ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Фирер Анна Владимировна

РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПОНЯТИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ АЛГЕБРЫ СРЕДСТВАМИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания
(математика)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель:
доктор педагогических наук, профессор,
Далингер Виктор Алексеевич

Омск – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……4

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ПОНЯТИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ АЛГЕБРЫ СРЕДСТВАМИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ……..…….. 17

1.1. Психолого-педагогические основы развития познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения алгебре…..…….. 17

1.2. Роль и место визуализации в развитии познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры……...….. 36

1.3. Использование средств информационно-коммуникационных технологий в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации....……... 56

1.4. Структурно-функциональная модель развития познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации…..... 71

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1…..…… 84

ГЛАВА 2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СРЕДСТВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ В РАЗВИТИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПОНЯТИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ АЛГЕБРЫ..... 86

2.1. Характеристика комплекса визуализированных дидактических материалов, направленного на развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы при обучении понятиям

функциональной линии алгебры…..…… 86
2.2. Методические особенности развития познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в условиях применения средств визуализации в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры…..……..…… 114
2.3. Организация и результаты педагогического эксперимента…… 145
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2……... 164
ЗАКЛЮЧЕНИЕ…… 166
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…….. 168
ПРИЛОЖЕНИЯ…… 193
Приложение А (рекомендуемое). Сводная характеристика когнитивных стилей и типы предпочитаемых учебных заданий (по Бетти Лу Ливер)…….. 193
Приложение Б (обязательное). Комплекс визуализированных задач по алгебре. Функции и графики (фрагмент)…….. 196
Приложение В (рекомендуемое). Примеры ментальных карт, выполненных учащимися экспериментальных классов…… 209
Приложение Г (рекомендуемое). Протоколы наблюдений для проведения лабораторной работы в 8 классе на тему «Построение графиков функций $y = f(x + l)$, $y = f(x) + m$, если известен график функции $y = f(x)$»…….. 210
Приложение Д (рекомендуемое). Анкета для учителей математики…… 212
Приложение Е (рекомендуемое). Диагностическая контрольная работа для 7 класса (до эксперимента)…….. 214
Приложение Ж (рекомендуемое). Диагностическая контрольная работа для 7 класса (после эксперимента)…… 217
Приложение И (обязательное). Статистическая обработка результатов формирующего этапа педагогического эксперимента…… 222

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Изменения, происходящие в современном российском обществе – необходимость в саморазвитии и непрерывном образовании, увеличение объема передаваемой информации, актуализирующее развитие новых (визуальных) способов ее представления, естественным образом касаются и системы образования, что находит отражение в федеральных государственных образовательных стандартах, в частности, в Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО). На первый план выходят идеи развивающего обучения, стимулирующие формирование личности, осознающей важность образования для жизни и будущей профессиональной деятельности, способной самостоятельно учиться, творчески мыслить и применять полученные знания на практике.

Изменение цели и требований к результатам образования, представленных в ФГОС ООО тремя группами: предметными, метапредметными и личностными, требует пересмотра используемых технологий, форм, методов и критериев оценки результатов учебно-воспитательного процесса.

Достижение метапредметных результатов осуществляется через формирование универсальных учебных действий (УУД), среди которых наиболее тесно с предметным содержанием связаны познавательные универсальные учебные действия (ПУУД). При этом рядом исследователей отмечается особая роль математики в их формировании и развитии.

В отличие от традиционной наглядности, использующей демонстрации и иллюстрации, визуализация, актуализирует потенциал визуального канала восприятия информации и когнитивной функции наглядности. Играя роль «моста» между чувственным и рациональным, визуализация обладает большим потенциалом для активизации и интенсификации учебно-познавательной деятельности, а следовательно, и для развития ПУУД.

Степень разработанности проблемы. Анализ диссертационных исследований показал активный интерес ученых к проблеме формирования и развития УУД при обучении различным учебным предметам. Исследователи

рассматривают формирование и развитие УУД посредством: специально разработанной системы заданий и задач (Е. В. Яковлева); комплекса задач, обладающего свойствами целостности, делимости, структурности, интегративности, иерархичности (М. С. Соловьева); комплекса задач с модулем, включающим базовые, систематизирующие и интегрирующие типы задач (Е. А. Пустовит); навыков самостоятельного составления задач (М. А. Куприянова); межпредметных и подчиненных им понятий (О. А. Иванова); проектной технологии и включения учащихся в учебно-исследовательскую деятельность (Э. Г. Гельфман, А. Г. Подстригич, Л. А. Теплоухова); комплекса учебных текстов и заданий, использующих предметный опыт учащихся (Л. Ю. Новикова). Вопросам развития ПУУД учащихся посвящены работы Л. И. Боженковой, О. В. Литовченко, С. В. Чоповой, Д. С. Елисеевой и др. В тоже время, вопросы, посвященные использованию средств визуализации в развитии ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения алгебре, недостаточно изучены.

В теории и методике обучения математике исследования, посвященные наглядности и визуализации, представлены в работах М. И. Башмакова, В. А. Далингера, Н. М. Ежовой, А. В. Емелина, Д. Д. Ефремовой, Н. В. Иванчук, Д. А. Картежникова, О. О. Князевой, Н. А. Резник, П. Г. Сатьянова, Л. Е. Тукановой, А. Я. Цукаря, М. А. Чошанова, Е. А. Широковой, Н. В. Щукиной и др. Признавая несомненную теоретическую и практическую значимость данных исследований, следует отметить недостаточную разработанность методических основ процесса обучения алгебре, в частности понятиям функциональной линии, направленного на развитие ПУУД учащихся основной школы средствами визуализации.

Функциональная линия является одной из ведущих содержательно-методических линий школьного курса алгебры. Функциональная зависимость, являясь межпредметным понятием, способна объединить в единое целое не только все разделы школьной математики, но и другие учебные предметы. Фундаментальная роль функциональной линии определяет особенности изучения

других содержательно-методических линий школьного курса алгебры. Отражая практическую направленность курса математики, тем не менее, понятия функциональной линии обладают высоким уровнем абстракции и, как показывает практика, являются довольно сложными для восприятия учащимися.

Различным аспектам формирования понятий функциональной линии посвящены исследования И. В. Антоновой, О. А. Ивановой, О. О. Князевой, Н. Ю. Милованова, Е. В. Никольского, С. Ю. Попадьиной, Л. В. Тихоновой, Е. В. Турчановой и др. Однако, вопрос о роли визуализации в развитии ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры остается открытым.

Анализ процесса обучения математике в основной школе, нормативных документов, психолого-педагогической, научной и методической литературы по проблеме исследования позволил выявить следующие противоречия:

– *на социально-педагогическом уровне*: между возрастающими требованиями к уровню подготовки обучающихся и компетентности обучающих, представленными в ФГОС ООО, и реально недостаточным состоянием школьного математического образования в России, зафиксированным в показателях ОГЭ и международных исследованиях (TIMSS, PISA);

– *на научно-педагогическом уровне*: между потенциальными возможностями математики в развитии метапредметных результатов образования и недостаточной разработанностью теоретических основ развития ПУУД при обучении математике;

– *на научно-методическом уровне*: между возможностями средств визуализации процесса обучения математике в развитии ПУУД учащихся основной школы и используемыми методиками обучения математике, ориентированными в основном на словесно-символьное изложение учебного материала.

Необходимость разрешения указанных противоречий обусловливает **актуальность** диссертационного исследования и определяет его **проблему**: как организовать обучение учащихся основной школы понятиям функциональной

линии с опорой на средства визуализации, обеспечивающее эффективное развитие у них ПУУД?

В рамках решения указанной проблемы была определена **тема** диссертационного исследования – «Развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы при обучении функциональной линии алгебры средствами визуализации».

Ведущая идея исследования заключается в использовании в процессе развития ПУУД учащихся основной школы при обучении функциональной линии в курсе алгебры средств визуализации, сконструированных с опорой на различные сочетания способов представления учебной математической информации, соответствующих когнитивным стилям учащихся.

Объект исследования – процесс обучения алгебре учащихся основной школы.

Предмет исследования – развитие ПУУД учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения алгебре.

Цель исследования состоит в теоретическом обосновании и разработке методики развития ПУУД учащихся основной школы при обучении функциональной линии алгебры средствами визуализации.

В соответствии с проблемой, объектом, предметом и целью исследования была выдвинута **гипотеза**, состоящая в предположении, что при обучении понятиям функциональной линии в курсе алгебры средствами визуализации будет обеспечена положительная динамика уровня развития ПУУД учащихся основной школы, если:

– сконструировать средства визуализации (визуализированные задачи и визуальные модели представления учебной математической информации) с опорой на различные сочетания способов представления учебной математической информации (словесный, аналитический, графический) в соответствии с когнитивными стилями учащихся;

– обеспечить включенность учащихся в целенаправленную учебно-познавательную деятельность с комплексом разноуровневых визуализированных

дидактических материалов посредством специальных методических приемов, в том числе с использованием средств информационно-коммуникационных технологий (ИКТ);

– разработать и реализовать модель и методику развития ПУУД учащихся основной школы, содержательную основу которых составляют визуализированные дидактические материалы, соответствующие этапам (мотивационно-диагностический, операционно-исполнительский, рефлексивно-оценочный) и уровням (репродуктивный, продуктивный, творческий) развития ПУУД.

Цель и гипотеза обусловили постановку и решение следующих **задач исследования**:

1. Определить психолого-педагогические основы развития ПУУД учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения алгебре.

2. Определить роль и место визуализации при обучении понятиям функциональной линии курса алгебры в развитии ПУУД учащихся основной школы и разработать комплекс визуализированных дидактических материалов.

3. Обосновать критерии отбора средств ИКТ для целесообразного использования в контексте визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии.

4. Научно обосновать и разработать структурно-функциональную модель развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации.

5. Разработать методику развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации и экспериментально проверить ее эффективность.

Методологическую основу исследования составляют:

– системный подход (С. И. Архангельский, В. П. Беспалько, В. В. Краевский, П. И. Пидкасистый, Э. Г. Юдин и др.), позволивший рассматривать процесс развития ПУУД учащихся основной школы при обучении

понятиям функциональной линии средствами визуализации как систему взаимосвязанных компонентов;

– системно-деятельностный подход к организации учебного процесса (А. Г. Асмолов, Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, А. Н. Леонтьев, Д. Б. Эльконин и др.), ориентирующий на приоритетность активных методов обучения;

– личностно-ориентированный подход к обучению (Е. В. Бондаревская, С. И. Осипова, В. В. Сериков, И. С. Якиманская и др.), рассматривающий учащихся как субъектов образовательного процесса и подразумевающий учет их индивидуальных особенностей в процессе развития ПУУД средствами визуализации;

– когнитивно-визуальный подход (В. А. Далингер, Н. М. Ежова, Н. В. Иванчук, Д. А. Картежников, О. О. Князева, Н. А. Резник и др.) обеспечивающий широкое и целенаправленное использование в процессе обучения понятиям функциональной линии познавательной функции наглядности;

– концепция формирования универсальных учебных действий (А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарскаяи др.), позволяющая выделить основные результаты обучения понятиям функциональной линии через развитие ПУУД учащихся;

– задачный подход в обучении (Г. А. Балл, Ю. М. Колягин, Дж. Пойа, Г. И. Саранцев, А. А. Столяр, Л. М. Фридман и др.), обосновывающий целесообразность создания и применения в процессе обучения понятиям функциональной линии комплекса визуализированных задач как средства развития ПУУД учащихся.

Теоретической основой исследования являются исследования в области теории и методики обучения математике (Л. И. Боженкова, В. А. Далингер, А. Г. Мордкович, Г. И. Саранцев, Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова, В. А. Шершнева, Л. В. Шкерина и др.); исследования по проблеме усвоения информации и распознавания образов (Р. Арнхейм, В. Д. Глезер, Р. Л. Грегори,

В. И. Жуковский, В. П. Зинченко и др.); теории поэтапного формирования умственных действий (П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, Н. Ф. Талызина и др.); теоретические основы информатизации образования (М. П. Лапчик, Е. И. Машбиц, В. М. Монахов, Н. И. Пак, И. В. Роберт и др.); исследования по проблеме учета когнитивных стилей в процессе обучения (Г. А. Берулава, М. Гриндер, В. А. Колга, Б. Лу Ливер, С. Спрингер, М. А. Холодная и др.).

Для решения поставленных задач и достижения цели исследования использовались следующие **методы исследования:** *теоретические* (сравнительный анализ философской, психолого-педагогической и научно-методической литературы по теме исследования; изучение и обобщение отечественного и зарубежного передового педагогического опыта, педагогическое моделирование); *эмпирические* (тестирование, наблюдение, анкетирование, беседа, педагогический эксперимент); *статистические методы измерения и математической обработки экспериментальных данных* (количественный и качественный анализ данных, графическое представление результатов, метод Пирсона).

Эмпирическая база исследования: Лесосибирский педагогический институт – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский федеральный университет», муниципальное базовое образовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа №9» г. Лесосибирска (МБОУ «СОШ №9»). В опытно-экспериментальной работе приняли участие студенты 1 курса физико-математического факультета и учащиеся 7-9 классов. Всего в эксперименте участвовало 337 учащихся, 30 студентов и 53 учителя математики.

Личный вклад соискателя заключается в выдвижении научной идеи; в теоретическом обосновании идей и положений исследования, связанных с развитием ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации; в разработке модели и методики развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации; в разработке

комплекса визуализированных задач; в непосредственном участии в получении и апробации результатов, представленных в диссертации и которые были получены в процессе обучения понятиям функциональной линии учащихся основной школы; в подготовке публикаций, представленных в научных журналах, материалах конференций.

Основные этапы исследования (2012–2018 гг.):

На *первом этапе* (2012-2013 гг.) был осуществлен теоретический анализ степени разработанности проблемы исследования, определены методология, цель и задачи исследования, сформулирована гипотеза исследования, уточнен понятийно-категориальный аппарат исследования, проведен констатирующий эксперимент.

На *втором этапе* исследования (2014-2015 гг.) разрабатывались модель и методика развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации, разрабатывался и апробировался комплекс визуализированных дидактических материалов, проводился поисковый эксперимент.

На *третьем этапе* исследования (2016-2018 гг.) был проведен формирующий педагогический эксперимент, обобщены и систематизированы результаты исследования, сформулированы выводы, оформлено диссертационное исследование.

Научная новизна результатов исследования состоит в следующем:

– разработана научная идея об обеспечении положительной динамики уровня развития ПУУД у учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры за счет целенаправленного включения в их учебно-познавательную деятельность разноуровневых визуализированных дидактических материалов (визуализированных задач и визуальных моделей представления учебной математической информации), сконструированных с опорой на различные сочетания способов представления учебной математической информации, соответствующих когнитивным стилям учащихся;

– предложены этапы и уровни развития ПУУД учащихся, критерии и характеристики уровней развития ПУУД, а также средства их диагностики, использующие дидактические функции визуализированных задач;

– предложена и научно обоснована структурно-функциональная модель развития ПУУД учащихся в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации, состоящая из четырех взаимосвязанных компонентов: целевой, организационно-содержательный, технологический и критериально-оценочный;

– предложена типология визуализированных задач, явно или неявно использующих визуальные образы, построенная с учетом выделенных познавательных универсальных учебных действий учащихся: знаково-символическая деятельность (включая моделирование); умение структурировать знания; поиск и выделение необходимой информации; определение основной и второстепенной информации; выбор наиболее рационального способа решения задачи в зависимости от конкретных условий; анализ объектов с целью выделения признаков; синтез как составление целого из частей; подведение под понятие, выведение следствий; выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов.

– введена в соответствии с ведущей идеей исследования измененная за счет уточнения содержания трактовка понятия «визуализация учебной информации», предложенная Н. А. Неудахиной и О. С. Родя, предполагающая не только чтение и осмысление содержания учащимися представленного материала, но и его преобразование.

Теоретическая значимость исследования обоснована тем, что:

– доказана целесообразность использования визуализированных дидактических материалов в качестве средства развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии курса алгебры;

– применительно к проблематике диссертации результативно использован комплекс теоретических и эмпирических методов исследования в единстве с разработанным комплексом диагностических материалов для изучения динамики

развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии;

– изложены аргументы относительно классификации визуализированных задач по наличию визуального образа в условии и/или требовании задачи;

– раскрыто существенное противоречие между возможностями средств визуализации процесса обучения математике в развитии ПУУД учащихся основной школы и используемыми методиками обучения математике, ориентированными в основном на словесно-символьное изложение учебного материала;

– изучены причинно-следственные связи между реализацией методики развития ПУУД в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации и динамикой уровней развития указанных действий;

– проведена модернизация методики развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры на основе теоретически обоснованной и разработанной структурно-функциональной модели.

Значение полученных результатов исследования для практики подтверждается тем, что:

– разработана и внедрена в учебный процесс методика развития ПУУД учащихся основной школы средствами визуализации в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры, содержательную основу которой составляет разработанный комплекс визуализированных дидактических материалов;

– определены пределы и перспективы практического использования результатов теоретического исследования для развития ПУУД учащихся 7-9 классов, а так же для других возрастных групп при условии разработки соответствующих визуализированных дидактических материалов;

– создан и применен диагностический комплекс, позволяющий определить уровни развития ПУУД у учащихся основной школы;

– представлены методические рекомендации для учителей математики в виде комплекса визуализированных дидактических средств (учебное пособие «Визуализированные задачи по алгебре. Функции и графики» с web-приложением, лабораторный практикум в среде GeoGebra, комплект «рабочих листов», интерактивные визуализированные задачи), обеспечивающего поэтапное развитие ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обусловлена тем, что:

– для экспериментальной части исследования показана воспроизводимость результатов для разных групп учащихся 7-9 классов;

– теория построена на согласованности базовых методологических положений системного, личностно-ориентированного, системно-деятельностного, когнитивно-визуального, задачного подходов, концепции формирования УУД, согласуется с опубликованными исследованиями других авторов по теме диссертации;

– использовано сравнение авторских данных с данными, полученными ранее по рассматриваемой проблеме исследования;

– установлено качественное совпадение авторских результатов с результатами, представленными в независимых источниках по данной тематике, в частности в исследованиях В. А. Далингера, О. А. Ивановой, О. О. Князевой, Н. А. Резник.

– идея развития ПУУД при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации базируется на анализе нормативных и литературных источников, связанных с темой диссертации, результатов проводимых ранее научных исследований, а также на обобщении передового отечественного и зарубежного педагогического опыта;

– использованы современные методики сбора и обработки экспериментальной информации, количественный и качественный анализ данных, графическое представление результатов, методы математической статистики.

Апробация и внедрение ведущих идей и результатов исследования осуществлялись в соответствии с основными этапами исследования в ходе теоретической и экспериментальной работы. Основные теоретические положения и результаты диссертационного исследования обсуждались на заседаниях кафедры высшей математики, информатики и естествознания Лесосибирского педагогического института – филиала ФГАОУ ВО «Сибирского федерального университета» (г. Лесосибирск, 2017, 2018), на городском научно-методическом семинаре «Актуальные проблемы математического образования» (КГПУ им. В. П. Астафьева, г. Красноярск, 2016, 2018); на объединенном семинаре аспирантов и соискателей ОмГПУ (г. Омск, 2017, 2018); на межвузовском семинаре «Актуальные проблемы педагогической науки и образовательной практики» (СФУ, г. Красноярск, 2018); были представлены на научно-практических конференциях различного уровня: городских научно-практических конференциях «Педагогические чтения», «Городской педагогический форум» (г. Лесосибирск, 2017), международных научно-практических конференциях «Герценовские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2012, 2013, 2016, 2017) и «Педагогика и психология: тенденции и перспективы развития» (г. Волгоград, 2015), научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (г. Красноярск, 2014, 2016), научно-методической конференции с международным участием «Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты» (г. Красноярск, 2017).

