0,D} = 0$.

Определение 5. *Взвешенным числом точек решётки Γ в замыкании области D назовём $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma,D}$.*

Теорема 4. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей, тогда*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\Theta_{\gamma,D}-\mathrm{Vol}\,(D)=\mathrm{v.p.}\int\limits_{\partial D}\tau\,(z)\wedge dz, \tag{4}$$

где $\mathrm{Vol}\,(D)$ *— объём области D, нормированный условием, что объём фундаментального параллелепипеда периодов решётки Γ равен 1.*

Формула (4) верна лишь для комплексных, то есть чётномерных вещественных пространств. Поэтому в **разделе 3.2** мы рассматриваем случай областей в $\mathbb{R}^n$. Пусть D — область с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, а $\Gamma_{\mathbb{R}}$ — решётка максимального ранга в $\mathbb{R}^n$, порождённая векторами $\nu_1,..,\nu_n$. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как вещественное подпространство $\mathbb{C}^n$ и определим в нём решётку $\Gamma=\Gamma_{\mathbb{R}}\oplus i\mathbb{Z}^n$, порождённую векторами $\nu_1,...,\nu_n$ и

$$\mu_1=(i,0,...,0)$$
$$...$$
$$\mu_n=(0,0,...,i)\,.$$

Область $\widetilde{D}=D+iU^n$, где $U^n=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]^n$ — n-мерный единичный куб, имеет кусочно-гладкую границу и к ней можно применить результат Теоремы 4.

Таким образом, верна

Теорема 5. *Пусть D — область с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, тогда*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathbb{R}}}\Theta_{\gamma,D}-\mathrm{Vol}\,(D)=\mathrm{v.p.}\int\limits_{\partial\widetilde{D}}\tau\,(z)\wedge dz.$$

В **разделе 3.3** приводится аналитическое доказательство многомерного аналога формулы Пика ([26], [37]) для решётчатых многогранников с центрально-симметричными гипергранями.

Определение 6. *Пусть Γ — решётка максимального ранга в $\mathbb{C}^n$. Решётчатым многогранником в $\mathbb{C}^n$ называется многогранник с вершинами в точках решётки Γ.*

Для таких многогранников верна

Лемма 2. *Если гипергрань Q решётчатого многогранника обладает центральной симметрией, то*

$$\int\limits_{Q} \tau\left(z\right) \wedge dz = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 6. *Если D — решётчатый многогранник, гиперграни которого обладают центральной симметрией, то*

$$\mathrm{Vol}\left(D\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma,D}.$$

В случае плоского многоугольника последнее равенство превращается в формулу Пика, так как с учётом известного факта, что сумма углов n-угольника равна $\pi\left(n-2\right)$, сумма телесных углов приобретает вид

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma,D} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Заметим, что не все такие многогранники являются зонотопами ([38], [39]). Кроме того, из Леммы 2 легко получить следующую теорему.

Теорема 7. *Если D — n-мерная решётчатая призма, то*

$$\mathrm{Vol}\left(D\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma,D}.$$

Результаты этого раздела доказаны в предположении, что D — область в $\mathbb{C}^n$. Однако, формулы в теоремах 4 и 5 различаются только областями, по границе которых ведётся интегрирование. Так как в условиях теорем 6 и 7 эти интегралы равны нулю, то они верны и для областей в вещественном пространстве.

Глава 1. Эллиптические функции

В начале XIX века математики активно работали над расширением возможностей математического анализа с помощью включения в его сферу функций, не являющихся элементарными. Новые классы функций должны были быть изучены так же тщательно и глубоко, как это было сделано с элементарными функциями. Этот процесс шёл и на протяжении всего XVIII века, а в XIX веке он существенно систематизировался и ускорился. Для изучения специальных функций применялись общие методы теории аналитических функций. Это приводило к взаимообогащению этих теорий: накапливался массив новых фактов и возникали вопросы, стимулирующие и определяющие направление дальнейшего развития теории.

Особую роль среди специальных функций играли эллиптические функции. Это объясняется универсальностью алгебраических, аналитических и топологических свойств этого класса функций, которая служила источником новых идей и позволяла связывать различные разделы математики. Своим рождением теория эллиптических функций обязана К. Гауссу, Н. Абелю и К. Якоби, рассматривавшим обращения эллиптических интегралов, оказавшиеся двоякопериодическими. Именно это свойство позволило затем Б. Риману рассматривать эллиптические функции на торах $S^1 \times S^1$, и тем самым дать геометрическую трактовку предыдущих известных результатов об эллиптических и гиперэллиптических интегралах (см. [44]).

В первой половине XIX века эллиптическими функциями заинтересовался К. Вейерштрасс, который занимался построением строгой аналитической теории функций комплексного переменного. Особое значение он придавал обоснованию степенных рядов и произведений, которые К. Гаусс, Н. Абель и К. Якоби использовали в полной мере. Имея разложение в виде бесконечного произведения гамма-функции Эйлера, К. Вейерштрасс определил квазипериодическую сигма-функцию (1.5) в виде бесконечного произведения, на основе которой он перестроил всю теорию эллиптических функций. Подробный исторический обзор можно найти в [4; 11; 27; 47]

В этой главе мы вводим основные понятия и рассматриваем свойства эллиптических и тэта-функций Якоби (раздел 1.2), эллиптических функций Вейерштрасса (раздел 1.3), исследуем связь эллиптических функций Вейерштрасса и эллиптических функций Якоби (раздел 1.4), пользуясь которой в разделе 1.5 получено новое представление для числа π в виде двойного ряда.

1.1 Обращение эллиптических интегралов

Эллиптическими интегралами называются интегралы вида

$$\int\limits_c^x R\left(t, \sqrt{P(t)}\right) dt,$$

где R — рациональная функция, а P — многочлен степени 3 или 4 без кратных корней. Название таких интегралов связано с тем, что впервые они появились при спрямлении дуги эллипса и других кривых второго порядка.

Проблема нахождения таких интегралов в замкнутом виде (то есть в терминах элементарных функций) занимала многих математиков XVII-XIX веков. Если P — квадратный трёхчлен, то хорошо известно, что такой интеграл вычисляется в элементарных функциях, например, при помощи подстановок Эйлера, а относительно эллиптических интегралов ещё в 1694 году Я. Бернулли предположил, что это в общем случае невозможно. Гипотеза Бернулли подтвердилась только в 1833 году после работ Ж. Лиувилля.

Рассмотрим эллиптический интеграл, появляющийся при вычислении дуги лемнискаты

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2,$$

который рассматривал Я. Бернулли.

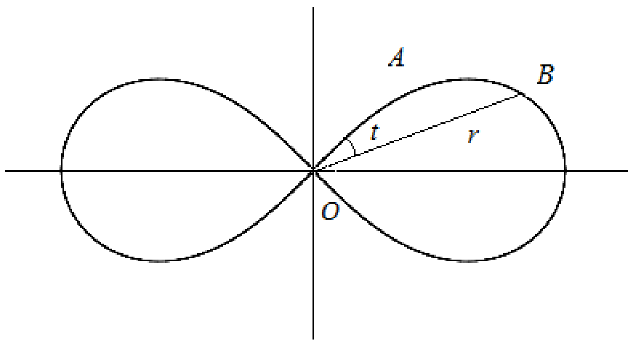

Рисунок 1.1 — Лемниската Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$

В полярной системе координат кривая задаётся уравнением

$$r^2 = \cos 2\varphi, \tag{1.1}$$

и длина дуги OAB равна

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}d\varphi = \int_0^t \frac{d\varphi}{r}.$$

Подставив выражение для φ, полученное из (1.1), придём к интегралу

$$u(t) = \int_{\sqrt{\cos 2t}}^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}. \tag{1.2}$$

Этот интеграл рассматривал К. Гаусс в 1797 году [47] и заметил, что вместо функции $u(t)$ следует рассматривать обращение этого интеграла $t(u)$ также, как вместо

$$u(t) = \int_0^t \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \arcsin t$$

удобнее изучать обращение арксинуса — $t = \sin u$.

Функция (1.2) называется лемнискатическим синусом $\mathrm{sl}(u)$ и имеет период

$$2\varpi = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

равный длине лемнискаты. Однако,

$$\frac{d(it)}{\sqrt{1-(it)^4}} = i\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

поэтому лемнискатический синус имеет также $2i\varpi$ в качестве периода, и является, таким образом, двоякопериодической функцией.

В 1827-1828 годах Н. Абель опубликовал серию работ ([20], [21], [22]), в которых обобщил результаты Л. Эйлера и А.М. Лежандра по эллиптическим интегралам и, фактически, переоткрыл подход и (неопубликованные) результаты К. Гаусса.

В то же самое время К. Якоби, подобно К. Гауссу и Н. Абелю, но независимо от них, рассматривал обращения эллиптических интегралов Лежандра. В своей работе [34], посвящённой преобразованиям эллиптических интегралов, он развил теорию эллиптических функций как обращений интегралов и показал, что эти функции можно получить как отношения бесконечных произведений — тэта-функций.

1.2 Эллиптические и тэта-функции Якоби

Рассмотрим эллиптический интеграл первого рода в нормальной форме Лежандра:

$$u\left(\varphi\right)=\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\phi}}, \tag{1.3}$$

где $0\leqslant k\leqslant 1$. Выполним подстановку $z=\sin\phi$. Тогда, обозначив $x=\sin\varphi$, получим тот же интеграл в форме Якоби

$$u\left(x\right)=\int\limits_{0}^{x}\frac{dz}{\sqrt{\left(1-z^{2}\right)\left(1-k^{2}z^{2}\right)}}. \tag{1.4}$$

К. Якоби ввёл обратную функцию к $u\left(x\right)$, которую в настоящее время обозначают как $\mathrm{sn}u$

$$x=\mathrm{sn}u=\sin\varphi.$$

Вместе с функцией $\mathrm{sn}u$, К, Якоби рассмотрел еще две функции (используем современные обозначения)

$$\mathrm{cn}u=\cos\varphi,$$
$$\mathrm{dn}u=\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\varphi}.$$

Функция Якоби $\mathrm{sn}u$ действительного аргумента u обладает периодом $4K$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\phi}}.$$

Функции $\mathrm{cn}u$ и $\mathrm{dn}u$ также периодические с периодами $4K$ и $2K$, соответственно.

Заменив x на ix в интеграле (1.4), К. Якоби определил функцию u для чисто мнимых значений аргумента. Применив теорему сложения, он распространил определение всех трёх эллиптических функций на случай произвольного комплексного аргумента. При этом обнаружилось, что у функции $\mathrm{sn}u$ есть и комплексный период

$$2iK' = 2i\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\phi}},$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$, у функции $\mathrm{cn}u$ — $2K + 2iK'$, у функции $\mathrm{dn}u$ — $4iK'$. Таким образом, функции Якоби двоякопериодические.

Можно дать эквивалентное определение эллиптическим функциям Якоби, используя введённые им тэта-функции. Для этого рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и решётку Γ на ней:

$$\Gamma = \left\{ n\gamma_1 + m\gamma_2 | n,m \in \mathbb{Z}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \right\}.$$

Для двоякопериодической функции с минимальными периодами γ_1 и γ_2 множество Γ называется множеством периодов. Параллелограмм с вершинами в точках 0, γ_1, $\gamma_1+\gamma_2$, γ_2 называется *фундаментальным параллелограммом периодов.* Очевидно, что всю комплексную плоскость можно замостить подобными параллелограммами. Чтобы исключить возможность пересечения параллелограммов, будем присоединять к внутренности параллелограмма также вершину z_0 и открытые отрезки $(z_0, z_0+\gamma_1)$, $(z_0, z_0+\gamma_2)$. Заметим, что линейным преобразованием любая решётка приводится к виду $\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\tau > 0$. Обозначим также

$$q = e^{2\pi i\tau}.$$

Определение 1. Тэта-функцией называется сумма ряда

$$\theta(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2\pi i n z}.$$

Замечание 1. Сам К. Якоби определял тэта-функции как бесконечные произведения, например, [7, стр. 204]

$$\theta(z,q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}e^{2\pi i z}\right)\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}e^{-2\pi i z}\right).$$

Определение в виде суммы выше (по Эрмиту [27]) в настоящее время используется чаще.

