ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Полковников Александр Николаевич

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ЭРМИТОВЫМИ ФОРМАМИ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Шлапунов А. А.

Красноярск – 2017

Оглавление

Введение

Теория смешанных краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка активно развивалась в течение всего последнего столетия. Различные варианты таких задач рассматривались многими математиками с начала XX века. Так, еще в 1910 году С. Заремба в своей работе [69] описал условия разрешимости смешанной задачи для оператора Лапласа в области с гладкой границей и непрерывными начальными данными Неймана и Дирихле на разных кусках границы.

Бурное развитие теории эллиптических задач пришлось на начало второй половины XX века, чему способствовали работы таких математиков как С. Агмон, А. Дуглис и Л. Ниренберг [1], Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженис [19], Ф. Браудер [36], С. Кампанато [37] и многие другие. Существенную роль в развитии краевых задач в целом и эллиптических задач в частности сыграли работы М.С. Соболева, Л.Н. Слободецкого, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и других известных ученых.

Одним из результатов явилось то, что, как оказалось, в случае, когда граница области является гладкой и выполнено условие коэрцитивности (см. (1.12) ниже), то фредгольмовость задачи эквивалентна так называемому условию Шапиро - Лопатинского (см., например, [28] или [20]). Однако, в случае негладкой границы необходимо более детальное исследование проблемы.

Отметим, что при решении смешанных задач чаще всего пользуются либо методом потенциалов, либо методом эрмитовых форм и слабых решений. Идя вторым путем, на соответствующую эрмитову форму часто накладывают условие коэрцитивности, которое автоматически позволяет получить достаточно гладкое решение задачи вплоть до границы области, где ищется решение, если данные задачи также являются достаточно гладкими.

Однако, Ж. Кон в своей работе [50] при изучении $\overline{\partial}$-задачи Неймана столкнулся с феноменом так называемой субэллиптичности. Именно, в этой задаче, при выполнении условия сильной эллиптичности, происходит потеря гладкости решения вблизи границы. Тем не менее, Ж. Кону удалось доказать фредгольмовость задачи на шкале пространств соболевского типа в псевдо-выпуклых областях с гладкой границей.

В настоящей работе рассматриваются операторные уравнения, порожденные некоэрцитивными эрмитовыми формами, соответствующими некоэрцитивным смешанным краевым задачам с граничными условиями робеновского типа для сильно эллиптических дифференциальных операторов в произвольных областях с липшицевой границей. При этом, вместо условий на геометрические свойства области мы накладываем некоторые ограничения на граничные операторы, более слабые, чем условия Шапиро-Лопатинского.

Наряду с этим мы также рассматриваем некоэрцитивные эрмитовы формы, соответствующие смешанным задачам для эллиптических с параметром операторов. Мотивацией для изучения таких задач является тот факт, что, использование преобразования Фурье по параметру выявляет тесную связь между эллиптическими с параметром задачами и начально краевыми задачами для параболических уравнений, см., например, работу М.С. Аграновича и М.И. Вишика [2], где рассмотрена задача с постоянными комплексными коэффициентами в области с гладкой границей при выполнении условия Шапиро-Лопатинского с параметром и доказана однозначная разрешимость этой задачи при достаточно больших по модулю значениях параметра.

Дальнейшее развитие теории эллиптических с параметром краевых задач можно наблюдать в работах таких математиков как Р. Денк и Л. Волевич [39], А.С. Маркус [53], Б.В. Пальцев [54], Н.Н. Тарханов и А.А. Шлапунов [60] и многих других. В настоящей работе рассматривается некоэрцитивная задача для эллиптического с параметром дифференциального оператора второго порядка. Мы также доказываем однозначную разрешимость таких задач при достаточно больших по модулю значениях параметра, позволяя при этом “слабо” меняться аргументу функции, содержащую этот параметр.

Таким образом, ослабляя условия на граничные дифференциальные операторы, мы, тем не менее, доказываем фредгольмовость соответствующих операторных уравнений в специальных пространствах соболевского типа (с некоторой потерей гладкости, по сравнению с классическим результатами теории смешанных краевых задач), и при этом не накладывая ограничений на геометрические свойства области. Наряду с теорией разрешимости операторных уравнений, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами, мы также изучаем их спектральные свойства и доказываем полноту корневых векторов соответствующих операторов в рассматриваемых пространствах.

Цель диссертационной работы – найти подходящие функциональные пространства для решения некоэрцитивных смешанных задач, отыскать условия разрешимости соответствующих операторных уравнений и доказать полноту систем их корневых векторов.

Основные результаты работы:

1. Доказана теорема вложения в шкалу пространств Соболева-Слободецкого для пространств соболевского типа, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами.

2. Получены достаточные условия фредгольмовости смешанных задач робеновского типа для сильно эллиптического скалярного дифференциального оператора второго порядка с комплекснозначными коэффициентами, порожденной некоэрцитивной эрмитовой формой.

3. Получены достаточные условия фредгольмовости и однозначной разрешимости одного семейства некоэрцитивных задач для эллиптического с параметром дифференциального оператора второго порядка с граничными условиями робеновского типа.

4. Доказаны теоремы о полноте корневых функций соответствующих задач в пространствах, порожденными (некоэрцитивными) эрмитовыми формами.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В работе использованы методы функционально анализа, методы комплексного анализа, а также метод интегральных представлений.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты носят теоретический характер и могут быть применены в теории смешанных краевых задач, теории псевдодифференциальных операторов и дифференциальных операторов в частных производных.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих семинарах и научных конференциях:

1. Красноярский городской семинар по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2014-2017),

2. Семинар по математическому анализу под руководством профессора Sylvie Paycha (Потсдам, Германия, июль 2015)

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука: проспект Свободный», (Красноярск, 2013–2017гг.)

4. Международная конференция «VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике», (Ростов-на-Дону, 11-16 сентября 2016 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4-х статьях ([74, 75, 76, 78]) и 5-ти тезисах ([70, 71, 72, 73, 77]). Все статьи опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций, а статьи [75, 76, 78] опубликованы в журналах, индексируемых в наукометрических базах данных SCOPUS и Web of Science.

Результаты статьи [76] получены автором самостоятельно, статьи [74, 75, 78] опубликованы в соавторстве с научным руководителем А.А. Шлапуновым. Вклад авторов в совместные работы равнозначен и неделим.

Положения, выносимые на защиту.

1. Описание свойств пространств соболевского типа, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами. Теорема о вложении данных пространств в шкалу пространств Соболева-Слободецкого.

2. Теоремы об однозначной разрешимости и фредгольмовости для смешанных краевых задач в пространствах, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами.

3. Описание спектральных свойств операторов, соответствующих смешанным краевым задачам, а также критерии полноты корневых

функций в пространствах, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами.

4. Теоремы об условиях разрешимости и формулах Карлемана для некорректной задачи Коши для оператора Коши-Римана в пространствах соболевского типа.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 69 наименований, а список работ автора по теме диссертации 9 наименований. Общий объем диссертации: 123 страницы.

Первая глава диссертационной работы посвящена обзору литературы и результатов, полученных к настоящему моменту в теории смешанных краевых задач для дифференциальных эллиптических операторов второго порядка с граничными условиями робеновского типа (в частности, задача Зарембы). Именно, **параграф 1.1** посвящен вопросам разрешимости смешанных задач, а **параграф 1.2** затрагивает вопросы спектральной теории смешанных задач для эллиптических и эллиптических с параметром операторов.

Во **второй главе** мы указываем некоторые достаточные условия фредгольмовости и разрешимости для некоэрцитивных смешанных задач.

Напомним, что эрмитова форма $h(\cdot, \cdot)$ называется коэрцитивной на пространстве Соболева $H^s(D)$ в области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, если она определяет на этом пространстве скалярное произведение, а соответствующая ему норма эквивалента исходной норме пространства $H^s(D)$.

В **параграфе 2.1** мы рассматриваем эрмитову форму

$$(u, v)_+ = \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i v} \, dx + (a_{0,0} u, v)_{L^2(D)} + (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)}, \quad (0.1)$$

соответствующую дифференциальному оператору второго порядка в дивергентной форме

$$A_0(x, \partial) u = - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u),$$

здесь $a_{i,j}(x)$ суть комплекснозначные измеримые ограниченные функции в области D с липшицевой границей ∂D, $a_{0,0}$ - неотрицательная измеримая ограниченная функция в D, а $\Psi : H^r(\partial D) \to L^2(\partial D)$ некоторый ограниченный линейный оператор при фиксированном $0 \leq r \leq 1/2$. Мы предполагаем, что матрица

$$\mathfrak{A}(x) = (a_{ij}(x))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

является эрмитовой и удовлетворяет условиям

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\overline{w}_i w_j \geq 0, \tag{0.2}$$

для всех $(x, w) \in \overline{D} \times \mathbb{C}^n$, и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0\,|\xi|^2, \tag{0.3}$$

для всех $(x, \xi) \in \overline{D} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ с некоторой положительной константой m_0. Оценки (0.2) и (0.3) означают, что оператор $A(x, \partial)$ сильно эллиптичен. Заметим, что если коэффициенты $a_{i,j}$ комплекснозначны, то эти оценки значительно слабее, чем условие строгой коэрцитивности эрмитовой формы, которое чаще всего используют при рассмотрении смешанных задач (см., например, [4], [5]), то есть, существование такой постоянной m, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\overline{w}_i w_j \geq m_0\,|w|^2 \tag{0.4}$$

для всех $(x, w) \in \overline{D} \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$.

Пусть теперь S есть некоторое подмножество ∂D. Обозначим через $C^1(\overline{D}, S)$ множество непрерывно дифференцируемых функций в замыкании $\overline{D}$ области D, равных нулю в некоторой (относительной) окрестности множества $\overline{S}$ в $\overline{D}$. Нетрудно указать простые условия, при которых форма $(.,.)_+$ определяет скалярное произведение на $C^1(\overline{D}, S)$, которые мы в дальнейшем будем считать всегда выполненными.

Пусть далее $H^+(D)$ есть пополнение пространства $C^1(\overline{D}, S)$ по норме $\|\cdot\|_+$, соответствующей скалярному произведению (0.1), а $H^1(D, S)$ – пополнение пространства $C^1(\overline{D}, S)$ по норме пространства Соболева $\|\cdot\|_{H^1(D)}$.

Отметим, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $L^2(D)$, если, например, существует константа c_2, такая, что

$$a_{0,0} \geq c_2 > 0 \text{ в } D. \tag{0.5}$$

Обозначим через $s = s(r)$ вещественное число, которое определяется следующим образом:

$$s = \begin{cases} 1/2 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, & \text{если} \quad r = 0, \\ 1/2, & \text{если} \quad r = 0 \quad \text{и} \quad \partial D \in C^2, \\ 1/2 + r, & \text{если} \quad 0 < r \leq 1/2. \end{cases}$$

Несмотря на отсутствие коэрцитивной оценки для нормы $\|\cdot\|_+$, для пространства $H^+(D)$ справедлива следующая теорема вложения (см. [74, 75]).

Теорема 4. *Пусть коэффициенты $a_{i,j}$ принадлежат C^∞ в окрестности X замыкания D, выполнены неравенства (0.2), (0.3) и существует константа $c_1 > 0$, такая, что*

$$\|\Psi u\|_{L^2(\partial D)} \geq c_1 \|u\|_{H^r(\partial D)} \text{ для всех } u \in H^r(\partial D, S).$$

Если выполнено неравенство (0.5) или оператор $A_{0,0}$ является сильно эллиптическим в окрестности X замыкания D и

$$\int_X \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i u} \, dx \geq m_1 \|u\|^2_{L^2(X)}$$

для всех $u \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(X)$, где $m_1 > 0$ - константа, не зависящая от u, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^s(D)$.

Случай, когда выполнена коэрцитивная оценка, хорошо известен (см., например, [21]). В этом случае пространство $H^+(D)$ будет непрерывно вложено в $H^1(D)$.

В **параграфе 2.2** мы рассматриваем смешанную задачу для дифференциального оператора второго порядка

$$A(x, \partial) u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u) + \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u + a_0(x) u,$$

для которого выполнены оценки (0.2) и (0.3), с граничным оператором робеновского типа,

$$B(x, \partial) = b_1(x)\partial_c + B_0,$$

где $b_1(x)$ есть комплекснозначная ограниченная функция на границе ∂D, ∂_c - это конормальная производная относительно оператора A,

$$\partial_c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\, \nu_i \partial_j,$$

а B_0 это плотно определенный линейный (псевдодифференциальный) оператор в $L^2(\partial D)$,

$$B_0 = \chi_S + b_1\, (\varPsi^* \varPsi + \delta B_0)\, .$$

Мы позволяем исчезать функции $b_1(x)$ на открытом (в относительной топологии) связном подмножестве S границы ∂D, с кусочно гладкой границей ∂S, здесь χ_S есть характеристическая функция множества S на ∂D, а δB_0 это некоторое возмущение оператора Ψ.

Рассматривается следующая задача:

Задача 1. *Пусть в области D дано распределение f, требуется найти такое распределение u в D, что, в подходящем смысле,*

$$\begin{cases} A(x, \partial)u = f & \textit{в области } D, \\ B(x, \partial)u = 0 & \textit{на } \partial D. \end{cases}$$

Обозначим через ι оператор непрерывного вложения

$$\iota : H^+(D) \hookrightarrow L^2(D),$$

а через $H^-(D)$ пополнение пространства $H^1(D, S)$ по норме

$$\| \, u \, \|_{H^-} = \sup_{v \neq 0} \frac{\left|(v, u)_{L^2(D)}\right|}{\| \, v \, \|_{H^+}},$$

где $v \in H^1(D, S)$. Пространство $H^-(D)$ можно охарактеризовать как двойственное к пространству $H^+(D)$ относительно спаривания в $L^2(D)$ (обозначим его $<.,.>$). Также обозначим через ι' оператор непрерывного вложения

$$\iota' : L^2(D) \to H^-(D).$$

Под $Q(u,v)$ мы будем понимать полуторалинейную форму

$$Q(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_i u, \partial_j v)_{L^2(D)} + (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D\setminus S)}$$
$$+ (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)}, + \sum_{j=1}^{n} (a_j(x)\partial_j u, v)_{L^2(D)} + (a_0(x)u, v)_{L^2(D)},$$

которая при любом фиксированном $u \in H^+(D)$ определяет непрерывный линейный функционал на $H^+(D)$, если для некоторой константы $c > 0$ выполнено неравенство

$$\left|(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D\setminus S)}\right| \leq c\,\|u\|_+\,\|v\|_+$$

для всех $u, v \in H^1(D,S)$.

Сформулируем обобщенную постановку задачи 3.

Задача 2. *Пусть дана функция $f \in H^-(D)$, требуется найти функцию $u \in H^+(D)$ такую, что*

$$Q(u,v) =< f, v >, \tag{0.6}$$

для любого $v \in H^+(D)$.

Задачу 2 можно сформулировать в следующем виде: для данного $f \in H^-(D)$ найти $u \in H^+(D)$, удовлетворяющую соотношению

$$(u,v)_+ + (\delta L_B u + \delta L_c u, v)_{L^2(D)} =< f, v > \tag{0.7}$$

для любого $v \in H^+(D)$, где оператор $\delta L_B : H^-(D) \to H^+(D)$ индуцирован выражением

$$(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D\setminus S)},$$

а оператор $\delta L_c : H^-(D) \to H^+(D)$ индуцирован выражением

$$\Big(\sum_{j=1}^n a_j \partial_j u + \delta a_0 \, u, v \Big)_{L^2(D)}.$$

Если мы дополнительно обозначим через $L_0 : H^-(D) \to H^+(D)$ оператор, индуцированный скалярным произведением $(u, v)_+$, то выражению (0.7) можно придать следующий вид:

$$(Lu, v)_{L^2(D)} =< f, v >,$$

где через L мы обозначили сумму операторов

$$L = (L_0 + \delta L_B + \delta L_c) : H^-(D) \to H^+(D).$$

Следующая лемма (см. [74]) об однозначной разрешимости для операторных уравнений, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами, является аналогом соответствующих теорем в коэрцитивном случае.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда оператор L_0 : $H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим и $\|L_0\| = \|L_0^{-1}\| = 1$.*

Сформулируем более общий результат (см. [74, 75]).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Если функционал $g(v) = (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ порождает ограниченный оператор δL_B из $H^+(D)$ в $H^-(D)$ при $\|\delta L_B\| < 1$, или $g(v)$ порождает компактный оператор из $H^+(D)$ в $H^-(D)$, то оператор L является фредгольмовым оператором с нулевым индексом.*

Таким образом, оператор L_0 непрерывно обратим, а в силу теоремы 4 операторы δL_B и δL_c можно рассматривать как малое и компактное возмущение оператора L_0 соответственно.

В **параграфе 2.3** мы рассматриваем семейство некоэрцитивных смешанных задач с параметром, а именно, мы рассматриваем оператор

$$A(x, \partial, \lambda)u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u) + \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u + a_0(x) u + E(\lambda) u$$

в области D с комплексным параметром λ, где

$$E(\lambda)u = \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x)\partial_j u + a_0^{(1)}(x)u \right) + \lambda^2 a_0^{(2)}(x)u.$$

Здесь коэффициенты $a_{i,j}$, a_j, $a_j^{(1)}$, $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ суть комплекснозначные функции класса $L^\infty(D)$, а матрица $\mathfrak{A}(x) = (a_{i,j}(x))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ эрмитова и для нее справедливы неравенства (0.2) и (0.3).

Более того, предположим, что оператор $A(x, \partial, \lambda)$ является эллиптическим с параметром. Именно, оператор $A(x, \partial, \lambda)$ называется эллиптическим с параметром на луче $\Gamma = \{\arg(\lambda) = \varphi_\Gamma\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, если

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x)\zeta_j + \lambda^2 a_0^{(2)}(x) \neq 0$$

для всех $x \in \overline{D}$ и всех $(\lambda, \zeta) \in (\Gamma \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0, 0\}$.

Мы рассматриваем следующую задачу:

Задача 5. *Для данного распределения f в D, найти распределение u в D, которое удовлетворяет, в обобщенном смысле,*

$$\begin{cases} A(x, \partial, \lambda)u &= f \quad \textit{в} \quad D, \\ B(x, \partial)u &= 0 \quad \textit{на} \quad \partial D. \end{cases}$$

Тщательному изучению подвергается наиболее важный случай для приложений, когда $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}$. Оператор $L(\lambda) : H^-(D) \to H^+(D)$, соответствующий обобщенной постановке задачи, принимает в этом случае следующий вид

$$L(\lambda) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c + \lambda^2 C,$$

где оператор $C : H^-(D) \to H^+(D)$ индуцирован выражением $(a_0^{(2)}u, v)_{L^2(D)}$.

Следующая теорема (см. [75]) обобщает теорему о разрешимости смешанной задачи для эллиптического с параметром оператора (см. [2]) на случай некоэрцитивных форм и "слабо" меняющийся аргумент функции, содержащей параметр.

Теорема 6. *Пусть либо Ψ задается с помощью умножения на функцию*

$\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$, а Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}$, выполнены условия теоремы 4 и

$$a_0^{(2)} \neq 0 \text{ почти всюду в } D,$$

$$\cos(\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma) \geq \theta_1(\Gamma) = \theta_1 > -1 \text{ для всех } x \in \overline{D}.$$

Если $\varphi_0 \in C(\overline{D})$, $L(\lambda)$ образует голоморфное семейство фредгольмовых операторов и $\|\delta L_B\|^2 + (\max(0, -\theta_1(\Gamma)))^2 < 1$, то

1) *существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что операторы $L(\lambda) : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратимы при всех $\lambda \in \Gamma$, для которых $|\lambda| \geq |\gamma_0|$;*

2) *операторы $L(\lambda)$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме счетного множества $\{\lambda_\nu\}$, не имеющего предельных точек в $\mathbb{C}$.*

Глава 3 посвящена спектральным свойствам рассматриваемых операторов. В **параграфе 3.1** мы рассматриваем спектральные свойства слабых возмущений компактных самосопряженных операторов.

Напомним, ненулевая функция $u_\nu \in \mathcal{H}$ для соответствующего собственного значения $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$ называется корневой функцией линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве $\mathcal{H}$, если для некоторого натурального числа m справедливо

$$(\mathcal{A} - \lambda_\nu I)^m u_\nu = 0,$$

где $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ есть единичный оператор. Ясно, что понятие корневой функции при $m = 1$ совпадает с понятием собственной функции.

Применяя известную теорему Келдыша о полноте корневых функций слабых возмущений компактных самосопряженных операторов, мы получаем следующий результат [75, 76].

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда, для любого обратимого оператора $L_0 + \delta L_c : H^+(D) \to H^-(D)$, где δL_c это компактный оператор, система корневых функций компактного оператора*

$$P_1 = \iota' \iota (L_0 + \delta L_c)^{-1} : H^-(D) \to H^-(D)$$

полна в пространствах $H^-(D)$, $L^2(D)$ и $H^+(D)$.

Параграф 3.2 посвящен изучению спектральных свойств эллиптических с параметром операторов. А именно, предположим, что $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и $F(\lambda)$ это голоморфная функция в проколотой окрестности точки λ_0, принимающая свои значения в пространстве $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ ограниченных линейных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2. Точка λ_0 называется характеристической точкой функции $F(\lambda)$, если существует голоморфная функция $u(\lambda)$ в окрестности λ_0 со значениями в H_1, такая, что $u(\lambda_0) \neq 0$, но $F(\lambda)u(\lambda)$ продолжается до голоморфной функции (со значениями в H_2) в некоторую окрестность точки λ_0, и исчезающая в этой точке. Как обычно, мы назовем $u(\lambda)$ корневой функцией семейства $F(\lambda)$ в λ_0.

Обозначим через $\mathfrak{C} : H^+(D) \to H^-(D)$ линейный ограниченный оператор, индуцированный выражением $(|a_0^{(2)}|u, v)_{L^2(D)}$. Заметим, что если выполнено

$$a_0^{(2)} \neq 0 \text{ почти всюду в } D, \tag{0.8}$$

то умножение на функцию $|a_0^{(2)}| \in L^\infty(D)$ индуцирует ограниченный инъективный самосопряженный оператор $\mathfrak{C}_0 : L^2(D) \to L^2(D)$. Обозначим также через $h(\cdot, \cdot)$ следующую эрмитову форму:

$$h(u, v) = (|a_0^{(2)}|u, v)_{L^2(D)}.$$

Заметим, что если выполнено (0.8), то она определяет скалярное произведение на пространстве $L^2(D)$. Обозначим пространство $L^2(D)$ с этим скалярным произведением через $L^2_h(D)$.

Пусть теперь $\mathcal{H}$ есть пространство Гильберта, а оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ компактен. Тогда оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ будет компактным и самосопряженным. Из этого следует, что существует единственный неотрицательный компактный самосопряженный квадратный корень из оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, обозначим его $|\mathcal{A}|$. Согласно теореме Гильберта-Шмидта, оператор $|\mathcal{A}|$ имеет счетное число собственных значений $s_\nu(\mathcal{A})$, которые часто называют s - числами оператора $\mathcal{A}$.

Говорят, что оператор $\mathcal{A}$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$, если

$$\sum_\nu |s_\nu(\mathcal{A})|^p < \infty.$$

При этом компактный оператор $\mathcal{A}$ называют оператором конечного порядка, если он принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$. Нижнюю грань из таких p называют порядком оператора $\mathcal{A}$.

Применяя теорему Келдыша к операторным уравнениям, соответствующим некоэрцитивной смешанной задачи для эллиптического с параметром оператора, получаем следующий результат (см. [75, 76]).

Теорема 9. *Пусть выполнено (0.8). В условиях теоремы 4, операторы*

$$L_0^{-1}\mathfrak{C} : H^+(D) \to H^+(D),\ \mathfrak{C}L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D),\ \iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 : L^2(D) \to L^2(D)$$

являются компактными операторами конечного порядка,

$$ord\,(\mathfrak{C}L_0^{-1}) = ord\,(L_0^{-1}\mathfrak{C}) = ord\,(\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0) = n/(2r+1),$$

причем система собственных векторов оператора $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ полна в пространствах $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$.

Наряду с компактными возмущениями мы также изучаем спектральные свойства при малых возмущениях исследуемых операторов. Обозначим через φ_0 аргумент функции $a_0^{(2)}(x)$. Справедлива следующая теорема [75, 76], использующая теорию лучей медленного роста (см., например, [33])

Теорема 10. *Пусть либо оператор Ψ задается с помощью умножения на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$, а Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также выполнены условия теоремы 4, неравенство (0.8) и*

$$\Phi = \sup_{x,y\in\overline{D}} (\varphi_0(x) - \varphi_0(y)) < \pi(2r+1)/2n.$$

Если $\varphi_0 \in C^{0,1}(\overline{D})$ и

$$\|\delta L_B\|^2 + (\max{(0, -\cos{((\pi(2r+1) - 2n\Phi)/4n)})})^2 < 1$$

то мы имеем:

1) для любого $\varepsilon > 0$ все характеристические значения λ_ν (кроме конечного числа) семейства $L(\lambda) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c + \lambda^2 C$ принадлежат *углам*

$$\{|\arg(\lambda) \pm \pi/2| < \pi(2r+1)/2n + \varepsilon\}$$

причем $\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = +\infty$*;*

2) система корневых векторов семейства $L(\lambda) = L_0 + \delta L_c + \delta L_B + \lambda^2 C$ *полна в пространствах* $H^+(D)$*,* $H^-(D)$ *и* $L^2(D)$*.*

В **четвертой главе** мы приводим несколько примеров, а также используем полученные результаты для изучения условий разрешимости некорректной задачи Коши для оператора Коши-Римана и построения формул Карлемана для ее решений.

Глава 1

Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ это n – мерное вещественное пространство с координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим через ∂_j частную производную по переменной x_j, то есть

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Обозначим через $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ комплексное пространство размерности $n \geq 1$ с координатами $z \in \mathbb{C}^n$, задающими комплексную структуру, то есть $z_j = x_j + \sqrt{-1}\, x_{j+n}$, $j = 1, \ldots, n$, где $x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Через $\overline{z}_j$, как обычно, обозначим сопряженное к z_j, $\overline{z}_j = x_j - \sqrt{-1}\, x_{j+n}$.

Обозначим через $\frac{\partial}{\partial z_j}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ формальные (частные) производные по переменным z_j и $\overline{z}_j$ соответственно,

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_{j+n}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_{j+n}}\right),$$

где $\frac{\partial}{\partial x_j}$ – частная производная переменной x_j.

Через $\overline{\partial}$ мы, как обычно, обозначим оператор Коши-Римана в $\mathbb{C}^n$, то есть это столбец из n формальных частных производных

$$\overline{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}.$$

Формально сопряженный оператор $\overline{\partial}^*$ к оператору Коши-Римана есть строка из n формальных частных производных $\overline{\partial}_j^* =: -\frac{\partial}{\partial z_j}$.

Далее, пусть D – ограниченная область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Q_a^n куб

$$Q_a^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leqslant a,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Говорят, что граница области ∂D липшицева, если существуют константы $a > 0$, $b > 0$ и конечное число локальных координатных систем $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и отображений

$$M_k : \widetilde{x}^{(k)} = \{(x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}) \in Q_a^{n-1,k}\} \to \mathbb{R}$$

таких, что для всех функций $M_k(\widetilde{x}^{(k)})$, $1 \leqslant k \leqslant N$, выполнено условие Липшица,

$$|M_k(\widetilde{x}^{(k)}) - M_k(\widetilde{y}^{(k)})| \leqslant c|x - y|,$$

где $c > 0$ это некоторая константа (ее называют постоянной Липшица), не зависящая от x и y, кроме этого

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{N} \{x_n^{(k)} = M_k(\widetilde{x}^{(k)}),\ \widetilde{x}^{(k)} \in Q_a^{n-1,k}\}$$

и

$$\{(\widetilde{x}^{(k)}, x_n^{(k)}) : M_k(\widetilde{x}^{(k)}) < x_n^{(k)} < M_k(\widetilde{x}^{(k)}) + b\} \subset D,$$
$$\{(\widetilde{x}^{(k)}, x_n^{(k)}) : M_k(\widetilde{x}^{(k)}) - b < x_n^{(k)} < M_k(\widetilde{x}^{(k)})\} \subset \mathbb{R}^{2n} \setminus \overline{D}.$$

Пусть теперь $C(D)$ – пространство непрерывных комплекснозначных в области D функций, а $C^s(D)$ – пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций в области D, и $C^s(\overline{D})$ – пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций в замыкании $\overline{D}$ области D. Обозначим через $C_0^s(D)$ пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями в области D, а также $C^s(\overline{D}, S)$ множество s - раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{D}$, исчезающих на подмножестве $S \subset \partial D$.

Обозначим через $L^p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$, пространство Лебега функций, заданных на области D, то есть пространство измеримых по Лебегу в области

D функций, таких, что

$$\int_D |u(x)|^p dx < \infty.$$

Как хорошо известно, это банахово пространство с нормой

$$\| u \|_{L^p(D)} = \left(\int_D |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Более того, пространство $L^2(D)$ является пространством Гильберта со скалярным произведением

$$(u, v)_{L^2(D)} = \int\limits_D u\bar{v} dx.$$

В случае $p = \infty$, под $L^\infty(D)$ понимают пространство почти всюду ограниченных функций с нормой

$$\| u \|_{L^\infty(D)} = \operatorname{ess} \sup_{z \in D} |u(z)|,$$

то есть

$$\| u \|_{L^\infty(D)} = \inf \{C \geqslant 0 : |u| \leqslant C \text{ почти всюду}\}.$$

Пусть теперь $H^s(D)$, $s \in \mathbb{N}$, обозначает пространство Соболева, то есть множество $L^2(D)$ - функций, обобщенные производные которых до порядка s включительно принадлежат $L^2(D)$. Это пространство Банаха с нормой

$$\| u \|_{H^s(D)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \left(\int_D |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что D есть область с липшицевой границей, а тогда его эквивалентным образом можно определить как пополнение пространства $C^\infty(\overline{D})$ по норме $\| u \|_{H^s(D)}$.

Для дробных $s \geqslant 0$ также можно определить $H^s(D)$ как пополнение пространства $C^\infty(\overline{D})$ по норме

$$\| u \|^2_{H^s(D)} = \| u \|^2_{H^{[s]}(D)} + \sum_{|\alpha| = [s]} \| D^\alpha u \|^2_{H^{s-[s]}(D)},$$

где
$$\| u \|^2_{H^{s-[s]}(D)} = \| u \|^2_{L^2(D)} + \iint\limits_{D\times D} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2(s-[s])}} dx\,dy.$$

Такое пространство обычно называют пространством Соболева - Слободецкого (см. [23]).

1.1 Краевые задачи для сильно эллиптических операторов

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка в дивергентной форме

$$A(x,\partial)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u + a_0(x)u, \qquad (1.9)$$

здесь $a_{i,j}(x), a_j(x), a_0(x)$ суть комплекснозначные измеримые ограниченные функции в некоторой области X в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что матрица

$$\mathfrak{A}(x) = (a_{ij}(x))_{\substack{i=1,\dots,2n \\ j=1,\dots,2n}}$$

является эрмитовой, то есть $a_{ij}(x) = \overline{a_{ji}(x)}$, и удовлетворяет условиям

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\overline{w}_i w_j \geq 0, \qquad (1.10)$$

для всех $(x,w) \in X \times \mathbb{C}^n$, и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0\,|\xi|^2, \qquad (1.11)$$

для всех $(x,\xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, где m_0 - положительная константа, не зависящая от ξ и x. Оценка (1.11) означает, что оператор $A(x,\partial)$ сильно эллиптичен. Заметим, что матрица $\mathfrak{A}(x)$ может вырождаться, так как рассматриваемые функции являются комплекснозначными (см. пример 2 ниже). В частности, оценки (1.10) и (1.11) слабее, чем (строгая) коэрцитивность эрмитовой формы, то есть существование такой постоянной m, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\overline{w}_i w_j \geq m_0\,|w|^2 \tag{1.12}$$

для всех $(x, w) \in X \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$.