По результатам исследования автором опубликовано 14 научных работ, в том числе 5 статей в научных журналах, рекомендованных ВАК МОиН РФ.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Средства визуализации (визуализированные задачи и визуальные модели представления учебной математической информации), сконструированные с опорой на всевозможные сочетания способов представления учебной математической информации (словесный, аналитический и графический)

ориентированы на когнитивные стили учащихся и способствуют развитию у них ПУУД при обучении понятиям функциональной линии алгебры в основной школе.

2. Комплекс разноуровневых визуализированных задач и визуальных моделей представления учебной математической информации, составляющий содержательную основу разработанной методики, использующей специальные методические приемы (составление модели Фрейер, «дополни рисунок», «выдели цветом», распределение математических объектов по группам, «заполни таблицу» и др.) и средства ИКТ, актуализирует развитие ПУУД учащихся.

3. Структурно-функциональная модель развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации, состоящая из четырех взаимосвязанных компонентов (целевого, организационно-содержательного, технологического и критериально-оценочного), обеспечивает целенаправленное и планомерное развитие ПУУД.

4. Методика развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии курса алгебры средствами визуализации, реализуемая с учетом разработанной структурно-функциональной модели, и содержательную основу которой составляют визуализированные дидактические материалы, разработанные с учетом этапов (мотивационно-диагностический, операционно-исполнительский, рефлексивно-оценочный) и уровней развития ПУУД (репродуктивный, продуктивный, творческий), обеспечивает положительную динамику уровней их развития.

Структура диссертации обусловлена логикой научного исследования. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 225 страниц. Кроме текстовых материалов в диссертацию включены 45 таблиц и 90 рисунков.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ПОНЯТИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ АЛГЕБРЫ СРЕДСТВАМИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Материал первой главы диссертации посвящен теоретическим основам развития ПУУД учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии курса алгебры. В этой главе раскрыта сущность понятия «универсальные учебные действия», рассмотрены психолого-педагогические основы развития ПУУД в процессе обучения алгебре, теоретически обоснованы роль и место визуализации в развитии ПУУД в процессе обучения понятиям функциональной линии курса алгебры, выделены средства информационно-коммуникационных технологий, применимые для визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии в контексте развития ПУУД и разработана модель развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации.

1.1. Психолого-педагогические основы развития познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения алгебре

Стремительные изменения, происходящие в российском обществе, не могли не коснуться образовательной системы. В современном понимании образованный человек – это, прежде всего, личность, активно и заинтересованно познающая мир, осознающая важность образования и самообразования для жизни и деятельности, умеющая выбирать профессиональный путь, способная творчески мыслить и применять полученные знания на практике.

Поворот к личности обучаемого, учет его интересов и потребностей вывел на первый план идеи развивающего обучения. В связи с этим приоритетным направлением новых образовательных стандартов стала реализация развивающего потенциала общего образования, переход от «знаниевого» подхода к компетентностному. Требования к результатам освоения основных общеобразовательных программ в стандартах второго поколения представлены в виде трех групп – не только предметные, но и метапредметные и личностные.

Развитие личности в системе образования обеспечивается, прежде всего, через формирование *универсальных учебных действий* – метапредметных результатов, составляющих основу важнейшей компетенции личности – *умения учиться*, как основной цели системы образования. Овладение умением учиться предполагает полноценное освоение всех компонентов учебной деятельности. Теоретические основы учебной деятельности составляют культурно-историческая теория деятельности человека Л. С. Выготского [43] и деятельностный подход к происхождению человеческой психологии (А. Н. Леонтьев [112], С Л. Рубинштейн [177]).

В нашей работе мы исследуем развитие ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии посредством визуализации учебного процесса. Поэтому целью данного параграфа является изучение психолого-педагогических трактовок понятия «универсальные учебные действия» и выявление особенностей развития ПУУД при обучении алгебре, в частности понятиям функциональной линии, средствами визуализации.

Рассмотрим основные положения теории деятельности, сформулированные в общей психологии и педагогике, которые являются фундаментальной основой для развития ПУУД учащихся основной школы.

Категория деятельности является одной из самых актуальных в психологии и педагогике на протяжении многих лет. Деятельность определяется как активное взаимодействие человека с окружающей действительностью, в ходе которого человек выступает как субъект, целенаправленно воздействующий на объект и удовлетворяющий таким образом свои потребности [35, с. 166]. В отечественной

психологии наиболее полно теория деятельности разработана А. Н. Леонтьевым [112]. Понимая под деятельностью процессы, осуществляющие жизненное, активное отношение субъекта к действительности, он выделяет следующие ее составляющие: потребность – мотив – цель – условия достижения цели и соотносимые с ними действия.

Деятельность является сложной иерархической системой, общую структуру которой можно представить в виде схемы (рис. 1) [67].

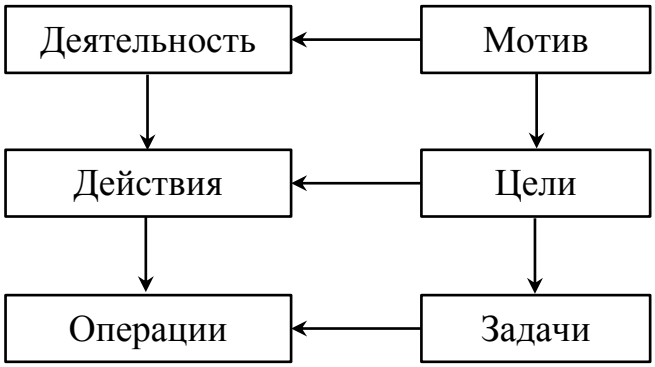


Рисунок 1 – Схема деятельности

Согласно этой схеме, деятельность соотносится с потребностью субъекта, опредмеченной в мотивах, являющихся побудителями деятельности субъекта. Мотивы обусловливают определение цели как субъективного образа желаемого результата ожидаемой деятельности. Цели деятельности определяют выбор действий. Действие А. Н. Леонтьев определяет как «процесс, подчиненный сознательной цели. Подобно тому, как понятие мотива соотносится с понятием деятельности, понятие цели соотносится с понятием действия» [112, с. 52]. Целью действия является реализация деятельности. Способы осуществления действий А. Н. Леонтьев называет операциями. Совокупность операций определяется условиями достижения конкретной цели. Изменение условий влечет за собой изменение операционного состава действия. Цель, переформулированная применительно к определенным условиям, есть задача – искомый результат, который предстоит достигнуть при наличии определенных условий. Действие, как важнейшая «образующая» человеческой деятельности, является основным предметом исследования в психологии и педагогике.

На протяжении многих лет не перестают быть актуальными исследования в области учебной деятельности. Психолого-педагогические аспекты учебной деятельности как теории учения исследованы в работах Л. С. Выготского [43], В. В. Давыдова [56, 57, 58, , 59], О. Б. Епишевой [74, 75, 76], Е. Н. Кабановой-Меллер [95], Н. А. Менчинской [131], А. М. Новикова [152], Н. Ф. Талызиной [192, 193], Г. И. Щукиной [235], Д. Б. Эльконина [237, 238, 239], Н. Я. Чутко [229] и др. Однако, на данный момент понятие «учебная деятельность» не определяется однозначно.

Иногда это понятие отождествляют с понятиями «научения», «учения», «обучения». Так, А. М. Новиков [152] рассматривает «учебную деятельность» как синоним понятия «учения», определяя ее как деятельность обучающегося по овладению новым опытом – привычками, умениями, навыками, знаниями. Он отмечает следующие особенности учебной деятельности:

- направленность на освоение других видов деятельности;
- субъектность (направлена «на себя»);
- инновационность (постоянно направлена на освоение нового для обучающегося опыта);
- ограниченность свободы воли и отсутствие (или ограниченность) собственного целеполагания у обучающегося;
- подверженность влиянию возрастной сензитивности;
- в ходе онтогенеза обучающийся последовательно осваивает способы деятельности, свойственные организационным типам культур (традиционной, ремесленной, профессиональной, проектно-технологической), сформировавшимся в филогенезе в процессе общественно-исторического развития человечества, причем типы организационной культуры не заменяются одну на другую, а присутствуют одновременно, параллельно;
- зависимость структурных компонентов от «образовательных парадигм», обусловленных ведущими типами организационных культур в обществе.

Л. Б. Ительсон [94], Г. И. Щукина [235] и др. разграничивают понятия «учение» и «учебная деятельность», указывая, что второе является более широким по отношению к первому, поскольку оно включает и деятельность обучаемого, и деятельность обучающего.

П. И. Пидкасистый [163] отмечает, что учение может осуществляться как под руководством учителя, так и без него. Учебную деятельность он определяет условно как вид учения, в процессе которого обучающийся усваивает знания, умения и навыки и овладевает способами действий в отношении усваиваемого материала [163, с. 91].

По мнению Д. Б. Эльконина, «учебная деятельность – это деятельность, имеющая своим содержанием овладение обобщенными способами действий в сфере научных понятий … Результатом учебной деятельности, в ходе которой происходит усвоение научных понятий, является изменение самого ученика, его развитие…» [238, с. 252].

Цель учебной деятельности заключается в раскрытии смысла самого процесса учения, а именно, научить детей «умению учиться», что достигается за счет вполне определенной структуры учебной деятельности, включающей в себя учебные мотивы, учебную цель, учебную задачу, учебные действия и операции (ориентировку, преобразование материала, контроль и оценку), что соответствует общей схеме деятельности (рис. 1).

Учебные действия и учебная задача многими исследователями выделяются как основные структурные компоненты учебной деятельности.

О. Б. Епишева отмечает: «Учебная задача – это обобщенная цель деятельности, поставленная (сформулированная) перед учащимися в виде обобщенного учебного задания… Такое обобщенное учебное задание создает учебную проблему (проблемную ситуацию). Разрешая ее, учащиеся овладевают соответствующими знаниями и умениями, развивают свои личностные качества, направленные на «умение учиться», т. е. достигают поставленной цели» [76, с. 5].

Учебная задача, в отличие от других видов решаемых человеком задач, обеспечивает усвоение им обобщенного способа решения некоторого класса

конкретно-практических (частных) задач. Постановка учебной задачи является мотивационно-ориентировочным компонентом учебной деятельности.

Решение учебной задачи связано с выполнением особой системы учебных действий, включающей в себя:

1) преобразование ситуации для обнаружения всеобщего отношения рассматриваемой системы (анализ содержания задачи, установление связей между данными и искомыми величинами, выявление их особенностей);
2) моделирование выделенного отношения в графической и знаковой форме;
3) преобразование модели отношения для изучения ее свойств в чистом виде (основа формирования у учащихся общего способа решения учебной задачи);
4) выведение и построение серии частных конкретно-практических задач, решаемых общим способом (усвоенным при осуществлении предыдущих учебных действий);
5) контроль за выполнением предыдущих действий;
6) оценку усвоения общего способа решения данной учебной задачи [49].

Пункты 1)-4) характеризуют операционно-исполнительский, а 5)-6) – контрольно-оценочный компоненты учебной деятельности.

Таким образом, учебные мотивы, учебная цель, учебная задача, учебные действия и операции являются структурными компонентами учебной деятельности, а функциональными являются мотивационно-ориентировочный, операционно-исполнительский и контрольно-оценочный компоненты.

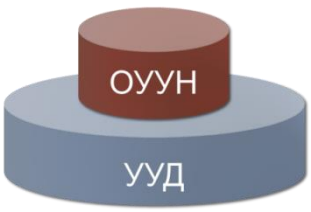
В учебной деятельности человек решает два типа задач: познавательного и тренировочного характера. Решение познавательных задач является результатом учебно-познавательной деятельности – понятие более узкое, чем понятие «учебная деятельность». Понятие познавательная деятельность более широкое, чем два предыдущих, так как познание осуществляется не только в целях учения, но и для открытия нового в науке. Поэтому для школьников познавательная

деятельность протекает, как правило, в учебно-познавательной форме [76, с. 5]. «При организации учебно-познавательной деятельности учитель воссоздает опыт познавательной деятельности, накопленный человечеством, опыт, кристаллизующийся в виде знания о мире в широком значении этого слова» [106, с. 32].

Согласно ФГОС ООО, основным структурным компонентом учебно-познавательной деятельности учащихся основной школы являются УУД.

Понятие «универсальные учебные действия» соотносится с традиционными для дидактики и методики обучения математике категориями: «общеучебные умения», «обобщенные умения», «метапредметные умения». Анализ научной литературы показал, что чаще всего УУД сравнивают с общеучебными умениями и навыками. Различные подходы к соотношению между УУД и общеучебными умениями и навыками (ОУУН) представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Наглядное представление подходов к соотношению УУД и ОУУН

№ пп	Представители	Модель
1	Воровщиков, В. Г. [194], [42], Татьянченко Д. В. [194], Орлова Е.В. [42] и др.	УУД отождествляются с ОУУН
2	Асмолов А. Г. [16], [17], Бурменская Г. В. [16], [17] Володарская И. А. [16], [17] и др.	ОУУН включены в УУД
3	Перминова Л. М. [162], Пурышева Н. С. [169], Ромашкина Н. В. [169], Крысанова О. А. [169]	 ОУУН имеют в своей основе УУД

Появление указанных трактовок связано, как показывает анализ, с попытками установить соответствие между психологическим пониманием учебного действия и дидактическим пониманием умения. В нашем исследовании мы будем придерживаться точки зрения разработчиков ФГОС ООО (вторая модель), подразумевая под УУД совокупность способов действия учащегося, а также связанных с ними навыков учебной работы, обеспечивающих его способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая и организацию этого процесса [16].

В широком смысле термин универсальные учебные действия означает способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию через сознательное и активное присвоение социального опыта. Согласно А. Г. Асмолову [16], универсальные учебные действия – это «обобщенные действия, порождающие широкую ориентацию учащихся в различных предметных областях познания и мотивацию к обучению».

Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что универсальные учебные действия – это совокупность обобщенных действий учащихся, направленных на организацию своей учебной деятельности, ее осуществление и управление ею. Таким образом, образовательный результат школьников будет зависеть от многообразия видов и уровней развития универсальных учебных действий.

В основу выделения состава и функций УУД для основного общего образования (таблица 2) разработчики программы развития универсальных учебных действий положили возрастные психологические особенности учащихся и специфику возрастной формы УУД, факторы и условия их развития, раскрытые в работах известных психологов и педагогов Л. И. Божович, А. Л. Венгера, Л. С. Выготского, В. В. Давыдова, Л. Кольберга, А. К. Марковой, Я. А. Пономарева, Д. И. Фельдштейна, Г. А. Цукерман, Б. Д. Эльконина, Д. Б. Эльконина, Э. Эриксона и др.

Таблица 2 – Состав и функции универсальных учебных действий учащихся основной школы

	Виды УУД			
	Личностные	Регулятивные	Познавательные	Коммуникативные
Функции	Обеспечивают ценностно-смысловую ориентацию учащихся, а также ориентацию в социальных ролях и межличностных отношениях	Обеспечивают организацию учащимися своей учеб-ной деятельности	Обеспечивают развитие когнитивной компетенции	Обеспечивают социальную компетентность и сознатель-ную ориентацию учащихся на пози-ции других людей, партнера по обще-нию или деятель-ности
Состав	Жизненное, личностное, профессиональное самоопределение; дейст-вия смыслообразо-вания и нравствен-но-этического оценивания, реализуемые на основе ценностно-смысловой ориентации учащихся	Целеполагание; планирование; составление плана и последовательности действий; прогнозирование; контроль; коррекция; оценка; элементы волевой саморегуляции как способности к мобилизации сил и энергии, волевому усилию – к выбору в ситуации мотивационного конфликта и к преодолению препятствий	Общеучебные действия, включая знаково-символические; логические учебные действия; действия постановки и решения проблемы	Планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками; постановка вопросов; разрешение конфликтов; управление поведени-ем партнера; умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответ-ствии с задачами и условиями коммуни-кации; владение монологической и диалогической формами речи

В научных кругах такая классификация УУД встречает критику. Так, А. В. Хуторской отмечает: «Включение в стандарты метапредметности, на мой взгляд, прогрессивный шаг. Но сделано это без должного научного обоснования, с неправомерным отождествлением метапредметной и общеучебной деятельности, подменой педагогических и дидактических понятий психологическими. … Суть метапредметного содержания образования в нынешней версии стандартов не раскрыта. В результате метапредметность образовательных результатов для большинства учителей, методистов, авторов учебников, управленцев образования, осталась малопонятным требованием. Попытки разработчиков стандартов

отыскать метапредметность в известных психологических теориях Л. С. Выготского, В. В. Давыдова, Д. Б. Эльконина, в которых ее никогда не существовало, вносит еще большую неразбериху. Учителям нынешний стандарт непонятен» [225]. Говоря о том, что все УУД формируются у каждого конкретного ученика на основе его личного опыта, А. В. Хуторской возражает против выделения личностных УУД: «Если же разработчики стандартов считают, что с одной стороны есть личностные результаты образования, а с другой – неличностные (метапредметные и предметные), тогда это противоречит самой концепции личностно-ориентированного образования, поскольку ведет к отчуждению планируемого образования (предметного и метапредметного) от личности учащихся» [Там же].

Этого же мнения придерживаются С. Г. Воровщиков и Е. В. Орлова [42]. Анализируя классификацию УУД, предложенную разработчиками стандартов второго поколения (таблица 2), они приходят к выводу, что «…перечень универсальных учебных действий не может считаться корректной классификацией, ибо в ней не соблюдены все основные правила классификации» [42, с. 42] и выделяют следующие недостатки:

1. Из группы коммуникативных УУД, а именно из действия «управление поведением партнера: контроль, коррекция, оценка действий партнера» исключено действие «планирование». В регулятивных же действиях «планирование» включено, так как в основу определения данных действий положен целостный управленческий цикл. Тем самым нарушено правило одного основания.

2. В группе «логические действия» включено действие «подведение под понятие» – суть дедуктивное обобщение, и не включено индуктивное обобщение. Тем самым нарушено правило соразмерности (сумма видов должна равняться делимому роду).

3. Формулировка «выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов» означает, что в ней представлено одно действие, что нарушает логику и ведет к неверному представлению о таких самостоятельных

логических действиях, как сравнение, сериация, классификация. Тем самым нарушено правило непрерывности классификации (подразделение на виды должно быть последовательным и многоступенчатым).

«Универсальные учебные действия» многозначная категория, поэтому создание единой классификации этих действий вызывает определенную трудность и встречает критику.

Аналогичные споры идут в научных кругах относительно классификации общеучебных умений и навыков. Перечень видов общеучебных умений и навыков у различных авторов практически одинаков, хотя и приводятся различные их группировки:

– учебно-управленческие (умения, обеспечивающие планирование, организацию, контроль, регулирование и анализ собственной учебной деятельности учащимися), учебно-информационные (умения, обеспечивающие нахождение, переработку и использование информации для решения учебных задач), учебно-логические (умения, обеспечивающие четкую структуру процесса постановки и решения учебных задач), учебно-организационные (С. Г. Воровщиков и Д. В. Татьянченко [194]);

– умения и навыки планирования учебной деятельности, умения и навыки организации своей учебной деятельности, умения и навыки восприятия информации, общелогические умения и навыки, умения и навыки оценки и осмысливания результатов своей деятельности (Г. К. Селевко [180]);

– учебно-организационные (обеспечивают планирование, организацию, контроль, регулирование и анализ собственной учебной деятельности учащимися), учебно-информационные (обеспечивают школьнику нахождение, переработку и использование информации для решения учебных задач), учебно-интеллектуальные (обеспечивают четкую структуру содержания процесса постановки и решения учебных задач), учебно-коммуникативные (позволяют школьнику организовать сотрудничество со старшими и сверстниками, достигать с ними взаимопонимания, организовывать совместную деятельность с разными людьми) (Н. А. Лошкарева [121, 122]);

– когнитивные (познавательные.), креативные (творческие), оргдеятельностные (методологические), коммуникативные, мировоззренческие (эмоционально-ценностные установки) (А. В. Хуторской [225]).