Ряд для $\theta(z,q)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве в $\mathbb{C} \times H$ (H — верхняя полуплоскость) [19, стр. 335]. Тэта-функция является квазипериодической, то есть сдвигу аргумента на любой элемент решётки периодов соответствует умножение функции на экспоненциальный множитель. Действительно, по определению:

$$\theta(z + a\tau + b,q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+a\tau+b)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau + 2\pi i n z + 2\pi i n a\tau + 2\pi i n b}.$$

Выделим в показателе экспоненты полный квадрат относительно n:

$$\theta(z + a\tau + b,q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau(n+a)^2} e^{-\pi i\tau a^2} e^{2\pi i n z} e^{2\pi i n b}.$$

Обозначим $n + a = m$:

$$\theta(z + a\tau + b,q) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau m^2} e^{-\pi i\tau a^2} e^{2\pi i(m-a)z} e^{2\pi i(m-a)b}.$$

Вынесем независящий от индекса суммирования множитель за знак суммы и учтём периодичность экспоненты по мнимой оси:

$$\theta(z + a\tau + b,q) = e^{-\pi i\tau a^2 - 2\pi i a z} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau m^2} e^{2\pi i m z} = e^{-\pi i\tau a^2 - 2\pi i a z}\theta(z,q).$$

Обычно в теории эллиптических функций рассматриваются 4 тэта-функции:

$$\theta_1(z,q) = -e^{\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i\left(z+\frac{1}{2}\right)}\theta\left(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}; q\right) = -e^{\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i\left(z+\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{\pi i n(2z+1)} e^{\pi i n\tau};$$

$$\theta_2(z,q) = e^{\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i z}\theta\left(z + \frac{1}{2}\tau; q\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2\pi i n z} e^{\pi i n\tau};$$

$$\theta_3(z,q) = \theta(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2\pi i n z};$$

$$\theta_4(z,q) = \theta\left(z + \frac{1}{2}; q\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{\pi i n(2z+1)}.$$

Замечание 2. В литературе используются разные системы обозначений. В таблице 1 приведены некоторые из них.

Таблица 1 — Обозначения тэта-функций

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	
$-\Theta_{11}$	Θ_{10}	Θ_{00}	Θ_{01}	Мамфорд [10]
$\vartheta_1(\pi z)$	$\vartheta_2(\pi z)$	$\vartheta_3(\pi z)$	$\vartheta(\pi z)$	Уиттекер [19]

Часто q в аргументах тэта-функции опускается, так как он связан с зафиксированной решёткой.

Все тэта-функции, очевидно, квазипериодические. В силу квазипериодичности, отношение двух тэта-функций, ассоциированных с одной и той же решёткой, представляет собой двоякопериодическую функцию. В качестве примера приведём выражения для эллиптических функций Якоби [19, стр. 376]:

$$\mathrm{sn}\,(u) = \frac{\theta_3\,(0; q)\,\theta_1\,(z; q)}{\theta_2\,(0; q)\,\theta_4\,(z; q)},$$

$$\mathrm{cn}\,(u) = \frac{\theta_4\,(0; q)\,\theta_2\,(z; q)}{\theta_2\,(0; q)\,\theta_4\,(z; q)},$$

$$\mathrm{dn}\,(u) = \frac{\theta_4\,(0; q)\,\theta_3\,(z; q)}{\theta_3\,(0; q)\,\theta_4\,(z; q)},$$

где

$$z = \frac{u}{\pi\theta_3\,(0; q)}.$$

Определение 2. Эллиптической функцией называется двоякопериодическая мероморфная функция.

Таким образом, любая эллиптическая функция имеет представление в виде отношения тэта-функций [19, стр. 350], ассоциированных с одной решёткой. Очевидно, эллиптические функции образуют поле.

1.3 Эллиптические функции Вейерштрасса

В 1874/75 К. Вейерштрасс читал курс лекций по теории аналитических функций. Среди прочих в нём рассматривался такой вопрос: существуют ли однозначные аналитические функции, значения которых в точках u, v и $\frac{u+v}{2}$ связаны алгебраическим соотношением, то есть для которых существует алгебраическая теорема сложения. К тому времени К. Вейерштрасс доказал, что такие функции существуют, и их три типа: алгебраические, алгебраические функции экспоненты, алгебраические функции эллиптических функций.

Однако в течение лекций он стал исследовать вопрос как построить эллиптическую функцию по известным нулям и полюсам и получил представление такой функции с помощью σ-функции [27]

$$\sigma(z) = z \prod_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0,0\}} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\gamma}}. \tag{1.5}$$

В качестве же основной функции для развития своей теории он взял $\wp$-функцию.

Определение 3. $\wp$-функцией Вейерштрасса называется функция

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right), \tag{1.6}$$

где $\Gamma' = \left\{m + \tau n | m,n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}\right\}$

К. Вейерштрасс назвал $\wp$-функцию «одной из важнейших в своём анализе» [27, стр. 426].

Действительно, $\wp$-функция оказалась обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

к которому можно привести любой интеграл вида $\int \frac{dt}{\sqrt{p(t)}}$, где p — многочлен 3 или 4 степени (см., например, [47, стр. 233]), для специальных значений

$$g_2 = 60 \sum_{\gamma\in\Gamma'} \frac{1}{\gamma^4}, g_3 = 140 \sum_{\gamma\in\Gamma'} \frac{1}{\gamma^6}.$$

$\wp$-функция Вейерштрасса — чётная двоякопериодическая функция от z:

$$\wp(-z) = \wp(z), \ \ \wp(z+\gamma) = \wp(z), \gamma \in \Gamma.$$

Можно показать, что любая эллиптическая функция $f(z)$ может быть выражена через $\wp$- и $\wp'$-функции Вейерштрасса, причём это выражение рационально относительно $\wp(z)$ и линейно относительно $\wp'(z)$ [12].

Функция $-\wp$ является производной функции

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \right), \tag{1.7}$$

которую называют ζ-функцией Вейерштрасса:

$$-\wp(z) = \zeta'(z).$$

Функция $\zeta(z)$ также является логарифмической производной σ-функции Вейерштрасса:

$$\frac{d}{dz}\ln\sigma(z) = \zeta(z).$$

1.4 Связь эллиптических функций Вейерштрасса и функций Якоби

Несмотря на то, что К. Якоби в основу теории эллиптических функций положил тэта-функции, а теория К. Вейерштрасса базируется на $\wp$-функции, эти подходы эквиваленты. Если через e_1, e_2, e_3 обозначить корни уравнения

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0,$$

то $\wp$-функция Вейерштрасса и эллиптические функции Якоби связаны следующим равенством [35, стр. 847]:

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2 w} = e_2 + (e_1-e_3)\frac{\mathrm{dn}^2 w}{\mathrm{sn}^2 w} = e_1 + (e_1-e_3)\frac{\mathrm{cn}^2 w}{\mathrm{sn}^2 w},$$

где модуль k, фигурирующий в формуле (1.3), равен

$$k \equiv \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}},$$

а их аргумент $w = z\sqrt{e_1-e_3}$.

С тэта-функциями $\wp$-функция Вейерштрасса связана следующим равенством [10, стр. 29]:

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\ln\Theta_{11}(z) + c, \tag{1.8}$$

где

$$\Theta_{11}(z) = e^{\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i\left(z+\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{\pi i n(2z+1)} e^{\pi i n\tau} =$$

$$= e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} e^{\pi i z} e^{\frac{\pi i}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau n^2} e^{2\pi i n z} e^{\pi i n} e^{\pi i n\tau} =$$

$$= i\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i z(2n+1)} e^{\pi i\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},$$

константа c выбирается так, чтобы ряд Лорана для функции $\wp(z)$ при $z=0$ не содержал членов нулевой степени [10, стр. 29]. Напомним, что $\Theta_{11} = -\theta_1$ (замечание 2). Для доказательства последнего тождества и вычисления значения c воспользуемся представлением Якоби для θ_1 в виде бесконечного произведения [19, стр. 344]:

$$\theta_1(z) = 2\sin(\pi z)\, q^{\frac{1}{8}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n e^{2\pi i z}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n e^{-2\pi i z}\right).$$

Прологарифмируем данное равенство:

$$\ln\theta_1 = \ln 2 + \ln(\sin\pi z) + \frac{1}{8}\ln q + \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-q^n) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-q^n e^{2\pi i z}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-q^n e^{-2\pi i z}\right)$$

и найдем производную по z:

$$(\ln\theta_1)' = \pi\mathrm{ctg}(\pi z) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2\pi i q^n e^{2\pi i z}}{1-q^n e^{2\pi i z}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi i q^n e^{-2\pi i z}}{1-q^n e^{-2\pi i z}}.$$

Поскольку в параллелограмме периодов верно разложение в сумму геометрической прогрессии

$$\frac{q^n e^{\pm 2\pi i z}}{1-q^n e^{\pm 2\pi i z}} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{nk} e^{\pm 2\pi i k z},$$

то (с учётом формулы Эйлера):

$$(\ln\theta_1)' = \pi \mathrm{ctg}\,(\pi z) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 2\pi i q^{nk} e^{2\pi i k z} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 2\pi i q^{nk} e^{-2\pi i k z} =$$

$$= \pi \mathrm{ctg}\,(\pi z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \pi q^{nk}\left(-2ie^{2\pi i k z} + 2ie^{-2\pi i k z}\right)\right] =$$

$$= \pi \mathrm{ctg}\,(\pi z) + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k \sin 2\pi k z}{1-q^k}.$$

Теперь воспользуемся формулами разложения в ряд Тейлора для $\mathrm{ctg} z$ и $\sin z$:

$$(\ln\theta_1)' = \frac{1}{z} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n} 2^{2n} \pi^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n-1} +$$

$$+ 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^k}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}\pi^{2n-1}k^{2n-1}}{(2n-1)} z^{2n-1}\right],$$

где B_{2n} — числа Бернулли.

Поменяем порядок суммирования во второй сумме, сгруппируем суммирование по одинаковым индексам и вынесем общий множитель за скобки:

$$(\ln\theta_1)' = \frac{1}{z} + \pi \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{2n} - 4n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{1-q^k}k^{2n-1}\right)(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}\pi^{2n-1}z^{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{z} + \pi \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{2n}E_{2n}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}\pi^{2n-1}z^{2n-1}\right),$$

где E_{2n} — ряд Эйзенштейна в терминах q:

$$E_{2n} = 1 - \frac{4n}{B_{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2n-1}q^k}{1-q^k}.$$

Продифференцируем $(\ln\theta_1)'$ еще раз:

$$-(\ln\theta_1)'' = \frac{1}{z^2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{2n}E_{2n}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\pi^{2n-1}(2n-1)}{(2n)!}z^{2n-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + 2\pi^2 B_2 E_2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{2n+2}E_{2n+2}(-1)^n \frac{2^{2n+2}\pi^{2n+1}(2n+1)}{(2n+2)!}z^{2n}\right).$$

Воспользуемся разложением $\wp$-функции Вейерштрасса в ряд Лорана [25, стр. 11]:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, G_{2n+2} z^{2n},$$

где G_{2n+2} — ряд Эйзенштейна

$$G_{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+k\tau)^{2n+2}}.$$

Используя альтернативное определение ряда Эйзенштейна [46, стр. 92]

$$G_{2n+2} = 2\zeta(2n+2)\, E_{2n+2},$$

где ζ — это ζ-функция Римана, получим

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, 2\zeta(2n+2)\, E_{2n+2} z^{2n}.$$

Для ζ-функции Римана существует следующее представление [23, стр. 807]:

$$\zeta(2n+2) = \frac{(-1)^n B_{2n+2} (2\pi)^{2n+2}}{2(2n+2)!},$$

тогда

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{(-1)^n B_{2n+2} (2\pi)^{2n+2}}{(2n+2)!} E_{2n+2} z^{2n}.$$

Сравнивая полученные для $\wp$-функции и $-(\ln\theta_1)''$ ряды, получим, что равенство (1.8) верно при $c = -2\pi^2 B_2 E_2$. Поскольку $B_2 = \frac{1}{6}$, то окончательно

$$c = -\frac{\pi^2 E_2}{3}.$$

В случае гауссовой решётки $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$, то есть $\tau = i$, ряд E_2 принимает вид:

$$E_2 = 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k e^{-2\pi k}}{1 - e^{-2\pi k}}.$$

Пользуясь известным тождеством [13, стр. 718]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{2\pi k} - 1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi},$$

получаем, что $E_2 = \frac{3}{\pi}$. Таким образом, имеем $c = -\pi$, и

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2} \ln(-\theta_1(z)) - \pi.$$

1.5 Представление числа π в виде двойного ряда

В статье Р. Диаза и С. Робинса [31] было доказано, что

$$\pi = \int_0^1 \wp(x-p)\, dx, \tag{1.9}$$

где p — точка из внутренности фундаментального параллелограмма периодов решётки Γ. Вычислим этот интеграл, интегрируя почленно ряд (1.6).

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-p)^2} + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left[\frac{dx}{(x-\gamma-p)^2} - \frac{dx}{\gamma^2}\right] = \\ &= -\frac{1}{x-p}\bigg|_0^1 + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left[-\frac{1}{x-\gamma-p}\bigg|_0^1 - \frac{x}{\gamma^2}\bigg|_0^1\right] = \\ &= -\left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2}\right]\right). \end{aligned}$$

Таким образом, верна

Теорема 1.

$$\pi = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2}\right]. \tag{1.10}$$

Приведем другое доказательство этой теоремы, непосредственно вычислив сумму ряда S.