Пусть теперь D есть область с липшицевой границей, лежащая вместе со своим замыканием в X. Поскольку ∂D является поверхностью Липшица, то, согласно теореме Радемахера, она почти в каждой точке имеет касательную плоскость. Обозначим через $\nu(x)$ (определенный почти всюду на ∂D) единичный вектор внешней нормали к ∂D в точке $x \in \partial D$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$.

Рассмотрим граничный дифференциальный оператор первого порядка

$$B(x, \partial) = b_1(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\nu_i \partial_j + B_0$$

где $b_1(x)$ есть комплекснозначная ограниченная функция на границе ∂D, а B_0 это плотно определенный линейный (псевдодифференциальный) оператор в $L^2(\partial D)$ “порядка”, не превосходящего единицы. Функция $b_1(x)$ может исчезать на открытом связном подмножестве S границы ∂D, с кусочно гладкой границей ∂S.

Грубая формулировка краевой задачи для эллиптического оператора A состоит в следующем: пусть в области D дано распределение f, требуется найти такое распределение u в D, что

$$\begin{cases} A(x, \partial)u = f & \text{в области } D, \\ B(x, \partial)u = 0 & \text{на } \partial D. \end{cases} \tag{1.13}$$

Здесь уравнение в области D надо понимать в смысле распределений, а граничные значения в некотором слабом (обобщенном) смысле, который подлежит уточнению.

Наряду с задачей (1.13) мы рассматриваем смешанную задачу для эллиптического с параметром оператора. А именно, рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка в дивергентной форме

$$A(x,\partial,\lambda)u = A(x,\partial)u + E(\lambda)u \tag{1.14}$$

в области D с комплексным параметром λ; здесь

$$E(\lambda)u = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x)\partial_j u + a_0^{(1)}(x)u\right) + \lambda^2 a_0^{(2)}(x)u. \tag{1.15}$$

Коэффициенты $a_j^{(1)}$, $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ предполагаются комплекснозначными функциями класса $L^\infty(D)$. На оператор $A(x,\partial,\lambda)$ накладываются те же условия, что и на оператор $A(x,\partial) = A(x,\partial,0)$: матрица $\mathfrak{A}(x)$ предполагается эрмитовой, а условия (1.10) и (1.11) выполненными. Дополнительно предположим, что оператор $A(x,\partial,\lambda)$ является эллиптическим с параметром на луче $\Gamma = \{\arg(\lambda) = \varphi_\Gamma\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то есть

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j + \lambda\sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x)\zeta_j + \lambda^2 a_0^{(2)}(x) \neq 0$$

для всех $x \in X$ и всех $(\lambda,\zeta) \in (\Gamma\times\mathbb{R}^n)\setminus\{0,0\}$.

Рассмотрим следующую задачу: пусть в области D дано распределение f, требуется найти такое распределение u в D, что

$$\begin{cases} A(x,\partial,\lambda)u = f & \text{в области } D,\\ B(x,\partial)u = 0 & \text{на } \partial D.\end{cases} \tag{1.16}$$

Особенностью таких задач является то, что, используя преобразование Фурье по параметру λ, можно перейти от эллиптической с параметром задачи к параболической. Такие задачи широко рассматривались во второй половине XX века. Одной из первых работ, посвященной данной теме, была работа М.С. Аграновича и М.И. Вишика [2]. Они рассмотрели задачу с постоянными комплексными коэффициентами в области D с гладкой границей ∂D. Дополнительно накладывая условие Шапиро - Лопатинского с параметром, им удалось доказать однозначную разрешимость задачи при достаточно больших значениях $|\lambda|$.

Дальнейшее развитие теории эллиптических с параметром краевых задач можно наблюдать в работах таких математиков как Р. Денк и Л. Волевич [39], А.С. Маркус [53], Б.В. Пальцев [54], Н.Н. Тарханов и А.А. Шлапунов [60] и многих других. В настоящей работе рассматривается некоэрцитивная задача для эллиптического с параметром дифференциального оператора второго порядка в случае, когда

$$E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}(x),$$

и доказывается ее однозначная разрешимость при "слабо" меняющемся $\arg(a_0^{(2)}(x))$ для всех достаточно больших значений $|\lambda|$.

1.2 Элементы спектральной теории несамосопряженных операторов

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство и $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ линейный оператор. Как обычно, $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$, если существует ненулевой элемент $u \in \mathcal{H}$ такой, что

$$(\mathcal{A} - \lambda I)u = 0,$$

где I это единичный оператор в $\mathcal{H}$. Элемент u называется собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ. Множество всех собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению λ, вместе с нулевым элементом образует подпространство $\mathrm{E}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{H}$, называемое собственным подпространством оператора $\mathcal{A}$, соответствующем собственному значению λ. Следующая известная теорема гласит, что собственные вектора компактного самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ полны в $\mathcal{H}$.

Теорема 1 (Гильберта-Шмидта)**.** *Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ компактный самосопряженный оператор. Тогда оператор $\mathcal{A}$ имеет счетное число собственных значений, при этом все они вещественные и каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность. Более того, существует ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.*

Как известно, компактный несамосопряженный оператор может не иметь собственных значений. Однако, М.В. Келдыш в 1951 году выделил некоторый класс компактных возмущений компактных самосопряженных операторов конечного порядка, корневые функции которого полны в рассматриваемом пространстве (см. [11] или [12]).

А именно, ненулевая функция u_ν для соответствующего собственного значения λ_ν называется корневой функцией оператора $\mathcal{A}$, если для некоторого натурального числа m справедливо

$$(\mathcal{A} - \lambda_\nu I)^m u_\nu = 0,$$

где I это единичный оператор. Ясно, что понятие корневой функции при $m = 1$ совпадает с понятием собственной функции.

Прежде чем сформулировать теорему Келдыша, введем еще одно понятие. Пусть оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ компактен, тогда оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ будет компактным и самосопряженным. Из этого следует, что существует единственный неотрицательный компактный самосопряженный корень из оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, который обычно обозначают $|\mathcal{A}|$. Согласно теореме 1, оператор $|\mathcal{A}|$ имеет счетное число собственных значений $s_\nu(\mathcal{A})$, которые часто называют s - числами оператора $\mathcal{A}$. При этом ясно, что если оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, тогда $s_\nu(\mathcal{A}) = |\lambda_\nu|$, где $\{\lambda_\nu\}$ это система собственных значений оператора $\mathcal{A}$.

Говорят, что оператор $\mathcal{A}$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$, если

$$\sum_\nu |s_\nu(\mathcal{A})|^p < \infty.$$

При этом компактный оператор $\mathcal{A}$ называют оператором конечного порядка, если он принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$. Нижнюю грань таких чисел p называют порядком оператора $\mathcal{A}$.

Сформулируем теорему Келдыша так, как она изложена в книге [9].

Теорема 2 (Келдыша)**.** *Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ компактный самосопряженный оператор конечного порядка. Если оператор $\delta\mathcal{A}$ компактен, а оператор $\mathcal{A}(I + \delta\mathcal{A})$ инъективен, тогда система корневых функций оператора $\mathcal{A}(I+\delta\mathcal{A})$ полна в $\mathcal{H}$, при этом для любого $\varepsilon > 0$ все собственные значения оператора $\mathcal{A}(I + \delta\mathcal{A})$ (кроме конечного числа) лежат в углах $|\arg\lambda| < \varepsilon$*

и $|\arg\lambda - \pi| < \varepsilon$. *Более того,*

1. *если* $\mathcal{A}$ *имеет только конечное число отрицательных собственных значений, тогда оператор* $\mathcal{A}(I + \delta\mathcal{A})$ *имеет только конечное число собственных значений в угле* $|\arg\lambda - \pi| < \varepsilon$*;*

2. *если* $\mathcal{A}$ *имеет только конечное число положительных собственных значений, тогда оператор* $\mathcal{A}(I + \delta\mathcal{A})$ *имеет только конечное число собственных значений в угле* $|\arg\lambda| < \varepsilon$*.*

Однако, как выяснилось, полноту собственных функций можно получить и для неограниченных операторов. Так, в 1962 году С. Агмон в своей работе [33] доказал полноту собственных функций эллиптической краевой задачи с помощью оценок резольвенты соответствующего оператора на некоторых прямых комплексной плоскости (так называемые лучи медленного роста).

Рассмотрим этот метод более подробно, пусть T – неограниченный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с дискретным спектром. Обозначим через $R(\lambda; T)$ резольвенту оператора T. Луч $\arg\lambda = \vartheta$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется *лучом медленного роста* резольвенты $R(\lambda; T)$, если резольвента существует для всех достаточно больших значений $|\lambda|$ на этом луче, и для всех таких λ выполнено неравенство

$$|R(\lambda; T)| \leq c|\lambda|^{-1} \tag{1.17}$$

с некоторой положительной константой c.

Справедлива следующая теорема, см. книгу Н. Данфорда и Д.Т. Шварца [40], а также книгу И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна [9].

Теорема 3. *Пусть* T *– неограниченный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *со всюду плотной областью определения, и пусть* $0 < p < \infty$*. Допустим, что для некоторого* λ_0 *из резольвентного множества оператора* T *резольвента* $R(\lambda_0; T)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{S}_p$*. Пусть* $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ *– непересекающиеся дифференцируемые дуги, каждая из которых имеет предельное значение на бесконечности; предположим, что угол, образованный в бесконечности любой парой соседних дуг, меньше* π/p*. Допустим, что, когда* $\lambda \to \infty$ *вдоль какой-нибудь из дуг* γ_j*, резольвента*

$R(\lambda; T)$ *допускает оценку*

$$|R(\lambda; T)| \leq c|\lambda|^N$$

с некоторыми константами N *и* $c > 0$. *Тогда собственные функции оператора* T *полны в* $\mathcal{H}$.

Заметим, что вместо понятия лучей медленного роста здесь используются некоторые кривые, однако в частности результат справедлив и для лучей медленного роста.

Помимо вышеперечисленных работ отметим работы таких математиков как И.Ц. Гохберг, Е.И. Сигал и М.Г. Крейн [9], [44], А.С. Маркус [53], Ф. Браудер [36], М.С. Агранович [5], С.Я. Якубов [68], В.А. Кондратьев [15], Н.Н. Тарханов и А.А. Шлапунов [67], [62] и многих других исследователей, внесших вклад в развитие спектральной теории.

В данной диссертации доказывается полнота корневых функций для одного класса некоэрцитивных смешанных задач в специальных пространствах соболевского типа.

Глава 2

Об одном классе операторных уравнений, порожденных эрмитовыми формами

2.1 Теорема вложения для функциональных пространств, порожденных эрмитовыми формами

Обозначим через $A_0(x, \partial)$ старшую часть оператора (1.9), то есть

$$A_0(x, \partial)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u).$$

Как и прежде, мы полагаем, что матрица из коэффициентов $\mathfrak{A}(x)$ является эрмитовой и удовлетворяет условиям (1.10) и (1.11).

Далее, зафиксируем число $0 \leq r \leq 1/2$ и ограниченный линейный оператор $\Psi : H^r(\partial D) \to L^2(\partial D)$. Интервал значений для r мотивирован теоремой о следе для пространств Соболева и аргументами двойственности. Через $\Psi^* : L^2(\partial D) \to H^r(\partial D)$ обозначим оператор, сопряженный к оператору Ψ.

Для $r = 0$ типичным оператором Ψ является дифференциальный оператор нулевого порядка, то есть, $\Psi u = \psi u$, где ψ это функция на ∂D локально ограниченная вне ∂S. Тогда оператор

$$(\Psi^* \Psi u)(x) = |\psi(x)|^2 u(x)$$

обратим в $L^2(\partial D, S)$ при условии, что $|\psi(x)| \geq c > 0$ на $\partial D \setminus S$. Если ∂D является дважды гладкой, то в качестве модельного оператора Ψ для этой ситуации можно взять следующий:

$$\Psi = (1 + \Delta_{\partial D})^{r/2},$$

где $\Delta_{\partial D}$ это оператор Лапласа - Бельтрами на границе.

Обозначим через $H^1(D, S)$ замыкание пространства $C^1(\overline{D}, S)$ в $H^1(D)$. Очевидно, это гильбертово пространство с индуцированным скалярным произведением.

Пусть теперь $a_{0,0}$ - неотрицательная ограниченная функция, и пусть функционал

$$\|u\|_+ = \left(\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i u} \, dx + \|\sqrt{a_{0,0}} u\|^2_{L^2(D)} + \|\Psi(u)\|^2_{L^2(\partial D)} \right)^{1/2}$$

определяет норму в пространстве $H^1(D, S)$. Тогда обозначим через $H^+(D)$ пополнение пространства $H^1(D, S)$ по норме $\| \cdot \|_+$. Пространство $H^+(D)$ является пространством Гильберта со скалярным произведением

$$(u, v)_+ = \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i v} \, dx + (a_{0,0} u, v)_{L^2(D)} + (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)}.$$

Всюду далее мы предполагаем, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $L^2(D)$, то есть неравенство

$$\| \, u \, \|_{L^2(D)} \leqslant c \, \| \, u \, \|_{H^+(D)} \tag{2.18}$$

выполнено для всех $u \in H^1(D, S)$ и некоторой константы c, не зависящей от u. Обозначим через ι оператор непрерывного вложения

$$\iota : H^+(D) \hookrightarrow L^2(D). \tag{2.19}$$

Отметим, что вложение (2.19) справедливо, если, например, существует константа c_2, такая, что

$$a_{0,0} \geq c_2 > 0 \text{ в } D. \tag{2.20}$$

Обозначим через $H^-(D)$ пополнение пространства $H^1(D,S)$ по норме

$$\| \ u \ \|_{H^-} = \sup_{v \neq 0} \frac{\left|(v,u)_{L^2(D)}\right|}{\| \ v \ \|_{H^+}},$$

где $v \in H^1(D,S)$. Ниже мы увидим, что пространство $H^-(D)$ можно охарактеризовать как двойственное к пространству $H^+(D)$ относительно спаривания

$$\langle v, u \rangle = \lim_{\nu \to \infty} (v, u_\nu)_{L^2(D)}.$$

Сформулируем следующий хорошо известный результат для коэрцитивного случая. Напомним, эрмитову форму $(\cdot,\cdot)_+$ называют коэрцитивной на $H^1(D,S)$, если существует такие положительные константы c_1, c_2, что для всех $u \in H^1(D,S)$ выполнено неравенство

$$c_1 \| \ u \ \|_{H^1(D)} \leqslant \| \ u \ \|_{H^+(D)} \leqslant c_2 \| \ u \ \|_{H^1(D)} \ .$$

Лемма 1. *Пусть выполнена оценка (1.12), тогда пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^1(D)$,*

$$H^+(D) \hookrightarrow H^1(D,S),$$

если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1. *внутренность $S \subset \partial D$ не пуста;*

2. *$\int_D a_{0,0}(x)\, dx > 0$;*

3. *$\| \ \Psi(1) \ \|_{L^2(\partial D)} > 0$.*

Доказательство. См., например, [5] или [4]. □

Обозначим через $s = s(r)$ вещественное число, которое определяется следующим образом:

$$s = \begin{cases} 1/2 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, & \text{если} \quad r = 0, \\ 1/2, & \text{если} \quad r = 0 \quad \text{и} \quad \partial D \in C^2, \\ 1/2 + r, & \text{если} \quad 0 < r \le 1/2. \end{cases} \tag{2.21}$$

В следующей теореме рассматривается случай некоэрцитивной формы.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты $a_{i,j}$ принадлежат C^∞ в окрестности X замыкания D, выполнены неравенства (1.10), (1.11) и существует константа $c_1 > 0$, такая, что*

$$\|\Psi u\|_{L^2(\partial D)} \ge c_1 \|u\|_{H^r(\partial D)} \text{ для всех } u \in H^1(\partial D, S). \tag{2.22}$$

Если выполнено неравенство (2.20) или оператор A_0 является сильно эллиптическим в окрестности X замыкания D и в некоторой окрестности X замыкания D выполнено

$$\int_X \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i u}\, dx \ge m_1 \|u\|^2_{L^2(X)} \tag{2.23}$$

для всех $u \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(X)$, где $m_1 > 0$ - константа, не зависящая от u, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^s(D)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что справедлива следующая лемма о факторизации:

Лемма 2. *Для матрицы из коэффициентов $\mathfrak{A}(x)$ существует факторизация, то есть существует некоторая $(m \times n)$ - матрица $F(x)$, состоящая из функций класса $L^\infty(X)$ такая, что*

$$(F(x))^* F(x) = \mathfrak{A}(x)$$

для почти всех $x \in X$.

Доказательство. Согласно (1.10), матрица $\mathfrak{A}(x)$ положительно определена, то есть для каждого фиксированного $x \in X$ она индуцирует неотрицательное отображение $\mathbb{C}^n$. Следовательно, это отображение обладает единственным неотрицательным квадратным корнем в линейной оболочке, натянутой на $\mathbb{C}^n$. Корень $\sqrt{\mathfrak{A}(x)}$ представляет собой $(n \times n)$ - матрицу, компоненты которой являются комплекснозначными функциями в X,

$$\sqrt{\mathfrak{A}(x)} = F(x) = (F_{i,j}(x))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}.$$

Так как $F^* = F$ и $F^2 = \mathfrak{A}$, имеем

$$a_{i,j}(x) = \sum_{j=1}^{n} |F_{i,j}(x)|^2$$

для почти всех $x \in X$, где $1 \leq i \leq n$. Это значит, что $F_{i,j}(x) \in L^\infty(X)$ для всех $i, j = 1, \dots, n$.

$\square$

Согласно лемме 2 оператор $A_0(x, \partial)$ может быть факторизован следующим образом:

$$A_0(x, \partial) = (F(x)\nabla)^* (F(x)\nabla), \tag{2.24}$$

где ∇ рассматривается как столбец с n - компонентами $\partial_1, \dots, \partial_n$, а $(F(x)\nabla)^*$ является формально сопряженным оператором для дифференциального оператора первого порядка $F(x)\nabla$.

Из сильной эллиптичности оператора

$$A_0(x, \partial) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j),$$

в силу классического неравенства Гординга, следует существование параметрикса Ходжа задачи Дирихле для $A_0(x, \partial)$ в области X (см., например, [18]). Мы воспользуемся этим фактом в том виде, в котором он изложен, например, в [56] или в [59] для матричных эллиптических операторов на многообразиях с краем. А именно, обозначим через $\widetilde{H}^{-1}(X)$ двойственное пространство к $H^{-1}(X, \partial X)$ относительно $L^2(X)$ - спаривания (аналогично случаю выше). Ясно, что $H^{-1}(X)$ непрерывно вложено в $\widetilde{H}^{-1}(X)$. В силу факторизации (2.24) и полноты пространства $C^\infty_{\text{comp}}(X)$ в пространстве $H^1(X, \partial X)$, оператор $A_0(x, \partial)$ продолжается до непрерывного отображения из $H^1(X, \partial X)$ в $\widetilde{H}^{-1}(X)$ с помощью эрмитовой формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}(x)\partial_j u, \partial_i v)_{L^2(X)} = (F\nabla u, F\nabla v)_{L^2(X)}, \quad u, v \in H^1(X, \partial X). \quad (2.25)$$

Пусть теперь $\mathcal{H}(X) \subset H^1(X, \partial X) \cap C^\infty(X)$ обозначает нулевое пространство задачи Дирихле на множестве X. В силу априорных оценок для эллиптических операторов размерность $\mathcal{H}(X)$ конечна, и, как следует из (2.25),

$$\mathcal{H}(X) = \left\{u \in H^1(X, \partial X) : F\nabla u = 0 \text{ в } X\right\}. \quad (2.26)$$

Как уже отмечалось, матрица $\mathfrak{A}(x)$ может вырождаться, если не выполнена сильная коэрцитивная оценка (1.12). Следовательно, матрица $F(x)$ также может быть вырожденной, а это означает, что пространство $\mathcal{H}(X)$ может быть нетривиальным. Тогда существуют ограниченные линейные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{G} :& \widetilde{H}^{-1}(X) \to H^1(X, \partial X), \\ \Pi :& \widetilde{H}^{-1}(X) \to \mathcal{H}(X), \end{aligned}$$

удовлетворяющие следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{G}A_0 &= I - \Pi, \\ A_0\mathcal{G} &= I - \Pi, \end{aligned} \quad (2.27)$$

на $H^1(X, \partial X)$ и $\widetilde{H}^{-1}(X)$ соответственно (см., например, [56] или [59]). Здесь Π есть ничто иное, как $L^2(X)$ - ортогональный проектор на $\mathcal{H}(X)$.

Используя теорему о следах для пространств Соболева, введем известный оператор Пуассона $\mathcal{P} : H^{1/2}(\partial X) \to H^1(X)$, удовлетворяющий следующему равенству

$$\mathcal{P} \circ t_1 + \mathcal{G}A_0 = I - \Pi,$$

где t_1 обозначает оператор следа $t_1 : H^1(X) \to H^{1/2}(\partial X)$. В частности, образ оператора $\mathcal{P}$ является $L^2(X)$ - ортогональным к $\mathcal{H}(X)$. Известно, что если граница X является поверхностью Липшица, то операторы Грина и Пуассона обладают определенными свойствами регулярности, а именно:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} :&\widetilde{H}^{s-1}(X) \to H^{s+1}(X),\\ \partial_j\mathcal{G} :&\widetilde{H}^{s-1}(X) \to H^{s}(X),\\ \mathcal{P} :&H^{s+1/2}(\partial X) \to H^{s+1}(X),\end{aligned} \tag{2.28}$$

для все $0 \leq s < 1/2$ и любого $1 \leq j \leq n$ (см., например, [5]). Если же граница ∂X является C^2 - гладкой, то также непрерывны отображения

$$\begin{aligned}\mathcal{G} :&L^2(X) \to H^2(X),\\ \mathcal{P} :&H^{3/2}(\partial X) \to H^2(X).\end{aligned}$$

Нам потребуются более тонкие свойства операторов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{P}$.

Обозначим через ∂_c так называемую конормальную производную к ∂X относительно оператора A_0:

$$\partial_c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\, \nu_i \partial_j,$$

где $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ это вектор единичной нормали к ∂X в точке $x \in \partial X$. Как известно, если ∂X является поверхностью Липшица, то нормаль $\nu(x)$ существует почти в каждой точке.

Лемма 3. *Пусть X - область с липшицевой границей. Если $0 < r \leq 1/2$, то оператор $\partial_c\mathcal{G}$ продолжается до непрерывного отображения из $H^{-r-1/2}(X)$ в $H^{-r}(\partial X)$.*

Доказательство. Если $f \in H^{-r-1/2}(X)$, то $\mathcal{G}f$ есть так называемое сильное решение задачи Дирихле, т. е. существует последовательность $\{u_\nu\}$ функций из $H^2(X)$, исчезающих на границе и удовлетворяющих

$$\begin{aligned}\|u_\nu - \mathcal{G}f\|_{H^{-r+3/2}(X)} \to 0,\\ \|A_0 u_\nu - f\|_{H^{-r-1/2}(X)} \to 0,\end{aligned} \tag{2.29}$$

при $\nu \to \infty$. Пользуясь (2.28), мы заключаем, что оператор $\partial_j\mathcal{G}$ непрерывно отображает пространство $H^{-r-1/2}(X)$ в $H^{-r+1/2}(X)$ для всех $1 \leq j \leq n$, при этом

$$\|\partial_j u_\nu - \partial_j \mathcal{G} f\|_{H^{-r+1/2}(X)} \to 0$$

при $\nu \to \infty$.

Пусть теперь $u \in H^2(X)$ исчезает на границе ∂X. Из существования непрерывного правого обратного $t_{r+1/2}^{-1}$ для оператора следа

$$t_{r+1/2} : H^{r+1/2}(X) \to H^r(\partial X)$$

следует

$$\begin{aligned}
\|\partial_c u\|_{H^{-r}(\partial X)} &= \sup_{\substack{v \neq 0 \\ v \in H^r(\partial X)}} \frac{\left|(v, \partial_c u)_{L^2(\partial X)}\right|}{\| \, v \, \|_{H^r(\partial X)}} \\
&= \sup_{\substack{v \neq 0 \\ v \in H^1(\partial X)}} \frac{\left|(t_{r+1/2} t_{r+1/2}^{-1} v, \partial_c u)_{L^2(\partial X)}\right|}{\| \, v \, \|_{H^r(\partial X)}} \\
&= \sup_{\substack{v \neq 0 \\ v \in H^1(\partial X)}} \frac{\lim\limits_{\nu \to \infty} \left|(t_{r+1/2} g_\nu, \partial_c u)_{L^2(\partial X)}\right|}{\| \, v \, \|_{H^r(\partial X)}},
\end{aligned}$$

где $\{g_\nu\}$ это некоторая последовательность гладких функций на $\overline{X}$, приближающая $g := t_{r+1/2}^{-1} v$ в $H^{r+1/2}(X)$. Пользуясь теоремой Стокса и (2.27), имеем

$$(t_{r+1/2} g_\nu, \partial_c u)_{L^2(\partial X)} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}(x) \partial_j g_\nu, \partial_i u)_{L^2(X)} + (g_\nu, A_0 u)_{L^2(X)}.$$

Так как $r + 1/2 > 1/2$ при $r > 0$, то из известных результатов для дифференциальных операторов первого порядка в областях с Липшицевой границей следует, что найдется такая постоянная c, что

$$\|\partial_j g_\nu\|_{H^{r-1/2}(X)} \leq c \|g_\nu\|_{H^{r+1/2}(X)}$$

для всех ν, и

$$\lim_{\nu \to \infty} \partial_j g_\nu = \partial_j g$$

в $H^{r-1/2}(X)$. Далее, согласно (2.28), имеем

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}(a_{i,j}(x)\partial_j g_\nu, \partial_i u)_{L^2(X)}\right| \leq c\sum_{i,j=1}^{n}\|\partial_j g_\nu\|_{H^{r-1/2}(X)}\|\partial_i u\|_{H^{-r+1/2}(X)}$$
$$\leq \widehat{c}\sum_{i,j=1}^{n}\|\partial_j g_\nu\|_{H^{r-1/2}(X)}\|u\|_{H^{-r+3/2}(X)},$$

так как $a_{i,j}(x) \in L^\infty(X)$, где константы c и $\widehat{c}$ не зависят от u и ν. С другой стороны,

$$\left|(g_\nu, A_0 u)_{L^2(X)}\right| \leq \|g_\nu\|_{H^{r+1/2}(X)}\|A_0 u\|_{H^{-r-1/2}(X)},$$

и, следовательно, существует такая постоянная c, не зависящая от u, что

$$\|\partial_c u\|_{H^{-r}(\partial X)} \leq c\left(\|u\|_{H^{-r+3/2}(X)} + \|A_0 u\|_{H^{-r-1/2}(X)}\right). \tag{2.30}$$

Отсюда имеем

$$\|\partial_c(u_\mu - u_\nu)\|_{H^{-r}(\partial X)} \leq c\left(\|u_\mu - u_\nu\|_{H^{-r+3/2}(X)} + \|A_0(u_\mu - u_\nu)\|_{H^{-r-1/2}(X)}\right)$$

для всех μ и ν. Из (2.29) следует, что последовательность $\{\partial_c u_\nu\}$ сходится в $H^{-r}(\partial X)$. Обозначим соответствующий предел через $\partial_c \mathcal{G} f$, который корректно определен для любой функции $f \in H^{-r-1/2}(X)$. С учетом (2.30) получаем

$$\|\partial_c \mathcal{G} f\|_{H^{-r}(\partial X)} \leq c\left(\|\mathcal{G} f\|_{H^{-r+3/2}(X)} + \|f\|_{H^{-r-1/2}(X)}\right)$$

для всех $f \in H^{-r-1/2}(X)$. Наконец, соотношения (2.28) при $s = -r + 1/2$ влекут непрерывность оператора $\partial_c \mathcal{G} : H^{-r-1/2}(X) \to H^{-r}(\partial X)$, построенного выше, при $0 < r \leq 1/2$.

$\square$

Лемма 4. *Пусть X - область с липшицевой границей. Если $0 < r \leq 1/2$, то оператор $\mathcal{P}$ непрерывно отображает $H^r(\partial X)$ в $H^{r+1/2}(X)$. Более того, если $\partial X \in C^2$, то оператор $\mathcal{P}$ непрерывно отображает $L^2(\partial X)$ в $H^{1/2}(X)$.*

Доказательство. При любом фиксированном $0 < r \leq 1/2$, аналогично доказательству предыдущей леммы, имеем:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}u\|_{H^{r+1/2}(X)} &= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in H^{-r-1/2}(X)}} \frac{\big|(v,\mathcal{P}u)_{L^2(X)}\big|}{\|\ v\ \|_{H^{-r-1/2}(X)}}\\
&= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in H^{-r-1/2}(X)}} \frac{\big|(A_0\mathcal{G}v+\Pi v,\mathcal{P}u)_{L^2(X)}\big|}{\|\ v\ \|_{H^{-r-1/2}(X)}}\\
&= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in H^{-r-1/2}(X)}} \frac{\big|(A_0\mathcal{G}v,\mathcal{P}u)_{L^2(X)}\big|}{\|\ v\ \|_{H^{-r-1/2}(X)}}\\
&= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in H^{-r-1/2}(X)}} \frac{\lim\limits_{\nu\to\infty}\big|(\partial_c g_\nu,u)_{L^2(\partial X)}\big|}{\|\ v\ \|_{H^{-r-1/2}(X)}}
\end{aligned}$$

для всех $u\in H^r(\partial X)$, где $\{g_\nu\}$ - это некоторая последовательность функций класса $H^2(X)$, исчезающих на границе ∂X и удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned}
\|g_\nu-\mathcal{G}v\|_{H^{-r+3/2}(X)}&\to 0,\\
\|A_0 g_\nu - v\|_{H^{-r-1/2}(X)}&\to 0,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

при $\nu\to\infty$. Пользуясь леммой (3), получаем

$$\lim_{\nu\to\infty}\big|(\partial_c g_\nu,u)_{L^2(\partial X)}\big| \leq c\|v\|_{H^{-r-1/2}(X)}\|u\|_{H^r(\partial X)},$$

откуда следует, что существует такая константа c, не зависящая от u, что

$$\|\mathcal{P}u\|_{H^{r+1/2}(\partial X)}\leq c\|u\|_{H^r(\partial X)}.$$

Таким образом, мы доказали непрерывность оператора $\mathcal{P}\,:\,H^r(\partial X)\to H^{r+1/2}(\partial X)$ при $0<r\leq 1/2$.