Отсутствие единой классификации можно объяснить тем, что основанием для нее служит учебно-познавательная деятельность, а перечисленные ОУУН и УУД не существуют изолированно друг от друга, а находятся в постоянном взаимодействии.

Принимая во внимание критику, в нашем исследовании (вслед за Л. И. Боженковой [32, 33], Д. С. Елисеевой [72], М. А. Куприяновой [107], Е. А. Пустовит [170] и др.) будем придерживаться классификации УУД, указанной в таблице 2.

Анализ научной литературы показал, что эффективным средством формирования и развития УУД, в том числе и ПУУД, выступают:

- специально разработанная система заданий и задач, направленная на формирование логических умений и навыков у учащихся и постепенный их переход к выполнению УУД (Е. В. Яковлева [241]);
- комплекс задач, обладающий свойствами целостности, делимости, структурности, интегративности, иерархичности (М. С. Соловьева [186]);
- комплекс задач с модулем, включающий базовые, систематизирующие и интегрирующие типы задач (Е. А. Пустовит [169]);
- навыки самостоятельного составления задач (М. А. Куприянова [107]);
- межпредметные и подчиненные им понятия (О. А. Иванова [87, 88]);
- средства проектной технологии и включение учащихся в учебно-исследовательскую деятельность (Э. Г. Гельфман [46], А. Г. Подстригич [46], Л. А. Теплоухова [195]);
- комплекс учебных текстов и заданий, использующий предметный опыт учащихся (Л. Ю. Новикова [154]).

В то же время, вопрос о развитии ПУУД в процессе обучения алгебре не достаточно изучен.

Функции и состав ПУУД, выделенных согласно ФГОС ООО, приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Функции и состав ПУУД

Вид ПУУД	Функции ПУУД	Состав ПУУД
Общеучебные действия	Обеспечение готовности осуществлять направленный поиск, обработку и использование информации	– самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; – поиск и выделение необходимой информации; – применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств; – знаково-символические действия, включая моделирование (преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта, и преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область); – умение структурировать знания; – умение осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной и письменной форме; – выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; – рефлексия способов и условий действий; – контроль и оценка процесса и результатов деятельности; – смысловое чтение как осмысление цели чтения и выбор вида чтения в зависимости от цели; – извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров; – определение основной и второстепенной информации; – свободная ориентация и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально-делового стилей; – понимание и адекватная оценка языка средств массовой информации; – умение адекватно, подробно, сжато, выборочно передавать содержание текста, составлять тексты различных жанров, соблюдая нормы построения текста

Продолжение таблицы 3

Вид ПУУД	Функции ПУУД	Состав ПУУД
Логические действия	Обеспечение инструментальной основы мышления и решения проблем, в том числе исследовательских	– анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); – синтез как составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов; – выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов; – подведение под понятия, выведение следствий; – установление причинно-следственных связей; – построение логической цепи рассуждений, доказательство; – выдвижение гипотез и их обоснование
Действия постановки и решения проблем	исследование проблемной области с выделением цели как образа потребного будущего, стратегии и тактики ее достижения	– формулирование проблемы; – самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера

Развитие указанной системы ПУУД осуществляется в рамках нормативно-возрастного развития личностной и познавательной сфер ребенка. Процесс обучения задает содержание и характеристики учебной деятельности школьника и тем самым определяет зону ближайшего развития УУД [17].

Период формальных операций, по Ж. Пиаже, начинается с 11-12 лет. В это время происходит качественная перестройка интеллекта от наглядно-образной формы к словесно-логической форме (13-14 лет). Этим обосновывается доступность и посильность развития ПУУД именно в 7-9 классах. Осуществить более комфортный и плавный переход к теоретическому мышлению с учетом индивидуальных особенностей учащихся позволит визуализация учебной информации.

Овладение учащимися ПУУД происходит в процессе освоения различных дисциплин, каждая из которых обладает различным потенциалом для развития ПУУД, определяемым функцией и содержанием учебного предмета. Так, ряд

исследователей (Л. И. Боженкова [33], М. А. Куприянова [107], Е. А. Пустовит [170], С. В. Чопова [227] и др.) отмечают особую роль математики в развитии ПУУД.

Соглашаясь с мнением Л. И. Боженковой [33], что в развитии логических ПУУД приоритет отдается школьному курсу геометрии, мы считаем, что именно изучение символьного языка школьного курса алгебры играет важнейшую роль в развитии знаково-символических действий (включая моделирование), входящих в состав общеучебных ПУУД.

Учитывая, что ПУУД представляют собой совокупность качественно различных УУД, находящихся между собой в сложных динамических отношениях и объединенных общей целью функционирования, и отдавая приоритет *знаково-символическим действиям* (*включая моделирование*), выделим ПУУД, преимущественно развивающиеся у учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения алгебре (рисунок 2).

Рисунок 2 – ПУУД, преимущественно развивающиеся у учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения алгебре

Опираясь на составы выделенных ПУУД, подробно представленных в работах Л. И. Боженковой [32, 33] и Н. Г. Салминой [178], отметим, что основу знаково-символических действий учащихся в процессе обучения алгебре составляет умение осуществлять перевод (перекодировку) учебной информации с одного способа представления на другой и моделирование. При разнонаправленных переходах между текстом, формулой или рисунком также активно формируются действия поиска и выделения необходимой информации, умение структурировать знания, действия определения основной и второстепенной информации, выбор наиболее рационального способа решения задачи. Выполняя указанные действия, учащиеся овладевают и логическими ПУУД, необходимыми для осуществления общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики, в частности алгебры. Все это свидетельствует о взаимосвязи и условности деления ПУУД.

Основной деятельностью при обучении математике является решение задач. Поэтому к основным средствам визуализации, направленным на развитие ПУУД в процессе обучения алгебре мы относим визуализированные задачи. Однако, в обучении алгебре, не менее важную роль выполняют действия по структурированию и преобразованию информации и знаний. Результатом выполнения этих действий посредством визуализации являются визуальные модели представления учебной математической информации (схемы поиска решения задачи, предписания для решения алгебраических задач определенного класса, таблицы, модель Фрейер, классификационные схемы, кластеры, фреймы и т.п.).

Развитие ПУУД – организованный, планомерный процесс. Опираясь на исследования Л. И. Боженковой [32, 33], Е. А. Пустовит [170] и учитывая функциональные компоненты учебной деятельности, выделим этапы развития ПУУД основной школы в процессе обучения алгебре, цели этапов и содержание деятельности учителя и учащихся на каждом этапе (таблица 4).

Таблица 4 – Этапы развития ПУУД в процессе обучения алгебре

№ п/п	Этапы	Цели этапов	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
1.	Мотивационно-диагностический	Диагностика наличного уровня развития ПУУД учащихся основной школы и мотивация к его повышению	Оценка уровня развития ПУУД, мотивация ПУУД, подбор и демонстрация комплекса визуализированных задач для актуализации знаний учащихся, подведение к постановке учебной задачи	Осознание учащимися наличного уровня развития ПУУД; решение визуализированных задач на актуализацию знаний и состава ПУУД, необходимого для изучения нового содержания; формулировка учебной задачи
2.	Операционно-исполнительский	Введение ПУУД, его осознание и совершенствование (применение ПУУД в измененных условиях)	Подбор и предъявление комплекса задач, направленного на ознакомление с сутью ПУУД; организация учителем обобщающей беседы с учащимися и демонстрация приема; организация индивидуальной поисковой деятельности учащихся и использование ПУУД при усвоении учебной информации; организация выполнения действия и контроля освоения учебной информации с использованием ПУУД	Решение визуализированных задач для обеспечения понимания операций, входящих в состав ПУУД; «открытие» ПУУД при изучении учебного содержания школьного курса алгебры; явное использование ПУУД при решении задач различного уровня сложности с дальнейшим использованием ПУУД в новых условиях
3.	Рефлексивно-оценочный	Определение уровня развития ПУУД, самоконтроль, самооценка и самокоррекция деятельности	Обеспечение итоговой регуляции результатов усвоения учебной информации и ПУУД	Отчет в устной или письменной форме о результатах решения учебной задачи и примененных для усвоения алгебры ПУУД; мотивация на повышение уровня развития ПУУД

Процесс развития ПУУД выступает как процесс постепенной передачи учителем функций управления самим учащимся. При этом развитие ПУУД на каждом этапе осуществляется в неразрывном единстве с освоением учебного содержания. Важно отметить, что в процессе развития ПУУД происходит не принижение, а соподчинение роли знаний. Вне ситуации получения знаний

невозможно развитие ПУУД. Процессы получения знаний и развития ПУУД органично связаны между собой. Усвоение нового знания необходимо организовывать с опорой на деятельностные технологии, способствующие развитию ПУУД. А применяя уже полученное знание для решения учебных и практических задач, нужно создавать ситуации для применения ПУУД.

Образовательный результат учащихся будет зависеть от многообразия видов и уровней развития ПУУД. Уровни развития ПУУД зависят от степени выраженности критериев развития и характера учебно-познавательной деятельности учащихся. В качестве критериев выступают знания и способы действий, приобретенные в процессе обучения алгебре. Опираясь на исследования В. П. Беспалько [30], Д. С. Елисеевой [72], Е. А. Пустовит [170], выделим три уровня развития ПУУД: репродуктивный, продуктивный и творческий. Характеристики каждого из предложенных уровней и описание критериев развития ПУУД приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Уровни и критерии развития ПУУД учащихся основной школы

№ п/п	Уровень	Основные характеристики уровня
1	Репродуктивный	Учащийся владеет базовыми знаниями, умениями и навыками; ориентируется в фундаментальных понятиях по изучаемому материалу; применяет только предложенный учителем способ получения информации; действует по образцу, подражая действиям учителя или сверстников, может допускать ошибки. При изменении условий задачи не может самостоятельно внести коррективы в действие
2	Продуктивный	Учащийся применяет базовые знания и владеет приемами действий в измененных для него ситуациях; владеет навыками, способствующими более глубокому и осознанному усвоению изучаемого материала; при изменении условий задачи может самостоятельно внести коррективы в действие
3	Творческий	Учащийся хорошо владеет интегрированными знаниями и умеет их применять в рамках знакомой и новой, нестандартной для него ситуации; создает новые правила, алгоритмы действий на основе развернутого, тщательного анализа условий познавательной задачи и ранее усвоенных способов действий; обобщение ПУУД на основе выполнения общих принципов построения новых способов действий и выведение нового способа для каждой конкретной задачи

Таким образом, проведенный в ходе нашего исследования анализ психолого-педагогической, философской литературы и научных подходов к проблеме формирования и развития ПУУД, позволил установить, что:

– овладение учащимися основной школы ПУУД происходит в контексте различных учебных предметов, каждый из которых обладает различным потенциалом для развития ПУУД, определяемым функцией и содержанием учебного предмета;

– ПУУД учащегося основной школы представляют собой совокупность качественно различных УУД, находящихся между собой в сложных, динамических отношениях и объединенных общей целью функционирования;

– развитие ПУУД осуществляется в соответствии с нормативно-возрастным развитием личностной и познавательной сфер ребенка;

– развитие ПУУД – организованный, планомерный процесс, состоящий из трех этапов, выделенных с учетом функциональных компонентов учебно-познавательной деятельности (мотивационно-диагностический, операционно-исполнительский и рефлексивно-оценочный), при этом развитие ПУУД на каждом этапе осуществляется в неразрывном единстве с освоением учебного содержания;

– уровни развития ПУУД (репродуктивный, продуктивный, творческий) определяются степенью выраженности критериев развития и характера учебно-познавательной деятельности учащихся, где в качестве критериев выступают знания и способы действий, приобретенные в процессе обучения;

– визуализация учебной математической информации может выступать в качестве средства развития ПУУД в процессе обучения алгебре.

1.2. Роль и место визуализации в развитии познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры

В рамках данного параграфа определим роль и место визуализации в развитии ПУУД в процессе обучения понятиям функциональной линии учащихся основной школы, исследуем специфику средств визуализации.

Понятие визуализации в науке имеет множество значений в зависимости от сферы и контекста его применения. В рамках настоящего исследования, визуализация будет рассматриваться с точки зрения обучения математике.

Развитие информационно-коммуникационных технологий, критика мышления как преимущественно логико-вербальной деятельности, открытие функциональной асимметрии полушарий головного мозга послужили основанием все возрастающего внимания к наглядности, визуализации, развитию визуального мышления со стороны современных педагогов и психологов.

На протяжении долгого времени понятия «мышление», «рациональность» соотносились только с логико-вербальной деятельностью. Считалось, что мышление есть «…высшая ступень человеческого познания» [113, с. 435], так как мышление, а также рациональная, логико-вербальная деятельность качественно превосходят принципиальные возможности чувственного уровня познания мира.

Признание равноценности различных видов мышления было характерно для гештальтпсихологии. Продуктивное мышление, по мнению одного из основателей гештальтпсихологии Макса Вертгеймера [93], есть форма активного поиска способов целостного видения задачи, переструктурирования задачи в плане ее целостности или целостного понимания. Все это, фактически, есть форма деятельности визуального мышления, и вряд ли можно считать ее менее качественной, чем логико-вербальную.

Смена парадигмы «…от теории тотального доминирования левого полушария … к гипотезе парциальной доминантности и взаимодействия полушарий» [166, с. 322] произошла благодаря открытию функциональной

асимметрии полушарий головного мозга американским неврологом Р. Сперри. Функциональная роль полушарий головного мозга в формировании психики человека различна, но ни левое, ни правое полушарие не имеют преимуществ друг перед другом.

Большие полушария головного мозга человека различаются по способам переработки информации и по использованию когнитивных стратегий. Особенности работы и развития левого и правого полушарий мозга человека отражены в исследованиях В. В. Аршавского [15], А. С. Батуева [26], С. М. Бондаренко [176], Н. Н. Брагиной [37], В. Д. Глезер [48], Т. А. Доброхотовой [37], Д. Дрейча [188], Р. Ю. Ильюченок [92], В. П. Леутина [117], Б. Л. Ливер [118], А. Р. Лурия [123], Е. И. Николаевой [117], Н. Н. Николаенко [150], В. С. Ротенберга [176], С. Спрингер [188], Е. Д. Хомской [224] и др. Специфика работы левого и правого полушарий головного мозга человека нами представлена в таблице 6.

Таблица 6 – Специфика работы левого и правого полушарий мозга человека

Параметры	Левое полушарие	Правое полушарие
1. Вид воспринимаемой информации	Дискретная,вербальная,символы, временные отношения	Непрерывная, невербальная (в т.ч. и музыка), эмоциональные стимулы, пространственные отношения
2. Способ обработки информации	Последовательный, линейный, медленный	Параллельный, быстрый
3. Принцип обработки информации	Работает как цифровая система	Работает как аналоговая система
4. Восприятие	Унимодальное, аналитическое, абстрактное, приятного, смешного	Поли(интер)модальное, синтетическое, симультанное (гештальт), конкретное, неприятного, ужасного
5. Память	Словесная, произвольная	Образная, непроизвольная
6. Виды мышления	Вербальное, формально-логическое, аналитическое	Наглядно-образное, (практическое, действенное), интуитивное
7. Выполнение операций	Устная речь, чтение, письмо, счет	Метафорный смысл речи, интонация, эмоциональная окраска устной речи, слежение за движущимися предметами, пение, музыка, артистичность,
8. Коммуникация	Вербальное общение	«Доречевое» общение, мимико-жестикулярная речь
9. Эмоции	Положительные	Отрицательные

Таким образом, каждое полушарие мозга человека является самостоятельной системой восприятия внешнего мира, переработки информации о нем и планирования поведения в этом мире. Левое полушарие специализируется на вербально-символических функциях, а правое – на пространственно-синтетических функциях.

Предпосылки функциональной асимметрии полушарий мозга человека являются врожденными. По мере взросления ребенка происходит усложнение проявлений межполушарной асимметрии, хотя механизмы нарастания до сих пор не совсем ясны. Появление истинной межполушарной асимметрии можно отнести к периоду созревания регулирующей функции речи в психической деятельности (от 7 до 12 лет) [166].

Традиционно все люди делятся на три группы с разной функциональной организацией полушарий мозга:

- доминирование левого полушария (левополушарные люди) – словесно-логический характер познавательных процессов, склонность к абстрагированию и обобщению;
- доминирование правого полушария (правополушарные люди) – конкретно-образное мышление, развитое воображение;
- отсутствие ярко выраженного доминирования одного из полушарий (равнополушарные люди или амбидекстры).

А. И. Захаров [82] отмечает, что у каждого третьего человека вообще нет преобладания особенностей работы одного из полушарий. У остальных людей можно говорить об относительно большей функциональной активности того или иного полушария. Деление людей на правополушарных и левополушарных носит упрощенный характер, позволяющий много в человеческой личности увидеть яснее.

Мозг человека функционирует как единое целое, благодаря межполушарному взаимодействию. Осуществляя функцию видения мира, правое полушарие, целостно восприняв информацию и начав ее обработку раньше левого, имеет некоторое преимущество перед ним. Оперирование образами

правого полушария приводит к функционированию части связей на неосознаваемом уровне. Включение этих связей в другой контекст может способствовать их осознанию. В этом случае говорят об интуиции (озарении, инсайте), в результате которой неосознаваемые связи переводятся на язык сознания, вербализируются. Таким образом, интуицию можно охарактеризовать как передачу информации правым полушарием левому.

В своем исследовании мы придерживаемся мнения ряда исследователей (М. А. Холодная [223], Б. Л. Ливер [118] и др.), которые связывают специализацию полушарий головного мозга с проявлением у человека того или иного когнитивного стиля, отражающего различия в характере восприятия и переработки информации.

М. А. Холодная определяет когнитивные стили, как «высокоорганизованный механизм регуляции интеллектуальной деятельности, влияние которого обнаруживается в широком спектре ситуаций (в том числе учебных)» [223 ,с. 337].

Анализ научной литературы по проблеме когнитивных стилей позволил сделать вывод, что, являясь процессуальной характеристикой познавательной деятельности, когнитивные стили отражают особенности познавательных процессов (в первую очередь восприятия и мышления). Каждый когнитивный стиль представляет собой биполярное измерение, описывающее определенный аспект познавательного процесса. Например, дифференцированность поля, предложенная Г. Уиткиным (H. Witkin) [245], описывается с помощью параметров «полезависимость-поленезависимость».

В настоящее время выделено более десятка различных когнитивных стилей. Наиболее изученные и важные из них с точки зрения понимания процесса обучения и развития ПУУД представлены в таблице А.1 (Приложение А). Исследуя вопрос о когнитивных стилях как регуляторах мировосприятия личности, И. П. Шкуратова пишет: «Большая часть когнитивных стилей (когнитивная сложность, понятийная дифференцированность, сглаживание-заострение и др.) связана со степенью аналитичности-синтетичности восприятия

объектов или, иначе говоря, с жесткостью критерия при оценке сходства или различий между объектами» [232, с. 256]. Такого же мнения придерживается в своей работе В. А. Колга [102]. Иллюстрируя на примере стиля «аналитичность-синтетичность», он показал, что максимальная обучаемость и успеваемость наблюдается тогда, когда стиль не является ярко выраженным. «Синтетичность» познавательных процессов способствует переносу умения решать сходные задачи, а «аналитичность» – решению разнотипных задач, поэтому в совокупности оба эти умения определяют успешность при обучении решению определенного класса задач.