Доказательство. Так как ряд (1.10) сходится абсолютно и равномерно, то есть при любом исчерпании множества суммирования. Представим его в виде предела частичных сумм по квадратам $Q_k = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \max\{|n|, |m|\} \leqslant k\right\}$ так, что

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2}\right] = \lim_{k\to\infty} S_k, \tag{1.11}$$

где

$$S_k = S_{k-1} + \sum_{\max\{|n|,|m|\}=k} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2}\right], k \in \mathbb{N} \text{ и}$$

$$S_0 = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p}.$$

Иначе говоря, S_k есть сумма членов ряда по всем точкам γ решётки Γ', лежащим внутри и на границе квадрата Q_k с вершинами в точках $ki+k$, $ki-k$, $-ki-k$, $-ki+k$.

Можно показать, что

$$S_k = \sum_{t=-k}^{k} \frac{1}{it+1+k-p} - \frac{1}{it-k-p}.$$

Для этого воспользуемся методом математической индукции. Проверим базис индукции: при $k=0$ равенство очевидно.

Рассмотрим случай $k=1$:

$$S_1 = S_0 + \sum_{\max\{|n|,|m|\}=1} \left[\frac{1}{1-ni-m-p} + \frac{1}{ni+m+p} + \frac{1}{(ni+m)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} + \left[\frac{1}{1-1-p} + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{1-1-i-p} + \frac{1}{1+i+p} + \frac{1}{(1+i)^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{1-i-p} + \frac{1}{i+p} + \frac{1}{i^2}\right] + \left[\frac{1}{1-i+1-p} + \frac{1}{-1+i+p} + \frac{1}{(i-1)^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{1+1-p} + \frac{1}{-1+p} + \frac{1}{(-1)^2}\right] + \left[\frac{1}{1+1+i-p} + \frac{1}{-1-i+p} + \frac{1}{(-i)^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{1+i-p} + \frac{1}{-i+p} + \frac{1}{(-1-i)^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{1-1+i-p} + \frac{1}{1-i+p} + \frac{1}{(1-i)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1-i+p} + \frac{1}{1+i+p} + \frac{1}{2-p} + \frac{1}{2+i-p} + \frac{1}{2-i-p} =$$

$$= \sum_{t=-1}^{1} \left[\frac{1}{ti+k+1-p} + \frac{1}{-ti+k+p} \right].$$

Прежде чем проверить шаг индукции, докажем, что

$$\sum_{\substack{\max\{|n|,|m|\} \leqslant k \\ (n,m) \neq (0,0)}} \frac{1}{(ni+m)^2} = 0.$$

Действительно:

$$\sum_{\max\{|n|,|m|\}\leqslant k} \frac{1}{(ni+m)^2} = \sum_{-k\leqslant n<0,} \sum_{-k\leqslant m\leqslant k} \frac{1}{(ni+m)^2} +$$

$$+ \sum_{n=0} \sum_{-k<m<k} \frac{1}{m^2} + \sum_{0<n\leqslant k,} \sum_{-k\leqslant m\leqslant k} \frac{1}{(ni+m)^2} =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} + \sum_{-k<m<k} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{(ni+m)^2} + \frac{1}{(-ni+m)^2} \right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} + \sum_{-k<m<k} \sum_{n=1}^{k} \frac{2m^2}{(m^2+n^2)^2} - \sum_{-k<m<k} \sum_{n=1}^{k} \frac{2n^2}{(m^2+n^2)^2} =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} + \sum_{m=-k}^{-1} \sum_{n=1}^{k} \frac{2m^2}{(m^2+n^2)^2} + \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} \frac{2m^2}{(m^2+n^2)^2} -$$

$$- \sum_{m=-k}^{-1} \sum_{n=1}^{k} \frac{2n^2}{(m^2+n^2)^2} - \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} \frac{2n^2}{(m^2+n^2)^2} - 2\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Пусть равенство выполняется для k. Докажем, что оно верно и для $k+1$. Имеем:

$$S_{k+1} = S_k + \sum_{\max\{|n|,|m|\}=k+1} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Распишем сумму по границе квадрата $\max\{|n|,|m|\}=k+1$ через 4 суммы по его граням:

$$S_{k+1}=\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{it+1+k-p}-\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{it-k-p}+\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{1+(k+1)\,i-t-p}-$$
$$-\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{-t+(k+1)\,i-p}+\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{1-(k+1)\,i-t-p}-$$
$$-\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{-(k+1)\,i-t-p}+\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{1-ti-k-1-p}-$$
$$-\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{-ti-k-1-p}+\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{1-ti+k+1-p}+\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{ti-k-1+p}.$$

Заметим, что

$$\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{1+(k+1)\,i-t-p}-\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{-t+(k+1)\,i-p}=$$
$$=\frac{1}{2+k+(k+1)\,i-p}+\frac{1}{k+1+p-(k+1)\,i},$$

аналогично

$$\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{1-(k+1)\,i-t-p}-\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{-(k+1)\,i-t-p}=$$
$$=\frac{1}{2-(k+1)\,i+k-p}+\frac{1}{(k+1)\,i+k+1+p}.$$

Полученные выражения можно добавить к оставшимся суммам, расширив при этом интервал изменения переменной суммирования. Таким образом, имеем:

$$S_{k+1}=\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{it+1+k-p}-\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{it-k-p}+\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{-ti-k-p}-$$
$$-\sum_{t=-k}^{k}\frac{1}{-ti+k+1-p}+\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{-ti+(k+1)+1-p}+\sum_{t=-k-1}^{k+1}\frac{1}{ti+k+1+p}.$$

В силу симметричности интервала суммирования относительно нуля окончательно имеем

$$S_{k+1} = \sum_{t=-k-1}^{k+1} \frac{1}{ti + (k+1) + 1 - p} + \sum_{t=-k-1}^{k+1} \frac{1}{-ti + k + 1 + p}.$$

Приведём выражения под знаком суммы в S_k к общему знаменателю и выполним замену $m = t + k$:

$$S_k = \sum_{t=-k}^{k} \frac{-2k-1}{(it + 1 + k - p)(it - k - p)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2k} \frac{2k+1}{(m - k - i - ki + pi)(m - k + ki + pi)}.$$

Воспользуемся теперь следующей формулой [13, стр. 601, формула 7]:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{1}{(t+a)(t+b)} = \frac{1}{b-a} \left[\psi(n+a+1) - \psi(a) - \psi(n+b+1) + \psi(b)\right],$$

где $\psi(z)$ — дигамма функция. Имеем

$$S_k = \frac{1}{i} \left[\psi(1 + k - i - ki + pi) - \psi(-k - i - ki + pi) - \right.$$

$$\left. -\psi(1 + k + ki + pi) + \psi(-k + ki + pi)\right].$$

Пользуясь формулами [23, стр. 258, 259, формулы 6.3.5 и 6.3.18]:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

и

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

получим следующую асимптотическую формулу при $z \to \infty$ для дигамма функции

$$\psi(z+1) = \ln z + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Тогда

$$S_k = \frac{1}{i}\left[\ln(k-i-ki+pi) + \frac{1}{2(k-i-ki+pi)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + \right.$$
$$- \ln(-1-k-i-ki+pi) + \frac{1}{2(1+k+i+ki-pi)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) +$$
$$- \ln(k+ki+pi) + \frac{1}{2(-k-ki-pi)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) +$$
$$\left. + \ln(-1-k+ki+pi) + \frac{1}{2(-1-k+ki+pi)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right].$$

при $k \to \infty$. Однако слагаемые, не содержащие натурального логарифма, представляют собой $O\left(\frac{1}{k}\right)$. Таким образом,

$$S_k = \frac{1}{i}\left[\ln(k-i-ki+pi) - \ln(-1-k-i-ki+pi) + \right.$$
$$\left. - \ln(k+ki+pi) + \ln(-1-k+ki+pi) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

при $k \to \infty$.

Пользуясь свойствами пределов и логарифма, получаем:

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{i}\ln\lim_{k\to\infty}\frac{(k-i-ki+pi)(-1-k+ki+pi)}{(-1-k-i-ki+pi)(k+ki+pi)} = \frac{1}{i}\ln(-1) = \pi.$$

□

Замечание 3. Формула (1.9) вытекает также из того, что константа c в формуле (2.4), являющейся многомерным обобщением (1.8), имеет интегральное представление (2.5).

Замечание 4. Были проведены компьютерные эксперименты по вычислению знаков числа π с помощью полученного представления в виде двойного ряда. Скорость сходимости данного ряда невысокая и зависит от выбора точки p (см. Таблицу 2).

В ходе компьютерных экспериментов была разработана компьютерная программа, которая преобразует математические формулы, записанные в формате TEX, в программы для их вычисления на языке программирования C++ [18]. Программа способна интерпретировать арифметические операции, операции с комплексными числами, элементарные математические функции, индек-

Таблица 2 — Число слагаемых ряда, необходимых для вычисления π с точностью до 10^{-5}

p	Число слагаемых
$0.001 + 0.999i$	377
$0.001 + 0.75i$	281
$0.001 + 0.5i$	35
$0.001 + 0.25i$	93
$0.001\,(1 + i)$	108
$0.25 + 0.5i$	50000
$0.5 + 0.001i$	49999
$0.5 + 0.999i$	100000
$0.5 + 0.5i$	100000
$0.5 + 0.001i$	99999
$0.999\,(1 + i)$	199800
$0.999 + 0.5i$	199799
$0.999 + 0.001i$	199799

сированные суммы, операции с векторами (выделение компонент, вычисление нормы и др.).

Глава 2. Многомерные аналоги эллиптических функций Вейерштрасса

Переходя к многомерному обобщению эллиптических функций заметим, что каждое слагаемое $\frac{1}{z-\gamma}$, $\gamma \in \Gamma$ в представлении (1.7) ζ-функции Вейерштрасса является ядром одномерного интегрального представления Коши (без дифференциала). Как известно, ядро Коши на случай многих переменных можно обобщать различными способами.

В начале 1980-х годов в работе [52], связанной с вычислением групп когомологий проколотого комплексного тора, итальянский математик П. Заппа предложил обобщение $\wp$-функции Вейерштрасса на случай многих комплексных переменных на базе ядра Бохнера-Мартинелли.

В этой главе мы рассматриваем многомерный аналог $\wp$-функции Вейерштрасса и её свойства (раздел 2.1), многомерный аналог ζ-функции и её свойства (раздел 2.2).

Для вычисления характеристик областей в $\mathbb{C}^n$, инвариантных относительно сдвига на элемент решётки, каковой, очевидно, является число точек решётки в ней, естественно использовать Γ-периодические выражения, в то время как ζ-форма не Γ-периодическая. Поэтому в разделе 2.3 мы вычисляем форму $\eta(\gamma) = \zeta(z+\gamma) - \zeta(z)$ для $\gamma \in \Gamma$ такую, что форма $\tau(z) = \zeta(z) - \eta(z)$ является Γ-инвариантной.

2.1 Многомерный аналог $\wp$-функции Вейерштрасса и её свойства

Запишем форму Бохнера-Мартинелли ψ_{BM}, под которой мы будем понимать ядро интегрального представления Бохнера-Мартинелли с особенностью в нуле без голоморфных дифференциалов:

$$\psi_{BM}(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{z}_k d\bar{z}[k]}{\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)^n}, \tag{2.1}$$

где $d\bar{z}\left[k\right] = d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_n$. Обозначим через $\varphi_i\left(z,\gamma\right)$ производную по z_i формы Бохнера-Мартинелли, смещённой на γ

$$\varphi_i\left(z,\gamma\right) = -\frac{\partial}{\partial z_i}\psi_{BM}\left(z-\gamma\right),$$

Пусть Γ — решётка максимального ранга в пространстве $\mathbb{C}^n$. Положим по аналогии с (1.6)

$$\wp^i\left(z\right) = \varphi_i\left(z,0\right) + \sum_{\gamma\in\Gamma'}\left(\varphi_i\left(z,\gamma\right) - \varphi_i\left(0,\gamma\right)\right) \tag{2.2}$$

и определим

$$\wp^{ij}\left(z\right) = 2\pi i\left(-1\right)^{j-1}\wp^i\left(z\right)\wedge dz\left[j\right].$$

Ряд в (2.2) сходится равномерно на компактах, не содержащих точек из Γ ([51, стр. 25]).

Приведём некоторые свойства форм $\wp^i$ и $\wp^{ij}$.

1. Формы $\wp^i$ и $\wp^{ij}$ являются периодическими относительно решётки:

$$\wp^i\left(z+\gamma\right) = \wp^i\left(z\right),$$

$$\wp^{ij}\left(z+\gamma\right) = \wp^{ij}\left(z\right)$$

для $\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \Gamma$, $\gamma \in \Gamma$.

2. Существует $(0,n-1)$-форма ζ такая, что

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\zeta\left(z\right) = -\wp^i\left(z\right), \tag{2.3}$$

которая подробно рассматривается в разделе 2.2.