В случае, когда $r=0$ и граница ∂X дважды гладкая, то мы можем использовать известную теорему регулярности для задачи Дирихле в X. Нам нужно показать, что интеграл Пуассона $\mathcal{P}$ непрерывно отображает $L^2(\partial X)$ в $H^{1/2}(X)$. С этой целью для данного $u\in H^{-1/2}(\partial X)$ выберем последовательность $\{u_\nu\}$ в $H^{1/2}(\partial X)$, сходящуюся к u в $H^{-1/2}(\partial X)$.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}u_\nu\|_{L^2(X)} &= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in L^2(X)}} \frac{\big|(v,\mathcal{P}u_\nu)_{L^2(X)}\big|}{\|\,v\,\|_{L^2(X)}}\\
&= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in L^2(X)}} \frac{\big|(A_0\mathcal{G}v+\Pi v,\mathcal{P}u_\nu)_{L^2(X)}\big|}{\|\,v\,\|_{L^2(X)}}\\
&= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in L^2(X)}} \frac{\big|(A_0\mathcal{G}v,\mathcal{P}u_\nu)_{L^2(X)}\big|}{\|\,v\,\|_{L^2(X)}}\\
&\leq \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in L^2(X)}} \frac{\big|(\partial_c\mathcal{G}v,u_\nu)_{L^2(\partial X)}\big|}{\|\,v\,\|_{L^2(X)}}\\
&\leq \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in L^2(X)}} \frac{\|\partial_c\mathcal{G}v\|_{H^{1/2}(\partial X)}\|u_\nu\|_{H^{-1/2}(\partial X)}}{\|\,v\,\|_{L^2(X)}}\\
&\leq c\|u_\nu\|_{H^{-1/2}(\partial X)}
\end{aligned}$$

для всех ν, где постоянная c не зависит от ν. Таким образом последовательность $\{\mathcal{P}u_\nu\}$ сходится в $L^2(X)$, а интеграл Пуассона $\mathcal{P}$ индуцирует непрерывный линейный оператор из $H^{-1/2}(\partial X)$ в $L^2(X)$. Теперь мы можем воспользоваться теорией интерполяции для гильбертовых пространств. А именно, согласно интерполяции, интеграл Пуассона $\mathcal{P}$ - это ограниченный линейный оператор

$$\mathcal{P}_\theta : \Big[H^{-1/2}(\partial X), H^{1/2}(\partial X)\Big]_\theta \to \big[L^2(X), H^1(X)\big]_\theta$$

для всех $0<\theta<1$, где $[H_0,H_1]_\theta$ обозначает интерполяционное пространство для пары H_0, H_1 пространств Гильберта. Как известно,

$$\begin{aligned}
\big[L^2(X), H^1(X)\big]_\theta &= H^\theta(X),\\
\Big[H^{-1/2}(\partial X), H^{1/2}(\partial X)\Big]_\theta &= H^{1/2-\theta}(X),
\end{aligned}$$

(см., например, [19] или [26]). Следовательно, выбрав $\theta=1/2$, получаем утверждение леммы.

$\square$

Продолжим теперь доказательство основной теоремы. Для этого обозначим через e^+ оператор продолжения нулем из области D на X, а через r^+ соответственно сужение из X на D. Очевидно, $e^+ : L^2(D) \to L^2(X)$ и $r^+ : H^s(X) \to H^s(D)$ – ограниченные линейные операторы для всех $s \in \mathbb{R}$.

Ясно, что если выполнено неравенство (2.23), то пространство $\mathcal{H}(X) \equiv 0$. С другой стороны, если (2.23) не выполнено, то, согласно условию теоремы, $a_{0,0} \geq c_1$ в D с некоторой положительной константой c_1, а это значит, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $L^2(D)$, то есть норма $\|\cdot\|_+$ не слабее, чем норма $\|\cdot\|_a$ на $H^1(D, S)$, заданная следующим образом:

$$\|u\|_a = \left(\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i u}\, dx + \|u\|^2_{H^r(\partial D)} + \|\Pi e^+ u\|^2_{L^2(X)} \right)^{1/2}. \qquad (2.32)$$

В силу того, что коэффициенты $a_{i,j}$ непрерывны вплоть до границы D, из формулы Стокса имеем:

$$\int_{\partial D} \partial_c u \overline{v}\, ds = \int_D \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i v} + \partial_i (a_{i,j} \partial_j u) \overline{v} \right) dx \qquad (2.33)$$

для всех $u \in H^2(D)$ и $v \in H^1(D)$.

Обозначим через

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_D :& \widetilde{H}^{-1}(D) \to H^1(D, \partial D), \\ \Pi_D :& \widetilde{H}^{-1}(D) \to \mathcal{H}(D), \end{aligned}$$

оператор Грина и проектор на нулевое пространство задачи Дирихле для оператора A_0 в D соответственно. Заметим, что свойства операторов $\mathcal{G}_D$ и Π_D аналогичны свойствам операторов $\mathcal{G}$ и Π, рассмотренных нами выше для области X. Это позволяет нам ввести оператор Пуассона $\mathcal{P}_D$.

Пусть $h \in \mathcal{H}(D)$, тогда $e^+ h \in \mathcal{H}(X)$, то есть образ $\mathcal{H}(D)$ при отображении e^+ можно рассматривать как замкнутое подпространство в $\mathcal{H}(X)$. Действительно, по определению имеем $\mathcal{H}(D) \subset H^1_0(D)$, а это значит, что $e^+ h \in L^2(X)$ для каждого $h \in \mathcal{H}(D)$. С другой стороны, поскольку коэффициенты эллиптического оператора A_0 являются гладкими, то $\mathcal{H}(D) \subset C^\infty(D)$. Так как $h \in H^1_0(D)$, существует последовательность

$\{g_\nu\} \subset C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)$, аппроксимирующая h по норме пространства $H^1(D)$. Тогда, воспользовавшись равенством (2.26) для пространства $\mathcal{H}(D)$, вместо пространства $\mathcal{H}(X)$, получаем

$$\big(e^+h, (F\nabla)^*\varphi\big)_{L^2(X)} = \lim_{\nu\to\infty}(g_\nu, (F\nabla)^*\varphi)_{L^2(D)} = (F\nabla h, \varphi)_{L^2(D)} = 0$$

для всех $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(X, \mathbb{C}^n)$, где $C^\infty_{\mathrm{comp}}(X, \mathbb{C}^n)$ обозначает декартово произведение n копий пространства $C^\infty_{\mathrm{comp}}(X)$. Отсюда следует, что $F\nabla h(e^+h) = 0$ почти всюду в X, а следовательно и $A_0 e^+h = 0$ почти всюду в X, ввиду факторизации (2.24). В частности, $e^+h \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(X)$ для каждого $h \in \mathcal{H}(D)$, поскольку оператор A_0 эллиптичен, а его коэффициенты являются гладкими в X. Из (2.26) следует, что $e^+h \in \mathcal{H}(X)$. Заметим, что, так как пространства $\mathcal{H}(D)$ и $\mathcal{H}(X)$ конечномерны, мы можем рассматривать их как пространства Банаха с нормами $\|\cdot\|_{L^2(D)}$ и $\|\cdot\|_{L^2(X)}$ соответственно. А это значит, что $\|e^+h\|_{L^2(X)} = \|h\|_{L^2(D)}$, то есть образ $\mathcal{H}(D)$ при отображении e^+ можно рассматривать как замкнутое подпространство в $\mathcal{H}(X)$, что и требовалось показать.

Выберем теперь $L^2(D)$ - ортонормированный базис e_k в $\mathcal{H}(D)$. Тогда существует $L^2(X)$ - ортонормированная система f_j в $\mathcal{H}(X)$ такая, что базис $\{e_k\} \cup \{f_j\}$ является $L^2(X)$ - ортонормированным в $\mathcal{H}(X)$. По построению имеем

$$\begin{aligned} \Pi e^+u &= \sum_k (u, e_k)_{L^2(D)} e^+(e_k) + \sum_j (e^+u, f_j)_{L^2(X)} f_j \\ &= e^+(\Pi_D u) + \sum_j (e^+u, f_j)_{L^2(X)} f_j, \end{aligned}$$

то есть

$$\|\Pi e^+u\|^2_{L^2(X)} = \|\Pi_D u\|^2_{L^2(D)} + \sum_j |(e^+u, f_j)_{L^2(X)}|^2 \tag{2.34}$$

для всех $u \in L^2(D)$.

Далее, комбинирую формулы (2.27), (2.33) и (2.34), получаем

$$\|u\|^2_a \geq \sum_{i,j=1}^n (a_{i,j}\partial_j \mathcal{G}_D A_0 u, \partial_j \mathcal{G}_D A_0 u)_{L^2(D)}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(a_{i,j}\partial_j\mathcal{P}_D u, \partial_j\mathcal{P}_D u)_{L^2(D)}$$

$$+\|\mathcal{P}_D u\|^2_{H^r(\partial D)} + \|\Pi_D u\|^2_{L^2(D)} \qquad (2.35)$$

для всех $u \in H^1(D,S)$. Так как Π_D является проектором на конечномерное пространство $\mathcal{H}(D)$, то мы можем заключить, что существует константа c, не зависящая от u такая, что

$$\|\Pi_D u\|_{H^1(D)} \le c\|\Pi_D u\|_{L^2(D)} \qquad (2.36)$$

для любого $u \in H^1(D,S)$. С другой стороны классическое неравенство Гординга для эллиптических операторов дает

$$\|\mathcal{G}_D A_0 u\|^2_{H^1(D)} \le c\sum_{i,j=1}^{n}(a_{i,j}\partial_j\mathcal{G}_D A_0 u, \partial_j\mathcal{G}_D A_0 u)_{L^2(D)} \qquad (2.37)$$

для любого $u \in H^1(D,S)$.

Таким образом, из соотношения (2.27) и неравенств (2.35) – (2.37) следует, что любая последовательность $\{u_\nu\} \subset H^1(D,S)$, сходящаяся к функции u в пространстве $H^+(D)$, может быть представлена в виде

$$u_\nu = \Pi_D u_\nu + \mathcal{G}_D A_0 u_\nu + \mathcal{P}_D u_\nu, \qquad (2.38)$$

где последовательности $\{\Pi_D u_\nu\}$ и $\{\mathcal{G}_D A_0 u_\nu\}$ сходятся в $H^1(D,\partial D) \subset H^1(D,S)$ к некоторым элементам u_H и u_G соответственно. Следовательно, последовательность $\{\mathcal{P}_D u_\nu\}$ также сходится к некоторому элементу u_P в $H^+(D)$, причем

$$u = u_H + u_G + u_P = \Pi_D u + \mathcal{G}_D A_0 u + \mathcal{P}_D u, \qquad (2.39)$$

здесь $\mathcal{P}_D u$ это интеграл Пуассона от «следа» $u\big|_{\partial D} \in H^r(\partial D)$ для $u \in H^+(D)$. Таким образом, теорема вложения полностью определяется поведением элемента $u_P = \mathcal{P}_D u$ на границе.

Так как коэффициенты $a_{i,j}$ являются гладкими в некоторой окрестности области $\overline{D}$, то мы можем считать, что X - область с гладкой границей. В этом случае решения задачи Дирихле для $A_0 u \in L^2(X)$ с нулевыми данными на границе ∂X на самом деле принадлежат $H^2(X)$. Из априорных оценок следует, что $\mathcal{G}$ и Π порождают ограниченные операторы

$$
\begin{aligned}
r^+\mathcal{G}e^+ &: L^2(D) \to H^2(D), \\
r^+\Pi e^+ &: L^2(D) \to H^2(D).
\end{aligned}
$$

Пусть теперь $s \geq 0$. Ясно, что любой элемент $u \in H^{-s}(D)$ продолжается до элемента $U \in H^{-s}(X)$ с помощью равенства

$$
\langle U, v\rangle_X = \langle u, v\rangle_D
$$

для всех $v \in H^s(D)$. В силу того, что U исчезает в $X \setminus \overline{D}$, обозначим его как e^+u. Ясно, что линейный оператор $e^+ : H^{-s}(D) \to H^{-s}(X)$, определенный таким образом, ограничен при $s \geq 0$.

Так как носитель распределения e^+u сосредоточен в $\overline{D}$, то, имея в виду свойство непрерывности псевдодифференциальных операторов на компактных замкнутых многообразиях, мы заключаем, что $r^+\mathcal{G}e^+$, $r^+\Pi e^+$ продолжаются до линейных операторов

$$
\begin{aligned}
r^+\mathcal{G}e^+ &: H^{-r-1/2}(D) \to H^{-r+3/2}(D), \\
r^+\Pi e^+ &: H^{-r-1/2}(D) \to H^{-r+3/2}(D),
\end{aligned}
$$

при $-1/2 \leq r \leq 1/2$. Согласно теореме о следах для соболевских пространств в областях с липшицевой границей операторы

$$
\begin{aligned}
\partial_j \left(r^+\mathcal{G}e^+\right) &= H^{-r-1/2}(D) \to H^{-r+1/2}(D), \\
\partial_c \left(r^+\Pi e^+\right) &= H^{-r-1/2}(D) \to H^{-r}(\partial D),
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

также ограничены при $-1/2 \leq r < 0$. Отметим, что при $r = 0$ утверждение не верно, так как элементы $H^{1/2}(D)$ могут не иметь следов на ∂D.

Из формул (2.33) и (2.40) имеем

$$
\begin{aligned}
(u, v)_{L^2(D)} &= \left(\Pi(e^+v) + A_0\mathcal{G}(e^+v), u\right)_{L^2(D)} \\
&= \left(\Pi(e^+v), u\right)_{L^2(D)}
\end{aligned}
$$

$$+\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_j \mathcal{G}(e^+v)\overline{\partial_i u}\,dx + \big(\partial_c(r^+\mathcal{G}e^+)v, u\big)_{L^2(\partial D)} \tag{2.41}$$

для всех $u \in H^1(D,S)$ и $v \in L^2(D)$

Покажем теперь, что норма $\|\cdot\|_a$ не слабее, чем норма $\|\cdot\|_{H^{r+1/2}(D)}$ на $H^1(D,S)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{r+1/2}(D)} &= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in H^{-r-1/2}(D)}} \frac{\big|(v,u)_{L^2(D)}\big|}{\|\,v\,\|_{H^{-r-1/2}(D)}}\\ &= \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in H^{-r-1/2}(D)}} \frac{\lim\limits_{\nu\to\infty}\big|(v_\nu,u)_{L^2(D)}\big|}{\|\,v\,\|_{H^{-r-1/2}(D)}}\end{aligned} \tag{2.42}$$

для всех $u \in H^1(D,S)$ с некоторой последовательностью $\{v_\nu\}$ гладких в $\overline{D}$ функций, аппроксимирующих v в пространстве $H^{-r-1/2}(D)$. Подставляя в формулу (2.41) вместо функций u и v функцию v_ν получаем, что выражение в правой части формулы (2.42) равно

$$\left|\big(\Pi(e^+v),u\big)_{L^2(D)} + \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_j\mathcal{G}(e^+v)\overline{\partial_i u}\,dx + \big(\partial_c(r^+\mathcal{G}e^+)v,u\big)_{L^2(\partial D)}\right|.$$

Учитывая то, что Π это ортогональный проектор в $L^2(X)$, имеем

$$\begin{aligned}\left|\big(\Pi(e^+v),u\big)_{L^2(D)}\right| &= \left|\big(\Pi(e^+v),e^+u\big)_{L^2(X)}\right|\\ &= \left|\big(\Pi(e^+v),\Pi(e^+u)\big)_{L^2(X)}\right|\\ &\le \|v\|_{H^{r+1/2}(D)}\|\Pi(e^+u)\|_{L^2(X)},\end{aligned} \tag{2.43}$$

а также

$$\begin{aligned}\left|\big(\partial_c(r^+\mathcal{G}e^+)v,u\big)_{L^2(\partial D)}\right| &\le c\|\partial_c(r^+\mathcal{G}e^+)v\|_{H^{-r}(D)}\|u\|_{H^r(\partial D)}\\ &\le \widehat{c}\|v\|_{H^{-r-1/2}(D)}\|u\|_{H^r(\partial D)},\end{aligned} \tag{2.44}$$

для всех $u \in H^1(D,S)$ и $v \in H^{-r-1/2}(D)$ с некоторыми постоянными c и $\widehat{c}$, не зависящими от u и v. Последнее неравенство следует из (2.40).

В силу того, что матрица $\mathfrak{A}(x)$ является эрмитовой и неотрицательной, из обобщенного неравенства Коши следует, что

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \overline{z}_i \xi_j \right|^2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \overline{z}_i z_j \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \overline{\xi}_i \xi_j \right) \tag{2.45}$$

для любых z, $\xi \in \mathbb{C}^n$. Используя (2.45), получаем, что неравенство

$$\left| \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \partial_j \mathcal{G}(e^+ v) \overline{\partial_i u}\, dx \right| \le c \left(\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i u}\, dx \right)^{1/2} \|v\|_{H^{-r-1/2}(D)}, \tag{2.46}$$

выполнено с некоторой постоянной c, не зависящей от u и v.

Учитывая (2.42) – (2.44), а также (2.46), заключаем, что найдутся такие постоянные c и $\widehat{c}$, что неравенство

$$c\|u\|_{H^{r+1/2}(D)} \le \|u\|_a \le \widehat{c}\|u\|_+$$

будет выполнено для всех $u \in H^1(D,S)$ при $-1/2 \le r < 0$. Рассмотрим случай $r = 0$ при липшицевой границе. Ясно, что (2.22) тогда выполняется при любом $r = -\varepsilon < 0$ для любого сколь угодно малого $0 < \varepsilon \le 1/2$. Из доказанного выше немедленно следует, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $H^{1/2-\varepsilon}(D)$.

Наконец, рассмотрим случай $0 < r \le 1/2$ при липшицевой границе и $r = 0$ при дважды гладкой границе. В силу того, что последовательность $\{u_\nu\}$ сходится в $H^+(D)$, а норма этого пространства не слабее нормы $\|\cdot\|_a$, то она сходится также и в $H^r(\partial D)$. Согласно лемме 4, последовательность $\mathcal{P}_D u_\nu$ сходится к некоторому элементу u_P в $H^{r+1/2}(D)$ при $0 < r \le 1/2$, если граница области D есть поверхность Липшица, а так же при $r = 0$ в случае, когда граница D дважды гладкая. Таким образом, из (2.39) следует, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $H^{r+1/2}(D)$.

$\square$

Отметим, что в [30] и [31] теорема 4 распространена на случай весовых пространств, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами.

2.2 Смешанные краевые задачи для сильно эллиптических операторов

Рассмотрим подробнее задачу (1.13). Граничный оператор $B(x, \partial)$ представим в следующем виде

$$B(x, \partial) = b_1(x)\partial_c + B_0,$$

где ∂_c – это конормальная производная для оператора A,

$$\partial_c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\, \nu_i \partial_j.$$

Для того, чтобы определить оператор B_0, зафиксируем число $0 \le r \le 1/2$ и ограниченный линейный оператор $\Psi : H^r(\partial D) \to L^2(\partial D)$ (см. предыдущий параграф). Через $\Psi^* : L^2(\partial D) \to H^r(\partial D)$, как и прежде, обозначим оператор, сопряженный к оператору Ψ.

Мы будем рассматривать оператор B_0 в следующем виде:

$$B_0 = \chi_S + b_1\left(\Psi^* \Psi + \delta B_0\right), \tag{2.47}$$

где χ_S есть характеристическая функция множества S на ∂D, а δB_0 это некоторое возмущение оператора Ψ (например, псевдодифференциальный оператор порядка ниже r).

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 1. *Пусть в области D дано распределение f, требуется найти такое распределение u в D, что, в подходящем смысле,*

$$\begin{cases} A(x, \partial)u = f & \textit{в области } D, \\ B(x, \partial)u = 0 & \textit{на } \partial D. \end{cases}$$

Если Ψ задается через умножение на ограниченную на границе функцию, то это хорошо известная задача типа заремб.ы (см. [69]). Она может быть решена стандартным путем в пространствах соболевского типа, ассоциированных с эрмитовыми формами, или в пространствах Соболева и

Гёльдера, используя метод потенциалов (для коэрцитивного случая см., например, [18], [69], [19]). В некоэрцитивном случае методы должны быть более тонкие (см., например, [1], [62], [30], [31]) из-за потери регулярности решения около границы области.

В настоящей работе для изучения задачи 1 используется метод неотрицательных эрмитовых форм. А именно, так как на S граничный оператор равен $B = \chi_S$ и $\chi_S(x) \neq 0$ для $x \in S$, то функции класса $H^1(D)$, удовлетворяющие $Bu = 0$ на ∂D, принадлежат $H^1(D, S)$. В дальнейшем будем считать, что $S \neq \partial D$ (в противном случае получаем хорошо известную задачу Дирихле (см.[21])).

Представим a_0 как $a_0 = a_{0,0} + \delta a_0$, где $a_{0,0}$ это неотрицательная функция на D. Рассмотрим следующую эрмитову форму

$$(u, v)_+ = \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i v}\, dx + (a_{0,0} u, v)_{L^2(D)} + (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)} \quad (2.48)$$

в пространстве $H^1(D, S)$. Ясно, что эрмитова форма (2.48) определяет скалярное произведение в $H^1(D, S)$, если выполнены условия теоремы 4.

Через $H^+(D)$ будем обозначать пополнение пространства $H^1(D, S)$ по норме, порожденной скалярным произведением (2.48), а через $H^-(D)$ – пополнение пространства $H^1(D, S)$ по норме

$$\|u\|_- = \sup_{\substack{v \neq 0, \\ v \in H^1(D,S)}} \frac{|(v, u)_{L^2(D)}|}{\|v\|_+}, \quad (2.49)$$

см., например, [55].

Если выполнена коэрцитивная оценка (1.12), то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^1(D)$, однако, в общем случае, вложение, описанное в теореме 4, является точным (см. [62, замечание 5.1], [74] и пример 2 ниже). В частности, может случиться так, что пространство $H^+(D)$ не может быть непрерывно вложено в $H^{r+\varepsilon}(D)$ при любом $\varepsilon > 0$. Таким образом, оператор Ψ введен для того, чтобы улучшить, если потребуется, гладкость элементов из $H^+(D)$ в некоэрцитивном случае.

Далее мы воспользуемся стандартной теорией двойственных пространств (см., например, [55]). А именно, ведем следующее спаривание для пространств $H^+(D)$ и $H^-(D)$:

$$< u, v >= \lim_{k\to\infty} \int\limits_D u(x)\overline{v}_k(x)dx, \tag{2.50}$$

где $v \in H^-(D)$, $u \in H^+(D)$. Отметим, что для него справедливо неравенство Коши-Буняковского,

$$| < u, v > | \leq \|u\|_+ \|v\|_-. \tag{2.51}$$

С помощью спаривания (2.50) мы можем сформулировать следующую лемму о двойственности.

Лемма 5. *Банахово пространство $H^-(D)$ топологически изоморфно двойственному пространству $(H^+(D))'$ относительно спаривания (2.50).*

Доказательство. См., например, [55]. □

Теперь из теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала следует, что $H^-(D)$ топологически изоморфно некоторому пространству Гильберта.

Заметим, что пространство $H^+(D)$ рефлексивно, так как оно гильбертово. Отсюда следует, что $(H^-(D))' = H^+(D)$, то есть пространства $H^-(D)$ и $H^+(D)$ двойственны друг другу относительно спаривания (2.50).

Двойственное пространство к пространству Соболева $H^s(D)$, $s > 0$, образованное через спаривание, индуцированное скалярным произведением $(.,.)_{L^2(D)}$, обозначим через $H^{-s}(D)$.

Лемма 6. *Если справедливо вложение (2.19), то пространство $L^2(D)$ непрерывно вложено в $H^-(D)$. Более того, если вложение (2.19) компактно, то и пространство $L^2(D)$ вложено в $H^-(D)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $u \in H^-(D)$ и выполнено неравенство (2.18), тогда

$$\|u\|_{H^-} = \sup_{\substack{v\in H^1(D,S)\\ v\neq 0}} \frac{|(u,v)_{L^2(D)}|}{\|v\|_+} \leqslant \sup_{\substack{v\in H^1(D,S)\\ v\neq 0}} \frac{\|u\|_{L^2(D)}\|v\|_{L^2(D)}}{\|v\|_+} \leqslant C\|u\|_{L^2(D)},$$

где $C > 0$ некоторая положительная константа. В данном неравенстве существенную роль играет тот факт, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $L^2(D)$. Таким образом, любая последовательность функций, сходящаяся в $L^2(D)$, будет сходиться и в $H^-(D)$, то есть $L^2(D) \subset H^-(D)$. Причем, как мы видели, оператор

$$\iota' : L^2(D) \to H^-(D) \tag{2.52}$$

является непрерывным.

Предположим теперь, что вложение (2.19) компактно. Тогда сопряженный по теории гильбертовых пространств оператор $\iota^* : L^2(D) \hookrightarrow H^+(D)$ будет также компактным. В силу того, что пространство $H^1(D,S)$ плотно в $H^+(D)$, имеем

$$\|u\|_{H^-} = \sup_{\substack{v \in H^1(D,S) \\ v \neq 0}} \frac{|(\iota(v), u)_{L^2(D)}|}{\|v\|_+} = \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{|(v, \iota^*(u))_+|}{\|v\|_+} = \|\iota^*(u)\|_+ \tag{2.53}$$

для любого $u \in L^2(D)$. Таким образом, любая слабо сходящаяся последовательность в $L^2(D)$ будет сходиться в $H^-(D)$, то есть оператор (2.52) компактный. $\square$

Отметим, что пространство $C_0^\infty(D)$ плотно в $H^-(D)$, так как пространство $C_0^\infty(D)$ плотно в $L^2(D)$, а норма $\|\cdot\|_{H^-}$ не превосходит норму $\|\cdot\|_{L^2(D)}$.

Далее, для того, чтобы перейти к обобщенной постановке смешанной задачи, нам необходимо, чтобы все производные $\partial_j u$ принадлежали $L^2(D)$ для элемента $u \in H^+(D)$, по крайней мере при $s \leq 1/2$ в теореме 4. Однако, при $0 < s < 1$ отсутствие коэрцитивности нам этого не позволяет. Тем не менее, напомним, что оператор

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{i,j} \partial_j \cdot)$$

допускает факторизацию, то есть существует $(m \times n)$-матрица

$$F(x) = (F_{i,j}(x))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

ограниченных функций в X, такая, что $(F(x))^* F(x) = \mathfrak{A}(x)$ для почти всех $x \in X$ (см. лемму 2). Например, можно взять стандартный неотрицательный самосопряженный квадратный корень $F(x) = \sqrt{\mathfrak{A}(x)}$ матрицы $\mathfrak{A}(x)$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_j u \overline{\partial_i v} \ = (F(x)\nabla v)^*(F(x)\nabla)u = \sum_{k=1}^{m} \overline{F_k v}\, F_k u,$$

для всех гладких функций u и v в $\overline{D}$, где через F_k, $k = 1, \dots, m$, мы обозначили следующую сумму:

$$F_k u := \sum_{l=1}^{n} F_{k,l}(x)\partial_l u.$$

Тогда, по определению пространства $H^+(D)$, любое выражение $\tilde{a}_k(x)F_k u$, $k = 1, \dots, m$, принадлежит пространству $L^2(D)$, если $u \in H^+(D)$ и $\tilde{a}_k \in L^\infty(D)$. Таким образом, если $0 < s < 1$, тогда мы вынуждены ограничиться слагаемыми первого порядка

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_k(x)F_k \quad \text{вместо} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j.$$

С этой целью, зафиксируем факторизацию $F(x)$ матрицы $\mathfrak{A}(x)$ и функции $\tilde{a}_k \in L^\infty(D)$, $k = 1, \dots, m$.

Далее, из формулы интегрирования по частям имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_i u, \partial_j v)_{L^2(D)} = -\sum_{i,j=1}^{n} \big(\partial_j(a_{i,j}\partial_i u), v\big)_{L^2(D)} + \int\limits_{\partial D} (\partial_c u)\overline{v} ds,$$

где ∂_c - введенная нами выше конормальная производная для оператора $A(x, \partial)$. В силу того, что $u = 0$ на S, мы можем представить

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_i u, \partial_j v)_{L^2(D)} = -\sum_{i,j=1}^{n} \big(\partial_j(a_{i,j}\partial_i u), v\big)_{L^2(D)} + (\partial_c u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)}.$$

Исходя из краевых условий, поставленных в задаче 1, получаем

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \big(\partial_j(a_{i,j}\partial_i u), v\big)_{L^2(D)} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_i u, \partial_j v)_{L^2(D)}$$
$$+ (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} + (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)},$$

где $v(x) \in C^1(\overline{D}, S)$, $u(x) \in C^2(\overline{D}, S)$. Таким образом, мы видим, что

$$(A(x,\partial)u, v)_{L^2(D)} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_i u, \partial_j v)_{L^2(D)} + (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} \\ + (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)} + \sum_{k=1}^{m} (\tilde{a}_k(x) F_k u, v)_{L^2(D)} + (a_0 u, v)_{L^2(D)},$$

для любых $u \in H^2(D, S)$, $v \in H^1(D, S)$.

Предположим, что неравенство

$$\left| (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} \right| \leq c \, \|u\|_+ \, \|v\|_+ \tag{2.54}$$

выполнено с некоторой положительной константой c, не зависящей от $u, v \in H^1(D, S)$. В силу того, что коэффициенты $\tilde{a}_k$ принадлежат $L^\infty(D)$ и $\delta a_0(x) \in L^\infty(D)$, мы имеем

$$\Big| \, (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} + \Big(\sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_k(x) F_k u + \delta a_0 \, u, v \Big)_{L^2(D)} \Big| \leqslant c \, \|u\|_+ \|v\|_+ \tag{2.55}$$

для любых $u, v \in H^1(D, S)$, где c это положительная константа, не зависящая от u и v. Следовательно, для любого фиксированного $u \in H^+(D)$, полуторалинейная форма

$$Q(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_i u, \partial_j v)_{L^2(D)} + (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} \\ + (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)} + \sum_{k=1}^{m} (\tilde{a}_k(x) F_k u, v)_{L^2(D)} + (a_0(x) u, v)_{L^2(D)}$$

индуцирует непрерывный линейный функционал f_u на $H^+(D)$:

$$f_u(v) = \overline{Q(u, v)} \text{ для любого } v \in H^+(D).$$

По лемме 5 существует единственный элемент из $H^-(D)$, обозначим его через Lu, такой, что

$$f_u(v) =< v, Lu >$$

для любого $v \in H^+(D)$. Таким образом, мы определили линейный оператор $L : H^+(D) \to H^-(D)$. Из (2.51) и (2.55) получаем, что

$$\|Lu\|_- = \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{|< v, Lu >|}{\|v\|_+} \leqslant \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{\hat{c}\,\|u\|_+ \|v\|_+}{\|v\|_+} = \hat{c}\|u\|_+,$$

для любых $u \in H^+(D)$, где $\hat{c} > 0$ это некоторая константа, не зависящая от u и v. Отсюда следует, что оператор L непрерывен.

Оператор L, соответствующий частному случаю, когда $\tilde{a}_k \equiv 0$ для всех $k = 1, \ldots, m$, $a_0 = a_{0,0}$ и $\delta B_0 \equiv 0$, обозначим через $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$. Таким образом, оператор L_0 определяется через эрмитову форму $(\cdot, \cdot)_+$:

$$(v, u)_+ =< v, L_0 u > \tag{2.56}$$

для любых $u, v \in H^+(D)$.

Естественным образом возникает обобщенная постановка задачи 1.