Проявление указанных стилей (особенно «аналитичность-синтетичность») и межполушарной асимметрии головного мозга оказывают существенное влияние на результаты учебно-познавательной деятельности в процессе обучения алгебре. Поэтому становится актуальным при обучении понятиям функциональной линии курса алгебры в основной школе ориентироваться на когнитивные стили учащихся, влияющие на развитие ПУУД.

Г. Уиткин (H. Witkin) [245] в 1976 г. выдвинул концепцию стилевой мобильности, подразумевающей возможность индивида вырабатывать качества не свойственного ему когнитивного стиля. Как отмечает, И. П. Шкуратова, «лица, имеющие крайнюю степень выраженности любого из когнитивных стилей менее адаптивны, чем те, кто располагается в среднем диапазоне. Самыми адаптивными являются люди с мобильным когнитивным стилем, т. е. умеющие произвольно менять настройки своего когнитивного аппарата, исходя из требований ситуации» [232, с. 257].

Ресурс мобильности когнитивного стиля можно актуализировать в процессе специально организованного обучения. Учет когнитивного стиля в этом случае подразумевает, что учитель «должен рассматривать его как фундамент, стартовую площадку для индивидуального, личностного развития ученика, которую нельзя игнорировать, но надо расширять и наращивать» [135, с. 59]. На практике же учителями общеобразовательных учреждений довольно редко учитываются данные об индивидуальном профиле межполушарной асимметрии мозга и

когнитивных стилей, по которым можно проследить особенности протекания ряда психических процессов.

Сводная характеристика когнитивных стилей и типы предпочитаемых учебных заданий (по Б. Л. Ливер [118]) приведены в таблице А.1 (Приложение А).

По мнению Бетти Лу Ливер [118], учащиеся с доминированием правого полушария чаще всего одновременно являются и учащимися аудиального типа, контекст-зависимыми (полезависимыми), а также склонны к синтезу, индукции и усреднению. Левополушарные учащиеся обычно относятся к визуальному типу, ориентированы на дедукцию и анализ, являются усилителями. Поэтому диагностировать часть когнитивных стилей можно на основании диагностики степени выраженности право-, левополушарности. Однако, как отмечают Н. Л. Стефанова [135], Н. С. Подходова [135] и др., «одним из наиболее эффективных методов исследования когнитивных стилей является наблюдение, в котором основной упор делается на анализ затруднений и ошибок учеников, включая в число возможных причин неудач особенности восприятия и переработки информации» [135, с. 58].

В таблице 7 приведен ряд индикаторов, демонстрирующих различия между левополушарными и правополушарными учениками [53].

Таблица 7 – Отличия левополушарных и правополушарных учащихся

Левополушарный ученик	Правополушарный ученик
Видит символы (буквы, слова)	Видит конкретные образы
Оценки выше тройки	Рискует отставать в чтении, математике
Необходимы ясные инструкции, дискомфорт с незавершенными творческими инструкциями	Любит самостоятельные решения, использует интуицию, отвечает на личностные отношения, а не на авторитарные
Любит проверять работу	Не любит проверять работу
Выказывает визуальные поведенческие индикаторы	Выказывает кинестетические поведенческие индикаторы
Любит информацию в письменной форме, повторяет фактическую информацию	Любит информацию в виде графиков, карт, демонстраций и т.д.
Фокусирован внутренне	Фокусирован на внешнее, отвлекаемость
Анализирует от части к целому	Анализирует от целого к части
Переживает реальность после чтения о ней, любит смотреть фильм после чтения книги	Переживает реальность до чтения о ней, любит смотреть фильм до чтения книги

Учебный предмет «математика» как нельзя лучше демонстрирует различия в обучении правополушарных и левополушарных учеников. Правополушарные учащиеся более успешны в геометрии, благодаря ее пространственной природе. Изучение алгебры предполагает логически последовательное мышление, что является преимуществом левополушарных учащихся. Так как специфика содержания учебного предмета алгебра подразумевает ориентацию на учеников с левополушарным доминированием и аналитическим когнитивным стилем, то правополушарные дети с преобладанием синтетического когнитивного стиля, как правило, оказываются неуспешными. Очень часто про таких учеников можно услышать «ему не дано», «не способен к математике». По мнению А. И. Захарова [82] «левополушарный» акцент в обучении способствует развитию у детей неврозов. Причиной невротизации детей является торможение активности ведущего полушария и перегрузка менее активного.

Для полноценной и гармоничной учебно-познавательной деятельности при обучении алгебре, в частности понятиям функциональной линии, необходимо организовать взаимодополняющий и одновременно синхронный режим работы обоих полушарий головного мозга. А. Г. Мордкович по этому поводу пишет: «…меньше схоластики, меньше формализма, меньше «жестких моделей», меньше опоры на левое полушарие мозга … больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше «мягких моделей», больше опоры на правое полушарие мозга» [144, с. 7].

Ослабить доминанту левого полушария и обеспечить сбалансированное развитие обоих полушарий головного мозга при обучении понятиям функциональной линии возможно с помощью визуализации, предполагающей наличие как традиционно наглядных, так и специальных средств и приемов, позволяющих активизировать работу зрения с целью получения продуктивных результатов. Визуализация в процессе развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры позволяет создавать условия не только для актуализации наличных когнитивных стилей учащихся, но и для обогащения и мобильности (гибкости) когнитивных стилей,

подразумевающих возможность перехода с одного полюса стиля на другой в зависимости от собственных потребностей и требований учебной ситуации.

Термин «визуализация» происходит от латинского visualis – воспринимаемый зрительно, наглядный. Визуализация – способ трансформации информации в зрительно воспринимаемую форму: диаграмму, график, рисунок, структурно-логическую схему, таблицу и т. д. Правда такое понимание визуализации предполагает минимальную мыслительную и познавательную активность обучающихся, а визуальные дидактические средства выполняют лишь иллюстративную функцию [198]. Учитывая это, А. А. Вербицкий [41] определяет процесс визуализации как свертывание мыслительных содержаний в наглядный образ; будучи воспринятым, образ может быть развернут и служить опорой адекватных мыслительных и практических действий.

Учитывая вышесказанное, уточним определение визуализации учебной информации, предложенное Н. А. Неудахиной и О. С. Родя [149]. Под *визуализацией учебной информации* будем понимать отбор, структурирование и оформление учебного материала в визуальный образ, опирающиеся на различные способы представления информации и взаимосвязи между ними, способствующие активной работе мышления обучающихся при зрительном восприятии, осмыслении и/или преобразовании содержания представленного материала.

Визуализация в процессе обучения понятиям функциональной линии предполагает наличие визуального образа в исходной учебной математической информации или требует от учащихся его создания или преобразования.

Отметим, что с развитием менеджмента и инженерии знаний, в научной литературе встречается различие понятий «визуализация информации» и «визуализация знаний». Так, В. В. Магалашвили [125] и В. Н. Бодров [125] определяют визуализацию информации как использование компьютерных приложений для графического представления абстрактных данных, имея в виду диаграммы, графики, 3D-моделирование и т. п. Визуализация знаний, определяемая ими, как набор графических элементов и связей между ними, используемый для передачи знаний от эксперта к человеку или группе людей,

раскрывающий причины и цели этих связей в контексте передаваемого знания, должна представлять конкретную проблему или задачу и отвечать на вопрос: для чего, для решения какой проблемы необходима предлагаемая передача знаний? Однако, учитывая тот факт, что знание можно трактовать как осмысленную информацию, готовую к продуктивную применению, в рамках нашего исследования, будем говорить о визуализации учебной информации.

Визуализация играет особую роль в учебно-познавательной деятельности, так как способна разрешить основное диалектическое противоречие познавательного процесса – противоречие чувственного и рационального. Основное качество продукта познания, полученного посредством визуализации – наглядность.

Наглядность была в поле зрения теории обучения с момента появления педагогики. Принцип наглядности считается одним из самых известных принципов дидактики – «золотое правило дидактики» по Я. А. Коменскому. Считая основой обучения чувственный опыт ребенка, Я. А. Коменский выделял не наглядность, а наблюдение, которому подлежит все то, что воспринимается органами чувств – зрением, слухом, обонянием, вкусом и осязанием [97]. Длительное время в истории педагогики наглядное приравнивалось к чувственному, поэтому всякое представление объекта усвоения в чувственной форме считалось наглядным.

Современное понятие наглядности значительно изменилось в сравнении с первоначальным. Как отмечает В. Д. Шадриков, «… сейчас наглядность рассматривается не только на конкретном, но и на абстрактном уровне и в процессе деятельности, однако единого подхода к понятию наглядности не выработано, определения наглядного обучения не дается, нет характеристики составляющих его компонентов, недостаточно исследована специфика наглядного обучения математике» [164, с. 213].

В научной и методической литературе встречаются разные определения наглядности, рассматриваемой как: некоторый объект (средство наглядности); некоторое свойство (наглядность реальных предметов, явлений, мышления);

определенная деятельность человека (восприятие средств наглядности, их использование) [Там же].

В педагогическом словаре наглядность рассматривается как «дидактический принцип, согласно которому обучение строится на конкретных образах, непосредственно воспринимаемых учащимися» [185, с. 727].

Ряд ученых (В. Г. Болтянский [34], В. И. Евдокимов [70], Л. Н. Нуридинов [155], Л. М. Фридман [220] и др.) связывают понятие наглядности с понятием образа.

Л. М. Фридман [220] описывает наглядность как особое свойство психических образов, создаваемых в процессе восприятия, памяти, мышления и воображения при познании объектов окружающего мира. Внешним условием создания наглядного образа является познавательная деятельность, направленная на создание наглядного образа объекта. Наглядность по Л. М. Фридману – это понимание и активность.

Интересную формулу наглядности предлагает В. Г. Болтянский [34]: «Формула наглядности – изоморфизм плюс простота». Неотъемлемыми признаками наглядности он считает правильное изоморфное отражение существенных черт явления и простоту восприятия. Автор отмечает, что понятие простоты не является постоянным, оно зависит от индивидуальных и возрастных особенностей человека, от уровня его знаний и умений, от его жизненного опыта. Изменение понятия простоты влечет изменение понятия наглядности. Для одного человека данная модель может быть наглядной, а для другого нет, это зависит от простоты модели.

Без наглядности невозможно обойтись при оперировании абстрактными математическими объектами. Наглядность в обучении математике осуществляет непосредственные и опосредованные функции. Опираясь на исследования В. А. Далингера и О. О. Князевой [60], приведем функции наглядности математических объектов (рисунок 3).

Рисунок 3 – Функции наглядности математических объектов

Отсутствие наглядности в обучении математике ведет к возникновению формализма, то есть к формированию понятий, за которыми не стоят реальные знания, соотносящиеся с реальной практикой.

Наряду с признанием значимости принципа наглядности, часто отмечается, что нужно «… наглядность использовать не как цель, а как средство», стараться «… не перегружать учащихся конкретно-образным восприятием изучаемых

закономерностей, чтобы не задерживать абстрактно-логическое мышление» [158, с. 180].

Существует ряд мнений, согласно которым наглядная форма выражения знания считается его примитивизацией. А. П. Ланг пишет: «Все, что связано с явлением – наглядно, а все связанное с сущностью – ненаглядно» [109, с. 13], тем самым отрицая возможность выразить наглядно сущность объекта. На наш взгляд, такое мнение является ошибочным ввиду смешивания автором понятия невозможности с неумением. Разве круги Эйлера не отображают в доступной форме сущность и главные идеи теории множеств?

«Принцип наглядности оправдывает себя там, – отмечает О. А. Павлова, – где содержанием обучения являются внешние свойства, признаки вещей. Там где важны связи, отношения предметов, наглядности недостаточно. Появляется необходимость активизации мыслительных действий, позволяющих осмыслить связи и отношения между предметами и явлениями. Именно этим обосновывается разделение наглядных средств обучения и визуализации учебного материала с одновременным определением роли и значения каждого из них в период обучения» [156, с. 7]. Как правило, наглядные материалы иллюстрируют, сопровождают и дополняют вербальное изложение учебной теории. «Наглядность в ее традиционном понимании помогает формированию понятия на эмпирическом уровне, т. е. по существу лишь представления, поскольку не может отражать содержание понятия, имеющего высокий уровень обобщения, а значит, и не может способствовать развитию теоретического мышления» [127, с. 235-236].

Участию же в создании образов, на основе которых развивается действие, помогает визуализация учебного материала, побуждающая визуальное мышление ученика вникнуть в содержание понятия, осознать принцип его действия [171].

Анализируя принципы наглядности и визуализации, В. М. Маслов [126] справедливо отмечает, что традиционное словосочетание «читать чертеж» связано с истинностью принципа наглядности. Умение читать буквы, слова, предложения никак не влияет на умение «читать» чертеж». С опорой на принцип визуализации чертеж нужно не «читать», а «видеть». Чтобы качественно «видеть» чертеж,

нужны свои специфические навыки. М. И. Башмаков и Н. А. Резник по этому поводу пишут: «Каждый учитель использует на уроке наглядный материал – формулы и чертежи на доске, рисунки и схемы на экране, плакаты и таблицы на стенах, модели и образцы в руках учеников. Первая цель учителя состоит в том, чтобы ученик смотрел на предъявляемые ему зрительные образы. Этой цели достичь легко. Вторая цель состоит в том, чтобы ученик смотрел и видел то, что заложено в этих образах. Культура зрительного восприятия требует такого же длительного и серьезного воспитания, как культура письма и речи» [28, с. 4].

Все вышесказанное подчеркивает повышенное внимание исследователей к проблемам наглядности и визуализации.

Визуализация и наглядность рассматриваются в теории и методике обучения математике в различных аспектах: как средство развития визуального мышления учащихся (М. И. Башмаков [28], Н. А. Резник [171], В. А. Далингер [62, 63, 64], О. О. Князева [99]); как средство управления учебно-познавательной деятельностью студентов при обучению математическому анализу (Н. В. Щукина [236]; как способ представления и организации информации и знаний с применением средств ИКТ (Н. М. Ежова [71], Д. Н. Шеховцова [230], Е. А. Широкова [231]); как средство формирования и актуализации математических знаний и навыков у учащихся основной школы (Н. В. Иванчук [90]); как условие развития математической компетентности студентов экономических специальностей (Д. А. Картежников [98]); как средство изучения иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы (А. В. Емелин [73]) и др. Однако, остается открытым вопрос о роли визуализации в развитии ПУУД в процессе обучения алгебре, в частности понятиям функциональной линии.

Развитие идей о когнитивной функции визуального мышления коренным образом изменили взгляд на традиционную наглядность, отдавая в учебно-познавательной деятельности приоритет визуализации практически любого учебного материала. Как пишет В. И. Загвязинский [160], «…трактовка наглядности как использования демонстраций и иллюстраций недостаточна и неглубока». Название принципа не должно отражать только выполняемое

действие, а должно обеспечивать понимание происходящих при этом процессов. Поэтому принцип с названием «наглядность» становится малоинформативным и требующим уточнения. Процессуальную составляющую принципа можно выразить через понятие визуализации» [29].

Проведенный в ходе настоящего исследования анализ философской, психолого-педагогической литературы и научных подходов к использованию визуализации учебной информации и знаний, позволил установить, что:

1) визуализация актуализирует потенциал визуального канала восприятия информации и когнитивной функции наглядности (В. Э. Штейнберг [93]);
2) основой принципа визуализации служит когнитивная графика, цель которой состоит в создании комбинированных когнитивных моделей представления знаний, сочетающих в себе символический и геометрический способы мышления, способствующих активизации познавательных процессов (О. О. Князева [99]);
3) визуализация учебного материала открывает возможность не только собрать воедино все теоретические выкладки, что позволит быстро воспроизвести материал, но и применять схемы для оценивания степени усвоения изучаемой темы (И. А. Трухан [198]);
4) в общей эволюции теории наглядности визуализация прошла путь от иллюстрации до моделирования как объект и средство активизации и интенсификации познавательной деятельности (Н. Б. Лаврентьева [93]).

Посредством приемов визуализации учебной информации использование наглядных образов в обучении понятиям функциональной линии может превратиться из вспомогательного, иллюстрирующего приема в ведущее, продуктивное методическое средство, способствующее развитию ПУУД с полноценным использованием резервов визуального мышления учащихся.

Для усиления роли наглядности Н. А. Резник [171] предложила не механическое увеличение ее средств, а соблюдение основных требований создания визуальной учебной среды, к которым относятся:

- лаконичность представления информации;
- точность воспроизведения ее структуры и элементов;
- акцент на главные детали образов, равноправное использование трех способов представления знаковой информации (вербального, геометрического, аналитического);
- учет возможностей и индивидуальных особенностей обучаемого в восприятии визуальной информации.

Перечислим более подробно способы представления учебной знаковой информации в обучении алгебре, в частности, в обучении понятиям функциональной линии. *Вербальный* (словесный) *способ* предъявления знаковой учебной информации предполагает выбор специальных терминов, составление определений, отработку формулировок утверждений и правил. Учащийся при этом слушает или читает описание, включающее математические термины и их обозначения. При *аналитическом* (формульном, символьном) *способе* задание учебной информации осуществляется посредством стандартных обозначений из некоторого списка (алфавита) с соблюдением четких правил организации информационных сообщений. Н. А. Резник [171] разграничивает средства данного способа предъявления информации на символически формульные (средства представления учебного текста) и символически наглядные (символы, которые своими начертаниями дают возможность визуального восприятия их смысла, например, знаки монотонности функции). *Визуальный* (графический) *способ* представления информации предполагает концентрацию главной части информационного сообщения на рисунке, чертеже, графике, наглядном пособии, экране. Одним из главных отличий рисунка (как средства предъявления учебной знаковой информации) является неопределенность поставленной задачи, поэтому он нуждается в комментариях.

Рассмотренные типы знаковых систем, используемых в обучении математике, служат той наглядной основой, на которой происходит создание образов и оперирование ими.

В. Н. Дружинин [69] в своей работе описывает связь между развитием интеллекта и обучением в виде трехфакторной модели общих способностей человека, учитывающей три языка выражения знаний, что соответствует указанным выше способам предъявления информации. Высокий уровень оперирования естественным вербальным языком способствует успешному обучению гуманитарным дисциплинам, его сочетание с языком пространственных форм обеспечивает успех в технических науках. И только одновременное владение вербальным языком вместе с языком пространственных форм и формальных систем (числовых, знаковых, алгоритмических) ведет к успешности в усвоении дисциплин физико-математического цикла. Поэтому, вполне обоснованно, можно предположить, что при целенаправленном обучении и оптимальном сочетании вербального, визуального и аналитического способа представления учебной математической информации, формирование умения визуального перевода (установление связей между рисунком, текстом и формулой) может дать мощный инструмент развития ПУУД.

При переходе от текста к формуле или визуальному образу активно формируются действия поиска и выделения необходимой информации, знаково-символические действия, умение структурировать знания, действия определения основной и второстепенной информации, выбор наиболее рационального способа решения задачи, логические ПУУД. Распределяя специальным образом символы, входящие в формулу, можно составить рисунок, который позволяет: организовать проблемно-поисковую ситуацию; разобраться в тонкостях взаимосвязанных операций; оформить структуру, направленную на формирование алгоритма.