3. Формы $\wp^i$ обладают восстанавливающим свойством:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z_i}\right|_p = \int\limits_{\partial B} f\left(z\right)\wp^i\left(z-p\right)\wedge dz_1\wedge ... \wedge dz_n$$

для шара B достаточно малого радиуса, содержащего p и не содержащего других особенностей форм $\wp^i$.

Для форм $\wp^{ij}$ существует многомерный аналог тождества (1.8). Именно, если $M = \mathbb{C}^n/\Gamma$ — комплексный тор, то $\wp^{ij}$ можно рассматривать как мероморфную форму на M. Пусть Θ — дивизор нулей на M тэта-функции θ в $\mathbb{C}^n$, тогда верна

Теорема 2. *[52]Справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Theta} \wp^{ij}(z-p) = -\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_j}\log\theta\bigg|_p + c^{ij}, \tag{2.4}$$

для любой точки $p \in M, p \notin \Theta$, где c^{ij} не зависит от p.

Предложение 1. *[52] Константы c^{ij} представляются интегралами*

$$c^{ij} = \frac{i}{\pi}\int\limits_{\partial Q} \partial\log h \wedge \wp^{ij}(z-\tilde{p}). \tag{2.5}$$

Здесь Q — фундаментальный параллелепипед решётки Γ в $\mathbb{C}^n$, а $\widetilde{p}$ — представитель класса $p \in M$ из внутренности этого параллелепипеда. Функция h — любая гладкая положительная функция такая, что $\omega = h\,|\theta|$ является Γ-инвариантной функцией. Согласно [6, стр. 344], такая функция h является экспонентой от квадратичного многочлена от z и $\bar{z}$.

2.2 Многомерный аналог ζ-функции Вейерштрасса и её свойства

Аналогом ζ-функции Вейерштрасса в пространстве $\mathbb{C}^n$ с решёткой Γ является $(0,n-1)$-форма

$$\zeta(z) = \psi_{BM}(z) + \sum_{\gamma\in\Gamma'}\Bigg(\psi_{BM}(z-\gamma) + \psi_{BM}(\gamma) - \\ - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_{BM}}{\partial z_i}(\gamma)\,z_i + \frac{\partial\psi_{BM}}{\partial\bar{z}_i}(\gamma)\,\bar{z}_i\right)\Bigg). \tag{2.6}$$

Ряд для ζ-формы также сходится абсолютно и равномерно на компактах $\mathbb{C}^n\setminus\Gamma$ [53]. Аналогично одномерному случаю формы $-\wp^i(z)$ являются производными

$\zeta(z)$ (2.3). Рассмотрим теперь антиголоморфные производные формы ζ:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\zeta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\frac{(-1)^{i-1}\|z\|^2 d\bar{z}[i] - n\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} z_i\bar{z}_k d\bar{z}[k]}{\|z\|^{2n+2}} + \right.$$
$$+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\left[\frac{(-1)^{i-1}\|z-\gamma\|^2 d\bar{z}[i] - n\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(z_i-\gamma_i)(\bar{z}_k-\bar{\gamma}_k) d\bar{z}[k]}{\|z-\gamma\|^{2n+2}} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{(-1)^{i-1}\|\gamma\|^2 d\bar{z}[i] - n\sum_{k=1}^n \gamma_i\bar{\gamma}_k d\bar{z}[k]}{\|\gamma\|^{2n+2}}\right]\right). \quad (2.7)$$

Предложение 2. *Ряд* (2.7) *сходится абсолютно и равномерно на компактах из* $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$.

Доказательство. Приведём к общему знаменателю разность, стоящую под знаком суммы, и сгруппируем подобные слагаемые:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma'}\left[\frac{(-1)^{i-1}\left(\|z-\gamma\|^2\|\gamma\|^{2n+2} - \|\gamma\|^2\|z-\gamma\|^{2n+2}\right)d\bar{z}[i]}{(\|z-\gamma\|\,\|\gamma\|)^{2n+2}} + \right.$$
$$+\frac{n}{\|z-\gamma\|^{2n+2}\|\gamma\|^{2n+2}}\times$$
$$\left.\times\left(\|z-\gamma\|^{2n+2}\sum_{k=1}^n \gamma_i\bar{\gamma}_k - \|\gamma\|^{2n+2}\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(z_i-\gamma_i)(\bar{z}_k-\bar{\gamma}_k)\right)d\bar{z}[k]\right].$$

Воспользовавшись очевидным равенством:

$$\gamma_i\bar{\gamma}_k = ((\gamma_i - z_i) + z_i)((\bar{\gamma}_k - \bar{z}_k) + \bar{z}_k),$$

перепишем ряд в виде:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma'} H(z,\gamma)\,d\bar{z}[i] + (\Upsilon(z,\gamma) + \Omega(z,\gamma))\,d\bar{z}[k],$$

где

$$H(z,\gamma) = \frac{(-1)^{i-1}\left(\|z-\gamma\|^2\|\gamma\|^{2n+2} - \|\gamma\|^2\|z-\gamma\|^{2n+2}\right)}{(\|z-\gamma\|\,\|\gamma\|)^{2n+2}},$$

$$\Upsilon(z,\gamma) = \frac{n\left(\|z-\gamma\|^{2n+2} - \|\gamma\|^{2n+2}\right)}{(\|z-\gamma\|\,\|\gamma\|)^{2n+2}}\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(z_i-\gamma_i)(\bar{z}_k-\bar{\gamma}_k),$$

$$\Omega(z,\gamma) = \frac{n}{\|\gamma\|^{2n+2}} \sum_{k=1}^{n} \left((\bar{\gamma}_k - \bar{z}_k) z_i + (\gamma_i - z_i) \bar{z}_k + z_i \bar{z}_k \right).$$

В силу компактности множества, на котором рассматривается сходимость, можно считать, что $\|z\| \leqslant \rho$. Кроме того, внутри сферы радиуса 2ρ лежит конечное число точек решётки Γ. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда, поэтому в дальнейшем можно считать, что $\|\gamma\| > 2\rho$. Оценим модуль выражений для $H(z,\gamma)$, $\Upsilon(z,\gamma)$ и $\Omega(z,\gamma)$.

Для оценки модуля общего члена ряда $\Upsilon(z,\gamma)$ воспользуемся известным равенством:

$$\left| \|\gamma\|^{2n+2} - \|z-\gamma\|^{2n+2} \right| = \left| (\|\gamma\| - \|z-\gamma\|) \sum_{k=0}^{2n+1} \|\gamma\|^{2n+1-k} \|z-\gamma\|^{k} \right|.$$

По неравенству треугольника $\|\gamma\| - \|z-\gamma\| \leqslant \|z\|$, поэтому (с учётом неотрицательности нормы) имеет место неравенство

$$\left| \|\gamma\|^{2n+2} - \|z-\gamma\|^{2n+2} \right| \leqslant \|z\| \sum_{k=0}^{2n+1} \|\gamma\|^{2n+1-k} \|z-\gamma\|^{k} =$$

$$= \|z\| \, \|\gamma\|^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{\|z-\gamma\|}{\|\gamma\|} \right)^{k}.$$

Снова воспользуемся неравенством треугольника:

$$\left| \|\gamma\|^{2n+2} - \|z-\gamma\|^{2n+2} \right| \leqslant \|z\| \, \|\gamma\|^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{\|z\|}{\|\gamma\|} + 1 \right)^{k} \leqslant b \, \|z\| \, \|\gamma\|^{2n+1}, \quad (2.8)$$

где $b = \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{\|z\|}{\|\gamma\|} + 1 \right)^{k}$. Оценим модуль этой величины:

$$|b| = \left| \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{\|z\|}{\|\gamma\|} + 1 \right)^{k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \left| \frac{\|z\|}{\|\gamma\|} + 1 \right|^{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\left| \frac{\|z\|}{\|\gamma\|} \right| + 1 \right)^{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{3}{2} \right)^{k}.$$

Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, получим

$$|b| \leqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{3}{2} \right)^{k} = \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2}}{1 - \frac{3}{2}} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{2n+2} - 2.$$

Оценим второй сомножитель общего члена первого ряда:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{z}_i-\bar{\gamma}_i\right)\left(\bar{z}_k-\bar{\gamma}_k\right)\right| \leqslant \left|\bar{z}_i-\bar{\gamma}_i\right|\sum_{k=1}^{n}\left|\bar{z}_k-\bar{\gamma}_k\right|.$$

Воспользуемся очевидным неравенством:

$$|z_i-\gamma_i| = |\bar{z}_i-\bar{\gamma}_i| \leqslant \|z-\gamma\| \tag{2.9}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{z}_i-\bar{\gamma}_i\right)\left(\bar{z}_k-\bar{\gamma}_k\right)\right| \leqslant n\left\|z-\gamma\right\|^2,$$

тогда

$$\left|\Upsilon\left(z,\gamma\right)\right| \leqslant \frac{n^2 b\left\|z\right\|}{\left\|\gamma\right\|\left\|z-\gamma\right\|^{2n}}.$$

Поскольку $\frac{\|\gamma\|}{2} > \rho$, и имеет место неравенство $\|\gamma\| - \|z\| \leqslant \|z-\gamma\|$, то

$$\|z-\gamma\| \geqslant \frac{1}{2}\left\|\gamma\right\|, \tag{2.10}$$

откуда

$$\left|\Upsilon\left(z,\gamma\right)\right| \leqslant \frac{c_1\rho}{\left\|\gamma\right\|^{2n+1}},$$

где

$$c_1 = 2^n n^2 b.$$

Рассмотрим $|H\left(z,\gamma\right)|$:

$$\left|H\left(z,\gamma\right)\right| = \left|\left(\|z-\gamma\|\,\|\gamma\|\right)^2 \frac{\|\gamma\|^{2n}-\|z-\gamma\|^{2n}}{\left(\|z-\gamma\|\,\|\gamma\|\right)^{2n+2}}\right| = \left|\frac{\|\gamma\|^{2n}-\|z-\gamma\|^{2n}}{\left(\|z-\gamma\|\,\|\gamma\|\right)^{2n}}\right|.$$

Применяя неравенства (2.8) и $\frac{\|\gamma\|}{2} > \rho$, получим

$$\left|H\left(z,\gamma\right)\right| \leqslant \frac{2^{2n} b\rho}{\left\|\gamma\right\|^{2n+1}}.$$

Оценим теперь модуль $\Omega\left(z,\gamma\right)$

$$\left|\Omega\left(z,\gamma\right)\right| = \frac{n}{\left\|\gamma\right\|^{2n+2}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k\left(\left(\bar{\gamma}_i-\bar{z}_i\right)+\bar{z}_i\right)\left(\left(\bar{\gamma}_k-\bar{z}_k\right)+\bar{z}_k\right)\right|.$$

Используя свойства модуля, нормы и неравенство (2.9), получим

$$|\Omega\left(z,\gamma\right)| \leqslant \frac{n}{\|\gamma\|^{2n+2}} \sum_{k=1}^{n} \|z-\gamma\| \, \|z\| + \|z-\gamma\| \, \|z\| + \|z\|^2 .$$

Из неравенства (2.10) и того, что $\|z\| \leqslant \rho$, следует:

$$|\Omega\left(z,\gamma\right)| \leqslant \frac{n}{\|\gamma\|^{2n+2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2}\rho \, \|\gamma\| = \frac{c_2\rho}{\|\gamma\|^{2n+1}},$$

где

$$c_2 = \frac{3}{2}n.$$

Объединяя полученные оценки, окончательно получаем

$$|H\left(z,\gamma\right)| + |\Phi\left(z,\gamma\right) + \Psi\left(z,\gamma\right)| \leqslant \sum_{\gamma\in\Gamma'} \frac{c\rho}{\|\gamma\|^{2n+1}},$$

то есть при $n \geqslant 1$ и для всех z таких, что $\|z\| \leqslant \rho$, коэффициенты ряда в $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\zeta\left(z\right)$ мажорируются по модулю членами сходящегося числового ряда $\sum_{\gamma\in\Gamma'} \frac{c\rho}{\|\gamma\|^{2n+1}}$ (см. лемму 1) на компактах $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$. $\square$

Лемма 1. *[8]Ряд*

$$S_{n,d} = \sum_{\gamma\in\Gamma'} \frac{1}{\|\gamma\|^{d}}$$

сходится тогда и только тогда, когда $2n < d$.

Доказательство. Воспользуемся интегральным критерием сходимости. Рассмотрим

$$I_{n,d} = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}\setminus B(0;1)} \frac{dx}{\|x\|^{d}},$$

где $B\left(0;1\right)$ — $2n$-мерный шар с центром в 0 радиуса 1.