Задача 2. *Пусть дан элемент $f \in H^-(D)$, требуется найти элемент $u \in H^+(D)$ такой, что $Lu = f$, т.е., для любого $v \in H^+(D)$,*

$$\overline{Q(u, v)} =< v, f >, \tag{2.57}$$

Опишем более подробно свойства определенных нами операторов.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда оператор $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим и $\|L_0\| = \|L_0^{-1}\| = 1$.*

Доказательство. Из леммы 5 и теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовых пространствах немедленно следует, что оператор L_0 непрерывно обратим. Покажем, что $\|L_0\| = \|L_0^{-1}\| = 1$. Действительно, из (2.56) следует, что

$$\|L_0 u\|_- = \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{| < v, L_0 u > |}{\|v\|_+} = \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{|\overline{(v, u)_+}|}{\|v\|_+} = \|u\|_+, \tag{2.58}$$

для любого $u \in H^+(D)$, то есть $\|L_0\| = \|L_0^{-1}\| = 1$. □

Лемма 8. *Пусть выполнены условия теоремы 4, если оператор* δB_0 *непрерывно отображает пространство* $H^r(\partial D, S)$ *в* $H^{-r}(\partial D)$, *то функционал* $(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ *индуцирует ограниченный оператор* $\delta L_B : H^+(D) \to H^-(D)$. *Если оператор* δB_0 *отображает пространство* $H^r(\partial D, S)$ *в* $H^{-r}(\partial D)$ *компактно, то оператор* δL_B *компактен. В частности, если* δB_0 *задается умножением на ограниченную в области* D *функцию* $\delta b_0 \in L^\infty(\partial D \setminus S)$, *то*

1) δB_0 *отображает* $H^r(\partial D, S)$ *компактно в* $H^{-r}(\partial D)$ *для* $0 < r \le 1/2$,

2) δB_0 *отображает* $L^2(\partial D, S)$ *непрерывно в* $L^2(\partial D)$ *для* $r = 0$.

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 4 и теоремы Реллиха - Кондрашова. □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Если функционал* $g(v) = (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ *порождает ограниченный оператор* δL_B *из* $H^+(D)$ *в* $H^-(D)$ *при* $\|\delta L_B\| < 1$, *или* $g(v)$ *порождает компактный оператор из* $H^+(D)$ *в* $H^-(D)$, *то оператор* L *является фредгольмовым оператором нулевого индекса.*

Доказательство. Пусть функционал $(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ порождает ограниченный оператор δL_B из $H^+(D)$ в $H^-(D)$ при $\|\delta L_B\| < 1$. Тогда, в силу леммы 7, оператор $L_0 + \delta L_B : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим.

Далее, выражение $(\sum_{k=1}^m \tilde{a}_k(x) F_k u + \delta a_0\, u, v)_{L^2(D)}$ порождает ограниченный оператор из $H^+(D)$ в $L^2(D)$, так как $\delta a_0, a_j \in L^\infty(D)$ для всех $j = 1, \dots, n$. Однако, согласно теореме 4 и теореме Реллиха - Кондрашова, пространство $H^+(D)$ компактно вложено в пространство $L^2(D)$. Тогда, в силу леммы 6, пространство $L^2(D)$ компактно вложено в пространство $H^-(D)$. Отсюда следует, что выражение

$$\Big(\sum_{k=1}^m \tilde{a}_k(x) F_k u + \delta a_0\, u, v\Big)_{L^2(D)}$$

порождает компактный оператор из $H^+(D)$ в $H^-(D)$ как композиция непрерывного и компактного операторов, обозначим его через δL_c. Поскольку оператор L_0 непрерывно обратим и $\|L_0^{-1}\|$, то оператор $L_0 + \delta L_B$ тоже непрерывно обратим. Тогда, согласно теоремам Фредгольма, оператор

$$L = L_0 + \delta L_B + \delta L_c = (L_0 + \delta L_B)(I + (L_0 + \delta L_B)^{-1} \delta L_c)$$

является оператором Фредгольма с нулевым индексом. Если же выражение $(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ порождает компактный оператор из $H^+(D)$ в $H^-(D)$, то утверждение теоремы сразу следует из теорем Фредгольма. $\square$

2.3 Фредгольмовы семейства операторных уравнений

Текущий параграф посвящен операторным уравнениям, порожденным следующим дифференциальным оператор второго порядка

$$A(x, \partial, \lambda) u = A(x, \partial) u + E(\lambda) u$$

с комплексным параметром λ, см. (1.14) и (1.15).

Рассмотрим следующее семейство граничных задач.

Задача 3. *Для данного распределения f в D найти распределение u в D, которое удовлетворяет, в подходящем смысле,*

$$\begin{cases} A(x, \partial, \lambda) u &= f \quad \text{в} \quad D, \\ B(x, \partial) u &= 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \end{cases} \tag{2.59}$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, прежде чем перейти к обобщенной постановке смешанной задачи, нам необходимо зафиксировать факторизацию $F(x)$ матрицы $\mathfrak{A}(x)$ и функции $\tilde{a}_k \in L^\infty(D)$, $\tilde{a}_k^{(1)} \in L^\infty(D)$, $k = 1, \ldots, m$. То есть, при $0 < s < 1$, мы ограничиваемся суммами первого порядка следующего вида

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_k(x) F_k \text{ и } \lambda \sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_k^{(1)}(x) F_k$$

вместо

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \partial_j \text{ и } \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x) \partial_j.$$

Теперь, интегрируя по частям, переходим к слабой формулировке задачи (2.59): дано $f \in H^-(D)$, найти $u \in H^+(D)$, такое, что для всех $v \in H^+(D)$ мы имеем

$$(u,v)_+ + \Big(\big(\sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_k(x)F_k + \delta a_0 + E(\lambda)\big)u, v\Big)_{L^2(D)} + \tag{2.60}$$

$$+ (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D\setminus S)} = < f, v > .$$

По неравенству Коши, если

$$\Big|(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D\setminus S)}\Big| \leq c\,\|u\|_+\,\|v\|_+$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u, v \in H^+(D)$, тогда (2.60) индуцирует голоморфное (по параметру $\lambda \in \mathbb{C}$) семейство $L(\lambda) : H^+(D) \to H^-(D)$ ограниченных линейных операторов. В силу леммы 7 (см. также [62, лемма 2.6]) мы можем рассматривать каждый оператор $L(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, как возмущение непрерывно обратимого оператора L_0.

Отметим, что пространство $H^-(D)$ естественно наделить скалярным произведением

$$(u,v)_- = (L_0^{-1}u, L_0^{-1}v)_+ =< L_0^{-1}u, v >,\ u, v \in H^-(D), \tag{2.61}$$

согласованным с нормой $\|\cdot\|_-$ (см. главу 3.1).

Лемма 9. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Если выражение $(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ индуцирует ограниченный оператор δL_B из $H^+(D)$ в $H^-(D)$ с $\|\delta L_B\| < 1$, либо выражение $(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ индуцирует компактный оператор из $H^+(D)$ в $H^-(D)$, то $\{L(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ есть голоморфное семейство фредгольмовых операторов нулевого индекса.*

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что оператор

$$L(0) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c$$

есть оператор Фредгольма индекса нуль. Покажем, что оператор

$$L(\lambda) = L(0) + \delta L_{E(\lambda)},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $\delta L_{E(\lambda)} : H^+(D) \to H^-(D)$ это оператор, индуцированный выражением $(E(\lambda)u, v)_{L^2(D)}$, также является оператором Фредгольма индекса нуль.

Действительно, выражение $(E(\lambda)u, v)_{L^2(D)}$ порождает непрерывный линейный оператор из $H^+(D)$ в $L^2(D)$. Согласно теореме 4 и теореме Реллиха - Кондрашова, пространство $H^+(D)$ компактно вложено в пространство $L^2(D)$. Тогда, в силу леммы 6, пространство $L^2(D)$ компактно вложено в пространство $H^-(D)$. Отсюда следует, что оператор $\delta L_{E(\lambda)}$ является компактным оператором из $H^+(D)$ в $H^-(D)$ как композиция непрерывного и компактного операторов. Согласно теоремам Фредгольма, семейство $\{L(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ есть голоморфное семейство фредгольмовых операторов индекса нуль. $\square$

Прежде чем сформулировать основной результат настоящей главы, напомним, что оператор $A(x, \partial, \lambda)$ называется эллиптическим с параметром на луче $\Gamma = \{\arg(\lambda) = \varphi_\Gamma\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, если

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x)\zeta_j + \lambda^2 a_0^{(2)}(x) \neq 0 \tag{2.62}$$

для всех $x \in \overline{D}$ и всех $(\lambda, \zeta) \in (\Gamma \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0, 0\}$.

В частности, если оператор $A(x, \partial, \lambda)$ эллиптический с параметром на луче Γ, тогда, беря $\zeta = 0$ и $\lambda \neq 0$ в (2.62), мы получаем $a_0^{(2)}(x) \neq 0$ для всех $x \in D$.

В дальнейшем мы рассматриваем наиболее часто используемый в приложениях случай, когда $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}(x)$. Пусть $\varphi_0(x) = \arg\left(a_0^{(2)}(x)\right)$. Обозначим через $C : H^+(D) \to H^-(D)$ оператор, индуцированный выражением $(a_0^{(2)}(x)u, v)_{L^2(D)}$.

Следующие две леммы немедленно вытекают из определения эллиптичности с параметром.

Лемма 10. *Предположим, что матрица $\mathfrak{A}(x)$ является эрмитовой, неотрицательной, и выполнено (1.11). Если $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}$, то оператор $A(x, \partial, \lambda)$ является эллиптическим с параметром на луче Γ тогда и только тогда, когда*

$$|a_0^{(2)}(x)| > 0 \text{ для всех } x \in \overline{D}; \tag{2.63}$$

$$\cos(\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma) > -1 \text{ для всех } x \in \overline{D}. \tag{2.64}$$

Лемма 11. *Пусть*

$$a_0^{(2)} \neq 0 \text{ почти всюду в } D. \tag{2.65}$$

Тогда оператор $C : H^+(D) \to H^-(D)$ инъективен.

Если $|a_0^{(2)}(x)| \in C(\overline{D})$, тогда неравенство (2.63) эквивалентно следующему

$$|a_0^{(2)}(x)| \geq \theta_0 > 0 \text{ для всех } x \in \overline{D}; \tag{2.66}$$

аналогично, если $\varphi_0(x) \in C(\overline{D})$, тогда (2.64) эквивалентно тому, что

$$\cos(\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma) \geq \theta_1(\Gamma) = \theta_1 > -1 \text{ для всех } x \in \overline{D}, \tag{2.67}$$

где константы θ_0, θ_1 не зависят от x.

Ясно, что если выполнены условия леммы 9, то мы можем представить семейство операторов $L(\lambda)$ следующим образом

$$L(\lambda) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c + \lambda^2 C.$$

Теорема 6. *Пусть либо Ψ задается с помощью умножения на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$, а Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}$, выполнены условия леммы 9 и неравенства (2.65), (2.67). Если $\varphi_0 \in C(\overline{D})$ и $\|\delta L_B\|^2 + (\max(0, -\theta_1(\Gamma)))^2 < 1$, то*

1) *существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что операторы $L(\lambda) : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратимы при всех $\lambda \in \Gamma$, для которых $|\lambda| \geq |\gamma_0|$;*

2) *операторы $L(\lambda)$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме дискретного счетного множества $\{\lambda_\nu\}$, не имеющего предельных точек в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Начнем доказательство со следующей леммы. Пусть $\eta(\Gamma) = \max(0, -\theta_1)$.

Лемма 12. *Если выполнены условия теоремы 6, то существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $\lambda \in \Gamma$, для которых верно $|\lambda| \geq k_0$, мы имеем*

$$\|(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)u\|_- \geq \left(\sqrt{1 - \eta^2(\Gamma)} - \|\delta_s L\|\right) \|u\|_+ \text{ для всех } u \in H^+(D)$$

и существуют положительные константы $p_1 = p_1(\varphi_\Gamma), q_1 = q_1(\varphi_\Gamma)$ *такие, что*

$$\|(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)u\|_- \geq p_1\|u\|_+ + q_1|\lambda|^2\|Cu\|_- \tag{2.68}$$

для всех $u \in H^+(D)$ *и* $\lambda \in \Gamma$ *при* $|\lambda| \geq k_0$.

Доказательство. Для произвольного $u \in H^+(D)$, пользуясь формулой (2.61), имеем

$$\lambda^2\langle Cu, u\rangle = |\lambda|^2 \int_D |a_0^{(2)}(x)||u(x)|^2 e^{\sqrt{-1}(\varphi_0(x)+2\varphi_\Gamma)}\, dx,$$

$$\|(L_0 + \lambda^2 C)u\|_-^2 = \langle u + \lambda^2 L_0^{-1}Cu, (L_0 + \lambda^2 C)u\rangle^2 = \tag{2.69}$$

$$\langle u, L_0 u\rangle + \langle \lambda^2 L_0^{-1}Cu, \lambda^2 Cu\rangle + \overline{\lambda}^2\langle u, Cu\rangle + \lambda^2\langle L_0^{-1}Cu, L_0 u\rangle =$$

$$\|u\|_+^2 + |\lambda|^4\|Cu\|_-^2 + \overline{\lambda}^2\langle u, Cu\rangle + \lambda^2(L_0^{-1}Cu, u)_+ =$$

$$\|u\|_+^2 + |\lambda|^4\|Cu\|_-^2 + \overline{\lambda}^2\langle u, Cu\rangle + \lambda^2\langle Cu, u\rangle =$$

$$\|u\|_+^2 + |\lambda|^4\|Cu\|_-^2 + 2\Re\Big(\lambda^2\langle Cu, u\rangle\Big).$$

Ясно, что для $\lambda \in \Gamma$,

$$\Re\Big(\lambda^2\langle Cu, u\rangle\Big) = |\lambda|^2 \int_D |a_0^{(2)}(x)||u(x)|^2 \cos\left(\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma\right)\, dx. \tag{2.70}$$

Если $\theta_1 \in [0, 1]$, тогда $\eta(\Gamma) = 0$ и мы немедленно получаем, что для всех $u \in H^+(D)$ выполнено:

$$\|(L_0 + \lambda^2 C)u\|_-^2 \geq \|u\|_+^2 + |\lambda|^4\|Cu\|_-^2,$$

$$\|(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)u\|_- \geq \|(L_0 + \lambda^2 C)u\|_- - \|\delta L_B u\|_- \geq$$

$$\sqrt{\|u\|_+^2 + |\lambda|^4\|Cu\|_-^2} - \|\delta L_B u\|_-.$$

Тогда, для $\alpha \in [0, \pi/2]$ и неотрицательных чисел a, b, мы имеем

$$\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a}\cos(\alpha) + \sqrt{b}\sin(\alpha). \tag{2.71}$$

Так как $\|\delta L_B\| < \sqrt{1-\eta^2(\Gamma)} = 1$, то существует $\alpha_0 \in (0, \pi/2)$ такое, что

$$\|\delta L_B\| < \cos(\alpha_0).$$

В частности, это означает, что для всех $u \in H^+(D)$ и всех $\lambda \in \Gamma$ мы имеем:

$$\|(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)u\|_- \geq \|u\|_+ - \|\delta L_B u\|_- \geq (1 - \|\delta L_B\|)\|u\|_+,$$

$$\|(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)u\|_- \geq \cos(\alpha_0)\|u\|_+ + \sin(\alpha_0)|\lambda|^2\|Cu\|_- - \|\delta L_B u\|_- \geq$$
$$(\cos(\alpha_0) - \|\delta L_B\|)\|u\|_+ + \sin(\alpha_0)|\lambda|^2\|Cu\|_-,$$

то есть ожидаемое неравенство выполнено при $\theta_1 \in [0, 1]$.

Если $\theta_1 \in (-1, 0)$, тогда, по формулам (2.70) и (2.67) получаем

$$\Re\Big(\lambda^2 \langle Cu, u\rangle\Big) \geq -|\theta_1||\lambda|^2 \int_D |a_0^{(2)}(x)||u(x)|^2\, dx. \tag{2.72}$$

Покажем теперь, что для любых $\theta \in (-\theta_1, 1]$ и $\gamma \in [0, 1)$ с $\theta\sqrt{1-\gamma} > -\theta_1$, существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|(L_0 + \lambda^2 C)u\|^2 \geq \left(1 - \theta^2\right)\|u\|_+^2 + \gamma|\lambda|^4\|Cu\|_-^2 \tag{2.73}$$

для всех $u \in H^+(D)$ и всех $\lambda \in \Gamma$ с $|\lambda| \geq k_0$. Действительно, докажем от обратного. Пусть существуют $\theta \in (|\theta_1|, 1]$ и $\gamma \in [0, 1)$ с $\theta\sqrt{1-\gamma} > |\theta_1|$ такие, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ существуют $u_k \in H^+(D)$ с $\|u_k\|_+ = 1$, и число $\lambda_k \in \Gamma$ с $|\lambda_k| \geq k$ такие, что

$$\|(L_0 + \lambda_k^2 C)u_k\|^2 < 1 - \theta^2 + \gamma|\lambda_k|^4\|Cu_k\|_-^2.$$

Из формул (2.69) и (2.70) следует, что

$$\theta^2 + |\lambda_k|^4\|Cu_k\|_-^2(1-\gamma) + 2|\lambda_k|^2 \int_D \cos(\varphi_0 + 2\varphi_\Gamma)|a_0^{(2)}(x)||u_k(x)|^2\, dx < 0,$$

то есть

$$\Big(\theta - \sqrt{(1-\gamma)}|\lambda_k|^2\|Cu_k\|_-\Big)^2 + \tag{2.74}$$

$$2\left(\theta\sqrt{(1-\gamma)}+\frac{\int_D \cos\left(\varphi_0+2\varphi_\Gamma\right)|a_0^{(2)}(x)||u_k(x)|^2\,dx}{\|Cu_k\|_-}\right)|\lambda_k|^2\|Cu_k\|_- < 0,$$

для всех $k\in\mathbb{N}$.

С другой стороны, для всех $u\in H^+(D)$ с $\|u\|_+ = 1$ мы имеем

$$\|Cu\|_- = \|e^{2\sqrt{-1}\varphi_\Gamma}Cu\|_- \geq \left|(e^{\sqrt{-1}(\varphi_0+2\varphi_\Gamma)}|a_0^{(2)}|u,u)_{L^2(D)}\right|.$$

В частности,

$$\left|\frac{\int_D \cos\left(\varphi_0+2\varphi_\Gamma\right)|a_0^{(2)}(x)||u_k(x)|^2\,dx}{\|Cu_k\|_-}\right| \leq 1 \text{ для всех } k\in\mathbb{N}.$$

Если последовательность $\{|\lambda_k|^2\|Cu_k\|_-\}$ неограничена, тогда, извлекая подпоследовательность $\{|\lambda_{k_j}|^2\|Cu_{k_j}\|_-\}$, стремящуюся к $+\infty$, затем деля (2.74) на $|\lambda_{k_j}|^4\|Cu_{k_j}\|_-^2$ и переходя к пределу при $k_j\to+\infty$, мы получаем $1\leq 0$, противоречие.

Пусть теперь последовательность $\{|\lambda_k|^2\|Cu_k\|_-\}$ ограничена. Тогда из принципа слабой компактности для Гильбертовых пространств следует, что существует подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$, слабо сходящаяся к элементу u_0 в пространстве $H^+(D)$. То есть $\{Cu_{k_j}\}$ сходится к Cu_0 в $H^-(D)$, потому что оператор $C: H^+(D)\to H^-(D)$ компактен, а $\{u_{k_j}\}$ сходится к u_0 в $L^2(D)$, так как оператор вложения $\iota: H^+(D)\to L^2(D)$ также компактен. В силу того, что последовательность $\{\lambda_{k_j}^2 Cu_{k_j}\}$ ограничена в $H^-(D)$ и $|\lambda_k|\to+\infty$, мы заключаем, что $\{Cu_{k_j}\}$ стремится к нулю в $H^-(D)$. Это означает, что $Cu_0=0$, а тогда и $u_0=0$ в силу инъективности оператора C (см. лемму 11).

Согласно принципу компактности, мы можем рассматривать подпоследовательности

$$\left\{|\lambda_{k_j}|^2\|Cu_{k_j}\|_-\right\} \text{ и } \left\{-\frac{\int_D \cos\left(\varphi_0+2\varphi_\Gamma\right)|a_0^{(2)}(x)||u_{k_j}(x)|^2\,dx}{\|Cu_{k_j}\|_-}\right\}$$

как сходящиеся последовательности к пределам $\alpha\geq 0$ и $\beta\in[-1,1]$ соответственно. Теперь, из (2.74) следует, что

$$(\theta-\alpha)^2+2\alpha\left(\theta-\beta\right)\leq 0. \tag{2.75}$$

Если $\alpha = 0$, тогда мы получаем противоречие, так как $\theta > 0$. Если же $\alpha > 0$ и $\beta \le 0$, тогда $\theta - \beta > 0$ и мы снова получаем противоречие.

Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Если $\varphi_0 \in C(\overline{D})$ тогда, согласно теореме Вейерштрасса, существует полиномиальная последовательность $\{P_i(x)\}$, аппроксимирующая $\varphi_0(x)$ в этом пространстве. В частности, для каждого $\varepsilon > 0$, существует $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\max_{x \in \overline{D}} |1 - \cos(\varphi_0(x) - P_i(x))| < \varepsilon \text{ для всех } i \ge i_\varepsilon.$$

Так как $ue^{\sqrt{-1}P_i(x)} \in H^+(D)$ мы видим, что, для всех $i \ge i_\varepsilon$,

$$\|Cu\|_- \ge \frac{\left|(e^{\sqrt{-1}(\varphi_0(x)-P_i(x))}|a_0^{(2)}|u,u)_{L^2(D)}\right|}{\|ue^{\sqrt{-1}P_i}\|_+} \ge$$

$$\frac{\left|(\cos(\varphi_0(x) - P_i(x))|a_0^{(2)}|u,u)_{L^2(D)}\right|}{\|ue^{\sqrt{-1}P_i}\|_+} \ge \frac{(1-\varepsilon)(|a_0^{(2)}|u,u)_{L^2(D)}}{\|ue^{\sqrt{-1}P_i}\|_+}.$$

Следовательно, если $\varepsilon \in (0,1)$, тогда

$$\limsup_{k_j \to \infty} \frac{(|a_0^{(2)}|u_{k_j}, u_{k_j})_{L^2(D)}}{\|Cu_{k_j}\|_-} \le \frac{\limsup_{k_j \to \infty} \|u_{k_j} e^{\sqrt{-1}P_i}\|_+}{1-\varepsilon} \text{ для всех } i \ge i_\varepsilon.$$

С другой стороны, так как $|e^{\sqrt{-1}P_i}| = 1$, мы заключаем, что

$$\|ue^{\sqrt{-1}P_i}\|_+^2 = \|u\|_+^2 + \|(F\nabla e^{\sqrt{-1}P_i})u\|_{L^2(D)}^2 + \tag{2.76}$$

$$2\Re\Big(((F\nabla e^{\sqrt{-1}P_i})u, e^{\sqrt{-1}P_i}F\nabla u)_{L^2(D)}\Big) + \|\Psi(e^{\sqrt{-1}P_i}u)\|_{L^2(\partial D)}^2 - \|\Psi(u)\|_{L^2(\partial D)}^2$$

для всех $i \in \mathbb{N}$ и $u \in H^+(D)$. Если оператор Ψ задается через умножение на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, то $\|\Psi(e^{\sqrt{-1}P_i}u)\|_{L^2(\partial D)} = \|\Psi(u)\|_{L^2(\partial D)}$. Если $\partial D \in C^\infty$ и Ψ это псевдодифференциальный оператор порядка r на ∂D то, так как умножение на гладкую функцию это псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, мы заключаем, что коммутатор $[\Psi, e^{\sqrt{-1}P_i}] = (\Psi \circ e^{\sqrt{-1}P_i} - e^{\sqrt{-1}P_i} \circ \Psi)$ это псевдодифференциальный оператор порядка $(r-1)$ на ∂D (см., например [48]). Согласно теореме 4, последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $H^r(\partial D)$, тогда мы можем положить, что подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$ сходится слабо к нулю в этом пространстве. Таким образом имеем

$$\Big| \|\Psi(e^{\sqrt{-1}P_i}u)\|_{L^2(\partial D)} - \|\Psi(u)\|_{L^2(\partial D)} \Big| =$$

$$\Big| \|\Psi(e^{\sqrt{-1}P_i}u)\|_{L^2(\partial D)} - \|e^{\sqrt{-1}P_i}\Psi(u)\|_{L^2(\partial D)} \Big| \le \|[\Psi, e^{\sqrt{-1}P_i}](u)\|_{L^2(\partial D)}$$

для всех $u \in H^+(D)$, следовательно

$$\lim_{k_j\to\infty} \Big(\|\Psi(e^{\sqrt{-1}P_i}u_{k_j})\|_{L^2(\partial D)} - \|\Psi(u_{k_j})\|_{L^2(\partial D)} \Big) = 0, \qquad (2.77)$$

потому что оператор $[\Psi, e^{\sqrt{-1}P_i}] : H^r(\partial D) \to L^2(\partial D)$ компактен в силу теоремы Реллиха. То есть, так как $u_{k_j} \to 0$ в $L^2(D)$ и $\|u_{k_j}\|_+ = 1$, из (2.76) и (2.77) следует, что

$$\limsup_{k_j\to\infty} \|u_{k_j} e^{\sqrt{-1}P_i}\|_+ = 1 \text{ для всех } i \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, если $\beta > 0$, то из неравенства (2.72) получаем

$$\beta = \lim_{k_j\to\infty} \frac{-\int_D \cos(\varphi_0 + 2\varphi_\Gamma)|a_0^{(2)}(x)||u_{k_j}(x)|^2\, dx}{\|Cu_{k_j}\|_-} \le$$

$$\limsup_{k_j\to\infty} |\theta_1| \frac{\int_D |a_0^{(2)}(x)||u_{k_j}(x)|^2\, dx}{\|Cu_{k_j}\|_-} \le \frac{|\theta_1|}{1-\varepsilon} \text{ для каждого } \varepsilon \in (0,1).$$

Это означает, что $\theta - \beta > 0$, если $\theta > |\theta_1|$, и мы снова получаем противоречие с (2.75). Таким образом, неравенство (2.73) выполнено.

Наконец, так как $\|\delta L_B\|^2 < 1 - \eta^2(\Gamma) = 1 - |\theta_1|^2$, мы видим, что существуют постоянные $\theta_2 \in (|\theta_1|, 1]$, $\gamma_0 \in [0,1)$ и $\alpha_1 \in (0, \pi/2)$, причем $\theta_2\sqrt{1-\gamma_0} > |\theta_1|$, такие, что

$$\|\delta L_B\| < \cos(\alpha_1)\Big(1 - \theta_2\Big)^{1/2}.$$

Используя (2.71) и (2.73) мы видим, что

$$\|(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)u\|_- \ge \sqrt{\Big(1-\theta_2^2\Big)\|u\|_+^2 + \gamma_0|\lambda|^4\|Cu\|_-^2} - \|\delta L_B u\|_- \ge$$

$$\cos(\alpha_1)\Big(1-\theta_2^2\Big)^{1/2}\|u\|_+ + \sin(\alpha_1)\sqrt{\gamma_0}|\lambda|^2\|Cu\|_- - \|\delta L_B u\|_- \geq$$

$$\Big(\cos(\alpha_1)\Big(1-\theta_2^2\Big)^{1/2} - \|\delta L_B\|\Big)\|u\|_+ + \sin(\alpha_1)\sqrt{\gamma_0}|\lambda|^2\|Cu\|_-.$$

для всех $u \in H^+(D)$ и всех $\lambda \in \Gamma$ с $|\lambda| \geq k_0$. $\square$

Мы продолжим с доказательства первого утверждения теоремы. Согласно лемме 12 существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что оператор $(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)$ непрерывно обратим, то есть мы имеем

$$L(\lambda) = (I + \delta L_c(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)^{-1})(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C) \tag{2.78}$$

для всех $\lambda \in \Gamma$, для которых верно $|\lambda| \geq k_0$.

Покажем теперь, что оператор $I + \delta L_c(L_0 + \delta L_B + \lambda^2 C)^{-1}$ инъективен для всех $\lambda \in \Gamma$ при $|\lambda| \geq k_1$ с некоторым $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \geq k_0$. Действительно, докажем от обратного. Предположим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $\lambda_k \in \Gamma$ с $|\lambda_k| \geq k$ и $f_k \in H^-(D)$, такие, что $\|f_k\|_- = 1$ и

$$(I + \delta L_c(L_0 + \delta L_B + \lambda_k^2 C)^{-1}) f_k = 0. \tag{2.79}$$

Из леммы 12 следует, что последовательность $u_k := (L_0 + \delta L_B + \lambda_k^2 C)^{-1} f_k$ ограничена в $H^+(D)$ для всех $\lambda_k \in \Gamma$, $|\lambda_k| \geq k_0$. Тогда, принцип слабой компактности для гильбертовых пространств дает, что существует подпоследовательность $\{f_{k_j}\}$ такая, что обе подпоследовательности $\{f_{k_j}\}$ и $\{u_{k_j}\}$ сходятся слабо в пространствах $H^-(D)$ и $H^+(D)$ к пределам f и u соответственно. Так как оператор δL_c компактен, следовательно последовательность $\{\delta L_c u_{k_j}\}$ сходится к $\delta L_c u$ в $H^-(D)$, а тогда $\{f_{k_j}\}$ сходится к f в силу формулы (2.79). Очевидно, что $\|f\|_- = 1$. В частности, мы заключаем, что последовательность $\{\delta L_c(L_0 + \delta L_B + \lambda_{k_j}^2 C)^{-1} f_{k_j}\}$ сходится к $(-f)$, откуда

$$f = -\delta L_c\, u. \tag{2.80}$$

Далее, переходя к слабому пределу в равенстве $f_{k_j} = (L_0 + \delta L_B + \lambda_{k_j}^2 C) u_{k_j}$, мы получаем

$$f = L_0 u + \delta L_B u + \lim_{k_j \to \infty} \lambda_{k_j}^2\, C\, u_{k_j},$$

здесь непрерывный оператор $L_0+\delta L_B : H^+(D) \to H^-(D)$, переводит слабо сходящуюся последовательность в снова слабо сходящуюся последовательность.

В силу компактности оператора C последовательность $\{C\, u_{k_j}\}$ сходится к $C\, u$ в пространстве $H^-(D)$, причем $C\, u \neq 0$, что является следствием (2.80) и инъективности оператора C (см. лемму 11). Это показывает, что слабый предел

$$\lim_{k_j\to\infty} \lambda_{k_j}^2\, C\, u_{k_j} = f - L_0 u - \delta L_B u$$

не существует, противоречие.

Мы доказали, что оператор $I+\delta L_c(L_0+\delta L_B+\lambda^2\, C)^{-1}$ инъективен для всех $\lambda \in \Gamma$ при $|\lambda| \geq k_1$. Так как это фредгольмов оператор нулевого индекса, он непрерывно обратим. Следовательно, операторы $L(\lambda)$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in \Gamma$ при достаточно большом значении $|\lambda|$.