Недостаточно развитые действия по осуществлению перехода от одного способа представления учебной математической информации к другому вызывают трудности и проблемы в обучении алгебре, что обусловливает важность применения визуализации в процессе развития ПУУД.

Визуальный перевод порождает различные типы моделей представления информации. Большинство из них сводится к логическим, реляционным,

семантическим, продукционным, фреймовым типам (таблица 8), известных из когнитивной психологии и информатики ([187], [202]).

Таблица 8 – Типы визуальных моделей представления учебной информации школьного курса алгебры и развиваемые ПУУД

Типы моделей представления учебной информации	Примеры моделей в обучении алгебре	Развиваемые ПУУД
Логические модели	схемы определений понятий; схемы поиска решения задачи; знаковая модель записи решения задачи, доказательства утверждения; диаграммы Эйлера-Венна	- знаково-символические действия; - умение структурировать знания; - анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); - синтез как составление целого из частей в т.ч. самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов
Реляционные модели	таблицы; информационные схемы; набор объектов для подведения под понятие; дидактическая инфографика; опорные конспекты; модель Фрейер; когнитивно-графичес-кие элементы «дерево» и «здание»	- знаково-символические действия; - умение структурировать знания; - определение основной и второстепенной информации; - анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); - синтез как составление целого из частей, в т. ч. самостоятельное достраивание, воспол-нение недостающих компонентов; - подведение под понятие, выведение следствий
Семантические модели	классификационные схемы; карты понятий; логико-смысловые модели; интеллект-карты; денотатные графы; кластеры; дерево вариантов; «фишбоун»	- знаково-символические действия; - умение структурировать знания; - определение основной и второстепенной информации; - анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); - синтез как составление целого из частей в т. ч. самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов; - выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов
Продукционные модели	предписания для решения алгебраических задач определенного класса, блок-схемы решения алгебраических задач определенного класса	- знаково-символические действия; - умение структурировать знания; - анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); - синтез как составление целого из частей в т. ч. самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов

Продолжение таблицы 8

Типы моделей представления учебной информации	Примеры моделей в обучении алгебре	Развиваемые ПУУД
Фреймовые модели	Фрейм-рамка с опорным конспектом, фрейм-блок-схема, фрейм-сценарий алгоритма или предписания	- знаково-символические действия; - умение структурировать знания; - анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); - синтез как составление целого из частей в т. ч. самостоятельное достраивание, воспол-нение недостающих компонентов

В процессе обучения понятиям функциональной линии необходимо учитывать, что все указанные модели представляют собой модели моделей.

Использование визуальных моделей представления информации школьного курса алгебры имеет ряд преимуществ по сравнению с линейно-текстовым изложением учебного материала. На рисунке 4 выделены преимущества визуальных моделей представления учебной математической информации для учителя и ученика.

Однако при чрезмерной визуализации предъявления учебного материала могут возникнуть и негативные последствия:

– любой схематизм может привести к некоторой упрощенности понимания чего-либо. Это может создать у учащихся иллюзию, что для изучения предмета вполне достаточно изображенного материала;

– снижение чувствительности восприятия, эмоциональное пресыщение;

– подавление воображения ученика заданным извне визуальным образом изучаемого материала, препятствование формированию его собственного «внутреннего образа»;

– затягивание фазы конкретно-образного мышления в ущерб формированию способности к абстракции;

– абсолютизация логико-структурного моделирования может негативно повлиять в будущем на формирование профессионального мышления и языка

(существуют принципиальные различия между гуманитарным и естественнонаучным стилями мышления).

Рисунок 4 – Преимущества визуальных моделей представления учебной математической информации

Указанные негативные проявления требуют от учителя ответственности при отборе содержания материала, анализа способов кодирования и выбора визуальных образов представления материала. Как уже было сказано выше, только оптимальное сочетание различных способов представления учебной знаковой информации (вербального, аналитического и визуального) поможет достичь наилучших результатов.

Чтобы избежать негативных проявлений, учитель может применять различные варианты работы с визуальными моделями, например:

- заранее готовить к уроку собственные визуальные модели или применять готовые;
- строить визуальные модели непосредственно на уроке по ходу эвристического изложения материала;
- организовывать разнообразные виды индивидуальной и коллективной деятельности учащихся по использованию готовых и созданию собственных визуальных моделей.

Помочь в этом учителю могут бесплатные онлайн сервисы и свободно распространяемые программные средства визуализации. Более подробно о них будет сказано в следующем параграфе.

Освоение приемов визуализации учебного материала должно проходить в несколько этапов:

1) отбор учебного материала, структурно-логический анализ и построение структурно-логической схемы учебной информации;
2) выделение главного (ядра), методологических и прикладных аспектов темы;
3) расположение учебного материала с учетом логики формирования учебных понятий;
4) подбор опорных сигналов (ключевых слов, символов, фрагментов схем) и их кодирование;
5) поиск внутренних логических взаимосвязей и межпредметных связей;
6) составление первичного варианта, компоновка информации в блоки;
7) критическое осмысление первичного варианта с последующей коррекцией;
8) введение цвета, дизайнерское оформление;
9) озвучивание и окончательная корректировка визуальной модели представления учебной информации.

С учетом вышесказанного, можно сделать вывод, что визуальные модели представления учебной математической информации могут служить эффективным инструментом развития ПУУД в обучении понятиям функциональной линии учащихся основной школы.

Еще одним из основных инструментов развития ПУУД в обучении понятиям функциональной линии в контексте визуализации служат визуализированные задачи. Более подробно визуальные модели представления учебной математической информации и визуализированные задачи будут рассмотрены во второй главе.

1.3. Использование средств информационно-коммуникационных технологий в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации

В рамках данного параграфа остановимся на проблеме использования средств ИКТ в визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии курса алгебры учащихся основной школы, выделим возможности средств ИКТ для создания визуализированных дидактических материалов.

На сегодняшний день трудно представить себе учебно-воспитательный процесс без применения ИКТ. Многие ученые (О. Ф. Брыксина [38], М. П. Лапчик [111], Е. И. Машбиц [128], И. В. Роберт [173], В. А. Сластенин [182], И. Ф. Харламов [221] и др.) сходятся во мнении, что внедрение средств ИКТ в учебно-воспитательный процесс способствует его интенсификации и совершенствованию.

Современные средства ИКТ увеличивают разнообразие способов решения учебных задач, позволяя создавать ситуации априори невозможные в традиционной дидактике (виртуальные эксперименты, исследование компьютерных моделей, совместное создание информационных продуктов и т. п.). Обладая уникальными дидактическими возможностями, ИКТ значительно

расширяют возможности визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии.

И. В. Роберт [173] отмечает, что оптимизация использования средств обучения на базе ИКТ обусловлена реализацией следующих дидактических возможностей:

- интерактивность, незамедлительная обратная связь между пользователем и средствами ИКТ;
- компьютерная визуализация информации об исследуемых объектах или закономерностях процессов и явлений как реально протекающих, так и «виртуальных»;
- использование достаточно больших объемов информации с возможностью ее передачи, легкого доступа и обращения к информационному ресурсу, в том числе посредством сети Интернет;
- автоматизация процессов вычислительной, информационно-поисковой деятельности, обработки результатов демонстрационных и лабораторных экспериментов как реально протекающих, так и представленных на экране, с возможностью многократного повторения фрагмента или самого эксперимента;
- автоматизация процессов информационно-методического обеспечения, организационного управления учебной деятельностью и контроля результатов усвоения.

Направление использования ИКТ для визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии становится особенно актуальным в связи с переходом основной школы на федеральные государственные образовательные стандарты, в которых предусмотрена обязательная компьютерная поддержка предметного обучения, в частности математике.

Проблема использования ИКТ для визуализации учебной информации актуальна и представляет интерес для педагогического сообщества, о чем свидетельствуют работы И. В. Баландиной [23], Д. А. Бархатовой [25], Е. А. Васениной [39], И. В. Ижденевой [91], В. В. Кучурина [108], А. Г. Пекшевой

[161], А. В. Полянской [167], Д. Н. Шеховцовой [230] и др. Однако не достаточно исследован вопрос о применении ИКТ для визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии в условиях реализации ФГОС ООО. Стимулом для расширения потенциала визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии курса алгебры могут служить интерактивные средства, предоставляемые возможностями ИКТ.

Вопросам применения интерактивных средств и технологий в образовательном процессе посвящены работы М. С. Артюхиной [14], Ю. Ю. Гавронской [44], Е. В. Деминой [66], Н. Ю. Куликовой [105], В. В. Кучурина [108], А. Г. Пекшевой [161], О. Г. Ромадиной [175], С. В. Титовой [196], А. Г. Тихобаева [197], И. С. Хирьяновой [222] и др.

Интерактивность – широкое по содержанию понятие, с помощью которого в современной науке раскрывают характер и степень взаимодействия между объектами, а в методике используют для описания способа активного взаимодействия между учителем, учащимся и учебным материалом [161]. Заимствованное из английского языка (ineract – взаимодействовать с кем-либо или чем-либо), слово «интерактивный» означает способность взаимодействующих сторон оказывать влияние друг на друга, находиться в режиме диалога.

Интерес для нас представляют виды интерактивности, выделенные С. В. Титовой [196]:

- интерактивность обратной связи, обеспечивающая возможность задавать вопрос и получать на него ответ или проконтролировать процесс освоения материала;
- временная интерактивность, позволяющая обучаемому определять начало, продолжительность и скорость процесса изучения учебного материала;
- порядковая интерактивность, позволяющая обучаемому определять последовательность использования фрагментов информации;

- содержательная интерактивность, обеспечивающая возможность изменять, дополнять или же уменьшать объем содержательной информации;
- творческая интерактивность, позволяющая создавать собственный продукт креативной деятельности.

Рассмотрим подробнее интерактивность обратной связи. Анализ исследований Е. Н. Зайцевой [81], Н. Ю. Куликовой [105], С. В. Титовой [196], А. Г. Тихобаева [197] и др. позволил выделить и уточнить два типа интерактивности обратной связи:

1. Оценочная обратная связь, реализующая диалог типа «человек-машина» – это информация, поступающая от программного средства, включенного в учебный процесс, в ответ на действия обучаемого. Данный тип связи характеризуется оперативностью, дает возможность обучаемому сделать осознанный вывод об успешности или ошибочности своей учебной деятельности, побуждая тем самым его к рефлексии, оценке и корректировке полученных результатов. Этот тип связи характерен для тестирующих программных средств и имеет несколько уровней реализации: 1) констатация неправильного результата решения без анализа допущенной ошибки и выдачи рекомендаций; 2) констатация неправильного результата решения без анализа допущенной ошибки, но с выдачей рекомендации общего характера; 3) констатация неправильного результата решения и выдача конкретных рекомендаций для получения правильного решения (подсказки, указания и т.п.), а в ряде случаев и анализ допущенной ошибки.

2. Коммуникативная обратная связь, реализующая диалог типа «человек-машина-человек» – это реакция преподавателя или других участников учебного процесса на деятельность обучаемого. Она может быть как оперативной, так и отсроченной, но лишь до некоторой степени. Реализуется данный тип связи в дистанционном обучении, в локальных телекоммуникационных технологиях посредством таких инструментов как комментарии, форумы, личные сообщения, чат и т. п. Невербальный канал общения оказывается незадействованным,

поэтому при таком типе обратной связи необходимо уделять особое внимание ее своевременности, конструктивному и позитивному настрою.

Опираясь на исследования Б. Андерсена [11], Г. О. Аствацатурова [19], Н. Ю. Куликовой [105], О. Г. Смоляниновой [184] и др., приведем три формы интерактивности в электронных образовательных ресурсах:

1. Реактивная интерактивность, предполагающая простейшую навигацию с линейной моделью обучения (обучающиеся оперативно и последовательно отвечают на запросы программы, последовательность которых строго задана). Данная форма наиболее удобна на этапе ознакомления с новыми знаниями и способами действий и их первичного закрепления.

2. Действенная интерактивность, предполагающая нелинейную модель обучения и обеспечивающая возможность обучающимся управлять работой программы (выбирать темп, объем и траекторию изучения материала). Данная форма наиболее эффективна при дистанционном или смешанном обучении.

3. Взаимная интерактивность, предполагающая модель обучения «Управляемое открытие», когда учащимся предоставляется возможность проводить самостоятельные исследования, решать задачи различной сложности, тем самым обучаемый и программа могут приспосабливаться друг к другу. Данная форма реализуется в тренажерах, практикумах, обучающих программах.

Интерактивность в обучении, как отмечает Ю. Ю. Гавронская [44], имеет двойственное понимание, одно из которых основывается на характеристике взаимодействия и общения субъектов процесса обучения, а другое подразумевает дидактическое свойство средств обучения, чаще всего ИКТ-средств. В связи с этим в педагогической литературе выделяется новый вид средств обучения – интерактивные средства обучения. М. С. Артюхина [14] определяет интерактивные средства обучения как «программные, аппаратно-программные и технические средства и устройства, функционирующие на базе микропроцессорной и вычислительной техники, обеспечивающие обучение в диалоговом взаимодействии пользователя с компьютером». Следует отметить, что компьютер может выполнять функцию посредника между взаимодействием

обучающегося и педагога. Имитация ряда функций обучающего в диалоговом режиме является отличительной особенностью интерактивных средств обучения.

Многие отечественные и зарубежные исследователи сходятся во мнении о разделении интерактивных средств обучения на две группы. Так, М. С. Артюхина [14], выделяет:

- *интерактивный учебный комплект*, содержащий интерактивные учебник, справочник, тренажер, задачник, лабораторный практикум и средства наглядности;
- *интерактивное оборудование,* включающее интерактивную доску, планшет, плазменную панель, проекторы, системы тестирования, мобильные устройства, малые средства информационных технологий.

Д. Сессомс (D. Sessoms) [244] разделяет средства интерактивности на педагогические и технические.

Следует отметить, что, как и многие исследователи, мы придерживаемся мнения об условности такого разделения интерактивных средств обучения, так как в реальности эти два вида пересекаются и тесно взаимодействуют. Эффективность педагогических интерактивных средств во многом зависит от того, на каком оборудовании они будут представлены, а эффективность интерактивного оборудования обусловлена качеством интерактивного учебного материала и компетентностью преподавателя и обучающихся в области ИКТ.

Анализ функциональных возможностей средств ИКТ в контексте визуализации процесса обучения позволил нам выделить следующие типы визуализированных интерактивных дидактических материалов:

1. *Интерактивные визуальные модели представления учебной информации* (информационные схемы, классификационные схемы, интерактивные плакаты, ментальные карты, кластеры и т. п.), которые могут быть использованы как для объяснения, так и для проверки усвоенного материала.

2. *Интерактивные визуализированные задачи*, позволяющие отработать и усовершенствовать полученные учащимися умения, навыки и способы деятельности.

В таблице 9 представлены указанные выше типы визуализированных интерактивных дидактических материалов и ИКТ-средства для их создания.

Таблица 9 – Визуализированные интерактивные дидактические материалы

Типы материалов	Средства ИКТ
Интерактивные визуальные модели представления учебной информации	Сетевые сервисы: Cacoo.com, Mindomo.com, SpiderScribe, MindMeister.com, edu.glogster.com, Bubble.us и др. Программное обеспечение для интерактивных досок: SmartNotebook, ActivInspire и др. Мультимедиа программы: MS PowerPoint, OpenOffice Impress и др. Интерактивные он-лайн доски: WikiWall.ru, En.Linoit.com, Scrumblr.ca идр.
Интерактивные визуализированные задачи	Сетевые сервисы: Learningapps.org, ClassTools.net. Приложения Диска Google: Документ, Таблица, Презентация, Рисунок. Программное обеспечение для интерактивных досок: SmartNotebook, ActivInspire и др. Интерактивные он-лайн доски: WikiWall.ru, En.Linoit.com, Scrumblr.ca и др. Мультимедиапрограммы: MS PowerPoint, OpenOffice Impress идр. Тестовые оболочки: HotPotatoes, MyTestX, Краб 2 и др. Специализированные программные среды: Mathematica, Vaple, Maxima, GeoGebra, Desmos, Живая математика, 1С Математический конструктор и др.

Рассмотрим некоторые средства ИКТ в контексте визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии. На основе анализа научно-методической литературы по проблеме применения ИКТ в обучении, обобщения передового отечественного и зарубежного педагогического опыта и опыта собственной педагогической деятельности, мы сформулировали критерии выбора программных средств, которые целесообразно использовать при обучении понятиям функциональной линии:

- распространенность и доступность в образовательных учреждениях;
- дружественный русифицированный интерфейс;

– широкие графические возможности для создания качественной визуализации;
– наличие инструментов, позволяющих использовать в учебных материалах различные виды интерактивности;
– возможность работы без специальных знаний и навыков программирования.

Как показал констатирующий эксперимент, чаще всего учителя математики в качестве средства ИКТ используют мультимедийные презентации, созданные с помощью программы MS PowerPoint. Данная программа лидирует по распространенности и доступности в образовательных учреждениях. Однако, как показывает практика, используемые учителями и обучающимися презентации реализуют в основном реактивную интерактивность и ориентированы на пассивное зрительное восприятие и запоминание информации.

С появлением приложения OfficeMix можно повысить уровень интерактивности презентации без знания языков программирования. Данная надстройка позволяет записывать аудио и видео, вводить рукописный текст, создавать интерактивные опросы и упражнения, интегрировать веб-страницы и апплеты других приложений (рисунок 5), размещать с помощью облачных технологий свои презентации в сети с возможностью реализации обратной связи за счет отображения результатов опроса.

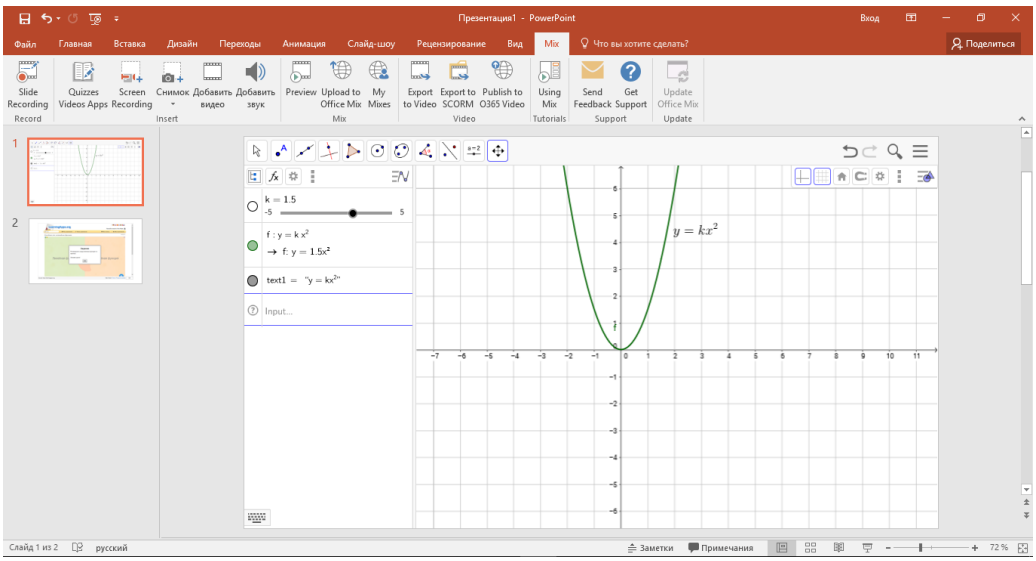


Рисунок 5 – Апплет программы GeoGebra, встроенный в MS PowerPoint

Отметим, что данное приложение хотя и является бесплатным, но совместимо начиная только с MicrosoftOffice 2013 и Office 365. К минусам OfficeMix можно отнести отсутствие русскоязычного интерфейса.