Воспользуемся сферической заменой координат $x = x\left(r,\varphi\right)$, для которой $dx = \Omega\left(\varphi\right) r^{2n-1} d\varphi dr$, где $\Omega\left(\varphi\right)$ — многочлен, зависящий от тригонометрических функций, $D = [0;\pi]^{2n-2} \times [0;2\pi] \subset \mathbb{R}^{2n-1}$. Тогда

$$I_{n,d} = \int\limits_{D} \Omega\left(\varphi\right) d\varphi \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{r^{2n-1}}{r^{d}} dr = \int\limits_{D} \Omega\left(\varphi\right) d\varphi \int\limits_{1}^{+\infty} r^{2n-1-d} dr.$$

Так как $\Omega(\varphi)$ непрерывна на компакте D, то для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы сходился внутренний интеграл, то есть выполнялось условие $2n-1-d<-1$ или $2n<d$.

Докажем теперь, что из сходимости интеграла $I_{n,d}$ будет следовать сходимость ряда $S_{n,d}$. Пусть $I=(1,...,1)$, каждой точке $\gamma\in\mathbb{Z}^{2n}\setminus\{-I;0\}$ поставим в соответствие куб $C_\gamma=\gamma+[0;1]^{2n}$. Очевидно, что для любой точки $x_\gamma\in C_\gamma$ выполняются неравенства

$$\|x\|\leqslant\|\gamma+I\|.$$

Интегрируя по кубу C_γ, для каждого $\gamma\in\mathbb{Z}^{2n}$ будем иметь неравенства:

$$\frac{1}{\|\gamma+I\|^d}\leqslant\int\limits_{C_\gamma}\frac{dx}{\|x\|^d}.$$

Заметим, что семейство кубов $\{C_\gamma\}$ не перекрывается (любая пара таких кубов либо не пересекается, либо пересекается по грани). Поэтому суммируя по $\gamma\in\mathbb{Z}^{2n}\setminus\{-I;0\}$ соответствующие члены этих неравенств, получим

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^{2n}\setminus\{-I;0\}}\frac{1}{\|\gamma+I\|^d}=\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^{2n}\setminus\{-I\}}\frac{1}{\|\gamma+I\|^d}-\sum_{\gamma=0}\frac{1}{\|\gamma+I\|^d}=S_{n,d}-\frac{1}{\|I\|^d}$$

и

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^{2n}\setminus\{-I;0\}}\int\limits_{C_\gamma}\frac{dx}{\|x\|^d}=\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}\setminus[-1;1]^{2n}}\frac{dx}{\|x\|^d}\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}\setminus B(0;1)}\frac{dx}{\|x\|^d}=I_{n,d}.$$

Найдем $\|I\|$:

$$\|I\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{2n}1^2}=\sqrt{2n}.$$

Таким образом,

$$S_{n,d}-\frac{1}{(2n)^{\frac{d}{2}}}\leqslant I_{n,d}. \tag{2.11}$$

Перепишем неравенство (2.11) в виде

$$S_{n,d}\leqslant I_{n,d}+\frac{1}{(2n)^{\frac{d}{2}}}.$$

Так как $\frac{1}{(2n)^{\frac{d}{2}}}$ — константа, то сходимость $S_{n,d}$ вытекает из сходимости $I_{n,d}$. $\square$

Приведём основные свойства формы $\zeta(z)$.

1. Форма ζ обладает восстанавливающим свойством:

$$f(p) = \int\limits_{\partial B} f(z)\,\zeta(z-p) \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

для шара B достаточно малого радиуса, содержащего p и не содержащего других особенностей формы ζ.

2. Хотя $\zeta(z)$ не является периодической относительно Γ, коэффициенты её производных — периодические, поэтому разность $\zeta(z+\gamma)$ и $\zeta(z)$ не зависит от z и $\bar{z}$. Действительно:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\zeta(z+\gamma) - \zeta(z)\right) = \wp^i(z) - \wp^i(z+\gamma) = 0,$$

по свойству 1 $\wp^i$-форм,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\left(\zeta(z+\gamma) - \zeta(z)\right) = 0,$$

что следует из вида выражения (2.7). Таким образом,

$$\zeta(z+\gamma) - \zeta(z) = \eta(\gamma,\bar{\gamma}), \tag{2.12}$$

где η — дифференциальная форма, не зависящая от z.

2.3 Нахождение периодической формы $\tau(z) = \zeta(z) - \eta(z)$

Зафиксируем в $\mathbb{C}^n$ решётку Γ максимального ранга, порождённую $2n$ линейно независимыми над $\mathbb{R}$ векторами ν_k, $\mu_k \in \mathbb{C}^n$. Форма $\zeta(z)$ в $\mathbb{C}^n$ согласно (2.6) имеет вид:

$$\zeta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,\bar{z}_k d\bar{z}[k]}{\|z\|^{2n}} + \sum_{\gamma\in\Gamma'}\left(\frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,(\bar{z}_k - \bar{\gamma}_k)\,d\bar{z}[k]}{\|z-\gamma\|^{2n}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\,\bar{\gamma}_k d\bar{z}[k]}{\|\gamma\|^{2n}} - \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\omega_{BM}}{\partial z_i}(\gamma)\,z_i + \frac{\partial\omega_{BM}}{\partial\bar{z}_i}(\gamma)\,\bar{z}_i\right)\right)\right). \tag{2.13}$$

Представим её в виде

$$\zeta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\zeta_1 d\bar{z}[1] + \zeta_2 d\bar{z}[2] + \ldots + \zeta_n d\bar{z}[n]\right),$$

где

$$\zeta_m(z) = \frac{(-1)^{m-1}\bar{z}_m}{\|z\|^{2n}} + \sum_{\gamma\in\Gamma'}\left(\frac{(-1)^{m-1}(\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m)}{\|z-\gamma\|^{2n}} + \frac{(-1)^{m-1}\bar{\gamma}_m}{\|\gamma\|^{2n}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n}(-1)^m\left(\frac{n\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_m}{\|\gamma\|^{2n+2}}z_i + (1-\delta_{im})\frac{n\gamma_i\bar{\gamma}_m}{\|\gamma\|^{2n+2}}\bar{z}_i - \delta_{im}\frac{\left(\|\gamma\|^2 - n|\gamma_m|^2\right)}{\|\gamma\|^{2n+2}}\bar{z}_i\right)\right),$$

а δ_{im} — символ Кронекера.

Пусть $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ — элемент решётки, то есть

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^1\nu_k + \lambda_k^2\mu_k\right),$$

где λ_k^1, $\lambda_k^2 \in \mathbb{Z}$. Форма $\eta(\gamma) = \zeta(z+\gamma) - \zeta(z)$, имеющая смысл при при $z \notin \Gamma$, зависит только от γ и $\bar{\gamma}$ (см. свойство 1 в разделе 2.2 (стр. 41)). Выясним вид этой зависимости, для этого представим коэффициенты разности одномерными интегралами:

$$\zeta_m(z+\gamma) - \zeta_m(z) = \int\limits_{z}^{z+\gamma} d\zeta_m, m = \overline{1,n}.$$

Эти выражения не зависят от выбора точки z так же, как и сама форма η. Кроме того, указанные интегралы не зависят от выбора пути интегрирования, так как, во-первых, интегрируется полный дифференциал, а, во-вторых, особые точки подынтегрального выражения не препятствуют гомотопии путей, поэтому в качестве пути интегрирования выберем ломаную, отрезки которой соединяют точки z, $z+\lambda_1^1\nu_1$, $z+\lambda_1^1\nu_1+\lambda_1^2\mu_1$ и так далее до точки $z+\gamma$. Такой путь заходит на Γ только в том случае, если точка z представляется в виде

$$z = \sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{\lambda}_k^1\nu_k + \widetilde{\lambda}_k^2\mu_k\right),$$

где все коэффициенты $\widetilde{\lambda}_k^1$, $\widetilde{\lambda}_k^2$ — целые, за исключением ровно одного. Таким образом, всегда можно выбрать точку z так, чтобы эта ломаная не содержала точек решётки Г. Параметризуем отрезки ломаной следующим образом:

$$\begin{array}{c} z+\sum_{j=1}^{k-1}\left(\lambda_j^1\nu_j+\lambda_j^2\mu_j\right)+\lambda_k^1\nu_k t, t\in[0{,}1]\,, \\ z+\sum_{j=1}^{k-1}\left(\lambda_j^1\nu_j+\lambda_j^2\mu_j\right)+\lambda_k^1\nu_k+\lambda_k^2\mu_k t, t\in[0{,}1]\,, \end{array} \tag{2.14}$$

$k=\overline{1{,}n}$. Тогда интеграл от $d\zeta_1$ по первому отрезку примет вид:

$$\lambda_1^1\int\limits_0^1\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_j}\left(z+\lambda_1^1\nu_1 t\right)\nu_{1j}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\bar z_j}\left(z+\lambda_1^1\nu_1 t\right)\bar\nu_{1j}\right)dt.$$

Сделав замену переменных $\lambda_1^1 t=s$, получим

$$\int\limits_0^{\lambda_1^1}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_j}\left(z+\nu_1 s\right)\nu_{1j}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\bar z_j}\left(z+\nu_1 s\right)\bar\nu_{1j}\right)ds.$$

В силу периодичности подынтегрального выражения этот интеграл равен

$$\lambda_1^1\int\limits_0^1\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_j}\left(z+\nu_1 s\right)\nu_{1j}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\bar z_j}\left(z+\nu_1 s\right)\bar\nu_{1j}\right)ds.$$

Так как от обозначения переменной интегрирования интеграл не зависит:

$$\lambda_1^1\int\limits_0^1\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_j}\left(z+\nu_1 t\right)\nu_{1j}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\bar z_j}\left(z+\nu_1 t\right)\bar\nu_{1j}\right)dt.$$

По второму отрезку ломаной получим:

$$\lambda_1^2\int\limits_0^1\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_j}\left(z+\mu_1 t\right)\mu_{1j}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\bar z_j}\left(z+\mu_1 t\right)\bar\mu_{1j}\right)dt.$$

Интегралы по оставшимся отрезкам имеют аналогичный вид. Таким образом, получим

$$\eta\left(\gamma\right)=\zeta\left(z+\gamma\right)-\zeta\left(z\right)=\frac{(n-1)!}{\left(2\pi i\right)^n}\sum_{m=1}^n\sum_{k=1}^n\left(\lambda_k^1\alpha_{mk}+\lambda_k^2\beta_{mk}\right)d\bar z\left[m\right],$$

где

$$\alpha_{mk} = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \zeta_m}{\partial z_j} \left(z + \nu_k t \right) \nu_{kj} + \frac{\partial \zeta_m}{\partial \bar{z}_j} \left(z + \nu_k t \right) \bar{\nu}_{kj} \right) dt,$$

$$\beta_{mk} = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \zeta_m}{\partial z_j} \left(z + \mu_k t \right) \nu_{kj} + \frac{\partial \zeta_m}{\partial \bar{z}_j} \left(z + \mu_k t \right) \bar{\nu}_{kj} \right) dt,$$

$k,m = \overline{1,n}$.

В формуле для $\eta(\gamma)$ фигурируют λ_k^1 и λ_k^2, выразим их через γ и $\bar{\gamma}$. Для этого запишем γ в матричном виде

$$\gamma = H \times \Lambda^1 + M \times \Lambda^2,$$

где H — матрица векторов ν_k (размера $n \times n$), Λ^1— матрица коэффициентов при ν_k (размера $n \times 1$), M — матрица векторов μ_k (размера $n \times n$), Λ^2— матрица коэффициентов при μ_k (размера $n \times 1$). Так как векторы ν_k и μ_k линейно независимы, то матрицы H и M имеют обратные (H^{-1} и M^{-1}). Соответственно, сопряжённый вектор имеет вид

$$\bar{\gamma} = \overline{H} \times \Lambda^1 + \overline{M} \times \Lambda^2.$$

Из уравнений для γ и $\bar{\gamma}$ получим, что

$$\Lambda^1 = L^1 \times \gamma + N^1 \times \bar{\gamma},$$

$$\Lambda^2 = L^2 \times \gamma + N^2 \times \bar{\gamma},$$

где L^1, N^1, L^2, N^2 — матрицы размера $n \times n$, и

$$L^1 = H^{-1} \times \left(E + M \times \left(\overline{M} - \overline{H} \times H^{-1} \times M \right)^{-1} \times \overline{H} \times H^{-1} \right),$$

$$L^2 = -\left(\overline{M} - \overline{H} \times H^{-1} \times M \right)^{-1} \times \overline{H} \times H^{-1},$$

$$N^1 = -M \times \left(\overline{M} - \overline{H} \times H^{-1} \times M \right)^{-1},$$

$$N^2 = \left(\overline{M} - \overline{H} \times H^{-1} \times M \right)^{-1}.$$

Тогда $k-$ые элементы Λ^1 и Λ^2 (λ_k^1 и λ_k^2) выражаются формулами:

$$\lambda_k^1 = \sum_{j=1}^n \left(L_{kj}^1 \gamma_j + N_{kj}^1 \bar{\gamma}_j \right),$$

$$\lambda_k^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(L_{kj}^2 \gamma_j + N_{kj}^2 \bar{\gamma}_j \right).$$

Таким образом,

$$\eta(\gamma) = \zeta(z+\gamma) - \zeta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(L_{kj}^1 \gamma_j + N_{kj}^1 \bar{\gamma}_j \right) \alpha_{mk} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \left(L_{kj}^2 \gamma_j + N_{kj}^2 \bar{\gamma}_j \right) \beta_{mk} \right) d\bar{z}[m].$$

Так как полученное выражение линейно зависит от γ, форма η определена для всех $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(L_{kj}^1 z_j + N_{kj}^1 \bar{z}_j \right) \alpha_{mk} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \left(L_{kj}^2 z_j + N_{kj}^2 \bar{z}_j \right) \beta_{mk} \right) d\bar{z}[m]. \quad (2.15)$$

Поэтому получаем следующее предложение

Предложение 3. *Для любой точки $z \in \mathbb{C}^n \backslash \Gamma$ и точки $\gamma \in \Gamma$*

$$\zeta(z+\gamma) - \zeta(z) = \eta(\gamma),$$

где $\eta(z)$ задана формулой (2.15).