Таким образом, $\{L^{-1}(\lambda) = (L_0+\delta L_c+\delta L_B+\lambda^2 C)^{-1}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ является мероморфным семейством фредгольмовых операторов. Так как существует точка γ, в которой $L(\gamma)$ непрерывно обратим, то операторы $L(\lambda)$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ кроме счетного множества дискретных точек $\{\lambda_\nu\}$, не имеющих предела в $\mathbb{C}$ (см., например, [11] или [9]). □

Следствие 1. *Пусть Ψ задается умножением на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$ и Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также выполнено (2.65), $\varphi_0 \in C(\overline{D})$ и*

$$\Phi = \sup_{x,y\in\overline{D}} (\varphi_0(x) - \varphi_0(y)) < 2\pi. \tag{2.81}$$

Если выполнены условия леммы 4, то для каждого компактного оператора $\delta L_c : H^+(D) \to H^-(D)$ и каждого ограниченного оператора $\delta L_B : H^+(D) \to H^-(D)$, для которого верно

$$\|\delta L_B\|^2 + (\max{(0, -\cos{(\Phi/2)})})^2 < 1, \tag{2.82}$$

операторы $L(\lambda) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c + \lambda^2 C$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ кроме счетного числа характеристических значений $\{\lambda_\nu\}$.

Доказательство. Так как $\varphi_0 \in C(\overline{D})$, функция достигает своего минимального и максимального значения

$$\Phi_1 = \min_{x\in\overline{D}} \varphi_0(x),$$

$$\Phi_2 = \max_{x\in\overline{D}} \varphi_0(x)$$

и $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Следовательно, утверждение следует из теоремы 6 применительно к лучу $\Gamma_0 = \{\arg(\lambda) = -(\Phi_2 + \Phi_1)/4\}$ с

$$\theta_1(\Gamma_0) = \min_{x\in\overline{D}} \cos\left(\varphi_0(x) + 2\varphi_{\Gamma_0}\right) \geq \cos(\Phi/2) > -1.$$

□

Теорему 6 можно распространить на случай, когда аргумент функции $a_0^{(2)}(x)$ не является непрерывным, а λ принимает значения в некотором угле K комплексной плоскости $\mathbb{C}$. А именно, в этом случае мы предполагаем, что оператор $A(x,\partial,\lambda)$ является эллиптическим с параметром в угле $K = \{\alpha \leq \varphi_\lambda \leq \beta\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то есть

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j + \lambda^2 a_0^{(2)}(x) \neq 0 \tag{2.83}$$

для всех $(x,\xi,\lambda) \in \overline{D} \times [(\mathbb{R}^n \times K) \setminus \{(0,0)\}]$, где $\varphi_\lambda = \arg(\lambda)$ и α, β некоторые константы, $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$. Ясно, что K является лучом, если $\alpha = \beta$.

Теорема 7. *Пусть либо Ψ задается с помощью умножения на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$, а Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}$, выполнены условия леммы 9 и неравенства (2.65), (2.67). Если константа $\theta_1 \geq 0$ в неравенстве (2.67) и $\|\delta L_B\| < 1$, либо $\theta_1 < 0$ и существует функция $\varphi_{0,0}(x) \in C^{0,1}(\overline{D})$, такая, что*

$$\|1 - e^{\sqrt{-1}(\varphi_0 - \varphi_{0,0})}\|_{L^\infty(D)} < 1 - |\theta_1| \tag{2.84}$$

и $\|\delta L_B\| < \sqrt{1 - (|\theta_1|/(1 - \|1 - e^{\sqrt{-1}(\varphi_0-\varphi_{0,0})}\|_{L^\infty(D)}))^2}$, то

1) *существует $\lambda_0 \in K$ такое, что операторы $L(\lambda) : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in K$ при $|\lambda| \geq |\lambda_0|$;*

2) *операторы* $L(\lambda)$ *непрерывно обратимы для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$, *кроме дискретного счетного множества* $\{\lambda_\nu\}$, *не имеющего предельных точек в* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6 (см. [76]), и не приводится здесь ввиду его громоздкости. $\square$

Глава 3

Спектральные свойства операторов, порожденных эрмитовыми формами

3.1 Смешанные задачи, соответствующие компактным возмущениям самосопряженных фредгольмовых операторов

Данный параграф посвящен изучению спектральных свойств оператора L_0 и его возмущений, что по сути является изучением свойств оператора $L(\lambda)$ в случае, когда $a_0^{(2)}(x) \equiv 1$ в D, то есть является частным случаем фредгольмова семейства $\{L(\lambda)\}$.

Как мы увидели в предыдущей главе (см. лемму 7), для оператора $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$ существует непрерывный обратный оператор $L_0^{-1} : H^-(D) \to H^+(D)$. Тогда мы можем рассмотреть следующую эрмитову форму в пространстве $H^-(D)$,

$$(u, v)_- :=< L_0^{-1}u, v >, \tag{3.85}$$

для любых $u, v \in H^-(D)$. Эрмитовость данной формы следует немедленно из эрмитовости формы (2.48), так как из (2.56) имеем:

$$< L_0^{-1}u, v >=< L_0^{-1}u, L_0 L_0^{-1}v >= \overline{(L_0^{-1}u, L_0^{-1}v)}_+, \tag{3.86}$$

для любых $u, v \in H^-(D)$. Если выполнены условия теоремы 4, то форма $(\cdot,\cdot)_+$ определяет скалярное произведением в пространстве $H^+(D)$. Таким образом, форма (3.85) является скалярным произведением в пространстве $H^-(D)$, причем из (2.58) следует, что

$$(u, u)_- = (L_0^{-1}u, L_0^{-1}u)_+ = \|L_0^{-1}u\|_+^2 = \|u\|_-^2, \tag{3.87}$$

то есть скалярное произведение (3.85) в пространстве $H^-(D)$ согласовано с нормой (2.49).

Лемма 13. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда обратный L_0^{-1} к оператору, определенному через (2.56), индуцирует компактные положительные самосопряженные операторы*

$$\begin{aligned}
&\iota'\iota L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D),\\
&\iota L_0^{-1}\iota' : L^2(D) \to L^2(D),\\
&L_0^{-1}\iota'\iota : H^+(D) \to H^+(D),
\end{aligned}$$

собственные значения которых положительны, совпадают, а соответствующие системы собственных векторов также совпадают и полны в пространствах $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$.

Доказательство. Согласно теореме 4 и теореме Реллиха-Кондрашова, вложение $\iota : H^+(D) \to L^2(D)$ компактно, следовательно, по лемме 6, вложение $\iota' : L^2(D) \to H^-(D)$ так же компактно. Таким образом, операторы $(\iota'\iota L_0^{-1})$, $(\iota L_0^{-1}\iota')$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ компактны как композиция двух компактных и одного ограниченного операторов. Из (3.86) имеем

$$(\iota'\iota L_0^{-1}u, v)_- = \overline{(v, \iota'\iota L_0^{-1}u)}_- = \overline{< L_0^{-1}v, \iota'\iota L_0^{-1}u >},$$

для любых $u, v \in H^-(D)$. При этом по определению спаривания

$$\overline{< L_0^{-1}v, \iota'\iota L_0^{-1}u >} = \lim_{k\to\infty} \overline{(L_0^{-1}v, u_k)}_{L^2(D)},$$

где последовательность $\{u_k\} \in H^+(D)$ сходится к элементу $\iota'\iota L_0^{-1}u$ в пространстве $H^-(D)$. Однако элемент $L_0^{-1}u$ принадлежит пространству $H^+(D)$, тогда мы имеем

$$\lim_{k\to\infty} \overline{(L_0^{-1}v, u_k)}_{L^2(D)} = \overline{(\iota L_0^{-1}v, \iota L_0^{-1}u)}_{L^2(D)} = (\iota L_0^{-1}u, \iota L_0^{-1}v)_{L^2(D)}. \qquad (3.88)$$

Аналогично получаем

$$(u, \iota'\iota L_0^{-1}v)_- =< L_0^{-1}u, \iota'\iota L_0^{-1}v >= (\iota L_0^{-1}u, \iota L_0^{-1}v)_{L^2(D)},$$

для всех $u, v \in H^-(D)$, таким образом оператор $(\iota'\iota L_0^{-1})$ является самосопряженным.

Рассмотрим теперь оператор $(\iota L_0^{-1}\iota')$. Из определения спаривания (2.50) ясно, что

$$(\iota L_0^{-1}\iota' u, v)_{L^2(D)} =< L_0^{-1}\iota' u, \iota' v >,$$

для любых $u, v \in L^2(D)$. Тогда из (2.56) имеем

$$(\iota L_0^{-1}\iota' u, v)_{L^2(D)} =< L_0^{-1}\iota' u, \iota' v >= \overline{(L_0^{-1}\iota' u, L_0^{-1}\iota' v)}_{H^+},$$

где $u, v \in L^2(D)$. Аналогично получаем

$$(u, \iota L_0^{-1}\iota' v)_{L^2(D)} = \overline{(\iota L_0^{-1}\iota' v, u)}_{L^2(D)} = \overline{(L_0^{-1}\iota' u, L_0^{-1}\iota' v)}_{H^+},$$

для всех $u, v \in L^2(D)$, таким образом мы показали, что оператор $(\iota L_0^{-1}\iota')$ так же является самосопряженным. Снова используя выражение (2.56), для любых $u, v \in H^+(D)$, получаем

$$(L_0^{-1}\iota'\iota u, v)_+ = \overline{(v, L_0^{-1}\iota'\iota u)}_+ =< v, \iota'\iota u >= (\iota v, \iota u)_{L^2(D)}, \qquad (3.89)$$

$$(u, L_0^{-1}\iota'\iota v)_+ = \overline{< u, \iota'\iota v >} = (\iota v, \iota u)_{L^2(D)},$$

что доказывает самосопряженность оператора $(L_0^{-1}\iota'\iota)$.

Далее, из леммы 7 следует, что операторы $(\iota'\iota L_0^{-1})$, $(\iota L_0^{-1}\iota')$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ являются инъективными. Собственные вектора оператора $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ лежат в пространстве $H^+(D)$ по определению. Поскольку L_0^{-1} отображает $H^-(D)$ непрерывно в $H^+(D)$, то на самом деле собственные вектора операторов

$(\iota'\iota L_0^{-1})$ и $(\iota L_0^{-1}\iota')$ также лежат в пространстве $H^+(D)$. Кроме того собственные значения всех этих трех операторов положительны. Действительно, из доказательства текущей леммы следует, что операторы $(\iota'\iota L_0^{-1})$, $(\iota L_0^{-1}\iota')$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ положительны, так как

$$(\iota'\iota L_0^{-1}u, u)_- \geqslant 0, \quad (\iota L_0^{-1}\iota' u, u)_{L^2(D)} \geqslant 0, \quad (L_0^{-1}\iota'\iota u, u)_+ \geqslant 0.$$

Из того, что

$$0 \leqslant (\iota'\iota L_0^{-1}u_\nu, u_\nu)_- = \lambda_\nu(u_\nu, u_\nu)_-$$

следует, что все $\lambda_\nu > 0$. Для операторов $(\iota L_0^{-1}\iota')$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ рассуждения аналогичны. Наконец, из инъективности операторов ι и ι' следует, что системы собственных значений и собственных векторов операторов $(\iota'\iota L_0^{-1})$, $(\iota L_0^{-1}\iota')$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ совпадают.

Полнота собственных векторов в пространствах $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$ немедленно следует из теоремы Гильберта-Шмидта (см. теорему 1). $\square$

Следующая теорема следует из теоремы Келдыша о слабых возмущениях компактных самосопряженных операторов.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда, для любого обратимого оператора $L_0+\delta L_c : H^+(D) \to H^-(D)$, где δL_c это компактный оператор, система корневых функций компактного оператора*

$$P_1 = \iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1} : H^-(D) \to H^-(D)$$

полна в пространствах $H^-(D)$, $L^2(D)$ и $H^+(D)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедлива следующая лемма.

Лемма 14. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда порядок операторов*

$$\iota'\iota L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D),$$
$$\iota L_0^{-1}\iota' : L^2(D) \to L^2(D),$$
$$L_0^{-1}\iota'\iota : H^+(D) \to H^+(D),$$

конечен и равен $n/(2r+1)$.

Доказательство. Согласно лемме 13 операторы $(\iota'\iota L_0^{-1})$, $(\iota L_0^{-1}\iota')$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ являются компактными самосопряженными операторами. Отметим, что если для некоторого $s \in \mathbb{R}$ и компактного оператора $\mathcal{J} : H^s(D) \to H^s(D)$ существует $\delta s > 0$ такое, что оператор $\mathcal{J} : H^s(D) \to H^{s+\delta s}(D)$ непрерывен, то оператор $\mathcal{J}$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/\delta s+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. (см. предложение 5.4.1 в [3] или теорему 3.2 в [62]). Однако, согласно теореме 4, пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^s(D)$ с показателем $s > 0$ из формулы (2.21). Тогда оператор $(\iota L_0^{-1}\iota')$ на самом деле отображает пространство $L^2(D)$ в пространство $H^s(D)$, и, таким образом, оператор $(\iota L_0^{-1}\iota')$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. следствие 3.5 в [62]). Так как операторы $(\iota'\iota L_0^{-1})$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ имеют такие же собственные значения, следовательно они также принадлежат классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. В частности, операторы $(\iota'\iota L_0^{-1})$, $(\iota L_0^{-1}\iota')$ и $(L_0^{-1}\iota'\iota)$ являются операторами конечного порядка. Используя формулу (2.21), получаем, что порядок операторов $\iota'\iota L_0^{-1}$, $\iota L_0^{-1}\iota'$ и $L_0^{-1}\iota'\iota$ равен $n/(2r+1)$. □

Продолжим доказательство теоремы. По ее условию существует обратный оператор $(L_0+\delta L_c)^{-1} : H^-(D) \to H^+(D)$. Как мы показали в предыдущей главе, оператор $L_0+\delta L_c$ является непрерывным линейным оператором, отображающим банахово пространство $H^+(D)$ в банахово пространство $H^-(D)$. Следовательно, оператор $(L_0+\delta L_c)^{-1}$ также непрерывен. Далее, ясно, что

$$(\iota'\iota L_0^{-1}) - (\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1}) = (\iota'\iota L_0^{-1})(\delta L_c(L_0+\delta L_c)^{-1}),$$

так как $I - L_0 L^{-1}(L_0+\delta L_c)^{-1} = \delta L_c(L_0+\delta L_c)^{-1}$. В силу компактности оператора δL_c оператор $(\iota'\iota L_0^{-1})(\delta L_c(L_0+\delta L_c)^{-1})$ также компактен.

Таким образом, $(\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})$ есть слабое возмущение компактного самосопряженного оператора $(\iota'\iota L_0^{-1})$ конечного порядка (см. лемму 14), причем очевидно, что оператор $(\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})$ инъективен. Тогда по теореме Келдыша (см. теорему 2 или [9], [11]) система корневых функций $\{u_\nu\}$ оператора $(\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})$ полна в гильбертовом пространстве $H^-(D)$.

Выберем теперь корневую функцию u_ν оператора $(\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})$, соответствующую собственному значению λ_ν. Тогда, по определению корневой функции, существует такое натуральное число m, что

$$((\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})-\lambda_\nu I)^m u_\nu = 0.$$

Заметим, что $\lambda_\nu \neq 0$, так как $u_\nu \neq 0$, а оператор $(\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})$ инъективен. Используя биномиальную формулу, получаем

$$((\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})-\lambda_\nu I)^m u_\nu = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-\lambda_\nu)^{m-j} (\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})^j u_\nu = 0;$$

здесь

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!},$$

это биномиальные коэффициенты. Следовательно

$$u_\nu = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{1-j} \lambda_\nu^{-j} (\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})^j u_\nu,$$

то есть $u_\nu \in H^+(D)$, так как образ оператора $(L_0+\delta L_c)^{-1}$ лежит в пространстве $H^+(D)$. Таким образом, мы доказали, что $\{u_\nu\} \subset H^+(D)$. Покажем теперь, что линейная оболочка $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$ системы $\{u_\nu\}$ плотна в пространстве $H^+(D)$. Действительно, выберем $u \in H^+(D)$. Так как оператор $(L_0+\delta L_c)$ отображает непрерывно пространство $H^+(D)$ в $H^-(D)$, мы получаем $(L_0+\delta L_c)u \in H^-(D)$. Следовательно, в силу полноты системы $\{u_\nu\}$ в пространстве $H^-(D)$, существует последовательность $\{f_k\} \subset \mathcal{L}(\{u_\nu\})$, сходящаяся к $(L_0+\delta L_c)u$ в пространстве $H^-(D)$. С другой стороны, оператор $(L_0+\delta L_c)^{-1}$ непрерывен, следовательно последовательность

$$(L_0+\delta L_c)^{-1} f_k = (L_0+\delta L_c)^{-1}\iota'\iota f_k$$

сходится к u в пространстве $H^+(D)$, так как

$$\|(L_0+\delta L_c)^{-1} f_k - u\|_+ \leqslant \|(L_0+\delta L_c)^{-1}(f_k-(L_0+\delta L_c)u)\|_+ \leqslant$$

$$c\|f_k-(L_0+\delta L_c)u\|_- \to 0, \text{ при } k \to 0,$$

в силу ограниченности оператора $(L_0 + \delta L_c)^{-1}$, где c это некоторая положительная константа.

Пусть теперь $u_{\nu_0} \in \mathcal{L}(\{u_\nu\})$ соответствует собственному значению λ_0 кратности m_0, тогда функция $v_{\nu_0} = (\iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1})u_{\nu_0}$ удовлетворяет

$$((\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})-\lambda_0 I)^{m_0} v_{\nu_0} = ((\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})-\lambda_0 I)^{m_0}(\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1})u_{\nu_0}$$
$$+ ((\iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1}) - \lambda_0 I)^{m_0}\lambda_0 u_{\nu_0} - ((\iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1}) - \lambda_0 I)^{m_0}\lambda_0 u_{\nu_0} =$$
$$= ((\iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1}) - \lambda_0 I)^{m_0+1} u_{\nu_0} + \lambda_0((\iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1}) - \lambda_0 I)^{m_0} u_{\nu_0} = 0,$$

то есть, оператор $(\iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1})$ отображает $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$ в $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$. Таким образом, последовательность $\{\iota'\iota(L_0+\delta L_c)^{-1} f_k\}$ все еще принадлежит $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$, следовательно $\{(L_0+\delta L_c)^{-1} f_k\}$ это последовательность линейных комбинаций корневых функций оператора $(\iota'\iota(L_0 + \delta L_c)^{-1})$, сходящаяся к u. Отсюда следует, что система $(L_0 + \delta L_c)^{-1}\mathcal{L}(\{u_\nu\}) \subset \mathcal{L}(\{u_\nu\})$ плотна в $H^+(D)$.

Как хорошо известно, пространство гладких функций с компактным носителем $C_0^\infty(D)$ плотно в пространстве Лебега $L^2(D)$ (см., например, [21]). Однако пространство $H^+(D)$ содержит в себе $C_0^\infty(D)$, таким образом очевидно, что пространство $H^+(D)$ плотно в пространстве Лебега $L^2(D)$, что доказывает полноту системы корневых функций в $L^2(D)$. □

3.2 Спектральные свойства смешанных краевых задач для эллиптического с параметром оператора

Данный параграф посвящен изучению полноты корневых функций некоэрцитивной смешанной задачи для эллиптического с параметром оператора в пространствах соболевского типа.

Напомним некоторые базовые определения. Предположим, что $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и $F(\lambda)$ это голоморфная функция в проколотой окрестности точки λ_0, принимающая свои значения в пространстве $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ ограниченных линейных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2. Точка λ_0 называется характеристической точкой функции $F(\lambda)$, если существует голоморфная функция $u(\lambda)$ в окрестности λ_0 со значениями в H_1, такая, что $u(\lambda_0) \neq 0$, но $F(\lambda)u(\lambda)$ продолжается до голоморфной функции (со значениями в H_2) в некоторую окрестность точки λ_0, и исчезает в этой точке. Как обычно, в этом случае мы назовем $u(\lambda)$ корневой функцией семейства $F(\lambda)$ в λ_0. Если N – это порядок нуля голоморфной функции $F(\lambda)u(\lambda)$ в точке λ_0, тогда мы имеем

$$\sum_{j=0}^{m} F_{m-j}u_j = 0 \text{ для всех } m \in \mathbb{Z}_+ \text{ при } 0 \leq m \leq N-1 \tag{3.90}$$

где $u_j = \frac{1}{j!}\frac{d^j u}{dz^j}(\lambda_0) \in H_1$ и $F_j = \frac{1}{j!}\frac{d^j F}{dz^j}(\lambda_0) \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $j \in \mathbb{N}$. Вектор u_0 называется собственным вектором семейства $F(\lambda)$ в точке λ_0 а вектора u_j, $1 \leq j \leq N-1$, называются присоединенными векторами к вектору u_0. Если линейная оболочка множества всех собственных и присоединенных векторов семейства $F(\lambda)$ полна в H_1, то говорят, что корневые функции семейства $F(\lambda)$ полны в пространстве H_1. Понятие корневых функций голоморфного семейства это обобщение понятия корневых векторов линейных операторов (см. первый параграф настоящей главы).

Заметим, что при выполнении (2.65), умножение на функцию $a_0^{(2)} \in L^\infty(D)$ индуцирует ограниченный инъективный оператор в пространстве $L^2(D)$; он непрерывно обратим, если выполнено (2.66). Обозначим этот оператор через C_0. Тогда мы можем факторизовать оператор C следующим образом: $C = \iota' C_0 \iota$.

Лемма 15. *Если выполнено (2.65), то для голоморфного семейства $L(\lambda) = L(0) + \lambda^2 C : H^+(D) \to H^-(D)$ множество всех корневых функций совпадает с множеством всех корневых векторов одного из следующих замкнутых плотно определенных линейных операторов:*

$$C^{-1}L(\gamma) : H^+(D) \to H^+(D) \text{ и } L(\gamma)C^{-1} : H^-(D) \to H^-(D),$$

где $\gamma \in \mathbb{C}$ это произвольная точка. Кроме того, если существует точка $\gamma_0 \in \mathbb{C}$, в которой оператор $L(\gamma_0) = L(0) + \lambda_0^2 C$ непрерывно обратим, то это множество корневых функций совпадает с множеством всех корне-

вых векторов одного из следующих ограниченных линейных операторов:

$$L^{-1}(\gamma_0)C : H^+(D) \to H^+(D),\ CL^{-1}(\gamma_0) : H^-(D) \to H^-(D),$$

$$\iota L^{-1}(\gamma_0)\iota' C_0 : L^2(D) \to L^2(D).$$

Доказательство. Немедленно следует из (3.90).

□

Обозначим теперь через $\mathfrak{C} : H^+(D) \to H^-(D)$ линейный ограниченный оператор, индуцированный функционалом $(|a_0^{(2)}|u, v)_{L^2(D)}$. Заметим, что если выполнено (2.65), то умножение на функцию $|a_0^{(2)}| \in L^\infty(D)$ индуцирует ограниченный инъективный самосопряженный оператор $\mathfrak{C}_0 : L^2(D) \to L^2(D)$; он непрерывно обратим, если выполнено (2.66). Обозначим так же через $h(\cdot, \cdot)$ следующую эрмитову форму

$$h(u, v) = (|a_0^{(2)}|u, v)_{L^2(D)}.$$

Отметим, что если выполнено (2.65), то она определяет скалярное произведение в $L^2(D)$; это гильбертово пространство мы обозначим через $L^2_h(D)$. Соответствующая норма не сильнее чем $\|\cdot\|_{L^2(D)}$, она эквивалентна стандартной норме этого пространства, если выполнено (2.66).

Теорема 9. *Пусть выполнено (2.65). В условиях теоремы 4, операторы*

$$L_0^{-1}\mathfrak{C} : H^+(D) \to H^+(D),\ \mathfrak{C}L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D),\ \iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 : L^2(D) \to L^2(D)$$

являются компактными операторами конечного порядка,

$$ord\,(\mathfrak{C}L_0^{-1}) = ord\,(L_0^{-1}\mathfrak{C}) = ord\,(\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0) = n/(2r+1),$$

причем система собственных векторов оператора $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ полна в пространствах $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$L_0^{-1}\mathfrak{C} = L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0\iota : H^+(D) \to H^+(D), \quad \mathfrak{C}L_0^{-1} = \iota'\mathfrak{C}_0\iota L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D).$$

Если выполнены условия теоремы 4, то $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^s(D)$ и тогда, согласно теореме Реллиха-Кондрашова, вложение $\iota : H^+(D) \to L^2(D)$ компактно. Следовательно, операторы $L_0^{-1}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}L_0^{-1}$ и $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0$ компактны.

Более того,

$$(L_0^{-1}\mathfrak{C}u, v)_+ =< \iota'\mathfrak{C}_0\iota u, v >= (\mathfrak{C}_0\iota u, \iota v)_{L^2(D)} = \int_D |a_0^{(2)}(x)|u(x)\overline{v}(x)\, dx,$$
$$(u, L_0^{-1}\mathfrak{C}v)_+ = \overline{(L_0^{-1}\mathfrak{C}_0 v, u)_+} = \overline{(\mathfrak{C}_0\iota v, \iota u)_{L^2(D)}} = \int_D |a_0^{(2)}(x)|u(x)\overline{v}(x)\, dx \tag{3.91}$$

для всех $u, v \in H^+(D)$, то есть оператор $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ самосопряжен. Тогда

$$(L_0^{-1}\mathfrak{C}u, u)_+ = \int_D |a_0^{(2)}(x)||u(x)|^2\, dx \geq 0$$

для всех $u \in H^+(D)$, см. (3.91). Следовательно, оператор $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ положителен, так как оба оператора L_0^{-1} и $\mathfrak{C}$ инъективны.

Согласно леммам 13 и 14, оператор $\iota L_0^{-1}\iota' : L^2(D) \to L^2(D)$ компактен, самосопряжен, и его порядок конечен:

$$\mathrm{ord}\,(\iota L_0^{-1}\iota') = n/(2r+1).$$

Так как $\mathfrak{C}_0 : L^2(D) \to L^2(D)$ ограничен, операторы $\iota L_0^{-1}\iota'$ и $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0$ имеют те же порядки (см., например, [9, Гл. 2, § 2] или [40]).

В силу инъективности оператора ι, мы имеем

$$(L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0\iota - \mu I)u = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$(\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 - \mu I)\iota u = 0.$$

Следовательно,

$$(L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0\iota - \mu I)^m u = 0$$

с некоторым $m \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда

$$(\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 - \mu I)^m \iota u = 0.$$

Таким образом, множество собственных и корневых векторов оператора $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ совпадает с множеством собственных и корневых векторов оператора $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0$. Кроме того, кратности собственных значений так же совпадают. Следовательно, операторы $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0$ и $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ имеют один и тот же порядок.

По теореме Гильберта-Шмидта существует ортонормированный базис $\{b_\nu^{(+)}\}$ в $H^+(D)$, состоящий из собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\{\mu_\nu\}$ оператора $L_0^{-1}\mathfrak{C}$. Следовательно, из рассуждений выше следует, что векторы $\iota b_\nu^{(+)} = b_\nu^{(0)} \in L^2(D)$, $\nu \in \mathbb{N}$ являются собственными векторами оператора $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0$, соответствующими собственным значениям $\{\mu_\nu\}$ оператора $L_0^{-1}\mathfrak{C}$. Так как $H^+(D)$ полно в $L^2(D)$, система $\{\iota b_\nu^{(+)}\}$ полна в $L^2(D)$.

С другой стороны,

$$h(\iota u, \iota v) = (|a_0^{(2)}(x)|\iota u, \iota v)_{L^2(D)} =< \mathfrak{C}u, v >= (L_0^{-1}\mathfrak{C}u, v)_+$$

для всех $u, v \in H^+(D)$. В частности, система $\{\iota b_\nu^{(+)} = b_\nu^{(0)}\}$ ортогональна в $L_h^2(D)$. Она полна в $L_h^2(D)$, так как это пространство можно рассматривать как замыкание $L^2(D)$ относительно $h(\cdot,\cdot)$. В частности, система $\{\sqrt{|a_0^{(2)}|}b_\nu^{(+)}\}$ ортогональна в $L^2(D)$. Если вектор u из $L^2(D)$ ортогонален системе $\{\sqrt{|a_0^{(2)}|}b_\nu^{(+)}\}$ в $L^2(D)$, тогда вектор $\sqrt{|a_0^{(2)}|}u \in L^2(D)$ ортогонален системе $\{\iota b_\nu^{(+)}\}$ в $L^2(D)$. Так как $\{\iota b_\nu^{(+)}\}$ полна в $L^2(D)$, мы видим, что $\sqrt{|a_0^{(2)}|}u = 0$ почти всюду в D, и тогда $u = 0$ в силу (2.65). Следовательно, система $\{\sqrt{|a_0^{(2)}|}b_\nu^{(+)}\}$ является ортогональным базисом в $L^2(D)$.

По построению пространство $H^+(D)$ плотно в $H^-(D)$, и следовательно система $\{b_\nu^{(+)}\}$ полна в $H^-(D)$. Более того,

$$(a_0^{(2)}b_\nu^{(+)}, a_0^{(2)}b_k^{(+)})_- = (L_0^{-1}\mathfrak{C}b_\nu^{(+)}, L_0^{-1}\mathfrak{C}b_k^{(+)})_+ = \mu_\nu\mu_k\delta_{\nu,k},$$

то есть $\{\mathfrak{C}b_\nu^{(+)}\}$ ортогональна в $H^-(D)$. Из рассуждений выше и того, что

$$L_0^{-1}u = \sum_\nu (L_0^{-1}u, b_\nu^{(+)})_+ b_\nu^{(+)}$$

для каждого $u \in H^-(D)$ следует, что система $\{\mathfrak{C}b_\nu^{(+)}\}$ полна в $H^-(D)$, а тогда

$$u = \sum_\nu (L_0^{-1}u, b_\nu^{(+)})_+ L_0 b_\nu^{(+)} = \sum_\nu \frac{(L_0^{-1}u, b_\nu^{(+)})_+}{\mu_\nu} C b_\nu^{(+)}.$$

Так как оператор $L_0^{-1}\mathfrak{C} : H^+(D) \to H^+(D)$ самосопряжен, мы имеем

$$(\mathfrak{C}L_0^{-1}u, v)_- = (L_0^{-1}\mathfrak{C}(L_0^{-1}u), L_0^{-1}v)_+ = ((L_0^{-1}u), L_0^{-1}\mathfrak{C}L_0^{-1}v)_+ = (u, \mathfrak{C}L_0^{-1}v)_-$$

для всех $u, v \in H^-(D)$, то есть оператор $\mathfrak{C}L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D)$ так же самосопряжен. Следовательно, по теореме Гильберта-Шмидта, существует ортонормированный базис $\{b_\nu^{(-)}\}$ в $H^-(D)$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathfrak{C}L_0^{-1}$.

С другой стороны, так как для всех $u \in H^+(D)$ выполнено тождество

$$\mathfrak{C}(L_0^{-1}\mathfrak{C} - \mu I)u = (\mathfrak{C}L_0^{-1} - \mu I)\mathfrak{C}u \tag{3.92}$$

и оператор $\mathfrak{C}$ инъективен, мы заключаем, что системы собственных значений операторов $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}L_0^{-1}$ совпадают. Более того, кратности собственных значений совпадают, и тогда $\mathrm{ord}\,(\mathfrak{C}L_0^{-1}) = \mathrm{ord}\,(L_0^{-1}\mathfrak{C})$. Следовательно, (3.92) дает, что для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ вектор $b_\nu^{(-)} = \mathfrak{C}b_\nu^{(+)}$ является собственным вектором оператора $\mathfrak{C}L_0^{-1}$, соответствующим собственному значению μ_ν. В частности, мы можем рассматривать систему $\{\mathfrak{C}b_\nu^{(+)}\}$ как ортогональный базис в $H^-(D)$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathfrak{C}L_0^{-1}$.