Наиболее эффективно интерактивные презентации могут быть представлены с помощью интерактивного оборудования, в частности интерактивной доски. Как отмечает М. С. Артюхина [14], интерактивная доска и система оперативного контроля знаний совмещают в себе возможности разнообразных средств наглядности, тренажерных устройств, технических средств контроля и оценки результатов учебной деятельности и вытесняют устаревшие средства обучения (плакаты, макеты, кодоскопы и т. д.). Являясь универсальными средствами по отношению ко всем учебным предметам, указанные средства при обучении математике должны обладать некоторыми особенностями, в частности, в программном обеспечении должны присутствовать:

- интерактивные математические инструменты (циркуль, линейка, транспортир и т. п.);
- редактор формул;
- интерактивные модели математических объектов.

В соответствии с указанными особенностями, мы выделяем программное обеспечение SmartNotebook для интерактивных досок Smart. Данное приложение обладает всеми перечисленными свойствами. В SmartNotebook предусмотрены четыре интерактивных математических инструмента, есть встроенный редактор формул, включая распознавание формул, написанных вручную. Начиная с четырнадцатой версии, в SmartNotebook есть возможность внедрять апплет GeoGebra (рисунок 6), что позволяет строить интерактивные математические модели.

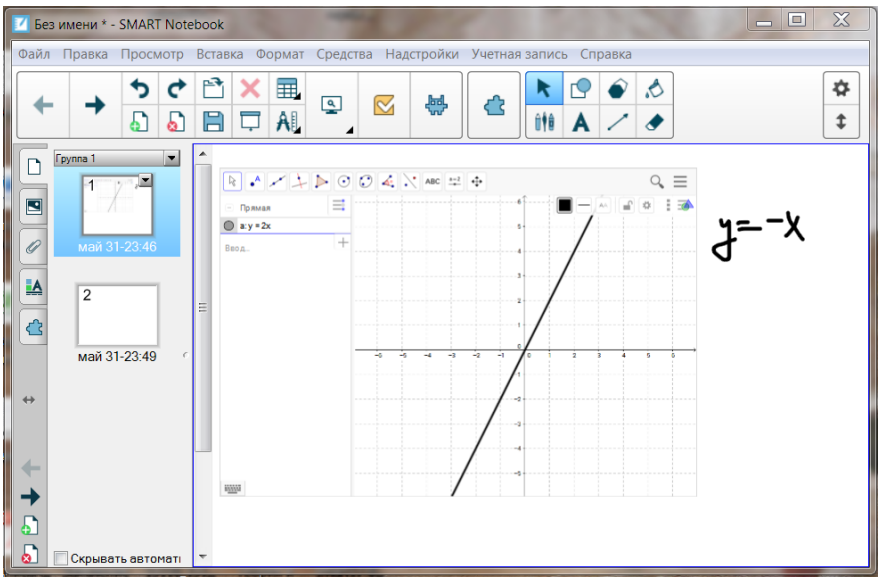


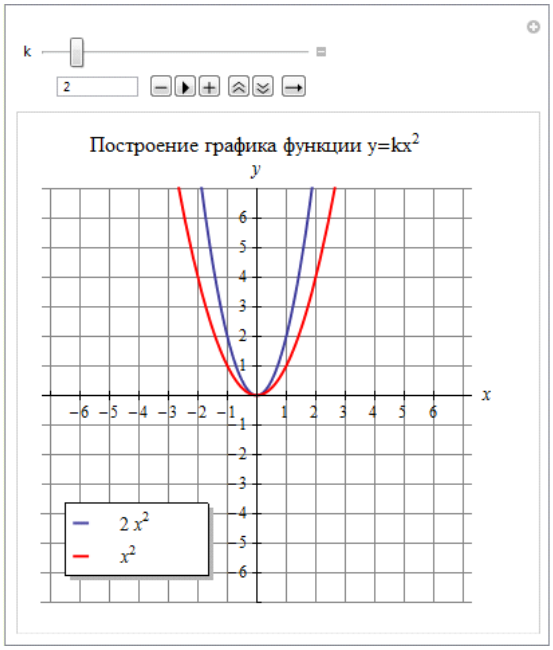
Рисунок 6 – Рабочее окно программы SmartNotebook с апплетом GeoGebra

Вопросам применения систем компьютерной алгебры в обучении математическим дисциплинам посвящены работы отечественных и зарубежных исследователей: Т. Ю. Войтенко [216], О. А. Иванова [86], Т. В. Капустиной [96], Д. А. Картежникова [98], О. О. Князевой [99], Ч. Б. Миннегалиевой [137], D. H. Jonassen [243] и др.

Среди систем компьютерной алгебры мы особо выделяем систему Mathematica фирмы Wolfram Research Inc. Являясь мировым лидером среди подобного рода систем, Mathematica обладает развитой двухмерной и трехмерной графикой, способна выполнять сложные численные расчеты и аналитические преобразования. Как и многие математические пакеты (MathCAD, Maple и др), система Mathematica является коммерческим продуктом, но разработчики предлагают пользователям и бесплатные приложения. Так, приложение WolframProgrammingCloud позволяет работать бесплатно в сети, а программа CDFPlayer демонстрирует файлы, созданные в системе Mathematica, сохраненные в формате cdf.

Встроенная функция Manipulate, обладающая интуитивно понятным графическим интерфейсом, позволяет визуализировать различные математические объекты и отношения между ними. На рисунке 7 представлен результат выполнения этой функции и скрининг программы для построения графиков функций вида $y = kx^2$. Передвигая ползунок, обучающийся может

проследить за изменением графика в зависимости от значения коэффициента *k*, при этом ему не требуется дополнительное обучение по работе с программой [215]. Однако учителю, без предварительного обучения написать подобную программу будет сложно.




```
grids[min_, max_] :=
 Join[Range[Ceiling[min], Floor[max]],
  Table[{j + 1, Dashed},
   {j, Round[min], Round[max - 1], 1}]]
ticks[min_, max_] :=
 Join[Table[{i, Style[i, 12], {0.01, 0.01}},
   {i, Ceiling[min + 1], Floor[max - 1]}],
  Table[{j + 1, , {0.01, 0}},
   {j, Round[min - 2], Round[max - 2], 1}]]
Needs["PlotLegends`"]
Manipulate[Plot[{k * x^2, x^2}, {x, -7, 7},
  PlotRange → 7, AspectRatio → Automatic,
  AxesLabel → {Style[x, FontSize → 14],
    Style[y, FontSize → 14]},
  PlotLegend → {Style[k x^2, FontSize → 14],
    Style[x^2, FontSize → 14]},
  LegendSize → {0.6, 0.3},
  LegendPosition → {-.9, -.85},
  LegendShadow → {.02, -.02},
  ShadowBackground → GrayLevel[.7],
  PlotLabel →
   Style["Построение графика функции y=kx^2",
    FontSize → 16], PlotStyle → {Thick, {Thick, Red}},
  GridLines → grids, Ticks → ticks], {k, 1, 10}]
```

Рисунок 7 – Функция Manipulate в системе Mathematica

Анализ педагогической и методической литературы, а также опыт работы с системами компьютерной алгебры показал, что целесообразнее их использовать в старших классах средней школы и в вузах.

В процессе обучения алгебре и геометрии все большую популярность среди учителей математики приобретает программа GeoGebra – свободная образовательная математическая программа, соединяющая в себе геометрию, алгебру и математические исчисления. Программа была написана Маркусом Хохенвартером с использованием языка Java, переведена на 52 языка и в настоящее время активно совершенствуется и обновляется.

Созданная изначально для вузовского курса математики, на сегодняшний день среда GeoGebra охватывает практически все разделы из школьной математики. В программе существуют следующие рабочие области (перспективы): алгебра и графики; геометрия; spreadsheet (аналог электронных таблиц); CAS (система компьютерной алгебры, способная выполнять

элементарные символьные вычисления); 3D-графика; теория вероятности и статистика.

Все возрастающий интерес учителей математики к применению GeoGebra в обучении можно объяснить рядом преимуществ этой программы:

1. Простой и интуитивно понятный интерфейс программы.
2. Возможность установки программы на множества устройств: компьютеры, планшеты, смартфоны.
3. Свободно распространяемое программное обеспечение.
4. Возможность работать в онлайн режиме, в том числе поддержка апплетов, встраиваемых на страницу сайта или блога.
5. Широкие исследовательские возможности и средства визуализации объектов исследования.
6. Наличие виртуального сообщества, позволяющего обмениваться опытом и материалами.
7. Возможность интеграции с другим программным обеспечением (с MS PowerPoint с помощью приложения OfficeMix, со SmartNotebook версии 14 и выше) [205].

Интерактивные инструменты и дружественный интерфейс программы позволяют использовать ее без предварительного обучения как ученику, так и учителю (рисунок 8).

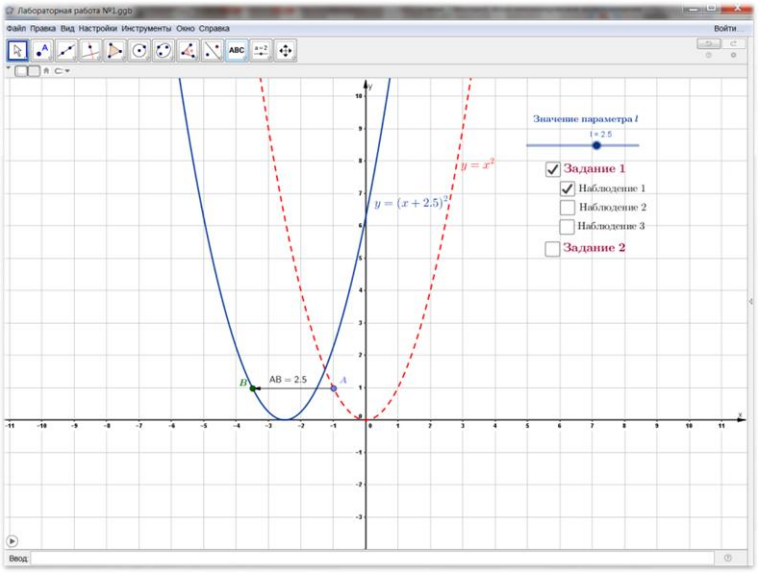


Рисунок 8 – Рабочее окно программы GeoGebra с интерактивными инструментами

Перечисленные возможности программы позволяют органично дополнить традиционные уроки математики современными динамическими средствами когнитивной визуализации.

Отметим, что системы компьютерной алгебры и системы динамической математики не лишены недостатков. Например, при построении графика функции $y=\frac{3|x|-1}{|x|-3x^2}$ программа GeoGebra не учитывает область определения исходной функции, так как график функции существует в точке с абсциссой $x=\frac{1}{3}$ (рисунок 9).

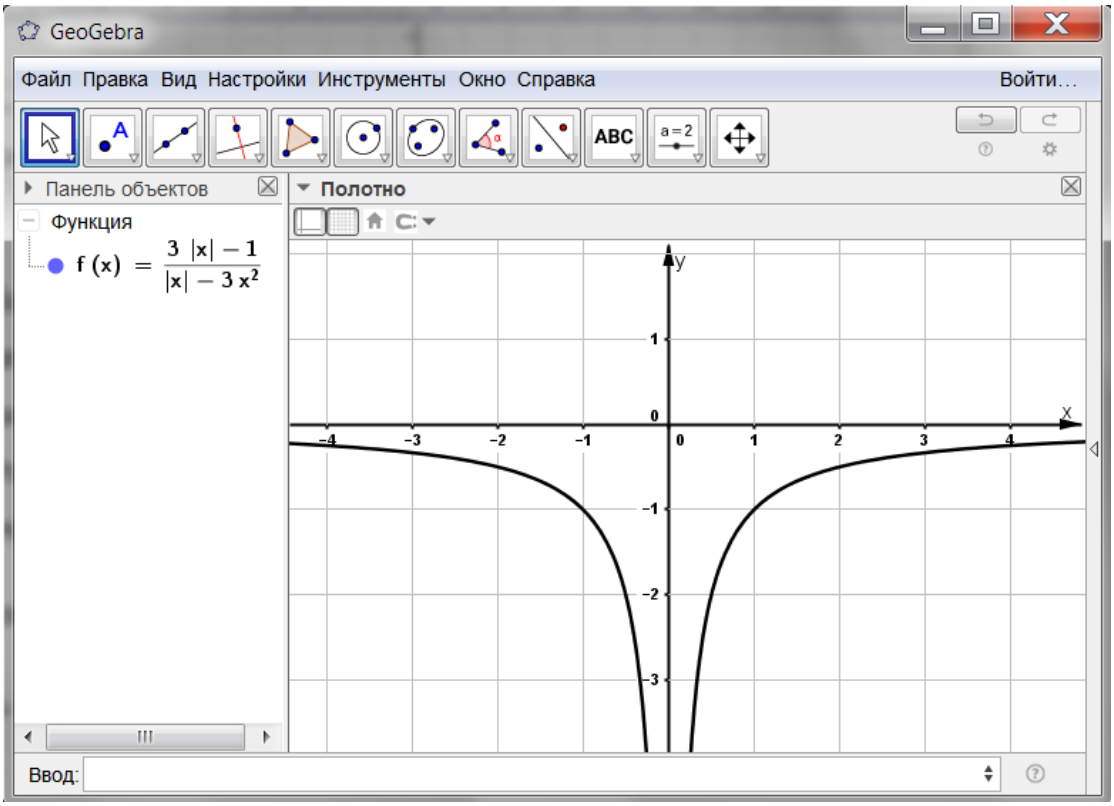


Рисунок 9 – Построение графика функции $y=\frac{3|x|-1}{|x|-3x^2}$ в GeoGebra

Широкими возможностями для создания интерактивных визуализированных задач обладают сетевые сервисы, которые среди всех перечисленных видов программных средств обладают рядом преимуществ:

– для их использования не требуется установка программного обеспечения, поэтому задачи открываются на любом компьютере,

имеющем доступ в Интернет;

– задачи могут решать сразу несколько учащихся, даже находящихся удаленно друг от друга;
– преимущественно бесплатные сервисы;
– учитель имеет возможность удаленно просматривать результаты выполнения задач.

Рассмотрим подробнее сервис **learningapps.org**. Это приложение Web 2.0 для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей. Русскоязычный дружественный интерфейс сервиса позволяет достаточно легко создавать как различные интерактивные задачи для учащихся (задачи на классификацию объектов, сортировку, определение порядка, оценивание, заполнение пропусков и т. д.), так и дидактические игры, предполагающие одновременное участие в решении задачи нескольких обучающихся с возможностью общения в игровом чате.

На рисунке 10 приведен пример задачи «Функция или нет», реализованной с помощью шаблона упражнения «Классификация». Каждый элемент, появляющийся в центре поля, нужно перетащить в соответствующую зону (класс).

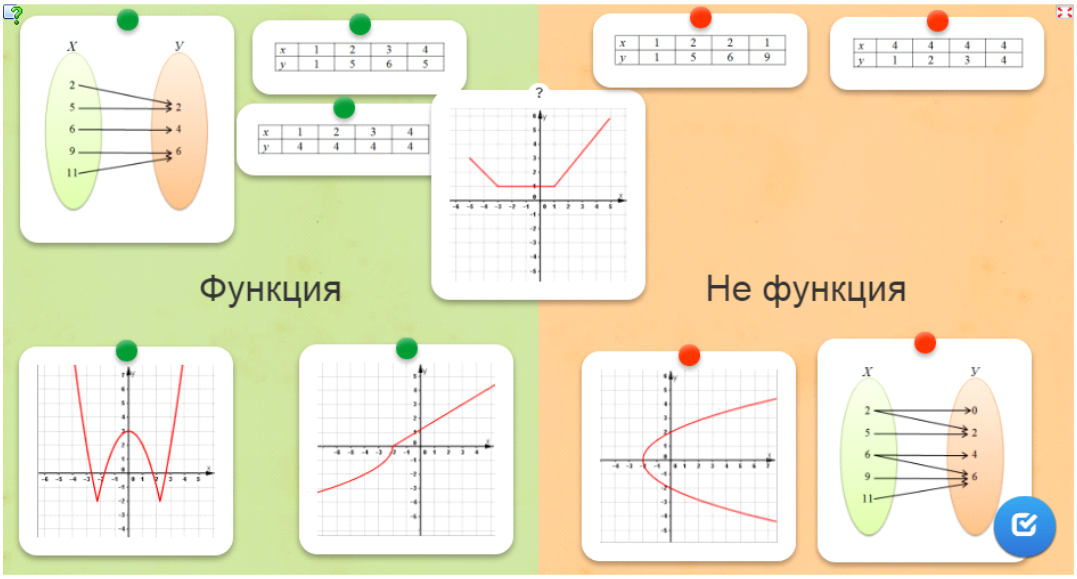


Рисунок 10 – Интерактивная визуализированная задача «Классификация» в Learningapps.org

В данном шаблоне есть возможность вставки изображения, что позволяет

представлять информацию в различных видах. В частности, в рассматриваемой задаче элементы представлены в виде таблиц, графов и графиков.

Не подписывая поля и предъявляя сразу все элементы, можно усложнить задачу, побуждая обучающихся сначала выделить классификационный признак, по которому производится деление на группы.

Чтобы проследить правильность выполнения задач, учитель имеет возможность создать он-лайн журнал для нескольких классов (рисунок 11).

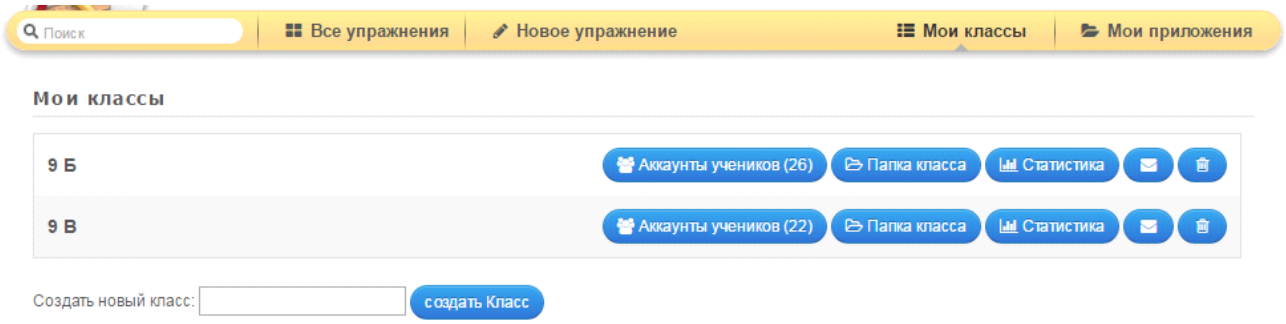


Рисунок 11 – Он-лайн журнал учителя в Learningapps.org

Анализ функциональных возможностей сервиса и опыт его внедрения в практику обучения алгебре позволил нам выделить ряд его недостатков:

– не позволяет просмотреть учителю ошибки, допущенные учащимися при решении задач;
– не позволяет проследить за количеством попыток решения задачи учащимся;
– отсутствует редактор формул (не во всех задачах можно внедрить формулы).

Ввиду указанных недостатков, затрудняется процесс оценивания учащихся. Поэтому задачи носят больше тренировочный характер. Тем не менее, они могут быть успешно применены на уроке (фронтальная и самостоятельная работы обучающихся) и дома (в качестве альтернативного домашнего задания на домашнем компьютере обучающегося).

Рассмотрим перечисленные выше средства ИКТ с точки зрения видов интерактивности, которые могут быть с их помощью реализованы (таблица 10).