Теорема 3. *Форма $\tau(z) = \zeta(z) - \eta(z)$ является Γ-периодической.*

Доказательство. Рассмотрим разность $\tau(z+\gamma) - \tau(z)$, где $\gamma \in \Gamma$. Тогда

$$\tau(z+\gamma) - \tau(z) = \zeta(z+\gamma) - \eta(z+\gamma) - \zeta(z) + \eta(z) = \eta(\gamma) + \eta(z) - \eta(z+\gamma).$$

Последнее выражение равно 0 в силу линейности формы η. Таким образом,

$$\tau(z+\gamma) - \tau(z) = 0.$$

□

Рассмотрим отдельно случай целочисленной решётки $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^n$. Тогда векторы ν_k и μ_k имеют вид:

$$\begin{array}{ll} \nu_1 = (1,0,...,0)\,, & \mu_1 = (i,0,...,0)\,, \\ \nu_2 = (0,1,...,0)\,, & \mu_2 = (0,i,...,0)\,, \\ \quad ... & \quad ... \\ \nu_n = (0,0,...,1)\,, & \mu_n = (0,0,...,i)\,, \end{array}$$

а соответствующие матрицы равны

$$H = E, M = iE,$$

где E — единичная матрица. В этом случае имеем

$$L^1 = \frac{1}{2}E,$$

$$L^2 = -\frac{i}{2}E,$$

$$N^1 = \frac{1}{2}E,$$

$$N^2 = \frac{i}{2}E,$$

а форма η значительно упрощается:

$$\eta\left(z\right) = \frac{(n-1)!}{\left(2\pi i\right)^n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{z_k + \bar{z}_k}{2} \right) \alpha_{mk} + i \left(\frac{-z_k + \bar{z}_k}{2} \right) \beta_{mk} \right) d\bar{z}\left[m\right] =$$
$$= \frac{(n-1)!}{\left(2\pi i\right)^n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_{mk} \cdot \mathrm{Re} z_k + \beta_{mk} \cdot \mathrm{Im} z_k \right) d\bar{z}\left[m\right]$$

Кроме того, между коэффициентами α_{mk} и β_{mk} существует следующая связь.

Предложение 4. *Если* $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^n$, *то*

$$\begin{array}{ll} \beta_{mk} = \alpha_{mk}, & k \neq m, \\ \beta_{mk} = -i\alpha_{mk}, & k = m. \end{array}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в случае целочисленной решётки коэффициенты α_{mk} и β_k примут вид:

$$\alpha_{mk} = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \zeta_m}{\partial z_k} (z + \nu_k t) + \frac{\partial \zeta_m}{\partial \bar{z}_k} (z + \nu_k t) \right) dt,$$

$$\beta_{mk} = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \zeta_m}{\partial z_k} (z + \mu_k t)\, i - \frac{\partial \zeta_m}{\partial \bar{z}_k} (z + \mu_k t)\, i \right) dt,$$

$k,m = \overline{1,n}$ ввиду представления базисных векторов решётки ν_k и μ_k.

Проверим, что $\beta_{mk} = \alpha_{mk}$, когда $k \neq m$. Для этого выберем точку $z \notin \Gamma$ такую, что $z_k = 0$. Такой выбор можно сделать, поскольку $\zeta (z + \gamma) - \zeta (z)$, а, значит, α_{mk} и β_{mk}, не зависят от выбора z. Выпишем выражения для производных:

$$\frac{\partial \zeta_m}{\partial z_k} = \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m \bar{z}_k}{\left(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 \right)^{n+1}} +$$
$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot (\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m)(\bar{z}_k - \bar{\gamma}_k)}{\left(|z_1 - \gamma_1|^2 + \ldots + |z_n - \gamma_n|^2 \right)^{n+1}} - \frac{(-1)^m n \cdot \bar{\gamma}_m \bar{\gamma}_k}{\left(|\gamma_1|^2 + \ldots + |\gamma_n|^2 \right)^{n+1}} \right);$$

$$\frac{\partial \zeta_m}{\partial \bar{z}_k} = \frac{(-1)^{k-1} \left(\|z\|^2 - n\, |z_k|^2 \right)}{\left(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 \right)^{n+1}} +$$
$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^{k-1} \left(\|z - \gamma\|^2 - n\, |z_k - \gamma_k|^2 \right)}{\left(|z_1 - \gamma_1|^2 + \ldots + |z_n - \gamma_n|^2 \right)^{n+1}} - \frac{(-1)^{k-1} \left(\|\gamma\|^2 - n\, |\gamma_k|^2 \right)}{\|\gamma\|^{2n+2}} \right), m = k;$$

$$\frac{\partial \zeta_m}{\partial \bar{z}_k} = \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m z_k}{\left(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 \right)^{n+1}} +$$
$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot (\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m)(z_k - \gamma_k)}{\left(|z_1 - \gamma_1|^2 + \ldots + |z_n - \gamma_n|^2 \right)^{n+1}} - \frac{(-1)^k n \bar{\gamma}_m \gamma_k}{\|\gamma\|^{2n+2}} \right), m \neq k$$

Тогда

$$\beta_{mk} = \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m \overline{it} \cdot i}{\left(|z_1|^2 + ... |it|^2 ... + |z_n|^2\right)^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot (\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m) \left(\overline{it} - \bar{\gamma}_k\right) \cdot i}{\left(|z_1 - \gamma_1|^2 + ... |it - \gamma_k|^2 ... + |z_n - \gamma_n|^2\right)^{n+1}} - \frac{(-1)^m n \cdot \bar{\gamma}_m \bar{\gamma}_k \cdot i}{\|\gamma\|^{2n+2}} \right) -$$

$$- \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m \cdot it \cdot i}{\left(|z_1|^2 + ... |it|^2 ... + |z_n|^2\right)^{n+1}} -$$

$$- \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot (\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m) (it - \gamma_k) \cdot i}{\left(|z_1 - \gamma_1|^2 + ... |it - \gamma_k|^2 ... + |z_n - \gamma_n|^2\right)^{n+1}} - \frac{(-1)^k n \bar{\gamma}_m \gamma_k \cdot i}{\|\gamma\|^{2n+2}} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m \bar{t}}{\left(|z_1|^2 + ... |t|^2 ... + |z_n|^2\right)^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot (\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m) \left(\bar{t} - i\bar{\gamma}_k\right)}{\left(|z_1 - \gamma_1|^2 + ... |i(t + i\gamma_k)|^2 ... + |z_n - \gamma_n|^2\right)^{n+1}} - \frac{(-1)^m n \cdot \bar{\gamma}_m \bar{\gamma}_k \cdot i}{\|\gamma\|^{2n+2}} \right) +$$

$$+ \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m \cdot t}{\left(|z_1|^2 + ... |it|^2 ... + |z_n|^2\right)^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot (\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m) (t + i\gamma_k)}{\left(|z_1 - \gamma_1|^2 + ... |i(t + i\gamma_k)|^2 ... + |z_n - \gamma_n|^2\right)^{n+1}} + \frac{(-1)^k n \bar{\gamma}_m \gamma_k \cdot i}{\|\gamma\|^{2n+2}} \right).$$

Переобозначим элементы решётки следующим образом

$$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_k, ..., \gamma_n) \to \gamma^1 = \left(\gamma_1^1, ..., i\gamma_k^1, ..., \gamma_n^1\right).$$

Отметим, что это взаимно-однозначное отображение решётки Γ на себя. При этом $i\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k^1$, $i\gamma_k = -\gamma_k^1$. Тогда

$$\beta_{mk} = \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m \bar{t}}{\left(|z_1|^2 + ... |t|^2 ... + |z_n|^2\right)^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot \left(\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m^1\right)\left(\bar{t} - \bar{\gamma}_k^1\right)}{\left(|z_1 - \gamma_1^1|^2 + ... |t - \gamma_k^1|^2 ... + |z_n - \gamma_n^1|^2\right)^{n+1}} - \frac{(-1)^m n \cdot \bar{\gamma}_m^1 \bar{\gamma}_k^1}{\|\gamma^1\|^{2n+2}} \right) +$$

$$+ \frac{(-1)^m n \cdot \bar{z}_m \cdot t}{\left(|z_1|^2 + ... |t|^2 ... + |z_n|^2\right)^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{(-1)^m n \cdot \left(\bar{z}_m - \bar{\gamma}_m^1\right)\left(t - \gamma_k^1\right)}{\left(|z_1 - \gamma_1^1|^2 + ... |t - \gamma_k^1|^2 ... + |z_n - \gamma_n^1|^2\right)^{n+1}} - \frac{(-1)^k n \bar{\gamma}_m^1 \gamma_k^1}{\|\gamma^1\|^{2n+2}} \right) = \alpha_{mk}.$$

Случай $k = m$ рассматривается аналогично. $\square$

Таким образом, для целочисленной решётки форму $\eta(z)$ можно записать следующим образом [49]:

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} \left(\delta_{mk} \bar{z}_k + (1 - \delta_{mk})(\mathrm{Re} z_k + \mathrm{Im} z_k)\right) \cdot d\bar{z}[m].$$

Глава 3. Применение ζ-формы к проблеме числа точек решётки в замыкании области

Проблема определения количества точек решётки в области изучается математиками с начала XIX века. В теории чисел эта проблема известна как проблема круга Гаусса: количество целых точек в круге с центром в начале координат $x^2 + y^2 = r^2$ превышает площадь этого круга πr^2 на некоторую поправку $O(r)$. Построение оценки сверху для этой величины и составляет суть проблемы. Самим К.Ф. Гауссом была получена оценка $O\left(r^{\frac{1}{2}}\right)$. Этой задачей занимались многие математики, например, В. Серпинский, Г. Харди, Д. Литтлвуд, И.М. Виноградов. Последний опубликованный результат был получен М. Хаксли — $O\left(r^{\frac{131}{208}+\varepsilon}\right)$, хотя многие специалисты (см. [33]) сходятся на том, что верна оценка $O\left(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ (неопубликованное доказательство этого размещено на сайте arXiv.org [30]).

Естественным обобщением этой задачи является рассмотрение произвольных плоских областей, многомерных областей для целочисленной и произвольных решёток. Например, если круг заменить равнобочной гиперболой, то получится задача известная как проблема делителей Дирихле [33]. В случае определённого вида тетраэдра в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ для числа его целых точек известен результат Л. Морделла [40], полученный с использованием классических сумм Дедекинда, который позднее неоднократно обобщался [45; 50]. В случае многомерных областей этой задачей среди многих других занимались Л.А. Айзенберг ([1; 24]), А.З. Вальфиш [2], А.Н. Варченко [3].

В комбинаторной геометрии проблема определения количества точек решётки в области рассматривается применительно к решётчатым многогранникам. В 1899 году Г. Пик получил классический результат [42], установив связь между площадью плоского целочисленного многоугольника P (S) и количеством целых точек внутри многоугольника (I) и на его границе (B):

$$S = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Непосредственное распространение данной формулы на более высокие размерности оказывается невозможным: для тетраэдра в $\mathbb{R}^3$ с вершинами (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) и $(1,1,r)$, $r \in \mathbb{N}$, нельзя выразить объём только через число целых точек внутри него и на его границе (известный пример Рива, [43]). Однако, существуют многомерные аналоги формулы Пика для некоторых частных случаев. Например, Р. Морелли получил аналог формулы Пика для многогранников с вершинами в целых точках размерности не более 4 с использованием классов Тодда (см. [41]). Для многогранников с центрально-симметричными гипергранями (например, зонотопов, но не только для них) верна формула, по которой объём такого многогранника равен сумме телесных углов многогранника во всех точках решётки (см. [26; 37]). Эту формулу можно считать многомерным аналогом формулы Пика.