Наконец, если выполнено (2.66), тогда $L_h^2(D)$ является гильбертовым пространством, совпадающим с $L^2(D)$ как линейное пространство, имеющее эквивалентную норму. Тогда

$$h(\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 u, v) = (\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 u, |a_0^{(2)}(x)|v)_{L^2(D)} =$$

$$(|a_0^{(2)}(x)|u, \iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 v)_{L^2(D)} = h(u, \iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 v)$$

для всех $u, v \in L^2(D)$, то есть оператор $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 : L_h^2(D) \to L_h^2(D)$ самосопряжен.

$\square$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда операторы $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}L_0^{-1}$ являются самосопряженными. Кроме того, операторы имеют одну и ту же систему собственных значений $\{\mu_\nu\}$, система собственных векторов $\{b_\nu^{(+)}\}$ является ортогональным базисом в $H^+(D)$, система $\{b_\nu^{(-)} = \mathfrak{C}b_\nu^{(+)}\}$ собственных векторов оператора $\mathfrak{C}L_0^{-1}$ является ортогональным базисом в $H^-(D)$, система $\{b_\nu^{(0)} = \iota b_\nu^{(+)}\}$ собственных векторов оператора $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0$ является ортогональным базисом в пространстве $L_h^2(D)$, а система $\{\sqrt{|a_0^{(2)}|}b_\nu^{(+)}\}$ является ортогональным базисом в $L^2(D)$. Если, дополнительно, выполнено (2.66), то оператор $\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0$ самосопряжен в $L_h^2(D)$.*

Теперь мы можем использовать известную теорему Келдыша о слабом возмущении компактного самосопряженного оператора (см. теорему 2) для того, чтобы заключить о справедливости следующего результата.

Следствие 3. *Пусть выполнены (2.65) и условия теоремы 4, тогда для каждого компактного оператора $\delta L_c : H^+(D) \to H^-(D)$ мы имеем*

1) для любого $\varepsilon > 0$ все характеристические значения λ_ν (кроме конечного числа) операторного пучка $L(\lambda) = L_0 + \delta L_c + \lambda^2\mathfrak{C}$ принадлежат углам

$$M_\varepsilon = \{|\arg(\lambda) - \pi/2| < \varepsilon\}, \quad M_{-\varepsilon} = \{|\arg(\lambda) + \pi/2| < \varepsilon\}$$

и $\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = +\infty$;

2) система корневых векторов семейства $L(\lambda) = L_0 + \delta L_c + \lambda^2\mathfrak{C}$ полна в пространствах $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$.

Наконец, мы можем применить метод лучей медленного роста резольвенты (см. теорему 3), для того, чтобы получить полноту корневых векторов в случае более общих возмущений.

Теорема 10. *Пусть либо оператор Ψ задается с помощью умножения на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$, а Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также выполнены условия теоремы*

4, неравенство (2.65) и

$$\Phi = \sup_{x,y\in\overline{D}} (\varphi_0(x) - \varphi_0(y)) < \pi(2r+1)/2n. \tag{3.93}$$

Если $\varphi_0 \in C^{0,1}(\overline{D})$ и

$$\|\delta L_B\|^2 + (\max(0, -\cos((\pi(2r+1) - 2n\Phi)/4n)))^2 < 1,$$

то мы имеем:

1) для любого $\varepsilon > 0$ все характеристические значения λ_ν (кроме конечного числа) семейства $L(\lambda) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c + \lambda^2 C$ принадлежат углам

$$\{|\arg(\lambda) \pm \pi/2| < \pi(2r+1)/2n + \varepsilon\}$$

причем $\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = +\infty$;

2) система корневых векторов семейства $L(\lambda) = L_0 + \delta L_c + \delta L_B + \lambda^2 C$ полна в пространствах $H^+(D)$, $H^-(D)$ и $L^2(D)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что (3.93) влечет (2.81), и тогда, согласно следствию 1, существует число $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ такое, что $L(\gamma)$ непрерывно обратим. В частности, операторы $L(\lambda)$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением счетного числа характеристических значений $\{\lambda_\nu\}$.

Так как оператор $\gamma_0^2 C : H^+(D) \to H^-(D)$ компактен, то семейство

$$\tilde{L}(\tilde{\lambda}) = L_0 + \delta L_B + \tilde{\delta}_c L + \tilde{\lambda}^2 C, \tag{3.94}$$

где $\tilde{\delta}_c L = \delta_c L + \gamma_0^2 C$ и $\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 - \gamma_0^2$, также удовлетворяет условиям теоремы 10. Более того, оператор $\tilde{L}(0) = L(\gamma_0)$ непрерывно обратим. Так как корневые функции и корневые вектора семейств $\tilde{L}(\tilde{\lambda})$ и $L(\lambda)$ имеют очевидные связи (см. формулу (3.94) выше), мы можем заменить семейство $L(\lambda)$ семейством $\tilde{L}(\tilde{\lambda})$. Следовательно, мы можем полагать, что оператор $L(0)$ непрерывно обратим.

Так как $0 < (2r+1)/2n \le 1/2$, из (3.93) следует, что существует $0 < \epsilon < \pi/2$ такое, что

$$\pi(2r+1)/2n - \Phi = 2\epsilon. \tag{3.95}$$

Тогда, если выполнены (2.65) и (3.93), то оператор

$$A(x, \partial, \lambda) = (F\nabla)^*(F\nabla) + \lambda^2 a_0^{(2)}(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы 6 на луче Γ при выполнении следующего условия:

$$-(\pi + \Phi_1 - a\epsilon)/2 < \varphi_\Gamma < (\pi - \Phi_2 - a\epsilon)/2, \tag{3.96}$$

где $0 < a < 1$ произвольное число. Действительно, в этом случае из (3.93) следует, что интервал $(-(\pi + \Phi_1 - a\epsilon), (\pi - \Phi_2 - a\epsilon))$ не пуст и

$$\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma \le \Phi_2 + \pi - \Phi_2 - a\epsilon \le \pi - a\epsilon < \pi,$$

$$\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma \ge \Phi_1 - \Phi_1 - \pi + a\epsilon \ge -\pi + a\epsilon > -\pi.$$

Для этих лучей мы имеем

$$\theta_1(\Gamma) = \min_{x\in\overline{D}} \cos\left(\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma\right) \ge \cos(\pi - a\,\epsilon) = -\cos a\,\epsilon > -1.$$

Таким образом, из (3.95) следует, что существует такое число $a \in (0,1)$, что справедливо неравенство

$$\|\delta_s L\|^2 + \left(\max\left(0, -\cos\left(\frac{a}{2}\,\frac{\pi(2r+1) - 2n\Phi}{4n}\right)\right)\right)^2 < 1.$$

Следовательно, согласно лемме 15, доказательство утверждений 1) и 2) теоремы можно свести к изучению свойств одного из операторов $L^{-1}(0)C$ и $L(0)C^{-1}$.

Если $\varphi_0 \in C^{0,1}(\overline{D})$, то умножение на функцию $e^{\sqrt{-1}\varphi_0} \in C^{0,1}(\overline{D})$ индуцирует ограниченный линейный оператор $\delta_C : H^+(D) \to H^+(D)$. Следовательно, оператор $CL^{-1}(0)$ может быть представлен в следующем виде:

$$CL^{-1}(0) = (\mathfrak{C}L_0^{-1})\, L_0\, \delta_C\, L^{-1}(0).$$

Из теоремы 9 следует, что оператор $\mathfrak{C}L_0^{-1}$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/(2r+1)+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$, то есть $CL^{-1}(0) \in \mathfrak{S}_{n/(2r+1)+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. [9, Гл. 2, §2]).

Далее, оценка (2.68) дает, что на лучах, удовлетворяющих двойному

неравенству
$$-(\pi + \Phi_1 - a\epsilon) < \arg(\lambda^2) < \pi - \Phi_2 - a\epsilon,$$

справедлива оценка

$$\|(L(0) - (-\lambda^2)C)u\|_- \geq c_\Gamma|\lambda|^2\|Cu\|_- \text{ для всех } u \in H^+(D)$$

и для всех достаточно больших λ^2 на каждом луче; здесь $c_\Gamma > 0$ это некоторая константа, не зависящая от u. Следовательно, лучи, удовлетворяющие неравенству
$$a\epsilon - \Phi_1 < \arg(\mu) < 2\pi - \Phi_2 - a\epsilon,$$

являются лучами медленного роста резольвенты замкнутого оператора $L(0)C^{-1}$, то есть

$$\|(L(0)C^{-1} - \mu)^{-1}w\|_- \leq c_\Gamma^{-1}|\mu|^{-1}\|w\|_- \text{ для всех } w \in H^-(D) \qquad (3.97)$$

для всех достаточно больших μ на каждом из лучей (см., например, [33]). Более того, из (3.95) и (3.97) следует, что угол между любыми двумя соседними лучами медленного роста меньше, чем $\pi(2r+1)/2n$ if $0 < a < 1$.

Таким образом, утверждение теоремы следует из стандартных рассуждений с использованием теоремы 3 (см., также, [33]).

□

Замечание 1. *На самом деле, из процедуры сведения в лемме 15 следует, что в следствие 3 и теореме 9 мы должны утверждать о многократной (двукратной) полноте корневых векторов, относящихся к операторному пучку $L(\lambda)$ (см. [11], [68], либо в других источниках).*

Ранее мы распространили теорему 6 на случай, когда аргумент функции $a_0^{(2)}(x)$ не является непрерывным, а λ принимает значения в некотором угле K комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (см. теорему 7). Используя теорему о полноте корневых функций для операторов высших порядков (см. теорему 3, а также, например, [9, теорему 6.1, Гл.5, §6]), мы можем доказать теорему о полноте корневых функций в случае "малых" возмущений. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы 7. Если*

$$\Phi = \sup_{z,w\in D} (\varphi_0(z) - \varphi_0(w)) < \frac{\pi}{n}, \tag{3.98}$$

то

1) корневые вектора $\{b_\nu\}$ *семейства* $\{L(\lambda)\}$ *полны в пространствах* $H^+(D)$*,* $L^2(D)$ *и* $H^-(D)$*;*

2) все характеристические значения $\{\lambda_\nu\}$ *(кроме их конечно числа) лежат в углах*

$$\left\{\left|\arg(\lambda) \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{4}\right| < \frac{\pi}{4n} + \varepsilon\right\}$$

для любого $\varepsilon > 0$*, где* $\Phi_1 = \inf\limits_{z\in D} \varphi_0(z)$*,* $\Phi_2 = \sup\limits_{z\in D} \varphi_0(z)$*, и, более того,* $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = +\infty$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 10, см. [76]. □

Глава 4

Применения и примеры

4.1 О некорректной задаче Коши для оператора Коши-Римана

Задача Коши для системы Коши-Римана (для голоморфных функций в классической версии) является давней проблемой, находящей свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т.д. (см. [38], [6], [65], и др.). На самом деле она является типичным примером некорректной по Адамару задачи для более общего класса эллиптических систем (см., например, [16], [17], [65]) или даже эллиптических дифференциальных комплексов ([41], [42]).

Как отмечалось еще в [24], метод регуляризации наиболее эффективен для изучения данной задачи. Книги [6] и [65] дают достаточно полное описание условий разрешимости задачи, а так же пути ее регуляризации. На практике хорошо зарекомендовал себя итерационный метод, описанный Козловым, Мазьей и Фоминым (см. [13]). Недавно был разработан новый подход (см., например, [63], [60], [56]), основанный на простом наблюдении, что решение задачи Коши для эллиптических уравнений можно свести к решению смешанных задач (как правило, некоэрцитивных) для эллиптических уравнений с параметром.

Текущий прогресс в теории некоэрцитивных задач типа Зарембы ([74], [62]) позволяет нам упростить метод [60] и получить новый критерий разрешимости задачи, а так же построить ее точные и приближенные решения.

А именно, пусть D – открытое связное множество с достаточно гладкой границей ∂D в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Возмущая задачу Коши для системы Коши-Римана $\overline{\partial} u = f$ в D с граничными данными на замкнутом множестве $S \subset \partial D$, мы получим семейство смешанных задач типа Зарембы для уравнения Лапласа, зависящее от малого параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ в граничном условии. Несмотря на то, что смешанные задачи содержат некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$, каждая из них имеет единственное решение в подходящем гильбертовом пространстве $H^+(D)$, непрерывно вложенном в пространство Лебега $L^2(\partial D)$ и в пространство Соболева-Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Соответствующее семейство решений $\{u_\varepsilon\}$ сходится слабо в $H^+(D)$ к решению задачи Коши (если оно существует). Также мы доказываем, что существование решения задачи Коши в $H^+(D)$ эквивалентно ограниченности семейства $\{u_\varepsilon\}$ в этом пространстве. Таким образом, мы получаем условия разрешимости для задачи Коши и эффективный метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

По сравнению с [60], мы рассматриваем несколько другие пространства соболевского типа. Как следствие, вместо слабо сходящейся последовательности $\{u_\varepsilon\}$ в $L^2(D)$ при $\varepsilon \to +0$, мы получаем последовательность, сходящуюся к решению по норме пространства $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$.

Далее будем считать, что область D ограничена, ее граница ∂D является липшицевой поверхностью в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для $u \in L^2(D)$ мы всегда будем понимать результат действия $\overline{\partial} u$ оператора Коши Римана $\overline{\partial}$ на u как распределение над D.

Рассмотрим некорректную задачу Коши для оператора Коши-Римана в области D с граничными данными на открытом (в относительной топологии ∂D) непустом множестве $S \subset \partial D$. Всюду ниже будем считать это предположение относительно множества S выполненным.

Задача 4. *Дано распределение f в D и распределение u_0 на S, найти распределение u в D, удовлетворяющее, в подходящем смысле,*

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \textit{в} \quad D, \\ u = u_0 & \textit{на} \quad S. \end{cases}$$

Мы сосредоточимся на наиболее интересном случае, когда $S \neq \partial D$.

Если распределение u_0 обладает достаточной регулярностью, то мы можем свести задачу 4 к случаю, когда граничные условия равны нулю. Например, если граница ∂S множества S кусочно-гладкая и $u_0 \in H^{1/2}(S)$, тогда мы можем найти $\tilde{u}_0 \in H^{1/2}(\partial D)$, совпадающую с u_0 на S, и затем использовать интеграл Пуассона P задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$P : H^{1/2}(\partial D) \to H^1(D),$$

где оператор P является линейным, ограниченным, и

$$\begin{cases} \Delta P u_0 = 0 & \text{в} \quad D, \\ t(P\tilde{u}_0) = \tilde{u}_0 & \text{на} \quad \partial D \end{cases}$$

(здесь $t : H^1(D) \to H^{1/2}(\partial D)$ это стандартный оператор следа).

Мы хотим контролировать поведение решений задачи 4 не только вблизи S, но и вблизи $\partial D \setminus S$. С этой целью введем следующие функциональные пространства.

Пусть $\varepsilon \geq 0$, рассмотрим эрмитову форму

$$(u, v)_{+,\varepsilon} = \varepsilon\, (u, v)_{L^2(\partial D)} + (\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}$$

на пространстве $C^\infty(\overline{D})$ (всех гладких функций в замыкании $\overline{D}$ области D). В силу классической формулы Коши для голоморфных функций, эта форма является скалярным произведением при любом $\varepsilon > 0$. Тогда функционал $\|u\|_{+,\varepsilon} = \sqrt{(u, u)_{+,\varepsilon}}$ является нормой для каждого $\varepsilon > 0$. Очевидно, нормы $\|u\|_{+,\varepsilon}$ и $\|u\|_{+,\delta}$ эквивалентны для любых положительных ε и δ. В частности,

$$\sqrt{\varepsilon}\, \|u\|_{+,1} \leq \|u\|_{+,\varepsilon} \leq \|u\|_{+,1} \tag{4.99}$$

для всех $u \in H^+(D)$ и $0 < \varepsilon \leq 1$. Обозначим через $H^+(D)$ пополнение пространства $C^\infty(\overline{D})$ по норме $\|\cdot\|_{+,\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$; из рассуждений выше следует, что пространство $H^+(D)$ не зависит от $\varepsilon > 0$ (для всех $\varepsilon > 0$ набор элементов пространств $H^+(D)$ будет общим). Заметим, что, по построению,

1) пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $L^2(\partial D)$, в частности, каждый элемент $u \in H^+(D)$ имеет корректно определенный след $t(u)$ на ∂D, а соответствующий оператор следа t непрерывно отображает $H^+(D)$

в $L^2(\partial D)$;

2) оператор $\overline{\partial}$ непрерывно отображает $H^+(D)$ в $L^2(D)$.

Другие важные свойства пространства $H^+(D)$ были описаны в предыдущих главах (см., также, [74], [62]).

Следствие 4. *Если D – ограниченная область с липшицевой границей, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Более того, если $\partial D \in C^2$, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^{1/2}(D)$.*

Доказательство. См. теорему 4 (а также [74, теорема 1], [62, теорема 2.5]). □

Заметим, что вложение точное, т.е. пространство $H^+(D)$ не может быть непрерывно вложено в $H^s(D)$ для любого $s > 1/2$ (см. пример 2 ниже).

Эти результаты позволяют нам рассмотреть следующую версию задачи Коши для оператора Коши-Римана.

Задача 5. *По заданной функции $f \in L^2(D)$, найти $u \in H^+(D)$, удовлетворяющую*

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \text{в} \quad D, \\ t(u) = 0 & \text{на} \quad S. \end{cases}$$

Хорошо известно, что задача 5 является некорректной (по Адамару) и имеет не более одного решения (см., например, [7], [29], [61], [57, теорема 2.8]).

Пусть теперь дано непустое множество $S \subset \partial D$. Обозначим через $C^\infty(\overline{D}, S)$ подмножество $C^\infty(\overline{D})$ элементы которого равны нулю в некоторой (относительной) окрестности замыкания $\overline{S}$ множества S в $\overline{D}$. В частности, $C^\infty(\overline{D}, \partial D)$ совпадает с пространством гладких функций с компактным носителем $C_0^\infty(D)$.

Обозначим также через $H^+(D, S)$ множество, состоящее из всех $u \in H^+(D)$, удовлетворяющих условию $t(u) = 0$ на S. Очевидно, что пространство $H^+(D, S)$ является замкнутым подпространством $H^+(D)$.

Теперь задача 5 сводится к исследованию инъективного ограниченного оператора

$$\overline{\partial} : H^+(D, S) \to L^2(D). \tag{4.100}$$

Опишем основные свойства области определения и образа этого оператора.

Используя неравенство Гординга, мы видим, что для $S = \partial D$ пространство $H^+(D, \partial D)$ совпадает с $H^1_0(D)$, т.е. с замкнутым подпространством пространства Соболева $H^1(D)$, состоящего из всех $u \in H^1(D)$ удовлетворяющих условию $t(u) = 0$ на ∂D.

Лемма 16. *Для всех $u \in H^+(D, S)$ мы имеем $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $u \in H^+(D, S) \subset H^+(D)$. Так как оператор Коши-Римана $\overline{\partial}$ эллиптический и $\overline{\partial} u \in L^2(D)$, то мы заключаем, что $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(D)$.

Возьмем область $G \subset D$ такую, что $\overline{G} \cap \overline{D} = S_1 \subset S$ и функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{D})$ с компактным носителем в $G \cup S_1$. Тогда

$$\overline{\partial}(\varphi u) = (\overline{\partial} u)\varphi + (\overline{\partial}\varphi)u \in L^2(D)$$

и $t(\varphi u) = 0$ на ∂D.

Обозначим через $H^{-1}(D)$ двойственное пространство к $H^1(D, \partial D)$ относительно спаривания, задаваемого скалярным произведением пространства $L^2(D)$. Тогда распределение $F = \overline{\partial}^* \overline{\partial}(\varphi u)$ принадлежит $H^{-1}(D)$, так как

$$|(\overline{\partial}(\varphi u), \overline{\partial} v)_{L^2(D)}| = |((\overline{\partial} u)\varphi + (\overline{\partial}\varphi)u, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}| \leq c(u, \varphi)\|v\|_{H^1(D)}$$

с некоторой константой $c(u, \varphi)$, не зависящей от $v \in H^1(D, \partial D)$.

В частности,

$$(\overline{\partial}(\varphi u), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = \langle F, v\rangle \text{ для всех } v \in H^1(D, \partial D),$$

где $\langle F, v\rangle$ обозначает действие распределения F на тестовую функцию v. Это означает, что функция φu является единственным решением задачи Дирихле для оператора Лапласа $\Delta = -\overline{\partial}^* \overline{\partial}$ с данными $F \in H^{-1}(D)$ и граничными данными $t(\varphi u) = 0$ на ∂D (см., например, [21]). Следовательно, в силу произвольности области G и функции φ (обладающими описанными выше свойствами), $\varphi u \in H^1(D)$ и $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)$, что и следовало доказать. $\square$

Как мы уже отмечали, $H^+(D,\partial D) = H^1_0(D)$. В частности, $H^+(D,\partial D)$ есть замыкание пространства гладких функций с компактным носителем $C^\infty_0(D)$. Теперь мы хотим подобным же образом описать пространство $H^+(D,S)$.

Теорема 12. *Пусть $\partial D \setminus S$ имеет непустую внутренность (в относительной топологии) на ∂D. Если $\partial D \in C^\infty$, то $H^+(D,S)$ есть замыкание $C^\infty(\overline{D},S)$ в пространстве $H^+(D)$.*

Доказательство. По определению, замыкание H пространства $C^\infty(\overline{D},S)$ в $H^+(D)$ есть замкнутое подпространство $H^+(D,S)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что ортогональное дополнение $H^\perp$ пространства H в $H^+(D,S)$ тривиально.

С этой целью зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $u \in H^+(D,S)$, удовлетворяющее $(u,v)_{+,\varepsilon} = 0$ для всех $v \in C^\infty(\overline{D},S)$. В силу того, что $C^\infty(\overline{D},\partial D) \subset C^\infty(\overline{D},S)$, мы имеем

$$(\overline{\partial}u, \overline{\partial}v)_{L^2(D)} = 0 \text{ для всех } v \in C^\infty(\overline{D},\partial D), \qquad (4.101)$$

т.е. $-\overline{\partial}^*(\overline{\partial}u) = 0$ в D в смысле распределений. Так как оператор $\overline{\partial}^*$ эллиптический, то решения для этого уравнения являются гладкими функциями над D; действительно, функция $\overline{\partial}u$ является антиголоморфной в D функцией класса $L^2(D)$ (т.е. $\overline{\overline{\partial}u}$ является голоморфной).

Пусть ρ обозначает определяющую функцию области D:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < 0\}.$$

Так как $\partial D \in C^\infty$, мы можем выбрать $\rho \in C^\infty(U)$ для окрестности U границы ∂D с $|\nabla\rho| \neq 0$ на ∂D такое, что векторное поле $\nu = \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$ является векторным полем единичных нормалей к ∂D. При достаточно малых $\delta > 0$ рассмотрим области

$$D_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < -\delta\}.$$

Ясно, что $D_\delta \Subset D$ и $\rho_\delta = \rho + \delta$ является определяющей функцией области D_δ с $\nabla\rho = \nabla\rho_\delta$, а $\nu_\delta = \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$ есть векторное поле единичных нормалей к ∂D_δ и ∂D. Тогда голоморфная функция $g = \overline{\overline{\partial}u}$ имеет слабое граничное значение $g_0 \in \mathcal{D}'(\partial D)$ на ∂D в том смысле, что

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta} g(\zeta)v(\zeta)ds_\delta(\zeta) = \langle g_0, v\rangle \text{ для всех } v\in C^\infty(\overline{D}),$$

смотрите [29, следствие 2.3] либо [57, теорема 4.4] (здесь $\mathcal{D}'(\partial D)$ - это пространство распределений на ∂D, а $\langle g_0, v\rangle$ обозначает действие распределения g_0 на тестовую функцию v).

Пользуясь свойствами интеграла Пуассона P и тем фактом, что $|\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2| = 1$ на ∂D, мы заключаем, что функция $w = P(v/(\nu_1+\sqrt{-1}\nu_2))$ принадлежит $C^\infty(\overline{D}, S)$ для каждого $v\in C^\infty(\overline{D}, S)$. Тогда из формулы интегрирования по частям и (4.101), получаем

$$0 = (\overline{\partial}w, \overline{\partial}u)_{L^2(D)} = (\overline{\partial}w, \overline{g})_{L^2(D)} = \lim_{\delta\to+0}(\overline{\partial}w, \overline{g})_{L^2(D_\delta)} = \tag{4.102}$$

$$-\sqrt{-1}\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta} g(\zeta)w(\zeta)d\zeta =$$

$$-\sqrt{-1}\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta} g(\zeta)(\nu_{\delta,1}+\sqrt{-1}\nu_{\delta,2})(\zeta)w(\zeta)ds_\delta(\zeta) =$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta} g(\zeta)v(\zeta)ds_\delta(\zeta) = \langle g_0, v(\zeta)\rangle \text{ для всех } v\in C^\infty(\overline{D}, S),$$

где $\nu_{\delta,j}$ – это компоненты вектора нормали ν_δ. Так как для любой функции $w\in C^\infty(\overline{D}, S)$ ее сужение $w_{|\partial D}$ на ∂D имеет компактный носитель в $\partial D\setminus S$, мы видим, что g_0 равняется нулю на $\partial D\setminus S$. Следовательно, g исчезает на $\partial D\setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Теперь, в силу того, что g голоморфна (т.е. является решением эллиптического оператора $\overline{\partial}$), из теоремы единственности для задачи Коши для эллиптических операторов [57, теорема 2.8] следует, что g равняется тождественно нулю в D.

Таким образом, мы заключаем, что функция $g = \overline{\overline{\partial}u} = 0$ в D, т.е. функция $u\in L^2(D)$ голоморфна в D. По предположению, она исчезает на непустом относительно открытом множестве $S\subset\partial D$. Наконец, так как оператор первого порядка $\overline{\partial}$ эллиптичен, из [57, теорема 2.8] следует, что u равняется тождественно нулю в D. □

Лемма 17. *Пусть $\partial D\setminus S$ имеет непустую внутренность на ∂D. Если $\partial D\in C^\infty$, то образ оператора (4.100) плотен в $L^2(D)$.*

Доказательство. Пусть $g \in L^2(D)$ удовлетворяет

$$(g, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = 0 \text{ для всех } v \in H^+(D, S).$$

Аргументируя аналогично доказательству теоремы 12, мы заключаем, что $\overline{\partial}^* g = 0$ в D и $g = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Так как g антиголоморфна (т.е. является решением эллиптического оператора $\overline{\partial}^*$) из [57, теорема 2.8] следует, что g равняется тождественно нулю в D. □

Таким образом, мы описали замыкание образа отображения (4.100). Более сложной задачей является описание самого образа отображения (4.100). Следующая лемма делает первый шаг в данном направлении.

Для распределения f, определенного около ∂D, положим

$$\nu(f) = (\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2}) f,$$

а для распределения u, определенного около ∂D, положим

$$\overline{\partial}_\nu u = (\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2}) \overline{\partial} u.$$

На самом деле, $\overline{\partial}_\nu u$ – это так называемая комплексная нормальная к ∂D_δ (и к ∂D) производная функции u.

Лемма 18. *Пусть $\partial D \in C^\infty$. Если $f \in L^2(D)$, то функция $u \in H^+(D, S)$ является решением задачи 5 в том и только в том случае, когда*

$$(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} \tag{4.103}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$.

Доказательство. Если задача 5 разрешима и u одно из ее решений, то (4.103) очевидно выполнено.

Обратно, если (4.103) выполнено для любого элемента $u \in H^+(D, S)$, то $\overline{\partial}^* (\overline{\partial} u - f) = 0$ в D, так как пространство $H^+(D, S)$ содержит все гладкие функции с компактным носителем в D. В частности, функция $\overline{(\overline{\partial} u - f)}$

голоморфна в D. Интегрируя как в (4.102), мы получаем

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta}\overline{(\overline{\partial}u-f)(\zeta)}v(\zeta)ds_\delta(\zeta) = -\sqrt{-1}\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta}\overline{(\overline{\partial}u-f)(\zeta)}w(\zeta)d\zeta = \tag{4.104}$$

$$(w,(\overline{\partial}^*(\overline{\partial}u-f)))_{L^2(D)} - (\overline{\partial}w,\overline{\partial}u-f)_{L^2(D)} =$$

$$-(\overline{\partial}w,\overline{\partial}u-f)_{L^2(D)} = 0$$

для всех $v\in C^\infty(\overline{D},S)$, так как $w\in C^\infty(\overline{D},S)$. Следовательно, как и в доказательстве теоремы 12, мы видим, что $\overline{\partial}u-f=0$ на $\partial D\setminus S$ в смысле слабых граничных значений.

Наконец, так как $(\overline{\partial}u-f)$ является антиголоморфной (т.е. решением эллиптического оператора $\overline{\partial}^*$), то из [57, теорема 2.8] следует, что $(\overline{\partial}u-f)$ равняется тождественно нулю в D. □

Замечание 2. *Согласно [29, следствие 2.3], слабые граничные значения голоморфных (антиголоморфных) функций класса $L^2(D)$ в области D принадлежат пространству Соболева $H^{-1/2}(\partial D)$ на компактном множестве ∂D. Это означает, что эти следы имеют конечный порядок сингулярности на ∂D. Следовательно, все вышеперечисленные результаты действительны для областей с конечным (вероятно, достаточно высоким) порядком гладкости границы.*

В заключении этого параграфа поясним значение (4.103). Это равенство означает, что решение $u\in H^+(D,S)$ задачи Коши $\overline{\partial}u=f$ на самом деле является решением смешанной задачи типа Зарембы (см., например, [69]):

$$\begin{cases} -\Delta u &= \overline{\partial}^* f \quad \text{в} \quad D, \\ t(u) &= 0 \quad \text{на} \quad S, \\ \overline{\partial}_\nu u &= \nu(f) \quad \text{на} \quad \partial D\setminus S. \end{cases} \tag{4.105}$$

Действительно, из доказательства леммы 18 вытекает, что

$$\overline{\partial}^*\overline{\partial}u = -\Delta u = \overline{\partial}^* f \text{ в } D$$

в пространстве распределений и $\nu(\overline{\partial}u-f)=0$ на $\partial D\setminus S$ в смысле слабых граничных значений. В частности, если вектор $\nu(f)$ корректно определен на $\partial D\setminus S$, то и вектор $\overline{\partial}_\nu u$ так же корректно определен на $\partial D\setminus S$.

Конечно, смешанная задача (4.105), рассмотренная в подходящих пространствах, дает ничто иное, как (4.103). Ниже мы получим условия разрешимости задачи 5.

Последнее наблюдение предыдущего параграфа наталкивает нас на мысль о возмущении задачи 5 с целью получения смешанной задачи типа Зарембы (4.105).

С учетом леммы 18, мы рассмотрим следующую возмущенную задачу Коши:

Задача 6. *Зафиксируем* $\varepsilon \in (0, 1]$. *По заданной функции* $f \in L^2(D)$, *найти элемент* $u_\varepsilon \in H^+(D, S)$, *удовлетворяющий*

$$(\overline{\partial} u_\varepsilon, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\, (u_\varepsilon, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} \tag{4.106}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$.