Таблица 10 – Виды интерактивности в средствах ИКТ

Средства ИКТ	Виды интерактивности				
	Обратной связи	Временная	Порядковая	Содержательная	Творческая
Smart Notebook	+	+	+	+	–
MS PowerPoint	+	+	+	+	+
GeoGebra	+	+	+	+	+
MindMeister.com	+	+	+	+	+
Learningapps.org	+	+	+	+	–
Приложения Диска Google	+	+	+	+	+

Как видно из таблицы, рассмотренные нами средства ИКТ, предоставляют возможность реализовать различные виды интерактивности. Однако, чтобы применение указанных выше средств для визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии было эффективно, необходимо выполнение ряда условий:

- создание учебных ситуаций, развивающих ПУУД;
- оптимальное сочетание трех видов представления учебной математической информации;
- реализация когнитивной функции визуализации.

1.4. Структурно-функциональная модель развития познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации

Для целостного представления о развитии ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации используем метод моделирования – универсальный метод познания, применяемый при исследовании явлений и процессов в любой сфере деятельности. Метод моделирования является интегративным, в педагогическом

исследовании он позволяет объединить эмпирическое и теоретическое, то есть «… сочетать в ходе изучения педагогического объекта эксперимент с построением логических конструкций и научных абстракций» [31, с. 62].

Понятие «модель», являясь межпредметным, трактуется по-разному, в зависимости от сферы использования. Анализ определений термина «модель» позволил установить, что в науке он определяется и как искусственно созданный объект (образец) (А. И. Богатырев [31], А. Н. Дахин [65], И. В. Непрокина [148], М. А. Панфилов [157], Г. В. Суходольский [189] и др.), и как система (А. А. Ушаков [201], Б. А. Глинский [49], В. В. Краевский [104], В. А. Штофф [233] и др.), и как аналог, замещающий природное или социальное явление (Ю. К. Бабанский [21], В. П. Заболотский [80] и др.).

Опираясь на результаты анализа определений понятия «модель», в дальнейшем будем использовать трактовку понятия, предложенную А. А. Ушаковым [201], согласно которой модель определяется как система символов, воспроизводящая существенные свойства системы-оригинала и помогающая наглядно представить исследуемый процесс, в случае нашего исследования процесс развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации.

Для обеспечения соответствия модели ее назначению, необходимо, чтобы она отвечала ряду требований. При разработке модели развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации мы придерживались требований, выдвинутых А. М. Новиковым [151] и Д. А. Новиковым [151]: ингерентность, простота модели и ее адекватность.

Ингерентность обеспечивается достаточной степенью согласованности модели с образовательной средой, в которой она будет функционировать. При этом не только модель приспосабливается к среде, но и среда приспосабливается к создаваемой модели. Простота модели достигается выделением наиболее существенных свойств моделируемого процесса, что влечет за собой доступность и понятность разрабатываемой модели для участников ее реализации и других

исследователей. Адекватность модели отражает ее соответствие цели, которую необходимо достичь, в нашем случае – развить ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации.

Методологическую основу описываемой модели составил системный подход, являющийся одной из методологических составляющих исследования любых систем управления. Ключевое понятие этого подхода – «система» – «… выделенное на основе определенных признаков упорядоченное множество взаимосвязанных элементов, объединенных общей целью функционирования и единства управления и выступающих во взаимодействии со средой как целостное явление» [159, с. 157]. Любая система обладает определенным составом (совокупностью элементов) и структурой (совокупностью связей и отношений), от которых зависят свойства системы. Даже при одинаковом составе системы с разной структурой обладают разными свойствами, могут иметь разное назначение.

Элементы системы, связи и отношения, благодаря которым обеспечивается существование, функционирование и развитие системы, называются системообразующими.

Для построения модели используем графический метод, позволяющий наглядно изобразить состав и структуру моделируемого процесса развития ПУУД учащихся основной школы в процессе понятиям функциональной линии средствами визуализации.

Выделим в модели развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации сложившуюся в отечественной педагогике структуру педагогического процесса: целевой, организационно-содержательный, технологический и критериально-оценочный компоненты, являющиеся в нашем случае основными системообразующими элементами системы (рисунок 12). Перечисленные компоненты взаимосвязаны и функционируют как единое целое.

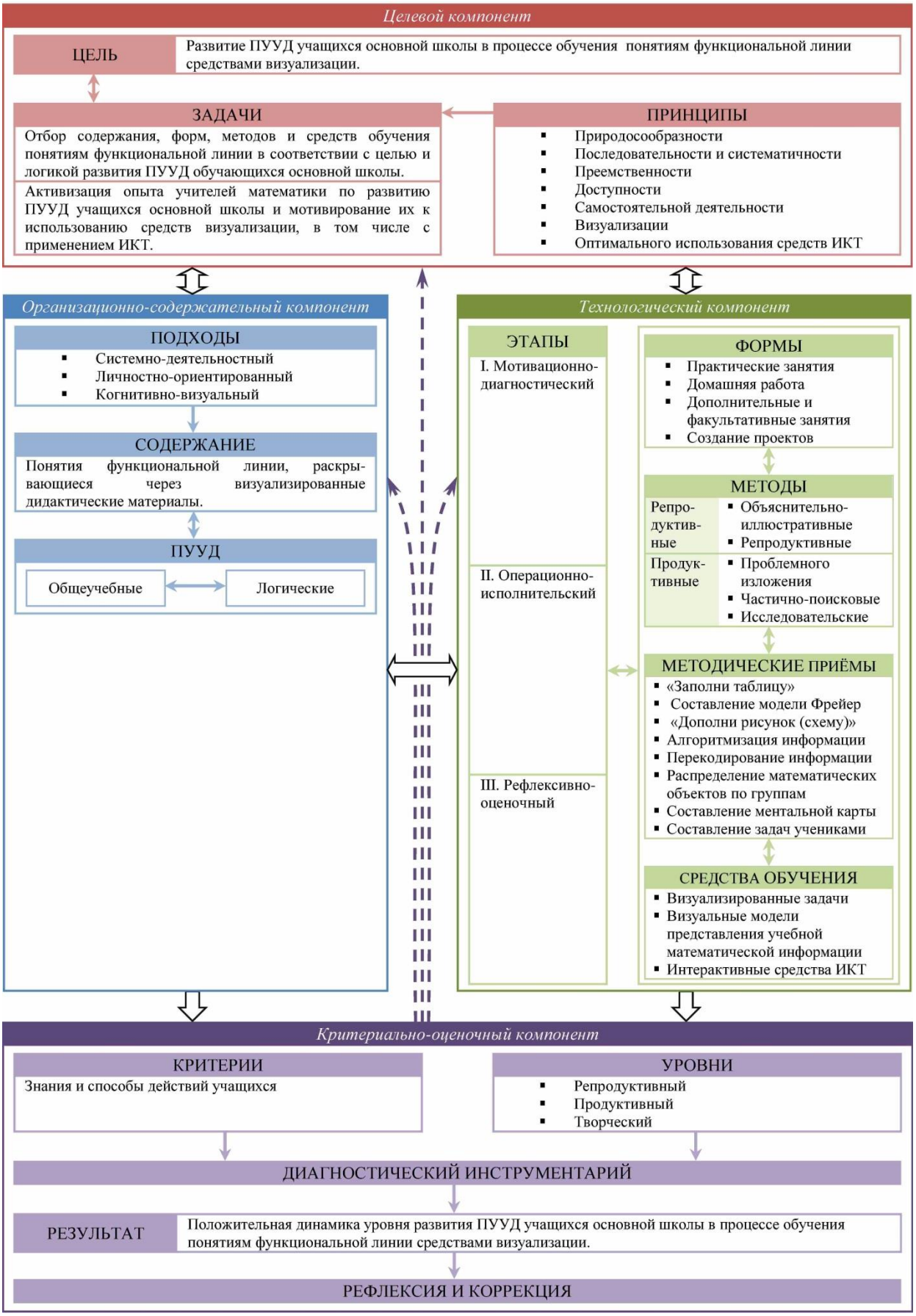


Рисунок 12 – Структурно-функциональная модель развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации

Раскроем сущность каждого компонента.

Целевой компонент рассматриваемой модели представляет собой подсистему, основными элементами которой являются цель, задачи и принципы, обеспечивающие достижение цели. Цель определяет ожидаемый результат и задает ориентиры деятельности учащихся и учителя.

Целью реализации построенной модели является развитие ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации.

Для достижения сформулированной цели были поставлены следующие задачи:

- отбор содержания, форм, методов и средств обучения понятиям функциональной линии в соответствии с целью и логикой развития ПУУД обучающихся основной школы;
- активизация опыта учителей математики по развитию ПУУД учащихся основной школы и мотивирование их к использованию средств визуализации, в том числе с применением ИКТ.

Цель и указанные задачи реализуются в соответствии с принципами, отражающими основные требования к организации и проведению педагогического процесса. Не отрицая важности дидактических принципов, лежащих в основе концепции математического образования, выделим наиболее значимые для нашего исследования принципы: природосообразности, последовательности и систематичности, преемственности, доступности, самостоятельной деятельности, визуализации и оптимального использования средств ИКТ. Раскроем суть перечисленных принципов.

Принцип природосообразности предполагает учет психофизиологических и возрастных особенностей обучающихся, включая когнитивные стили и доминирование полушарий головного мозга. Следование этому принципу в процессе развития ПУУД учащихся будет способствовать повышению у них познавательного интереса и сохранению их физического и психического здоровья.

Принцип последовательности и систематичности означает, что процесс развития ПУУД учащихся должен осуществляться последовательно, когда следующий этап является логическим продолжением предыдущего, при этом обучающиеся дополняют уже имеющуюся систему знаний и способов действий элементами новых знаний и способов действий, находящихся в тесной взаимосвязи.

С принципом последовательности и систематичности тесно связан *принцип преемственности,* заключающийся в тесной взаимосвязи каждого нового уровня развития ПУУД учащихся с предыдущим – новый уровень опирается на предыдущий и содержит в себе некоторые его элементы.

Принцип доступности требует в процессе развития ПУУД при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации учета реальных возможностей учащихся и их уровня развития ПУУД. Данный принцип реализуется за счет включения в процесс обучения комплекса визуализированных задач различной сложности, соответствующих уровням развития ПУУД.

Принцип самостоятельной деятельности означает, что повысить свой уровень развития ПУУД обучающиеся могут только через свой субъектный опыт, при этом их учебная активность будет носить непрерывный и мотивационный характер.

Принцип визуализации является результатом поиска новых возможностей в реализации принципа наглядности и подразумевает целенаправленное использование в процессе развития ПУУД средств визуализации, выполняющих не только иллюстративную, но и когнитивную функцию. К таким средствам в процессе обучения понятиям функциональной линии в курсе алгебры мы относим визуальные модели представления учебной математической информации и визуализированные задачи.

Принцип оптимального использования средств ИКТ заключается в отборе средств ИКТ, форм и методов работы с ними для достижения максимального эффекта в развитии ПУУД. В процессе обучения понятиям функциональной

линии учащихся основной школы средства ИКТ должны удовлетворять требованиям, выдвинутыми нами в параграфе 1.3.

Рассмотренные принципы в процессе развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации являются равнозначными, взаимодействуют друг с другом и функционируют как целостная система. Только в этом случае они обеспечивают успешное выполнение задач и реализацию указанной цели.

Организационно-содержательный компонент модели включает в себя подходы к обучению, содержание обучения, виды ПУУД и способы организации их развития в процессе обучения понятиям функциональной линии учащихся основной школы.

В своём исследовании мы считаем необходимым опираться на системно-деятельностный, личностно-ориентированный и когнитивно-визуальный подходы. Остановимся на них подробнее.

Системно-деятельностный подход является методологической основой ФГОС ООО и «… обеспечивает: формирование готовности к саморазвитию и непрерывному образованию; проектирование и конструирование социальной среды развития обучающихся в системе образования; активную учебно-познавательную деятельность обучающихся; построение образовательного процесса с учётом индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей обучающихся» [203, с. 5]. Системно-деятельностный подход к обучению базируется на исследованиях Л. С. Выготского [43], В. В. Давыдова [56, 57, 58, 59], А. Н. Леонтьева [112], Д. Б. Эльконина [237, 238, 239], А. Г. Асмолова [16, 18] и др.

По мнению А. Г. Асмолова [18], системно-деятельностный подход в образовании определяет процесс учения как процесс деятельности ученика, направленный на становление его сознания и его личности в целом. Данный подход не отрицает «знаниевого» подхода, однако следует уточнить, что при его реализации знания не даются в готовом виде, а обучающиеся «открывают» их в процессе самостоятельной деятельности. Функция учителя при этом заключается

в сопровождении учебного процесса, в организации учебной деятельности обучающихся.

Системно-деятельностный подход нацелен на образовательный результат как системообразующий фактор деятельности, в нашем случае – на развитие ПУУД учащихся основной школы. Чтобы получить новый образовательный результат учителю необходимо подробно его описать, подобрать средства для его получения и определить адекватные методики и педагогические технологии, тем самым ответив на вопросы: зачем, чему и как учить?

Личностно-ориентированный подход обеспечивает построение особого рода педагогического процесса, создающего условия для развития и саморазвития личностных качеств обучаемых, проявления и реализации возможностей учащихся в соответствии со способностями и психофизиологическими особенностями. Концепции и теории личностно-ориентированного подхода к обучению отражены в трудах Е. В. Бондаревской [36], В. В. Серикова [181], И. С. Якиманской [240] и др.

Обучение, организованное в соответствии с личностно-ориентированным подходом, направлено не только на достижение каждым обучаемым планируемых результатов, но и на создание необходимых для этого условий учебного взаимодействия между ним и учителем, когда содержание, методы и средства обучения обеспечивают эффективное развитие таких личностных качеств, как способности к самообразованию, саморазвитию, самообучению, самовоспитанию, самостоятельности, формированию познавательного интереса, умения применять полученные знания на практике. При этом должны не только учитываться индивидуальные особенности обучаемого (межполушарная асимметрия и наличные когнитивные стили) и предпочитаемые способы работы с учебным материалом, но и создаваться условия для развития качеств личности, не характерных для наличных когнитивных стилей.

Когнитивно-визуальный (*зрительно-познавательный*) *подход* ориентирован на максимальное использование в процессе обучения математике потенциальных возможностей визуального мышления. Идеи данного подхода, развитые в трудах

В. А. Далингера [60, 62, 63], Н. М. Ежовой [71], Н. В. Иванчук [90], Д. А. Картежникова [98], О. О. Князевой [99], Н. А. Резник [171] и др., призваны обеспечить сбалансированную работу полушарий головного мозга человека при обучении математике, тем самым учитывая индивидуальные особенности учащихся, описанные в параграфе 1.2 (табл. 7) и Приложении А. Обучение, строящееся на основе когнитивно-визуального подхода предполагает смещение с иллюстративной функции наглядности на когнитивную, что способствует реализации развивающей функции обучения, а, следовательно, и развитию ПУУД учащихся.

Одно из основных положений когнитивно-визуального подхода – широкое и целенаправленное использование познавательной функции наглядности [62, с. 297]. При этом «успешность обучения математике, – как отмечает В. А. Далингер, – зависит не только от того насколько успешно авторы учебника или учитель использует наглядность в процессе обучения теоретическому материалу, но и насколько эта наглядность работает в системе задач» [62, с. 299].

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что личностно-ориентированный, системно-деятельностный и когнитивно-визуальный подходы не противоречат друг другу, а в некоторой степени сочетаются и дополняют друг друга, тем самым обеспечивая эффективное развитие ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации.

Кроме подходов к обучению организационно-содержательный компонент модели отражает содержание обучения, виды ПУУД и способы организации их развития.

Содержание в рассматриваемой модели определяет ФГОС ООО, учебные планы, примерные образовательные программы, цель создания модели, принципы и подходы к обучению. В нашем случае содержание составляют понятия функциональной содержательно-методической линии, а содержательным обеспечением развития ПУУД обучаемых являются визуализированные дидактические материалы – визуализированные задачи и визуальные модели представления учебной математической информации.

Развитие выделенных ПУУД учащихся основной школы (параграф 1.1, рис. 2), происходит поэтапно в процессе последовательного решения визуализированных задач, соответствующих уровням развития ПУУД (репродуктивному, продуктивному и творческому), а также с применением визуальных моделей представления учебной математической информации, которые не только представляют теоретическую информацию и знания, но и могут выступать в качестве визуализированных задач.

Технологический компонент рассматриваемой модели включает в себя систему форм, методов и приемов обучения, направленных на развитие ПУУД учащихся основной школы, тем самым позволяя ответить на вопрос: «Как развивать ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации?».

Этапы развития ПУУД учащихся основной школы выделены с учетом функциональных компонентов учебной деятельности и с опорой на исследования Л. И. Боженковой [33] и Е. А. Пустовит [170]. Цели мотивационно-диагностического, операционно-исполнительского и рефлексивно-оценочного этапов, а также деятельность учителя и обучающихся на каждом из указанных этапов подробно описаны в таблице 4 (параграф 1.1). Перечисленные этапы согласуются с организационными формами, а также методами и приемами обучения.

Процесс развития ПУУД учащихся реализуется через организационные формы обучения: практические занятия, домашнюю работу, дополнительные и факультативные занятия, создание проектов.

Под методом обучения мы понимаем «… способы взаимодействия учителя и учащихся, направленного на достижение целей образования, воспитания и развития школьников в ходе обучения» [135, с. 145]. В педагогической литературе существует большое количество классификаций методов обучения, обусловленное выбором различных оснований деления, отражающих аспекты их изучения. При отборе методов обучения мы опирались на классификацию, предложенную И. Я. Лернером и М. Н. Скаткиным, так как основанием деления

является характер познавательной деятельности учащихся, основу которой составляют ПУУД.

Нами были использованы следующие методы:

1) объяснительно-иллюстративные (беседа, объяснение);

2) репродуктивные (решение задач, в том числе визуализированных, по образцу, лабораторная работа с полной инструкцией, в том числе с использованием средств ИКТ и др.);

3) проблемного изложения (проблемное изложение создания визуальных моделей представления учебной математической информации и др.);

4) частично-поисковые (эвристическая беседа, лабораторная поисковая работа, предшествующая изучению материала, в том числе с использованием средств ИКТ, самостоятельная работа с визуальными моделями представления учебной математической информации и др.);

5) исследовательские (решение творческих визуализированных задач, самостоятельное создание учащимися визуальных моделей представления учебной математической информации, метод проектов и др.).

Авторы распределили перечисленные методы на две группы: репродуктивные (1 и 2) и продуктивные (3, 4 и 5). В процессе развития ПУУД используются обе группы методов, но приоритет отдается группе продуктивных (активных) методов.

Указанные методы обучения применяются в единстве с визуализированными средствами обучения, к которым мы относим визуализированные задачи, визуальные модели представления учебной математической информации и интерактивные средства ИКТ.

Методы обучения тесно связаны с методическими приемами. Метод включает в себя приемы, но не является их суммой. Перечислим методические приемы, используемые нами в процессе развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии средствами визуализации: «заполни таблицу», составление модели Фрейер, «дополни рисунок (схему)», «выдели цветом», алгоритмизация информации, перекодирование информации,

распределение математических объектов по группам, составление ментальной карты, составление задач учениками. Подробнее о перечисленных методах и приемах будет написано во второй главе.

Критериально-оценочный компонент модели представлен критериями, уровнями и показателями развития ПУУД учащихся основной школы, диагностическим инструментарием, анализом достижений, рефлексией результата и коррекцией процесса развития в случае необходимости.