Действительно, с каждой целой точкой плоскости можно связать угол, естественным образом определяемый многоугольником P: для вершин он будет равен $\frac{\alpha}{2\pi}$, где α — угол многоугольника при этой вершине, для целых точек из относительной внутренности сторон — $\frac{1}{2}$, для внутренних точек — 1, и 0 для точек вне многоугольника. Тогда сумма таких углов по всем точкам целочисленной решётки равна

$$I + \frac{B_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \left(\textbf{сумма углов многоугольника}\right).$$

Как известно, сумма углов плоского многоугольника равна $\pi \left(B_v - 2\right)$, где B_v — число его вершин. Тогда предыдущее выражение принимает вид

$$I + \frac{B_0}{2} + \frac{B_v - 2}{2} = I + \frac{B_0}{2} - 1.$$

Известны и другие результаты, которые можно считать аналогами формулы Пика. Например, пусть P — r-мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$, tP — многогранник, полученный в результате умножения каждой координаты вершин P на некоторое положительное число t. Е. Эрхарт показал, что число целых точек внутри многогранника tP есть рациональный многочлен степени r от t [32]. Дж. Рив установил взаимосвязь между количеством целых точек в тетраэдре и его объёмом с помощью эйлеровой характеристики многогранника и его границы [43], Я. Макдональд обобщил результат, полученный Дж. Ривом для $n = 2{,}3$ и предположенный им для $n = 4$ [36]. Рассматривая проблему точек решётки в области с точки зрения алгебраической геометрии, М. Брион и М. Верњ, используя классы Тодда, получили формулу для числа точек решётки в простых решётчатых многогранниках, то есть таких многогранниках, через каждую вершину которых проходит одинаковое число рёбер [28]. Кроме этого, они получили формулу Эйлера-Маклорена для функций векторных разбиений, которая в случае рациональных многогранников с параллельными гранями переходит в формулу для количества целых точек [29].

В этой главе мы получаем интегральную формулу, устанавливающую связь между суммой телесных углов многомерной области в точках решётки и объёмом этой области с использованием многомерного аналога ζ-функции Вейерштрасса (раздел 3.1). С учётом сказанного выше её можно считать обобщением формулы Пика. В случае многогранников с вершинами в узлах решетки и с центрально-симметричными гипергранями из нашего интегрального представления вытекает формула, связывающая объём многогранника с суммой его телесных углов в точках решётки [26, Example 7.3, Corollary 7.7].

3.1 Интегральное представление для взвешенного числа точек решётки в замыкании области из $\mathbb{C}^n$

Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей. Обозначим через $\operatorname{Vol}(D)$ объём области D, нормированный условием, что объём фундаментального параллелепипеда периодов решётки Γ равен 1. Напомним понятие телесного угла области в точке. Пусть точка $z_0 \in \partial D$.

Определение 4. Телесным углом области D в точке z_0 называется угол, образованный касательным конусом области D в z_0.

Величина $\Theta_{z_0,D}$ этого телесного угла определяется следующим образом. Пусть $B(z_0,\varepsilon)$ — шар с центром в точке z_0 радиуса ε, тогда

$$\Theta_{z_0,D} = \lim_{\varepsilon\to+0} \operatorname{Vol}\{B(z_0,\varepsilon) \cap D\} / \operatorname{Vol} B(z_0,\varepsilon).$$

Если $z_0 \in D$, то телесный угол D в точке z_0 естественным образом есть полный телесный угол, и $\Theta_{z_0,D} = 1$. Аналогично, если $z_0 \notin \overline{D}$, то $\Theta_{z_0,D} = 0$.

Определение 5. Взвешенным числом точек решётки Γ в замыкании области D назовём $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \Theta_{\gamma,D}$.

Теорема 4. *Пусть D — область $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей, тогда*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\Theta_{\gamma,D}-\mathrm{Vol}\,(D)=\mathrm{v.p.}\int\limits_{\partial D}\tau\,(z)\wedge dz. \tag{3.1}$$

Доказательство. Предположим, что на границе области ∂D не содержится точек решётки. Тогда цикл интегрирования ∂D, очевидно, гомологичен сумме сфер достаточно малых радиусов с центрами в точках решётки внутренности D. Пусть S — одна из таких сфер, не теряя общности, будем считать, что центр S находится в начале координат.

Внутри рассматриваемой сферы S только одно слагаемое, представляющее собой форму Бохнера-Мартинелли $\psi_{BM}\,(z-w)\wedge dz$, будет иметь особенность, поэтому:

$$\int\limits_{S}\psi_{BM}\,(z)\wedge dz=1=\Theta_{0,D}.$$

У других слагаемых особенностей нет, поэтому к ним можно применить формулу Стокса. Интегралы от слагаемых, содержащих z_i, равны нулю

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{S}\frac{(-1)^k\,n\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_k}{\|\gamma\|^{2n+1}}z_i d\bar{z}\,[k]\wedge dz=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{(-1)^k\,n\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_k}{\|\gamma\|^{2n+1}}\int\limits_{D}dz_i\wedge d\bar{z}\,[k]\wedge dz=0.$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые:

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{S}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^k\left((1-\delta_{ik})\,\frac{n\gamma_i\bar{\gamma}_k}{\|\gamma\|^{2n+2}}-\delta_{ik}\frac{\|\gamma\|^2-n\,|\gamma_k|^2}{\|\gamma\|^{2n+2}}\right)\bar{z}_i d\bar{z}\,[k]\wedge dz.$$

При $i\neq k$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{S}(1-\delta_{ik})\,\frac{(-1)^k\,n\gamma_i\bar{\gamma}_k}{\|\gamma\|^{2n+2}}\bar{z}_i d\bar{z}\,[k]\wedge dz=\,,$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,(1-\delta_{ik})\,\frac{(-1)^k\,n\gamma_i\bar{\gamma}_k}{\|\gamma\|^{2n+2}}\int\limits_{S}d\bar{z}_i\wedge d\bar{z}\,[k]\wedge dz=0,$$

так как подынтегральная форма равна нулю. При $i = k$ получаем интеграл

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_S \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\|\gamma\|^2 - n\,|\gamma_k|^2\right)}{\|\gamma\|^{2n+2}}\bar{z}_k d\bar{z}\,[k]\wedge dz,$$

применяя формулу Стокса, получим

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_S \sum_{k=1}^{n}\frac{\|\gamma\|^2 - n\,|\gamma_k|^2}{\|\gamma\|^{2n+2}} d\bar{z}\wedge dz =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_S \frac{n\,\|\gamma\|^2 - n\left(|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 + ... + \left|\gamma_n^2\right|\right)}{\|\gamma\|^{2n+2}} = 0.$$

Таким образом, интеграл от $\zeta(z)$ по всей области D равен сумме телесных углов в точках решётки, то есть количеству точек решётки, находящихся внутри этой области.

Рассмотрим теперь

$$\int\limits_{\partial D}\eta(z)\wedge dz.$$

Форма $\eta(z)$ не имеет особенностей в области D, поэтому по формуле Стокса:

$$\int\limits_{\partial D}\eta(z)\wedge dz =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_D d\left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(L_{kj}^1 z_j + N_{kj}^1\bar{z}_j\right)\alpha_{mk} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{j=1}^{n}\left(L_{kj}^2 z_j + N_{kj}^2\bar{z}_j\right)\beta_{mk}\right)\right)d\bar{z}\,[m]\wedge dz =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_D \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\left(N_{km}^1\alpha_{mk} + N_{km}^2\beta_{mk}\right)d\bar{z}\wedge dz.$$

Обозначим

$$C = \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\left(N_{km}^1\alpha_{mk} + N_{km}^2\beta_{mk}\right).$$

Вычисляя дифференциалы, получим:

$$\int\limits_{\partial D} \eta(z) \wedge dz = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} C \int\limits_{D} d\bar{z} \wedge dz =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} C \int\limits_{D} (2i)^n \, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n = \frac{(n-1)!}{\pi^n} \cdot C \cdot \mathrm{Vol}(D).$$

Для определения значения коэффициента C рассмотрим в качестве D фундаментальный параллелепипед периодов такой, что точка решётки (ровно одна) попадает в его внутренность. Проинтегрируем по границе данного параллелепипеда форму $\tau(z)$. Интегралы от $\tau(z)$ по противоположным граням параллелепипеда отличаются только знаком в силу её периодичности и противоположной ориентации граней. Таким образом,

$$\int\limits_{\partial D} \tau(z) \wedge dz = 0.$$

Внутри D находится только одна точка решётки, поэтому имеет место соотношение:

$$1 - \frac{(n-1)!}{\pi^n} \cdot C \cdot \mathrm{Vol}(D) = 0.$$

Объём фундаментального параллелепипеда равен 1 (согласно нормировке), поэтому

$$1 - \frac{(n-1)!}{\pi^n} \cdot C = 0.$$

Откуда

$$C = \frac{\pi^n}{(n-1)!}.$$

Отметим, что в случае целочисленной решётки $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^n$ это соотношение можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \alpha_{mm} = \frac{\pi^n}{(n-1)!}.$$

Окончательно,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D} - \mathrm{Vol}(D) = \int\limits_{\partial D} \tau \wedge dz.$$

Рассмотрим теперь случай, когда на границе области D содержатся точки решётки. При этом предположении $\zeta(z)$ будет иметь особенности в точках решётки Γ, поэтому интеграл от $\zeta(z) \wedge dz$ для таких точек следует понимать в смысле главного значения. Рассмотрим область, которая получается удалением из области D шаров малого радиуса с центрами в точках решётки, принадлежащих ∂D. Граница полученной области больше не является односвязной, поэтому дополним её участками поверхности сфер, которые имеют центры в особых граничных точках и содержатся внутри D. Полученная поверхность $\partial D'$ уже не содержит точек решётки, поэтому для неё верна формула (3.1).

Таким образом,

$$\text{v.p.} \int\limits_{\partial D} \tau(z) \wedge dz = \left(\text{v.p.} \int\limits_{\partial D} \zeta(z) \wedge dz - \int\limits_{\partial D} \eta(z) \wedge dz \right) =$$

$$= -\mathrm{Vol}(D) + \text{v.p.} \int\limits_{\partial D'} \zeta(z) \wedge dz = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma,D} - \mathrm{Vol}(D),$$

поскольку

$$\text{v.p.} \int\limits_{\partial D} \psi_{BM}(z, a_j) = \Theta_{a_j,D}$$

где $\psi_{BM}(z, a_j)$ — слагаемое формы $\zeta(z) \wedge dz$, которое имеет особенность в точке a_j [9, лемма 2.1]. □

3.2 Интегральное представление для взвешенного числа точек решётки в замыкании области из $\mathbb{R}^n$

Формула (3.1) верна лишь для четномерных вещественных пространств. Пусть D — область с кусочно-гладкой границей, а $\Gamma_{\mathbb{R}}$ — решётка максимального ранга в $\mathbb{R}^n$, порождённая векторами $\nu_1, .., \nu_n$. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как вещественное подпространство $\mathbb{C}^n$ и определим в нём решётку $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}} \oplus i\mathbb{Z}^n$, порождённую векторами $\nu_1, \ldots, \nu_n$ и

$$\mu_1 = (i, 0, \ldots, 0)$$

$$\ldots$$

$$\mu_n = (0, 0, \ldots, i).$$

Область $\widetilde{D} = D + iU^n$, где $U^n = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]^n$ — n-мерный единичный куб, имеет кусочно-гладкую границу и к ней можно применить результат Теоремы 4

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \widetilde{\Theta}_{\gamma,\widetilde{D}} - \mathrm{Vol}\left(\widetilde{D}\right) = \text{v.p.} \int\limits_{\partial \widetilde{D}} \tau(z) \wedge dz.$$

Заметим, что $\mathrm{Vol}\left(\widetilde{D}\right) = \mathrm{Vol}(D)$, так как n-мерный объём U^n равен 1. Точки решётки Γ на границе области $\widetilde{D}$ — это те же точки решётки $\Gamma_{\mathbb{R}}$, что лежат на границе области D, то есть $\left\{\Gamma \cap \partial \widetilde{D}\right\} = \{\Gamma_{\mathbb{R}} \cap \partial D\}$. Более того, $2n$-мерный телесный угол $\widetilde{\Theta}_{\gamma,\widetilde{D}}$ области $\widetilde{D}$ в точке γ по построению численно равен n-мерному телесному углу $\Theta_{\gamma,D}$ области D в точке γ.

Таким образом, верна

Теорема 5. *Пусть D — область с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, тогда*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathbb{R}}} \Theta_{\gamma,D} - \mathrm{Vol}(D) = \text{v.p.} \int\limits_{\partial \widetilde{D}} \tau(z) \wedge dz.$$

3.3 Вычисление объёмов решётчатых многогранников

Теорему 4 можно применить для доказательства многомерных аналогов формулы Пика для решётчатых многогранников с центрально-симметричными гипергранями и решётчатых n-мерных призм.