Заметим, что уравнение (4.106) приводит к возмущению смешанной задачи (4.105). Более точно,

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon &= \overline{\partial}^* f \quad \text{в} \quad D; \\ t(u_\varepsilon) &= 0 \quad \text{на} \quad S, \\ \overline{\partial}_\nu u_\varepsilon + \varepsilon\, t(u_\varepsilon) &= \nu(f) \quad \text{на} \quad \partial D \setminus S. \end{cases} \tag{4.107}$$

Так как пространство $H^+(D, S)$ содержит все гладкие функции с компактным носителем в D, (4.106) означает, что $-\Delta u_\varepsilon = \overline{\partial}^* f$ в D в смысле распределений. Граничное условие $t(u_\varepsilon) = 0$ на S следует из определения пространства $H^+(D, S)$. Наконец, равенство $\nu(\overline{\partial} u_\varepsilon) + \varepsilon t(u_\varepsilon) = \nu(f)$ выполнено в том смысле, что $\nu(\overline{\partial} u_\varepsilon - f) + \varepsilon\, t(u_\varepsilon) = 0$ на $\partial D \setminus S$, так как

$$\overline{\partial}^* (\overline{\partial} u_\varepsilon - f) = 0 \in L^2(D)$$

в смысле распределений в D, $\overline{(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)}$ голоморфна в D и, интегрируя по частям как в (4.104) с использованием (4.106), мы получаем

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)(\zeta)}\, v(\zeta) ds_\delta(\zeta) = -\sqrt{-1} \lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)(\zeta)}\, w(\zeta) d\zeta =$$

$$(\overline{\partial}w, \overline{\partial}u_\varepsilon - f)_{L^2(D)} = -\varepsilon(w, t(u_\varepsilon))_{L^2(\partial D\setminus S)} = -\varepsilon\left(v, \frac{t(u_\varepsilon)}{\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2}\right)_{L^2(\partial D\setminus S)},$$

для всех $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$, т.е. $\overline{(\overline{\partial}u_\varepsilon - f)}$ совпадает с $-\varepsilon\, t(\overline{u_\varepsilon})/(\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2)$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Следовательно, $\nu(\overline{\partial}u_\varepsilon - f) + \varepsilon t(u_\varepsilon) = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Если сужение $\nu(f)$ на $\partial D \setminus S$ имеет смысл, то сужение $\nu(\overline{\partial}u_\varepsilon - f)$ так же корректно определено, так как $t(u_\varepsilon) \in L^2(\partial D)$.

Ясно, что смешанная задача (4.107), рассмотренная в подходящих пространствах, дает ничто иное, как (4.106).

На самом деле (4.105) и (4.107) являются смешанными задачами с граничными условиями робеновского типа. Это аналоги так называемой задачи Зарембы для оператора Лапласа (см. [69]). В общем случае смешанные задачи (4.105) и (4.107) имеют некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$ (см. [60], [62]). Следовательно, они не могут быть корректными в пространствах Соболева, в том числе весовых, с показателем гладкости 1 (см. [46]). Принципиальная разница между задачами 5 и 6 в том, что последняя корректна в $H^+(D, S)$.

Лемма 19. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in L^2(D)$ существует единственное решение $u_\varepsilon(f) \in H^+(D, S)$ задачи 6. Более того, оно удовлетворяет*

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \le \|f\|_{L^2(D)}.$$

Доказательство. Действительно, как мы видели выше, пространство $H^+(D, S)$, наделенное скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{+,\varepsilon}$, является гильбертовым. Из неравенства Шварца следует, что

$$\left|(f, \overline{\partial}v)_{L^2(D)}\right| \le \|f\|_{L^2(D)}\|\overline{\partial}v\|_{L^2(D)} \le \|f\|_{L^2(D)}\|v\|_{+,\varepsilon}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$. Следовательно, отображение

$$v \mapsto (f, \overline{\partial}v)_{L^2(D)}$$

определяет непрерывный линейный функционал $\mathcal{F}_f$ на $H^+(D, S)$, чья норма мажорируется следующим образом: $\|\mathcal{F}_f\| \le \|f\|_{L^2(D)}$.

В силу теоремы Рисса мы заключаем, что существует единственный элемент $u_\varepsilon(f) \in H^+(D,S)$, удовлетворяющий

$$\mathcal{F}_f(v) = (u_\varepsilon(f), v)_{+,\varepsilon}$$

для любого $v \in H^+(D,S)$. Ясно, что $u_\varepsilon(f)$ является решением задачи (4.106). Наконец, по теореме Рисса мы имеем

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \le \|f\|_{L^2(D)},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Уравнения (4.107) показывают, что лемма 19 дает информацию о разрешимости смешанной задачи для оператора Лапласа Δ с очень специальными данными на D, S и $\partial D \setminus S$. Выясним, какие теоремы разрешимости могут быть получены для произвольных данных. С этой целью, обозначим через $H^-(D,S)$ двойственное к $H^+(D,S)$ пространство относительно спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$, индуцированного скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{L^2(D)}$ (см. лемму 2.50, а также [74], [62]). На самом деле это гильбертово пространство, изоморфное нормированному пространству, построенному как пополнение $H^+(D,S)$ по любой из норм

$$\|g\|_{-,\varepsilon} = \sup_{\substack{v \in H^+(D,S)\\ v \ne 0}} \frac{|(g,v)_{L^2(D)}|}{\|v\|_{+,\varepsilon}},\ \varepsilon > 0.$$

Задача 7. *Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1]$. Для заданного $g \in H^-(D,S)$ найти элемент $w_\varepsilon(g) \in H^+(D,S)$, удовлетворяющий*

$$(\overline{\partial} w_\varepsilon(g), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\,(w_\varepsilon(g), v)_{L^2(\partial D\setminus S)} = \langle g, v\rangle \tag{4.108}$$

для любого $v \in H^+(D,S)$.

Лемма 20. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in H^-(D,S)$ существует единственное решение $w_\varepsilon \in H^+(D,S)$ задачи 7. Более того, оно удовлетворяет*

$$\|w_\varepsilon(g)\|_{+,\varepsilon} \le \|g\|_{H^-(D,S)}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 19 (см. также лемму

7). $\square$

На самом деле, лемма 20 эквивалентна следующему: задача 7 индуцирует непрерывно обратимый линейный оператор $L_\varepsilon : H^+(D,S) \to H^-(D,S)$ с $\|L_\varepsilon\| = \|L_\varepsilon^{-1}\| = 1$.

Но даже в этом случае мы не можем гарантировать того, что $w_\varepsilon \in H^s(D)$ при любом $s > 1/2$ без введения дополнительных ограничений на g. Эта ситуация является типичной для смешанных задач, см. [32], [46].

Однако, следствие 4, вместе с теоремами вложения Реллиха-Кондрашова и теоремой Гильберта-Шмидта, дают нам следующее преимущество: спектральную теорему, относящуюся к задаче 7.

Введем следующее скалярное произведение

$$(g, \tilde{g})_{-,\varepsilon} = \langle g, L_\varepsilon^{-1} \tilde{g} \rangle$$

в пространстве $H^-(D,S)$; данное скалярное произведение определяет норму, которая равна $\|\cdot\|_{-,\varepsilon}$.

Лемма 21. *Для любого $\varepsilon \in (0,1]$ существуют положительные числа $\{\lambda_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и функции $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^+(D,S)$ такие, что*

$$(\overline{\partial} b_k^{(\varepsilon)}, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\, (b_k^{(\varepsilon)}, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} = (\lambda_k^{(\varepsilon)})^{-1} (b_k^{(\varepsilon)}, v)_{L^2(D)} \tag{4.109}$$

для любого $v \in H^+(D,S)$. Система $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ является ортонормированным базисом в $H^+(D,S)$ (по норме $(\cdot,\cdot)_{+,\varepsilon}$), также это ортогональный базис в $L^2(D)$ и $H^-(D,S)$ (по норме $(\cdot,\cdot)_{-,\varepsilon}$). Более точно, $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ является системой собственных векторов компактных самосопряженных операторов

$$L_\varepsilon^{-1} \iota' \iota : H^+(D,S) \to H^+(D,S),\ \iota' \iota L_\varepsilon^{-1} : H^-(D,S) \to H^-(D,S),$$

$$\iota L_\varepsilon^{-1} \iota' : L^2(D) \to L^2(D),$$

соответствующих (положительным) собственным значениям $\{\lambda_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, где

$$\iota : H^+(D,S) \to L^2(D),\ \iota' : L^2(D) \to H^-(D,S)$$

суть операторы естественного вложения.

Доказательство. См. лемму 13. □

По построению, каждая функция $b_k^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет некоторому уравнению Гельмгольца в области D; в частности, каждая функция $b_k^{(\varepsilon)}$ является вещественно аналитической в D.

Кроме того, мы можем получить формулу для решения задачи 7. С этой целью, положим

$$\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^{(\varepsilon)}(z)\overline{b_k^{(\varepsilon)}(\zeta)}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{L^2(D)}}.$$

Следствие 5. *Для каждого $g \in H^-(D,S)$ решение $w_\varepsilon(g) \in H^+(D,S)$ задачи 7 задается формулой*

$$w_\varepsilon(g)(z) = \lim_{N\to\infty} \langle g, \mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\cdot)\rangle,\ z \in D.$$

Доказательство. Из леммы 21 следует, что для всех $u \in H^+(D,S)$ и $g \in H^-(D,S)$ мы имеем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} b_k^{(\varepsilon)}, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{-,\varepsilon}} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}.$$

С другой стороны, лемма 21 означает, что

$$L_\varepsilon b_k^{(\varepsilon)} = \lambda_k^{(\varepsilon)} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)} \text{ and } L_\varepsilon u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} \lambda_k^{(\varepsilon)} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}.$$

Теперь, используя ортогональность системы $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, мы видим, что

$$(w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} = \frac{(g, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{-,\varepsilon}}.$$

Наконец, по определению,

$$(g, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon} = \langle g, L_\varepsilon^{-1} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}\rangle = \lambda_k^{(\varepsilon)} \langle g, b_k^{(\varepsilon)}\rangle,$$

$$\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{-,\varepsilon} = (\iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon} = \langle \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}, L_\varepsilon^{-1} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}\rangle =$$

$$\lambda_k^{(\varepsilon)} \langle \iota' \iota b_k^{(\varepsilon)}, b_k^{(\varepsilon)} \rangle = \lambda_k^{(\varepsilon)} \| b_k^{(\varepsilon)} \|^2_{L^2(D)}$$

и, следовательно,

$$(w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} = \frac{\langle g, b_k^{(\varepsilon)} \rangle}{\| b_k^{(\varepsilon)} \|^2_{L^2(D)}}.$$

Поэтому

$$w_\varepsilon(g)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} b_k^{(\varepsilon)}(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{\langle g, b_k^{(\varepsilon)} \rangle}{\| b_k^{(\varepsilon)} \|^2_{L^2(D)}} b_k^{(\varepsilon)}(z),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 6. *Для каждого $f \in L^2(D)$ решение $u_\varepsilon \in H^+(D,S)$ задачи 6 задается формулой*

$$u_\varepsilon(f)(z) = \lim_{N\to+\infty} (f, \overline{\partial} \mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\cdot))_{L^2(D)}, \ z \in D.$$

Доказательство. Вытекает из следствия 5, с учетом следующей связи между данными задач 6 и 7:

$$\langle g, v \rangle = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)},$$

(см. доказательство леммы 20). $\square$

Обсудим теперь очень важный вопрос о том, как найти собственные вектора задачи Зарембы, а, следовательно, и решение задачи 5.

Пусть $\mathcal{D}$ - это единичный диск в $\mathbb{C}$. Построение системы $\{b_k^{(\varepsilon)}\}$ для $D = \mathcal{D}$ можно выполнить с использованием системы функций Бесселя

$$\mathcal{J}_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}} \frac{z^{2k+p}}{k!\,(k+p)!}, \quad \mathcal{J}_{-p}(z) = (-1)^p \mathcal{J}_p(z), \, z \in \mathbb{C}, \, p \in \mathbb{Z}_+.$$

А именно, хорошо известно, что любая собственная функция задачи 7 в диске $\mathcal{D}$, отвечающая собственному значению $\lambda_k^{(\varepsilon)}$, имеет следующую форму

$$b_k^{(\varepsilon)}(z) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (z/|z|)^q \, \mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda_k^{(\varepsilon)}}) \, d_q^{(\varepsilon)}(S), \qquad (4.110)$$

с некоторыми коэффициентами $\{d_q^{(\varepsilon)}(S)\}_{q\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Если $S=\emptyset$ или $S=\partial D$, тогда сумма состоит только из одного ненулевого слагаемого; если $S\neq\partial\mathcal{D}$ и $S\neq\emptyset$, тогда число ненулевых коэффициентов $d_q^{(\varepsilon)}(S)$ суммы не может быть конечным (см., например, [25, дополнение. II, с. 1, §2]. Собственное значение $\lambda_k^{(\varepsilon)}$ и коэффициенты $\{d_q^{(\varepsilon)}(S)\}_{q\in\mathbb{Z}}$ могут быть найдены из отношения $b_k^{(\varepsilon)}=0$ на S и $(\overline{\partial}_\nu+\varepsilon)\,b_k^{(\varepsilon)}=0$ на $\partial D\setminus S$ (см. [52]).

Неравенства (4.99) и лемма 19 дают нам следующую грубую оценку для семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$:

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon}\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|f\|_{L^2(D)},\ \varepsilon\in(0,1].$$

Таким образом, это семейство может быть неограниченным при $\varepsilon\to+0$. Выясним, как поведение семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon>0}$ влияет на разрешимость задачи 5.

Теорема 13. *Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует $u\in H^+(D,S)$, удовлетворяющее (4.103).*

Доказательство. Сначала мы докажем следующую лемму.

Лемма 22. *Пусть существует такое множество $A\subset(0,1]$, что*

1) *нуль является предельной точкой A;*

2) *семейство $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta\in A}$ ограничено.*

Тогда существует $u\in H^+(D,S)$, удовлетворяющее (4.103).

Доказательство. Предположим, что нуль является предельной точкой множества A и семейство $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta\in A}$ ограничено. Согласно (4.106), мы имеем

$$(\overline{\partial}u_\delta(f),\overline{\partial}v)_{L^2(D)}+\delta\,(u_\delta(f),v)_{L^2(D)}=(f,\overline{\partial}v)_{L^2(D)}$$

для всех $v\in H^+(D,S)$. Переходя к пределу при $A\ni\delta\to+0$ в последнем равенстве и пользуясь тем фактом, что $\{u_\delta(f)\}_{\delta\in A}$ ограничено, мы получаем

$$\lim_{\delta\to+0}(\overline{\partial}u_\delta(f),\overline{\partial}v)_{L^2(D)}=(f,\overline{\partial}v)_{L^2(D)}\tag{4.111}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$.

Хорошо известно, что любое ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_{\delta_j}(f)\} \subset H^+(D,S)$, слабо сходящаяся в этом пространстве к элементу $u \in H^+(D,S)$. Здесь $\{\delta_j\}$ стремится к 0 при $j \to \infty$.

Покажем теперь, что $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо к u в $H^s(D)$ при $s < 1/2$ и $j \to \infty$.

Из следствия 4 следует, что вложение $i_s : H^+(D,S) \to H^s(D)$ непрерывно для любого $s < 1/2$. Следовательно, сопряженный оператор $i_s^\star : H^s(D) \to H^+(D,S)$ также ограничен, а

$$\lim_{j\to\infty} (i_s u_{\delta_j}(f), v)_{H^s(D)} = \lim_{j\to\infty} (u_{\delta_j}(f), i_s^\star v)_{H^+(D,S)} = (u, i_s^\star v)_{H^+(D,S)}$$

для всех $v \in H^s(D)$. Это в точности означает, что $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо в $H^s(D)$.

Обозначим через $\overline{\partial}^\star : L^2(D) \to H^+(D,S)$ сопряженный к ограниченному линейному оператору $\overline{\partial} : H^+(D,S) \to L^2(D)$. Простые вычисления показывают, что

$$\lim_{A\ni\delta\to+0} (\overline{\partial} u_\delta(f), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = \lim_{A\ni\delta\to+0} (u_\delta(f), \overline{\partial}^\star \overline{\partial} v)_{H^+(D,S)} = \tag{4.112}$$

$$(u(f), \overline{\partial}^\star \overline{\partial} v)_{H^+(D,S)} = (\overline{\partial} u(f), \overline{\partial} v)_{L^2(D)}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$. Комбинируя (4.111) и (4.112) мы видим, что (4.103) выполняется для функции $u \in H^+(D,S)$. $\square$

Мы получим более сильное утверждение, чем теорема 13, если докажем следующую лемму.

Лемма 23. *Если существует функция $u \in H^+(D,S)$, удовлетворяющая (4.103), то семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограничено и*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|\overline{\partial}(u_\varepsilon(f) - u)\|_{L^2(D)} = 0.$$

Более того, $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо к $u \in H^+(D,S)$ при $\varepsilon \to +0$ и сходится к решению u в $H^s(D)$ для всех $s < 1/2$.

Доказательство. Пусть существует $u \in H^+(D,S)$, удовлетворяющее (4.103). Обозначим $R_\varepsilon = u_\varepsilon(f) - u$, тогда из (4.103) и (4.106) следует, что

$$(\overline{\partial} R_\varepsilon, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\,(R_\varepsilon, v)_{L^2(\partial D)} = -\varepsilon\,(u,v)_{L^2(\partial D)} \tag{4.113}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$. Так как

$$|-\varepsilon\,(u,v)_{L^2(\partial D)}| \le \varepsilon \|u\|_{L^2(\partial D)} \|v\|_{L^2(\partial D)} \le \sqrt{\varepsilon}\|u\|_{L^2(\partial D)}\|v\|_{+\varepsilon},$$

то отображение $v \mapsto -\varepsilon\,(u,v)_{L^2(\partial D)}$ определяет непрерывный линейный функционал $g_\varepsilon(u)$ в пространстве $H^+(D,S)$ и

$$\|g_\varepsilon(u)\| \le \sqrt{\varepsilon}\|u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Таким образом, (4.113) означает, что $R_\varepsilon = w_\varepsilon(g_\varepsilon(u))$ есть решение задачи 7 с данными $g = g_\varepsilon(u)$.

Согласно (4.99) и лемме 20, мы имеем

$$\|R_\varepsilon\|_{+,1} \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|R_\varepsilon\|_{+,\varepsilon} \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_{L^2(\partial D)} = \|u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Следовательно, семейство $\{\|R_\varepsilon\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$, а также семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$, ограничены. Из (4.113) следует

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|\overline{\partial}(u_\varepsilon(f) - u)\|^2_{L^2(D)} = \lim_{\varepsilon\to+0} \|\overline{\partial} R_\varepsilon\|^2_{L^2(D)} =$$

$$-\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \left(\|R_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial D)} + (u, R_\varepsilon)_{L^2(\partial D)} \right) = 0.$$

Покажем теперь, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо к u в $H^+(D,S)$ при $\varepsilon \to +0$. Доказательство будем строить от противного. Действительно, если $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ не сходится слабо к u в $H^+(D,S)$, то существуют $v \in H^+(D,S)$, $\gamma > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_j\}$, стремящаяся к $+0$ при $j \to \infty$, такие, что

$$|(u_{\varepsilon_j} - u, v)_{+,1}| \ge \gamma \tag{4.114}$$

для любого $j \in \mathbb{N}$. Но последовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $H^+(D,S)$, а значит существует подпоследовательность, сходящаяся слабо в $H^+(D,S)$. Чтобы не усложнять обозначениями, мы снова обозначим ее как $\{u_{\varepsilon_j}\}$. Как мы уже видели в доказательстве леммы 22, слабый предел $\{u_{\varepsilon_j}\}$ есть u. Это противоречит (4.114), а следовательно, первая часть леммы доказана.

Наконец, согласно следствию 4, пространство $H^+(D,S)$ непрерывно вложено в пространство Соболева-Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Хорошо известно, что компактные операторы в гильбертовом пространстве переводят слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся. Таким образом, из теоремы Реллиха-Кондрашова о компактных вложениях для пространств Соболева следует, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $H^s(D)$ для любого $s < 1/2$ при $\varepsilon \to +0$. □

Доказательство теоремы 13 немедленно следует из лемм 22 и 23. □

Следствие 7. *Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограничено тогда и только тогда, когда задача 5 разрешима. Более того, в этом случае*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|\overline{\partial} u_\varepsilon(f) - f\|_{L^2(D)} = 0$$

и $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо в $H^+(D,S)$, при $\varepsilon \to +0$, к решению $u \in H^+(D,S)$ задачи 5. Кроме того, оно сходится к u в пространстве $H^s(D)$ для любого $s < 1/2$ а также и в $H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)$.

Доказательство. Почти все эти утверждения следуют из теоремы 13 и лемм 23 и 18. Нам остается только показать, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в топологии $H^1_{\mathrm{loc}}(D\cup S)$, если $u \in H^+(D,S)$ является решением задачи 5. Действительно, мы замечаем, что $\{u_\varepsilon(f) - u\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограничена в $H^+(D)$ в силу леммы 23, и

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to+0} \|\overline{\partial}(u_\varepsilon(f) - u)\|_{L^2(D)} &= 0, \\ t(u_\varepsilon(f) - u) &= 0 \end{aligned}$$

на S для любого $\varepsilon \in (0,1]$. Тогда, применяя [66, теорему 7.2.6], мы заключаем, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $H^1_{\mathrm{loc}}(D\cup S)$. □

Наконец, выпишем формулу карлемановского типа для решений задачи Коши 5.

Следствие 8. *Для любой функции $u \in H^+(D,S)$ мы имеем:*

$$(u,v)_{+,1} = \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{N\to+\infty}((\overline{\partial}u, \overline{\partial}\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\cdot))_{L^2(D)}, v(z))_{L^2(D)},$$

для всех $v \in H^+(D,S)$.

4.2 Смешанные задачи в шаре

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим следующий частный случай задачи 1 в области D, когда $S=\emptyset$, $a_j=0$, a_0 является константой, а матрица $\mathfrak{A}(x)$ имеет вид

$$\mathfrak{A}(x) = (a_{ij}(x))_{\substack{i=1,\dots,2n\\ j=1,\dots,2n}} = \begin{pmatrix} E_n & \sqrt{-1}E_n \\ -\sqrt{-1}E_n & E_n \end{pmatrix},$$

где E_n это единичная $(n\times n)$ - матрица. Очевидно, что $a_{ij}(x) = \overline{a_{ji}(x)}$, и удовлетворяет условиям (1.10) и (1.11), но не удовлетворяет условию сильной коэрцитивности эрмитовой формы (1.12). Оператор $A(x,\partial)$ при таких условиях имеет вид

$$A(x,\partial) = -\frac{1}{4}\Delta_{2n} + a_0,$$

где

$$\Delta_{2n} = \sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

– это оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$.

Граничный оператор $B(x,\partial)$ рассмотрим в следующем виде

$$B(x,\partial) = \partial_c + b_0,$$

где b_0 это константа. Конормальная производная ∂_c в данном случае принимает форму

$$\partial_c = 2\sum_{j=1}^{n}(\nu_j - \sqrt{-1}\nu_{j+n})\overline{\partial}_j,$$

известную также как комплексная нормальная производная $\overline{\partial}_\nu$ к границе D.

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 8. *Пусть в области D дано распределение f, а на границе ∂D распределение u_0, требуется найти такое распределение u в D, что*

$$\begin{cases} A(x,\partial)u = f & \text{в области } D, \\ B(x,\partial)u = u_0 & \text{на } \partial D. \end{cases}$$

В обобщенной постановке соответствующая спектральная задача выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} (\overline{\partial}_j u, \overline{\partial}_j v)_{L^2(D)} + (a_0 - \lambda)(u,v)_{L^2(D)} + b_0(u,v)_{L^2(\partial D)} = 0, \tag{4.115}$$

для любого $v \in H^+(D)$. Здесь мы пользуемся тем фактом, что

$$\Delta_{2n} = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_j}$$

Заметим, что $\lambda \geqslant a_0$ при $\delta a_0 = \delta b_0 = 0$, это следует немедленно из (4.115), если взять $v = u$.

Далее мы изучим задачу Штурма-Лиувилля в единичном шаре $D = \mathbb{B}$ в $\mathbb{C}^n$, которая очень похожа на случай смешанной задачи для оператора Лапласа в шаре (см. [25]). С этой целью перейдем к полярным координатам $x = r\mathbb{S}(\varphi)$, где φ это координаты на единичной сфере $\partial D = \mathbb{S}$ в $\mathbb{C}^n$. Оператор Лапласа Δ_{2n} в сферических координатах имеет форму

$$\Delta_{2n} = \frac{1}{r^2}\left(\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + (2n-2)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \Delta_{\mathbb{S}}\right),$$

где $\Delta_{\mathbb{S}}$ это оператор Лапласа-Бельтрами на единичной сфере. С другой стороны, если $\rho(z)$ это определяющая функция шара, то есть $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n \;:\; \rho(z) < 0\}$, тогда граница шара $\mathbb{S}$ очевидно задается уравнением $\rho(z) = z\overline{z} - 1 = 0$, следовательно нормальная комплексная производная принимает вид

$$\overline{\partial}_\nu = \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j \overline{\partial}_j; \tag{4.116}$$

переходя к сферическим координатам, получаем

$$\overline{\partial}_\nu = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + B_{\mathbb{S}}\right), \tag{4.117}$$

где оператор $B_{\mathbb{S}}$ зависит только от координат на сфере $\mathbb{S}$. Например, при $n = 1$, нормальная производная в полярных координатах имеет вид $\overline{\partial}_\nu = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$.

Для решения однородного уравнения $(-\Delta_{2n} + a)u = 0$ мы можем использовать метод Фурье разделения переменных. Именно, записывая $u(r,\varphi) = g(r)h(\varphi)$, мы получаем два отдельных уравнения для функций g и h,

$$\begin{aligned} \left(-\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + (2-2n)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + ar^2\right) g &= c\, g, \\ -\Delta_{\mathbb{S}} h &= c\, h, \end{aligned}$$

где c это произвольная константа.

Ясно, что второе уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда c является собственным значением оператора $\Delta_{\mathbb{S}}$. Хорошо известно, что $c = k(2n + k - 2)$ для $k = 0, 1, \ldots$ (см., например, [25]). Соответствующими собственными функциями оператора $\Delta_{\mathbb{S}}$ являются сферические гармоники $h_k(\varphi)$ степени k, то есть

$$\Delta_{\mathbb{S}} h_k = k(2n + k - 2) h_k. \tag{4.118}$$

Как известно, число линейно независимых сферических гармоник степени k равняется $J(k) = \frac{(2n+2k-2)(2n+k-3)!}{k!(2n-2)!}$. В комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ мы можем выбрать гармоники h_k специальным образом, а именно, мы можем построить ортонормированный базис $\{H^{(j)}_{p,q}\}$ в $L^2(\mathbb{S})$, состоящий из полиномов вида

$$H^{(j)}_{p,q}(z,\overline{z}) = \sum_{|\alpha|=p,|\beta|=q} c^{(j)}_{\alpha,\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta, \tag{4.119}$$

где $c^{(j)}_{\alpha,\beta}$ это комплексные коэффициенты. Обозначим через $J(p,q)$ число полиномов бистепени (p,q) в базисе; ясно, что $J(p,q) \leqslant J(p+q)$. В силу однородности многочленов $H_{p,q}^{(j)}$, по формуле Эйлера получаем следующее

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j \frac{\partial H_{p,q}^{(j)}}{\partial \overline{z}_j} = qH_{p,q}^{(j)},$$

однако, с учетом (4.116) имеем

$$\overline{\partial}_\nu H_{p,q}^{(j)} = qH_{p,q}^{(j)}. \tag{4.120}$$

Также легко проверить, что в сферических координатах $r\frac{\partial H_{p,q}^{(j)}}{\partial r} = (p+q)H_{p,q}^{(j)}$, тогда, согласно (4.117), получаем

$$2qH_{p,q}^{(j)} = (p+q)H_{p,q}^{(j)} + B_{\mathbb{S}}H_{p,q}^{(j)},$$

то есть

$$B_{\mathbb{S}}H_{p,q}^{(j)} = (q-p)H_{p,q}^{(j)}. \tag{4.121}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу Штурма - Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения по переменной $0 < r < 1$ (см. [25])

$$\left(-\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + (2-2n)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{(p+q)(2n+p+q-2)}{r^2} + a_0\right) g(r) = \\ = \lambda g(r), \tag{4.122}$$

$$\frac{\partial g(r)}{r}(1)+(2b_0+(q-p))g(1) = 0, \quad \text{и } g(r) \text{ ограничена в точке } r = 0. \tag{4.123}$$

Действительно, если $a_0, \lambda \in \mathbb{R}$, тогда (4.122) это версия уравнения Бесселя, и его вещественные решения $g(r)$ это функции Бесселя, определенные на интервале $(0, +\infty)$.

Зафиксируем для тройки (p, q, j) нетривиальное решение $g_{p,q}^{(j,i)}$ задачи (4.122), (4.123), соответствующее собственному значению $\lambda_{p,q}^{(j,i)}$. Тогда функция $u_{p,q}^{(j,i)} = g_{p,q}^{(j,i)} H_{p,q}^{(j)}$ удовлетворяет

$$(-\Delta_{2n} + (a_0 - \lambda_{p,q}^{(j,i)}))u_{p,q}^{(j,i)} = 0 \text{ в } D, \tag{4.124}$$

$$(b_0 + \overline{\partial}_\nu)u_{p,q}^{(j,i)} = 0 \text{ на } \partial D. \tag{4.125}$$

Теорема 14. *Пусть* $\delta a_0 = \delta b_0 = 0$ *и* $a_{0,0}^2 + b_{0,0}^2 \neq 0$. *Тогда система* $\{u_{p,q}^{(j,i)}\}$, $i \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant j \leqslant J(p,q)$, *совпадает с системой всех собственных векторов задачи Штурма - Лиувилля (2.57) в шаре* $\mathbb{B}$. *В частности, существуют ортогональные базисы в* $H^+(\mathbb{B})$, $L^2(\mathbb{B})$ *и* $H^-(\mathbb{B})$.

Доказательство. Так как $a_{0,0}^2 + b_{0,0}^2 \neq 0$, тогда, согласно теореме 4, пространство $H^+(\mathbb{B})$ непрерывно вложено в $L^2(\mathbb{B})$. Заметим, что система $\{u_{p,q}^{(j,i)}\}$ состоит из собственных векторов задачи Штурма - Лиувилля (2.57) в шаре $\mathbb{B}$. Более того, согласно [60], система $\{u_{p,q}^{(j,i)}\}$ ортогональна относительно эрмитовых форм $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{S})}$, $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{B})}$ и $(\overline{\partial}\cdot, \overline{\partial}\cdot)_{L^2(\mathbb{B})}$. Отсюда следует, что она ортогональна в пространстве $H^+(\mathbb{B})$. Согласно лемме 13, из выражения (3.88) получаем

$$(u_{p,q}^{(j,i)}, u_{\tilde{p},\tilde{q}}^{(\tilde{j},\tilde{i})})_- = (\lambda_{p,q}^{(j,i)})^{-1}(\iota'\iota L_0^{-1} u_{p,q}^{(j,i)}, u_{\tilde{p},\tilde{q}}^{(\tilde{j},\tilde{i})})_- = \lambda_{\tilde{p},\tilde{q}}^{(\tilde{j},\tilde{i})}(u_{p,q}^{(j,i)}, u_{\tilde{p},\tilde{q}}^{(\tilde{j},\tilde{i})})_{L^2(\mathbb{B})}. \quad (4.126)$$

Система $\{H_{p,q}^{(j)}\}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant j \leq J(p,q)$ по построению является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{S})$. Если $\delta a_0 = 0$, тогда $\lambda_{p,q}^{(j,i)} \geq a_{0,0}$, и счетная система $\{g_{p,q}^{(j,i)}(r)\}_{i\in\mathbb{N}}$ собственных функций есть ортогональный базис в пространстве $L^2_{\mathbb{R}}([0,1], r)$ вещественнозначных функций со скалярным произведением $(\sqrt{r}\cdot, \sqrt{r}\cdot)_{L^2([0,1])}$ (см. [25]) для каждой фиксированной тройки (p,q,j) с $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq J(p,q)$. Так же эта система будет ортогональным базисом и в пространстве $L^2([0,1], r)$ (состоящем из комплекснозначных функций). Следовательно, аналогично получаем, что система $\{u_{p,q}^{(j,i)} = g_{p,q}^{(j,i)}(r) H_{p,q}^{(j)}(\varphi)\}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, является ортогональным базисом в $L^2(\mathbb{B}) = L^2(\mathbb{S} \times [0,1])$ (см., например, [14]).

Так как система $\{u_{p,q}^{(j,i)}\}$ является ортогональным базисом в $L^2(\mathbb{B})$, следовательно не существует других собственных значений задачи (2.57), кроме уже упомянутых $\lambda_{p,q}^{(j,i)}$. Таким образом, нет и собственных векторов, соответствующих значению λ_0, кроме линейных комбинаций уже построенных собственных функций, относящихся к этому значению.

Как мы видели, пространство $L^2(\mathbb{B})$ плотно в $H^-(\mathbb{B})$. Следовательно, в пространстве $H^-(\mathbb{B})$ система $\{u_{p,q}^{(j,i)}\}$ будет так же полной. Возьмем теперь функцию $u \in H^+(D)$, ортогональную каждому вектору $u_{p,q}^{(j,i)}$ относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_+$. Тогда, по лемме 13, из выражения (3.89) получаем

$$(u, u_{p,q}^{(j,i)})_{L^2(\mathbb{B})} = (u, L_0^{-1}\iota'\iota u_{p,q}^{(j,i)})_+ = \lambda_{p,q}^{(j,i)}(u, u_{p,q}^{(j,i)})_+ = 0,$$

то есть u ортогональна каждому вектору $u_{p,q}^{(j,i)}$ в $L^2(\mathbb{B})$. Таким образом $u = 0$ в $L^2(\mathbb{B})$ и, следовательно, в пространстве $H^+(D)$. Это означает, что система $\{u_{p,q}^{(j,i)}\}$ полна в $H^+(\mathbb{B})$. □

Пример 1. Пусть в задаче 8 $a_0 = a_{0,0} = 1$, $b_0 = b_{0,0} = 0$. Тогда пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $L^2(D)$. Из (4.115) следует, что если собственные значения соответствующей задачи Штурма - Лиувилля (2.57) существуют, то они больше, либо равны, чем 1. Более того, собственное значение $\lambda = 1$ соответствует пространству $\mathcal{O}^2(D)$ голоморфных функций из пространства Лебега $L^2(D)$. Как известно, размерность собственного пространства $\mathcal{O}^2(D)$ (то есть, кратность собственного значения $\lambda = 1$) бесконечна, а следовательно, вложение ι не компактно (см., например, [14]). Однако, согласно теореме 14, мы можем построить ортогональные базисы в $H^+(\mathbb{B})$, $L^2(\mathbb{B})$ и $H^-(\mathbb{B})$, состоящие из собственных векторов задачи (2.57).

Покажем, что соответствующее вложение пространства $H^+(\mathbb{B})$ в пространство $H^s(\mathbb{B})$ (см. теорему 4 выше) нарушается при любом $s > 0$. Действительно, если $D = \mathbb{B}$ и $n = 1$, тогда ряд $u_\varepsilon(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{(k+1)^{\varepsilon/2}}$, $\varepsilon > 0$, сходится в $H^+(\mathbb{B})$ и $\|u_\varepsilon\|_+^2 = \|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{B})}^2 = \pi \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)^{1+\varepsilon}}$, так как функция u_ε голоморфна. Согласно [58, Лемма 1.4], имеем

$$\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^s(\mathbb{B})}^2 \geqslant \pi \sum_{k=0}^\infty \frac{k^{2s}}{(k+1)^{1+\varepsilon}},\ 0 < s \leq 1,$$

то есть для каждого $s \in (0,1)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $u_\varepsilon \notin H^s(\mathbb{B})$. Следовательно, пространство $H^+(\mathbb{B})$ не может быть непрерывно вложено в $H^s(\mathbb{B})$ для любого $s > 0$.

□

Пример 2. Пусть в задаче 8 мы имеем $a_{0,0} = 0$, $b_{0,0} = b_0 = 1$. Тогда, согласно теореме 4 и лемме 13, пространство $H^+(\mathbb{B})$ непрерывно вложено в $H^{1/2}(\mathbb{B})$, а соответствующий оператор L_0 является оператором конечного порядка.

Таким образом, по теореме 8 получаем, что система корневых функций задачи (2.57) полна в пространствах $H^+(\mathbb{B})$, $L^2(\mathbb{B})$ и $H^-(\mathbb{B})$.

Возьмем $n = 1$, тогда ряд $u_\varepsilon(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^{(1+\varepsilon)/2}}$, $\varepsilon > 0$, сходится в пространстве $H^+(\mathbb{B})$ и $\|u_\varepsilon\|_+^2 = \|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{1+\varepsilon}}$. Согласно [58, Лемма 1.4], имеем

$$\Big\|u_\varepsilon\Big\|_{H^s(\mathbb{B})}^2 \geqslant \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2s-1}}{(k+1)^{1+\varepsilon}},\ 0 < s \leq 1,$$

то есть для каждого $s \in (1/2, 1)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $u_\varepsilon \notin H^s(\mathbb{B})$. Следовательно, пространство $H^+(\mathbb{B})$ не может быть непрерывно вложено в $H^s(\mathbb{B})$ для любого $s > 1/2$.

Пусть теперь $0 \neq |\delta b_0| < b_{0,0} = 1$. Тогда, согласно теореме 5, задача (2.57) является Фредгольмовой. Возьмем $n = 1$ и последовательность $\{z^p\}$. Так как $\|z^p\|_+ = \|z^p\|_{L^2(\mathbb{S})} = \sqrt{2\pi}$, следовательно она ограничена в пространстве $H^+(\mathbb{B})$. Также $\|z^p - z^k\|_+^2 = 4\pi$ для любых $k, p \in \mathbb{Z}_+$, таким образом, мы заключаем, что последовательность $\{z^p\}$ не содержит в себе фундаментальных подпоследовательностей. С другой стороны, для соответствующего ограниченного оператора δL_0 мы имеем

$$\|\delta L_0(z^p - z^k)\|_- = \sup_{\substack{v \in H^1(D) \\ v \neq 0}} \frac{|(v, \delta b_0(z^p - z^k))_{L^2(\mathbb{S})}|}{\|v\|_+} \geqslant$$

$$\geqslant |\delta b_0| \|z^p - z^k\|_{L^2(\mathbb{S})} = 2|\delta b_0|\sqrt{\pi},$$

то есть последовательность $\{\delta L_0 z^p\}$ так же не содержит фундаментальных подпоследовательностей. Таким образом, в данном случае оператор δL_0, соответствующий возмущению граничного оператора, не может быть компактным.

$\square$

Рассмотрим теперь пример для эллиптического с параметром оператора. Пусть $n = 2$ и $A_0^{(2)}$ это (2×2) матрица с вещественнозначными элементами класса $L^\infty(D)$ и

$$\tilde{A}(x, \partial, \lambda)V(x) = -\vartheta \Delta_2 I_2 V(x) - (\vartheta + \vartheta_1)\nabla_2 \mathrm{div}_2 V(x) + \lambda^2 A_0^{(2)}(x) V(x)$$

это система Ламе, где $V(x) = (V_1(x), V_2(x))$ неизвестный вектор, I_2 есть единичная (2×2)-матрица, Δ_2 – оператор Лапласа, ∇_2 и div_2 это соответственно оператор градиента и дивергенции в $\mathbb{R}^2$, а ϑ, ϑ_1 – параметры Ламе. Этот оператор играет значительную роль в двумерной линейной теории упругости (см., например, [43]); вектор $V(x)$ представляет смещение точки упругого тела под нагрузкой. Этот оператор может быть также проинтерпретирован как линеаризация стационарной версии двумерного уравнения типа Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости с известным давлением и неизвестным вектором скорости $V(x)$ (см. [51, §15]); в этом случае параметры Ламе представляют вязкости. Эта система сильно эллиптична и формально самосопряжена и неотрицательна, если $\vartheta > 0$, $2\vartheta + \vartheta_1 > 0$. Рассмотрим теперь специальный случай, когда первый параметр Ламе ϑ_1 отрицателен и $\vartheta_1 = -\vartheta$. Тогда $\tilde{A}(x, \partial, \lambda)$ принимает вид

$$\tilde{A}(x, \partial, \lambda) = -\vartheta \Delta_2 I_2 + \lambda^2 A_0^{(2)}(x). \tag{4.127}$$

С другой стороны,

$$-\Delta_2 I_2 V = \mathrm{rot}_2^* \mathrm{rot}_2 V + \mathrm{div}_2^* \mathrm{div}_2 V,$$

где $\mathrm{rot}_2 V = (\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1)$ это ротор в $\mathbb{R}^2$, а rot_2^* и div_2^* это формально сопряженные операторы к rot_2 и div_2 соответственно. Предположим теперь, что матрица $A_0^{(2)}(x)$ имеет следующий вид $A_0^{(2)}(x) = \alpha(x) U(x)$ где $\alpha(x) \in L^\infty(D)$ это неотрицательная функция и

$$U(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) & -U_2(x) \\ U_2(x) & U_1(x) \end{pmatrix}$$

является ортогональной матрицей с элементами $U_j \in L^\infty(D)$. Тогда, после комплексификации

$$u(z) = V_1(z) + \sqrt{-1} V_2(z), \; z = x_1 + \sqrt{-1} x_2$$

система (4.127) с вещественнозначными коэффициентами переходит в следующее уравнение с комплекснозначными коэффициентами

$$A(x,\partial,\lambda)u = 4\vartheta\overline{\partial}^*\overline{\partial}\,u + \lambda^2 a_0^{(2)}(x)u,$$

где $\overline{\partial} = 1/2(\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2})$ это оператор Коши-Римана, $\overline{\partial}^* = -1/2(\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2})$ его формально сопряженный, и

$$a_0^{(2)}(x) = \alpha(x)\left(U_1(x) + \sqrt{-1}U_2(x)\right).$$

Тогда, с подходящим оператором $\Psi : H^\rho(\partial D) \to L^2(\partial D)$, оператор робеновского типа B имеет вид

$$B = 2\vartheta\,(\nu_1 - \sqrt{-1}\nu_2)\bar{\partial} + \Psi^*\Psi,$$

где (ν_1,ν_2) это векторное поле единичных нормалей к ∂D. Граничные операторы

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \nu_1\partial_1 + \nu_2\partial_2,\ \bar{\partial}_\nu = (\nu_1 - \sqrt{-1}\nu_2)\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + \sqrt{-1}(\nu_1\partial_2 - \nu_2\partial_1)\right)$$

известны как нормальная производная и комплексная нормальная производная к ∂D соответственно. Таким образом, мы получили смешанную задачу рассмотренного выше типа:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \left(-\vartheta\Delta_2 + \lambda^2 a_0^{(2)}\right)u(z) & = & f & \text{в} \quad D, \\ \left(2\vartheta\bar{\partial}_\nu + \Psi^*\Psi\right)u(z) & = & 0 & \text{на} \quad \partial D. \end{array}\right. \tag{4.128}$$

Заметим, что обычное граничное условие робеновского типа для уравнений Навье-Стокса или для оператора типа Ламе формулируются с использованием граничного тензора напряженности σ. В нашем частном случае тензор имеет следующие компоненты:

$$\sigma_{i,j} = \vartheta\left(\delta_{i,j}\frac{\partial}{\partial\nu} + \nu_j\frac{\partial}{\partial x_i} - \nu_i\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\ 1 \le i,j \le 2. \tag{4.129}$$

Следовательно, с касательным оператором $\partial_{\tau_0} = \big((\nu(x)\mathrm{div}_2)^{\mathrm{T}} - \nu(\mathrm{x})\mathrm{div}_2\big)$,

мы имеем
$$\sigma = \vartheta \left(\frac{\partial}{\partial \nu} I_2 + \partial_\tau\right) = \vartheta\,(\tilde{\sigma} + 2\partial_{\tau_0}), \tag{4.130}$$

где граничный тензор $\tilde{\sigma}$ соответствует граничному оператору $2\bar{\partial}_\nu$ после декомплексификации смешанной задачи (4.128), то есть, в матричной форме (4.128) гласит

$$\begin{cases} \left(-\vartheta \Delta_2 I_2 + \lambda^2 A_0^{(2)}\right) V(x) & = & F & \text{в} & D, \\ ((\sigma - 2\vartheta\partial_{\tau_0}) + \Psi^*\Psi I_2)\, V(x) & = & 0 & \text{на} & \partial D. \end{cases}$$

В теории упругости, граничный тензор $\tilde{\sigma} = \vartheta^{-1}\sigma - 2\partial_{\tau_0}$ был использован в [37] при постановке задачи, однако соответствующая задача не была решена.

Продолжим теперь изучение смешанной задачи (4.128). Соответствующее скалярное произведение в пространстве $H^+(D)$, соответствующее смешанной задаче, имеет вид

$$(u, v)_+ = 4\vartheta\,(\bar{\partial} u, \bar{\partial} v)_{L^2(D)} + (\Psi u, \Psi v)_{L^2(\partial D)}.$$

Тогда, теорема 4 гарантирует вложение пространства $H^+(D)$ в пространство Соболева-Слободецкого $H^s(D)$. Однако, для $0 < r < 1/2$, каждая голоморфная функция $u \in H^{r+1/2}(D)$ принадлежит $H^+(D)$, однако, нет никаких оснований для того, чтобы она лежала в $H^1(D)$, то есть вложение точное. Для $r = 0$ вложение, описанное в теореме 4, также точно, хотя аргументы более тонкие (см. пример 2). В частности, нарушаются условия Шапиро-Лопатинского на гладкой части ∂D.

В некоторых случаях мы можем получить формулы для решений проблем. Пусть D будет единичным кругом $\mathbb{B}$ с центром в начале координат $\mathbb{C}$, а $S = \emptyset$. Мы переходим к полярным координатам $z = r\, e^{\sqrt{-1}\phi}$ в $\mathbb{R}^2$, где $r = |x|$, $\phi \in [0, 2\pi]$ и пусть

$$\vartheta = 1,\ \Psi^*\Psi\ = 2\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial^2 \phi}\right)^{\rho/2} \quad a_0^{(2)}(z) = |z|^{2d},\ d \geq 0$$

($-\frac{\partial^2}{\partial^2\phi}$ это оператор Лапласа-Бельтрами на $\partial\mathbb{B}$). Тогда $a_0^{(2)} \in C^{0,2d}(\overline{D})$, если

$0 < d \le 1/2$. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = r\partial_r, \; \overline{\partial}_\nu = \bar{z}\,\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(r\partial_r + \sqrt{-1}\,\partial_\phi\right). \tag{4.131}$$

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения по переменной r в интервале $(0,1)$,

$$\left(r\partial_r^2 + \partial_r - k^2 r^{-1} + \mu^2 r^{2d+1}\right) g = 0 \text{ на } (0,1) \tag{4.132}$$

$$g \text{ ограничена в } 0, \tag{4.133}$$

$$\left(r\partial_r - k + (1{+}k^2)^{\rho/2}\right) g = 0 \text{ при } r = 1 \tag{4.134}$$

см. [25, Глава. II, Введение и П. 1, § 2]. На самом деле, как мы видели ранее, μ являются неотрицательными вещественными числами (здесь $\mu^2 = -\lambda^2$) а тогда (4.132) это частный случай уравнения Бесселя. Его (вещественнозначные) решения $g(r)$ это функции Бесселя, определенные на $(0,+\infty)$, а пространство всех решений двумерно. Например, если $\lambda^2 = 0$ и $d = 0$, тогда $g(r) = \alpha r^k + \beta r^{-k}$ есть общее решение (4.132), где α и β произвольные константы. В общем случае пространство решений (4.132) содержит одномерное подпространство $\{\alpha g_k(r,\mu) = \alpha \mathcal{J}_{\frac{|k|}{d+1}}\left(\frac{\mu r^{d+1}}{d+1}\right)\}$ функций, ограниченных в точке $r = 0$, где $\mathcal{J}_p(t)$ это функции Бесселя (см., например, [25]). Как обычно, для каждого $k \in \mathbb{Z}$ надлежащая система собственных значений $\{\mu_k^{(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ может быть найдена как решения трансцендентного уравнения

$$\frac{\mu}{d+1}\mathcal{J}'_{\frac{|k|}{d+1}}\left(\frac{\mu}{d+1}\right) + \left((1{+}k^2)^{\rho/2} - k\right)\mathcal{J}_{\frac{|k|}{d+1}}\left(\frac{\mu}{d+1}\right) = 0,$$

индуцированного (4.134) при $g_k(\cdot,\mu)$ вместо g. Зафиксируем для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ нетривиальное решение $g_k^{(\nu)}(r)$ задачи (4.132), соответствующее собственному значению $\mu_k^{(\nu)}$. Эта система является ортогональным базисом в весовом пространстве Лебега $L^2_d(0,1)$ со скалярным произведением

$$h_d(g,f) = \int_0^1 r^{2d+1} g(r) f(r)\, dr,$$

смотрите [25, Глава. II, Введение и П. 1, § 2]. Тогда функция

$$u_k^{(\nu)}(z) = g_k^{(\nu)}(r)e^{\sqrt{-1}k\phi}$$

удовлетворяет

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \left(-\Delta_2 + (\lambda_k^{(\nu)})^2|z|^{2d}\right) u_k^{(\nu)}(z) & = & 0 & \text{в} \quad \mathbb{C}, \\ \left(\bar{\partial}_\nu + (1 - \frac{\partial^2}{\partial^2\phi})^{\rho/2}\right) u_\nu^{(k)}(z) & = & 0 & \text{на} \quad \partial\mathbb{B}, \end{array} \right. \tag{4.135}$$

где $(\lambda_k^{(\nu)})^2 = -(\mu_k^{(\nu)})^2$ Действительно, из (4.132) и теоремы Фубини следует, что это равенство выполняется в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (мы пользуемся здесь тем фактом, что $u_\nu^{(k)}$ ограничена в начале координат). С другой стороны, граничное условие (4.135) немедленно следует из (4.131) и (4.134). По построению, система $\{u_\nu^{(k)}\}_{k\in\mathbb{Z},\nu\in\mathbb{N}}$ состоит из собственных функции семейства $L(\lambda) = L_0 + \lambda^2 C$. Очевидно, она совпадает с системой всех собственных векторов, построенных в теореме 9 и полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{B})$ со скалярным произведением

$$h(u, v) = \int_D |z|^{2d} u(z)\overline{v}(z)dx.$$

Но $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является ортогональным базисом в $L^2(\partial\mathbb{B})$, а $\{g_k^{(\nu)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+,\nu\in\mathbb{N}}$ является ортогональным базисом в $L_d^2(0, 1)$, следовательно, по теореме Фубини, система является ортогональным базисом в пространстве $L_h^2(\mathbb{B})$.

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. Описаны пространства соболевского типа, порожденные некоэрцитивными эрмитовыми формами. Доказана теорема вложения для этих пространств в пространства Соболева-Слободецкого.

2. Изучены условия разрешимости некоэрцитивных смешанных задач в пространствах, порожденных соответствующими эрмитовыми формами. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости и фредгольмовости для данных задач.

3. Описаны спектральные свойства операторов, индуцированных некоэрцитивными эрмитовыми формами. Получены критерии полноты корневых функций в рассматриваемых пространствах.

4. Построены формулы Карлемана для некорректной задачи Коши для оператора Коши-Римана в плоских областях, описаны условия ее разрешимости в специальных пространствах, порожденных подходящими некоэрцитивными формами.

Изложенные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в различных областях анализа и дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] Агмон, С. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг // М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

[2] Агранович, М.С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М.С. Агранович, М.И. Вишик // Успехи мат. наук. 1964;19:53–161.

[3] Агранович, М.С. Эллиптические операторы на замкнутых областях / М.С. Агранович // М.: ВИНИТИ, 1990.

[4] Агранович, М.С. Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка / М.С. Агранович // Функц. анализ и его прил., 2011.

[5] Агранович, М.С. Спектральные задачи в Липшицевых областях / М.С. Агранович // СМФН, 2011.

[6] Айзенберг, Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения / Л.А. Айзенберг // Новосибирск:Наука, 1990, 248 с.

[7] Айзенберг, Л.А. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы / Л.А. Айзенберг, А.М. Кытманов // Мат. сборник, Т. 182(4), 1991, с. 490–507.

[8] Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров // М.: Наука, 1981.

[9] Гохберг, И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // М.: Наука, 1965.

[10] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида // М.: Мир, 1967.

[11] Келдыш, М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М.В. Келдыш // Доклад Академии Наук СССР, 1951.

[12] Келдыш, М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М.В. Келдыш // Успехи мат. наук, т.26, вып. 4(160), 1971.

[13] Козлов, В.А. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений / В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1991, том 31, номер 1, 64–74

[14] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров // М.: Физматлит, 2004.

[15] Кондратьев, В.А. Полнота систем корневых функций эллиптических операторов в Банаховых пространствах / В.А. Кондратьев. // Российский Журнал Математической Физики, 1999.

[16] Лаврентьев, М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка / М.М. Лаврентьев // Докл. АН СССР, Т. 112(2), 1957, 195–197.

[17] Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев // Новосибирск: Наука, 1962.

[18] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева // М.: Наука, 1973.

[19] Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес // М.: Мир, 1971.

[20] Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным эллиптическим уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Укр. матем. журн. 5, 1953. С. 123—151.

[21] Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михаилов // М.: Наука, 1976.

[22] Ремпель, Ш. Теория индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.-В. Шульце // М.: Мир, 1986.

[23] Слободецкий, Л.Н. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их применения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных / Л.Н. Слободецкий // Л.: Научные заметки Ленинградского Педагогического Института, 1958.

[24] Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин // М.: Наука, 1979.

[25] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // М.: Издательство МГУ, 1999.

[26] Трибель, Х. Теория интерполяции, Функциональные пространства, Дифференциальные операторы / Х. Трибель // М.: Мир, 1980.

[27] Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ, том 2 / Б.В. Шабат // М.: Лань, 2004.

[28] Шапиро, З.Я. Об общих краевых задачах эллиптического типа / З.Я. Шапиро // Изв. АН, сер. матем. 17, 1953. С. 539—562.

[29] Шлапунов, А.А. О задаче Коши для голоморфных функций класса Лебега L^2 в области / А.А. Шлапунов, Н.Н. Тарханов // Сиб. матем. журнал, Т. 33 №. 5, 1992, с. 914–922.

[30] Шлапунов, А.А. Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I / А.А. Шлапунов, Н.Н. Тарханов // Мат. труды, 18(1) (2015), 118—-189.

[31] Шлапунов, А.А. Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. II / А.А. Шлапунов, Н.Н. Тарханов // Мат. труды, 18(2) (2015), 133—-204.

[32] Эскин, Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г.И. Эскин // М.: Наука, 1973.

[33] Agmon, S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems / S. Agmon // Comm. Pure Appl. Math., 1962.

[34] Bowman, F. Introduction to Bessel Functions / F. Bowman // New York: Dover, 1958.

[35] Browder, F.E. On the eigenfunctions and eigenvalues of the general elliptic differential operator / F.E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953;39:433–439.

[36] Browder, F.E. On the spectral theory of strongly elliptic differential operators / F.E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1959.

[37] Campanato, S. Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziale lineari del tipo dell'elasticitá / S. Campanato // Ann. della Scuola Norm. Superiore, Cl. di Sci, Ser. III, **13:2**, pp. 223–258 (1959).

[38] Carleman, T. Les fonctions quasianalytiques / T. Carleman // Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[39] Denk, R. Parameter-elliptic boundary value problems connected with the Newton polygon / R. Denk, L. Volevich // Diff. Int. Eq. 2002;15(3):289-326.

[40] Dunford, N. Linear Operators, Vol. II, Selfadjoint Operators in Hilbert Space / N. Dunford, JT. Schwartz // New York: Intersci. Publ; 1963.

[41] Fedchenko, D.P. On the Cauchy problem for the Dolbeault complex in spaces of distributions / D.P. Fedchenko, A.A. Shlapunov // Complex Variables and Elliptic Equations, V. 58, N. 11 (2013), 1591-1614.

[42] Fedchenko, D.P. On the Cauchy problem for the elliptic complexes in spaces of distributions / D.P. Fedchenko, A.A. Shlapunov // Complex Variables and Elliptic Equations, V. 59, N. 5, 2014, 651-679.

[43] Fichera, G. Existence Theorems in Elasticity / G. Fichera // Festkörpermechanik/Mechanics of Solids, edited by S. Flügge, C.A. Truesdell, Handbuch der Physik (Berlin–Heidelberg–New York, Springer–Verlag, 1972), pp. 347–389.

[44] Gokhberg, I.Ts. An operator generalisation of the logarithmic residue theorem and the theorem of Rouché / I.Ts. Gokhberg, E.I. Sigal // Math. USSR Sbornik **13** (1971), 603–625.

[45] Grisvard, P. Elliptic Problems in Non-Smooth Domains / P. Grisvard // Pitman, Boston, 1985.

[46] Harutjunjan, G. Mixed Problems and Edge Calculus: symbolic structure / G. Harutjunjan, B.-W. Schulze // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino - Vol. 64, 2 (2006).

[47] Hörmander, L. Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary value problems / L. Hörmander // Ann Math., 1966.

[48] Hörmander, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators / L. Hörmander // Vols. 3–4, Springer-Verlag, New York, 1985.

[49] Kohn, J.J. Non-coercive boundary value problems / J.J. Kohn, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math., 1965.

[50] Kohn, J.J. Subellipticity of the $\overline{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions / J.J. Kohn // Acta Math., 1979.

[51] Landau, L.D. Fluid Mechanics, Volume 6 of A Course of Theoretical Physics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz // Pergamon Press, London–New York–Paris, 1959.

[52] Laptev, A. Finding eigenvalues and eigenfunctions of the Zaremba problem for the circle/ A. Laptev, A. Peicheva, A. Shlapunov // Complex Analysis and Operator Theory. 2017;11(4):895–926

[53] Markus, A.S. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils / A.S. Markus // Vol. 71. Providence, Rhode Island: Translations of Mathematical Monographs, AMS; 1988.

[54] Paltsev, B.V. Mixed problems with non-homogeneous boundary conditions in Lipschitz domains for second-order elliptic equations with a parameter / B.V. Paltsev // Mat. Sb. 1996;187:59–116.

[55] Schechter, M. On the theory of differential boundary problems / M. Schechter // Illinois J. Math. 1963. V. 7. P. 232–245.

[56] Schulze, B.-W. Green integrals on manifolds with cracks / B.-W. Schulze, A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov // Ann. Global Anal. Geom., 2003. V. 24, N2. P. 131–160.

[57] Shlapunov, A.A. Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols / A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov // Proc. London. Math. Soc., 71 (1995), N. 1, p. 1-54.

[58] Shlapunov, A.A. Spectral decomposition of Green's integrals and existence of $W^{s,2}$-solutions of matrix factorizations of the Laplace operator in a ball / A.A. Shlapunov // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 96 (1996).

[59] Shlapunov, A.A. Duality by reproducing kernels / A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov // Int. J. Math. Math. Sci., 2003. N6. P. 327–395.

[60] Shlapunov, A.A. Mixed problems with a parameter / A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov // Russ. J. Math. Phys., 12 (2005).

[61] Shlapunov, A.A. On the Cauchy problem for the Cauchy-Riemann operator in Sobolev spaces / A.A. Shlapunov // Contemporary Math, 445 (2008), p. 333–347.

[62] Shlapunov, A. On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators / A. Shlapunov, N. Tarkhanov // J. of Differential Equations. 2013;10:3305–3337.

[63] Simanca, S. Mixed elliptic boundary value problems / S. Simanca // Comm. in PDE, 12, 1987, 123–200.

[64] Straube, E.J. Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value / E.J. Straube // Pisa: Skuola Normale Superiore, 1984.

[65] Tarkhanov, N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations / N. Tarkhanov // Akademie-Verlag, Berlin, 1995.

[66] Tarkhanov, N. Analysis of Solutions of Elliptic Equations / N. Tarkhanov // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 1997.

[67] Tarkhanov, N. On the root functions of general elliptic boundary value problems / N. Tarkhanov // Compl. Anal. Oper. Theory, 2006.

[68] Yakubov, S.Y. Multiple completeness for systems of operator bundles and elliptic boundary value problem / S.Y. Yakubov // Matem. Sb. 1990;181:95–113.

[69] Zaremba, S. Sur un problème mixte relatifà l'équation de Laplace / S. Zaremba // Bull. Acad. Sci. Cracovie, 1910. P. 314-344.

Работы автора по теме диссертации

[70] Полковников, А.Н. О спектральных свойствах одной некоэрцитивной смешанной задачи ассоциированной с оператором Коши-Римана / А.Н. Полковников // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. Красноярск, 15–25 апреля 2013. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2013.

[71] Полковников, А.Н. О корневых функциях одной некоэрцитивной смешанной задачи для оператора эллиптического с параметром / А.Н. Полковников // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15–25 апреля 2014. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2014.

[72] Полковников, А.Н. О разрешимости и спектральных свойствах некоэрцитивных смешанных задач для эллиптического с параметром оператора / А.Н. Полковников // Сборник материалов международной

научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2015». Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015.

[73] Полковников, А.Н. Об одной некоэрцитивной смешанной задачи для эллиптического с параметром оператора / А.Н. Полковников // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2016». Красноярск, 15–25 апреля 2016. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016.

[74] Polkovnikov, A.N. On the spectral properties of a non-coercive mixed problem associated with $\overline{\partial}$-operator / A.N. Polkovnikov, A.A. Shlapunov // J. Siberian Fed. Uni. 2013. — V. 6(2) — P. 247—261.

[75] Polkovnikov, A. On non-coercive mixed problems for parameter-dependent elliptic operators / A. Polkovnikov, A. Shlapunov // Math. Commun. 2015. — V. 20(2) — P. 131–150.

[76] Polkovnikov, A.N. On the completeness of root functions of a holomorphic family of non-coercive mixed problem / A.N. Polkovnikov // Compl. Variables and Elliptic Equations. 2016. — V. 61(9). — P. 1223–1240.

[77] Polkovnikov, A.N. On non-coercive mixed problems for parameter-dependent elliptic operators / A.N. Polkovnikov // Proceedings «VI Russian-Armenian conference on mathematical analysis, mathematical physics and analytical mechanics», Rostov-on-Don, 11 - 16 September 2016. — Rostov-on-Don : Don State Technical University. — 2016.

[78] Полковников, А.Н. О построении формул Карлемана с помощью смешанных задач с граничными условиями, содержащими параметр / А.Н. Полковников, А.А. Шлапунов // Сибирский математический журнал, 2017. V. 58(4), 870–884.