Определение 6. Пусть Γ — решётка максимального ранга в $\mathbb{C}^n$. Решётчатым многогранником в $\mathbb{C}^n$ называется многогранник с вершинами в точках решётки Γ.

Лемма 2. *Если гипергрань Q решётчатого многогранника обладает центральной симметрией, то*

$$\int\limits_{Q} \tau(z) \wedge dz = 0.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что коэффициенты формы $\tau(z) = \zeta(z) - \eta(z)$ — нечетные функции. Если z и z' — соответствующие вершины при центральной симметрии, то центр симметрии z_0 можно вычислить по формуле:

$$z_0 = \frac{z + z'}{2}.$$

Отразим гипергрань Q относительно начала координат. Так как грань Q обладает центральной симметрией, то данное преобразование эквивалентно параллельному переносу грани на вектор $-2z_0 = -(z + z')$, который является элементом решётки. С одной стороны, интегралы по исходной и преобразованной грани должны быть равными в силу Γ-инвариантности подынтегрального выражения $\tau(z) \wedge dz$. С другой стороны, значения интегралов должны различаться знаком в силу нечетности подынтегрального выражения (см. формулы (2.13), (2.15)), что возможно лишь при равенстве их нулю. Таким образом,

$$\int\limits_Q \tau(z) \wedge dz = 0.$$

□

Следующая теорема следует непосредственно из этой леммы.

Теорема 6. *Если D — решётчатый многогранник, гиперграни которого обладают центральной симметрией, то*

$$\mathrm{Vol}(D) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D}.$$

Доказательство. Используя теорему 4 и применяя лемму 2 к каждой гиперграни многогранника D, мы получим доказываемую формулу. □

Теорема 7. *Если D — n-мерная решётчатая призма, то*

$$\mathrm{Vol}(D) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D}.$$

Доказательство. По определению, основания призмы представляют собой равные многогранники, лежащие в параллельных гиперплоскостях, боковые грани — это центрально-симметричные многогранники. Применим к D теорему 4. В силу леммы 2 интегралы по боковым граням равны 0. Интегралы по основаниям взаимно уничтожаются, так как имеют противоположную ориентацию и получаются параллельным переносом на вектор решётки, а подынтегральная функция Г-инвариантна. □

Замечание 5. Результаты этого раздела доказаны в предположении, что D — область в $\mathbb{C}^n$. Однако, формулы в теоремах 4 и 5 различаются только областями, по границе которых ведётся интегрирование. Так как у условиях теорем 6 и 7 эти интегралы равны нулю, то они верны и для областей в вещественном пространстве.

Заключение

В диссертации исследованы свойства многомерных аналогов $\wp$- и ζ-функций Вейерштрасса и их применение. Основные результаты состоят в следующем:

1. Получена интегральная формула для разности взвешенного числа точек произвольной решётки максимального ранга в $\mathbb{C}^n$ в замыкании области с кусочно-гладкой границей и её объёма. Указанная разность представляется в виде интеграла по границе этой области.
2. Получено новое представление числа π в виде двойного ряда по решётке гауссовых чисел.
3. Получено аналитическое доказательство многомерного аналога формулы Пика для многогранника с вершинами в узлах решётки и центрально-симметричными гипергранями.

Все полученные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами, опубликованы в 8 работах и могут быть использованы в комплексном анализе, алгебраической геометрии, комбинаторике и теории чисел.

Список литературы

1. Айзенберг, Л.А. Применение многомерного логарифмического вычета для представления в виде интеграла разности между числом целых точек в области и её объёмом / Л.А. Айзенберг // Докл. Акад. Наук СССР. — 1983. — Т. 270, № 3. — С. 521—523.
2. Вальфиш, А.Ж. Целые точки в многомерных шарах / А.Ж. Вальфиш. — Издательство Академии Наук Грузинской ССР, 1959. — 460 с.
3. Варченко, А.Н. О числе целых точек в семействах гомотетичных областей в $\mathbb{R}^n$ / А.Н. Варченко // Функц. анализ и его прил. — 1983. — Т. 17, № 2. — С. 1—6.
4. Вилейтнер, Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия: Пер. с нем. под ред. А.П. Юшкевича / Г. Вилейтнер. — М. : Гос. изд. физ.-мат. лит, 1960. — 468 с.
5. Галушина, Е.Н. Об одном представлении числа π в виде двойного ряда / Е.Н. Галушина // Известия Иркутского государственного университета. — 2016. — Т. 17. — С. 3—11.
6. Гриффитс, Ф. Принципы алгебраической геометрии: Пер. с англ. / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. — М. : Мир, 1982. — 496 с. — Т. 1.
7. Гурвиц, А. Теория функция / А. Гурвиц, Р. Курант. — М. : Наука, 1968. — 648 с.
8. Зубченкова, Е.В. Интегральный признак сходимости некоторых кратных рядов / Е.В. Зубченкова // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2011. — Т. 4, № 3. — С. 344—349.
9. Кытманов, А.М. Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения / А.М. Кытманов. — Новосибирск : Наука, 2002. — 240 с.
10. Мамфорд, Д. Лекции о тэта-функциях: Пер. с англ. / Д. Мамфорд. — М. : Мир, 1988. — 448 с.
11. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под ред. А.Н. Колмогорова, А.П. Юшкевича. — М. : Наука, 1981. — 270 с.

12. Прасолов, В.В. Эллиптические функции и алгебраические уравнения / В.В Прасолов, Ю.П. Соловьев. — М. : Факториал, 1997. — 288 с.

13. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев. — М. : Наука, 1981. — 800 с.

14. Терешонок, Е.Н. Двумерный аналог дзета-функции Вейерштрасса в задаче оценки числа целых точек в области / Е.Н. Терешонок // Материалы Юбилейной 50-й международной научной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс: Математика. — Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т., 2012. — С. 101.

15. Терешонок, Е.Н. О многомерной версии формулы Пика / Е.Н. Терешонок // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы Тринадцатой молодежной научной школы-конференции Лобачевские чтения. — Казань : Изд-во Казан. ун-та., 2014. — С. 163—165.

16. Терешонок, Е.Н. О многомерном аналоге дзета-функции Вейерштрасса / Е.Н. Терешонок, А.В. Щуплев // Четвёртое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам: тезисы докладов. — Красноярск : Сибирский федеральный университет., 2012. — С. 69—70.

17. Терешонок, Е.Н. Формула Макмюллена и многомерный аналог дзета-функции Вейерштрасса / Е.Н. Терешонок // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Молодёжь и наука: проспект Свободный. — Красноярск : Сибирский федеральный университет., 2015.

18. Терешонок Е. Tex2Cpp: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Е.Н. Терешонок. — М. : Реестр программ для ЭВМ, 2014. Номер гос. рег. 2014616394.

19. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа: в 2 частях. Часть 2. Трансцендентные функции / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. — М. : Гос. изд. физ.-мат. лит, 1963. — 516 с.

20. Abel, N. Memoire sur une propriété générale d'une classe tres étendue de fonctions transcendents / N. Abel // Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, Paris, 1841, Oeuvres Completes. Vol. 1. — P. 145–211.

21. Abel, N. Recherches sur les fonctions elliptiques / N. Abel // J. Reine Angew. Math. — 1827. — Vol. 2. — P. 101–181.

22. Abel, N. Recherches sur les fonctions elliptiques / N. Abel // J. Reine Angew. Math. — 1828. — Vol. 3. — P. 160–187.

23. Abramowitz, M. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables / M. Abramowitz, I.A. Stegun. — Washington, D.C. : 10 ed., Dept. of Commerce : U.S. G.P.O., 1972. — 1046 p.

24. Aizenberg, A. An integral formula for the number of lattice points in a domain / L. Aizenberg, N. Tarkhanov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2015. — Vol. 8, no. 2. — P. 134–139.

25. Apostol, Tom M. Modular function and Dirichlet series in number theory / Tom M. Apostol. — 2nd ed. p. cm. — (Graduate texts in mathematics; 41). — New York : Springer Verlag, 1990. — 206 p.

26. Barvinok, A. An algorithmic theory of lattice points in polyhedra / A. Barvinok, J. Pommersheim // New Perspectives in Algebraic Combinatorics. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. — Vol. 38. — P. 91–147.

27. Bottazzini, U. Hidden harmony — geometric fantasies / U. Bottazzini, J. Gray. — Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013. — 848 p.

28. Brion, M. Lattice points in simple polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the AMS. — 1997. — Vol. 10. — P. 371–392.

29. Brion, M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the AMS. — 1997. — Vol. 10, no. 4. — P. 797–833.

30. Cappell, S.E. Some problems in number theory I: the circle problem / S.E. Cappell, J.L. Shaneson. — 2007. — URL: http://arxiv.org/pdf/math/0702613v3.pdf.

31. Diaz, R. Pick's Formula via the Weierstrass $\wp$-Function / R. Diaz, S. Robins // The American Mathematical Monthly. — 1995. — Vol. 102, no. 5. — P. 431–437.

32. Erhart, E. Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions / E. Erhart // C. R. Acad. Sci., Paris. — 1962. — Vol. 254. — P. 616–618.

33. Guy, R.K. Unsolved problems in number theory / R.K. Guy. — 3rd rd. — Springer Science & Business Medis Inc., 2004. — 438 p.

34. Jacobi, C. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum / C. Jacobi // Sumptibus fratrum Borntrager, Regiomonti in Ges. Werke. — 1829. — P. 49–239.

35. Korn, G.A. Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review / G.A. Korn, T.M. Korn. — 2nd rd. — Mineola, New York : Dover publications, 2000. — 1130 p.

36. Macdonald, I. G. The volume of a lattice polyhedron / I.G. Macdonald // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1963. — Vol. 59. — P. 719–726.

37. McMullen, P. Lattice invariant valuations on rational polytopes / P. McMullen // Arch. Math. — 1978/79. — No. 31. — P. 509–516.

38. McMullen, P. Polytopes with centrally symmetric faces / P. McMullen // Israel J. Math. — 1970. — Vol. 8. — P. 194–196.

39. McMullen, P. Polytopes with centrally symmetric facets / P. McMullen // Israel J. Math. — 1976. — Vol. 23, no. 3. — P. 337–338.

40. Mordell, L.J. Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums / L.J. Mordell // J. Indian Math. Soc. — 1951. — Vol. 15. — P. 41–46.

41. Morelli, R. Pick's theorem and the Todd class of a toric variety / R. Morelli // Adv. Math. — 1993. — No. 100. — P. 183–231.

42. Pick, G. Geometrisches zur Zahlenlehre / G. Pick // Naturwissenschaft Zeitschrift Lotos, Prague. — 1899.

43. Reeve, J.E. On the volume of lattice polyhedra / J.E. Reeve // Proc. London Math. Soc. — 1957. — No. 7. — P. 378–395.

44. Riemann, G.F.B. Theorie der Abelischen Funktionen / G.F.B. Riemann // J. Reine Angew. Math. — 1857. — Vol. 54. — P. 115–155.

45. Rosen, K.H. Dedekind-Rademacher sums and lattice points in triangle and tetrahedra / K.H. Rosen // Acta Arithmetica. — 1981. — Vol. 39. — P. 59–75.

46. Serre, J.-P. A course in Arithmetic / J.-P. Serre. — NewYork : Springer-Verlag, 1973. — 115 p.

47. Stillwell, J. Mathematics and its history / J. Stillwell. — Springer-Verlag New York, 2010. — 662 p.

48. Tereshonok, E.N. McMullen's formula and a multidimensional analog of the Weierstrass zeta-function / E.N. Tereshonok // Complex variables and elliptic equations: an international journal. — 2015. — Vol. 60.– Issue 11. — P. 1594–1601.

49. Tereshonok, E.N. Multidimensional Analog of the Weierstrass ζ-function in the Problem of the Number of Integer Points in a Domain / E.N. Tereshonok, A.V. Shchuplev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2012. — Vol. 5, no. 4. — P. 480–484.

50. Yau, S.T. On formulas for Dedekind sums and the number of lattice points in tetrahedra / S.T. Yau, L. Zhang // Journal of Number Theory. — 2009. — Vol. 129, no. 8. — P. 1931–1955.

51. Zappa, P. Osservazioni sui nuclei di Bochner-Martinelli / P. Zappa // Acc. Naz. Lincei. — 1979. — Vol. VIII, no. LXVII. — P. 21–26.

52. Zappa, P. Su una generalizzazione della $\wp$ di Weierstrass / P. Zappa // Bollettino U. M. I. — 1983. — Vol. 6, 2–A. — P. 245–252.

53. Zappa, P. Sulle classi di Dolbeault di tipo $(0,n-1)$ con singolarita in un insieme discreto / P. Zappa // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. — 1981. — Vol. 8, no. 70. — P. 87–95.