Критерий (от греч. kriterion – средство для суждения) – признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо; мера суждения, оценки какого-либо явления [101 ,с. 149].

В ходе исследования мы пришли к выводу, что критериями уровней развития ПУУД учащихся основной школы могут выступать знания и способы действий, которыми они овладевают в процессе обучения понятиям функциональной линии посредством решения различных видов и типов визуализированных задач. Описание уровней и критериев развития ПУУД рассмотрены в главе 1 (параграф 1.1, таблица 5).

Процесс развития ПУУД является непрерывным и последовательным, то есть каждый последующий уровень включает в себя предыдущие.

Для определения динамики уровня развития ПУУД у учащихся основной школы, нами был разработан диагностический инструментарий, предполагающий оценку уровней развития уже имеющихся знаний и способов действий («на входе»), а также приобретенных в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации («на выходе»). Анализ динамики позволяет сделать вывод о достижении результата – повышение уровня развития ПУУД у учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации.

Полученный результат обязательно требует рефлексии и коррекции процесса в случае необходимости.

Таким образом, подчеркнем, что разработанная нами структурно-функциональная модель развития ПУУД учащихся основной школы в процессе

обучения понятиям функциональной линии курса алгебры средствами визуализации, состоящая из четырех взаимосвязанных компонентов (целевого, организационно-содержательного, технологического и критериально-оценочного), объединенных общей целью функционирования в соответствии с логикой развития ПУУД, ориентирована на положительную динамику уровня их развития в случае ее реализации как целостной системы.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

В данной главе были рассмотрены теоретические основы развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии курса алгебры средствами визуализации, что позволило представить определенные результаты и выводы.

1. В результате анализа психолого-педагогической и научно-методической литературы были выявлены различные подходы к соотношению понятий «универсальные учебные действия» и «общеучебные умения и навыки», раскрыто содержание понятия «универсальные учебные действия».

2. Учитывая возможности средств визуализации в процессе обучения алгебре, опирающихся на различные способы представления учебной математической информации (словесный, аналитический и визуальный), выделены ПУУД, которые возможно и целесообразно развивать у учащихся основной школы в процессе обучения алгебре средствами визуализации: знаково-символическая деятельность (включая моделирование); умение структурировать знания; поиск и выделение необходимой информации; определение основной и второстепенной информации; выбор наиболее рационального способа решения задачи в зависимости от конкретных условий; анализ объектов с целью выделения признаков; синтез как составление целого из частей; подведение под понятие, выведение следствий; выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов.

3. Выделены этапы развития ПУУД (*мотивационно-диагностический*, *операционно-исполнительский* и *рефлексивно-оценочный*), цели каждого этапа, а также деятельность учителя и обучающихся на каждом из этапов.

4. Уровни развития ПУУД определяются степенью выраженности критериев развития и характера учебно-познавательной деятельности учащихся, где в качестве критериев выступают знания и способы действий, приобретенные в процессе обучения понятиям функциональной линии. На основе исследований В. П. Беспалько, Д. С. Елисеевой, Е. А. Пустовит, выделены три уровня развития ПУУД: *репродуктивный*, *продуктивный* и *творческий*.

5. Визуализация учебной математической информации, обладая широким дидактическим потенциалом, способствует созданию условий не только для актуализации наличных когнитивных стилей учащихся, но и для обогащения и мобильности когнитивных стилей, подразумевающих возможность перехода с одного полюса стиля на другой в зависимости от собственных потребностей и требований учебной ситуации. Используя оптимальное сочетание трех видов представления учебной математической информации, визуализация может выступать в качестве эффективного средства развития ПУУД учащихся. К основным средствам визуализации в контексте развития ПУУД учащихся в процессе обучения понятиям функциональной линии мы относим визуальные модели представления учебной математической информации и визуализированные задачи.

6. Функциональные возможности средств ИКТ позволяют наполнить визуализированные дидактические материалы свойством интерактивности. На основании выделенных критериев (распространенность и доступность в образовательных учреждениях; дружественный русифицированный интерфейс; широкие графические возможности для создания качественной визуализации; наличие инструментов, позволяющих использовать в учебных материалах различные виды интерактивности; возможность работы без специальных знаний и навыков программирования) были проанализированы и выбраны современные средства ИКТ, которые целесообразно использовать для развития ПУУД учащихся в процессе обучения понятиям функциональной линии.

7. Для целостного представления о развитии ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации была научно обоснована и разработана четырехкомпонентная структурно-функциональная модель исследуемого процесса. Содержательное наполнение компоненты модели (целевой, организационно-содержательный, технологический и критериально-оценочный) получили в соответствии с функциями и спецификой исследуемого процесса.

ГЛАВА 2. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СРЕДСТВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ В РАЗВИТИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПОНЯТИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ АЛГЕБРЫ

Материал второй главы диссертации посвящен содержательным и методическим особенностям развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации. В этой главе приведена характеристика комплекса визуализированных дидактических материалов, направленного на развитие ПУУД. Раскрыты методические особенности развития ПУУД в условиях применения средств визуализации в процессе обучения понятиям функциональной линии в курсе алгебры. Описаны организация и проведение педагогического эксперимента для обоснования эффективности разработанной методики.

2.1. Характеристика комплекса визуализированных дидактических материалов, направленного на развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры

В первой главе было теоретически обосновано использование средств визуализации в развитии ПУУД учащихся в процессе обучения понятиям функциональной линии.

Ведущей деятельностью при обучении математике является решение задач. Поэтому к основным средствам визуализации, направленным на развитие ПУУД учащихся 7-9 классов в процессе обучения понятиям функциональной линии, мы относим визуализированные задачи.

Анализ работ В. А. Далингера и О. О. Князевой позволил выделить определение визуализированной задачи, взятое за основу в нашем исследовании, с уточнением его дизъюнктивной формы: визуализированной назовем задачу, в которой образ явно или неявно задействован в условии или ответе, задает метод решения задачи, создает опору каждому этапу решения задачи либо явно или неявно сопутствует на определенных этапах ее решения [63].

Визуализированные задачи:

- предназначены для формирования визуального образа, помогающего разрешать возникающие проблемы;
- используют разнообразные сочетания способов представления учебной математической информации (словесный, аналитический, визуальный);
- ориентированы на различные когнитивные стили учащихся;
- служат инструментарием для развития и диагностики ПУУД учащихся;
- одно из основных средств визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии.

Визуализированные задачи направлены, в первую очередь, на развитие *знаково-символических действий, включая моделирование*. Основным условием является осуществление обучающимися в ходе решения задачи разнонаправленного перекодирования информации, представленной различными способами с обязательным присутствием визуального образа.

Отметим, что задачи на символьно-словесную перекодировку становятся визуализированными, если содержат визуальный образ, который явно или неявно присутствует в решении задачи, или служит опорой на некотором этапе ее решения.

Таким образом, задачи в обучении математике можно классифицировать по наличию визуального образа в ее структурных компонентах: условии, обосновании, решении или заключении. Если визуальный образ отсутствует во всех указанных компонентах, то такая задача относится к классу не

визуализированных. Если же хотя бы один из структурных компонентов содержит визуальный образ, то такая задача относится к классу визуализированных.

В свою очередь, визуализированные задачи можно разделить так же на два класса. Если визуальный образ присутствует *только в обосновании или решении* задачи, то она относится к классу визуализированных задач с неявным присутствием визуального образа. Все остальные визуализированные задачи относятся к классу с явным присутствием визуального образа. То есть, в таких задачах визуальный образ должен *обязательно присутствовать в условии или заключении*. Описанная классификация задач в процессе обучения математике изображена на рисунке 13.

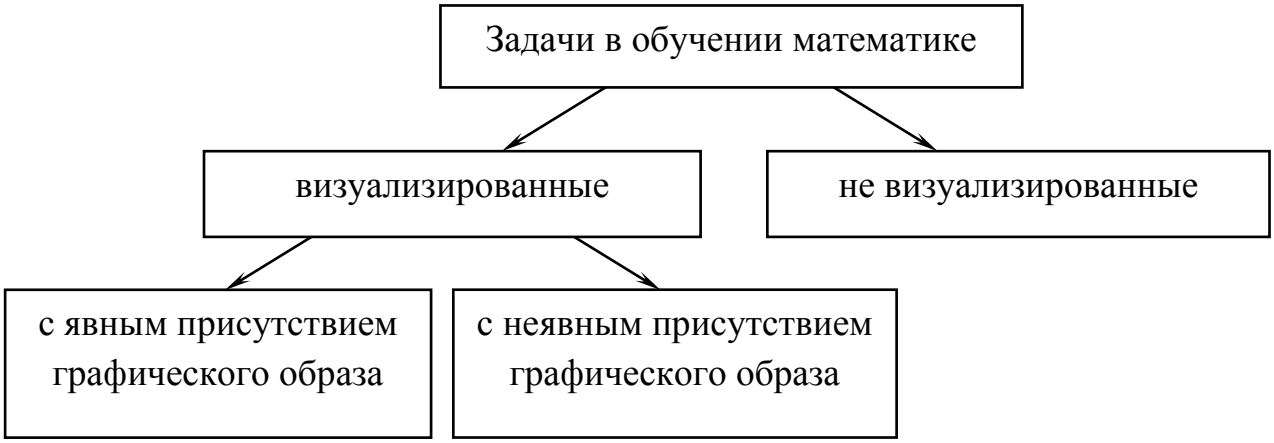


Рисунок 13 – Классификация задач в обучении математике по наличию визуального образа в структурных компонентах

Для формирования более детального представления о визуализированных задачах, остановимся подробнее на их типологии.

Опираясь на исследования П. Г. Сатьянова [179], приведем классификацию визуализированных алгебраических задач, в основе которой лежат способы предъявления учебной знаковой информации, описанные в параграфе 1.2: вербальный или словесный (С), аналитический (А), визуальный или графический (Г), с помощью которых представлено условие задачи или ответ к ней. Обязательным требованием является использование графического способа предъявления учебной знаковой информации. Автор выделяет пять типов задач графического содержания (рис. 14), вводя обозначения: первая буква – язык, на котором сформулировано условие задачи, а вторая буква – ответ к задаче.

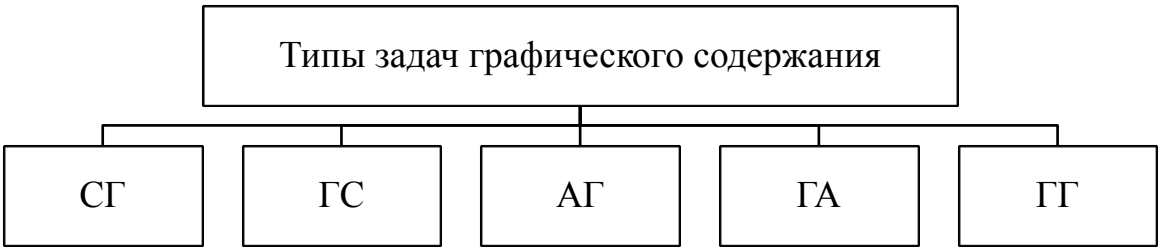


Рисунок 14 – Типы задач графического содержания по П. Г. Сатьянову

Замечая, что условие задачи может быть представлено одновременно несколькими способами, Н. В. Щукина [236] выделяет несколько дополнительных классов визуализированных задач: (АС)Г, (АГ)Г, (СГ)Г, (АСГ)Г, (ГС)А, (ГА)А, (ГС)С, (ГА)С, (АСГ)А, (АСГ)С. Однако, такая классификация не учитывает визуализированные задачи, в которых графический образ присутствует неявно или полностью отсутствует, о чем говорит в своем исследовании Д. А. Картежников [98]. Типы задач с явным присутствием графического образа представим в виде таблицы (таблица 11).

Таблица 11 – Типы визуализированных задач с явным присутствием графического образа

Отв. / Усл.	**Г**	**А**	**С**	**АГ**	**ГС**	**АС**	**АГС**
Г	ГГ	ГА	ГС	Г(АГ)	Г(ГС)	Г(АС)	Г(АГС)
А	АГ			А(АГ)	А(ГС)		А(АГС)
С	СГ			С(АГ)	С(ГС)		С(АГС)
АГ	(АГ)Г	(АГ)А	(АГ)С	(АГ)(АГ)	(АГ)(ГС)	(АГ)(АС)	(АГ)(АГС)
ГС	(ГС)Г	(ГС)А	(ГС)С	(ГС)(АГ)	(ГС)(ГС)	(ГС)(АС)	(ГС)(АГС)
АС	(АС)Г			(АС)(АГ)	(АС)(ГС)		(АС)(АГС)
АГС	(АГС)Г	(АГС)А	(АГС)С	(АГС)(АГ)	(АГС)(ГС)	(АГС)(АС)	(АГС)(АГС)

Закрашенные ячейки таблицы не являются задачами с явным присутствием графического образа, однако, если предположить наличие некоторого визуального компонента в решении ил обосновании задачи, то эти ячейки будут соответствовать визуализированным задачам с неявным присутствием графического образа. Дополненная нами таким образом таблица 11 (рисунок 15) позволяет охватить весь спектр визуализированных задач и все разнообразие знаково-символических действий по перекодировке учебной информации при обучении алгебре и другим учебным предметам, использующим описанные способы представления информации при решении задач.

Отв. / Усл.	Г	А	С	АГ	ГС	АС	АГС
Г	ГГ	ГА	ГС	Г(АГ)	Г(ГС)	Г(АС)	Г(АГС)
А	АГ	АГА	АГС	А(АГ)	А(ГС)	АГАС	А(АГС)
С	СГ	СГА	СГС	С(АГ)	С(ГС)	СГАС	С(АГС)
АГ	(АГ)Г	(АГ)А	(АГ)С	(АГ)(АГ)	(АГ)(ГС)	(АГ)(АС)	(АГ)(АГС)
ГС	(ГС)Г	(ГС)А	(ГС)С	(ГС)(АГ)	(ГС)(ГС)	(ГС)(АС)	(ГС)(АГС)
АС	(АС)Г	АСГА	АСГС	(АС)(АГ)	(АС)(ГС)	АСГАС	(АС)(АГС)
АГС	(АГС)Г	(АГС)А	(АГС)С	(АГС)(АГ)	(АГС)(ГС)	(АГС)(АС)	(АГС)(АГС)

Рисунок 15 – Модель типологии визуализированных задач

Рассмотрим примеры некоторых типов визуализированных задач.

Задача 1 (СГ). Постройте график прямой пропорциональности с угловым коэффициентом, равным 2.

Задача 2 (ГА). Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке 16.

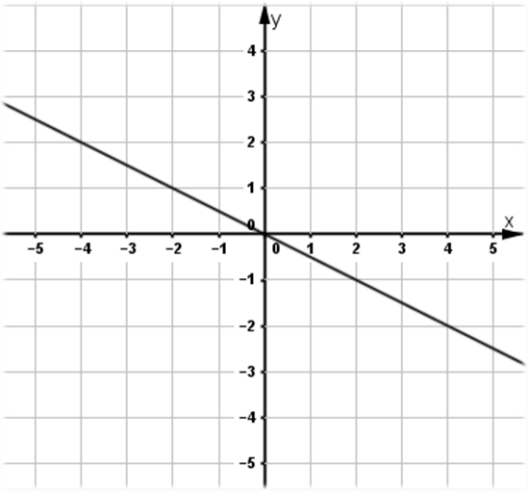


Рисунок 16 – График функции к задаче 2

Задача 3 ((АГС)(АГ)). Найдите по графику наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[1; 3]$, выделив цветом соответствующую этому отрезку часть графика (рисунок 17).

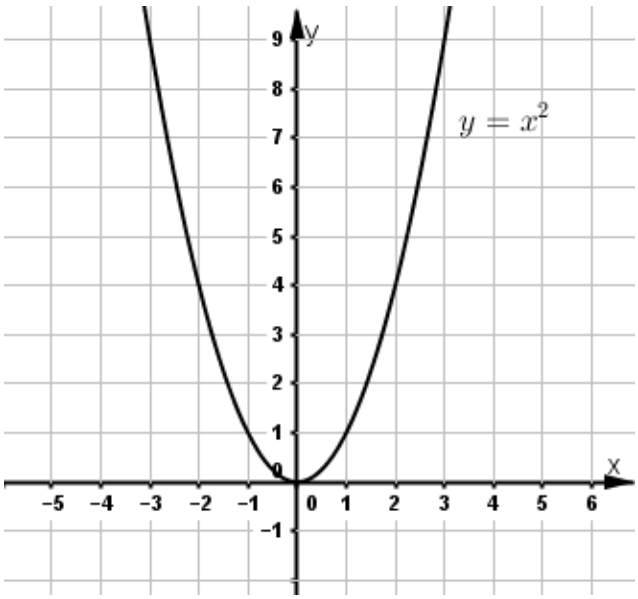


Рисунок 17 – График функции к задаче 3

Задача 4 (А(ГС)). Опишите, какую фигуру на плоскости задает уравнение $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ и постройте ее.

Задача 5 (ГС). Ограничена ли функция, график которой представлен на рисунке (рисунок 18)?

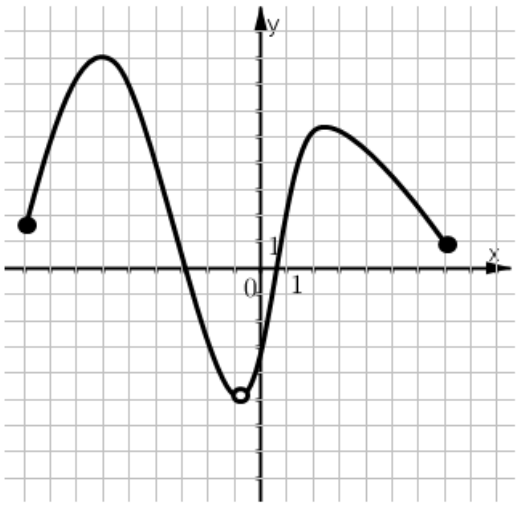


Рисунок 18 – График функции к задаче 5

Задача 6 ((ГС)(АС)). Запишите аналитическую модель системы уравнений, графическая модель которой представлена на рисунке 19. Сколько решений имеет система?

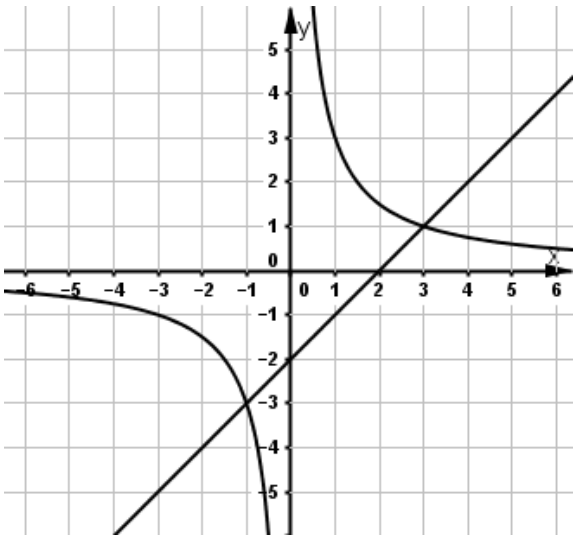


Рисунок 19 – Графическая модель системы уравнений к задаче 6

Задача 7 ((АГС)(АГС)). Для функции $y = mx - 5$, график которой представлен на рисунке (рисунок 20), определите коэффициент *m*. Постройте график функции $y = kx + 4$ так, чтобы система уравнений $\begin{cases} y = mx - 5, \\ y = kx + 4 \end{cases}$ не имела решений. Может ли указанная система иметь бесконечно много решений, почему?

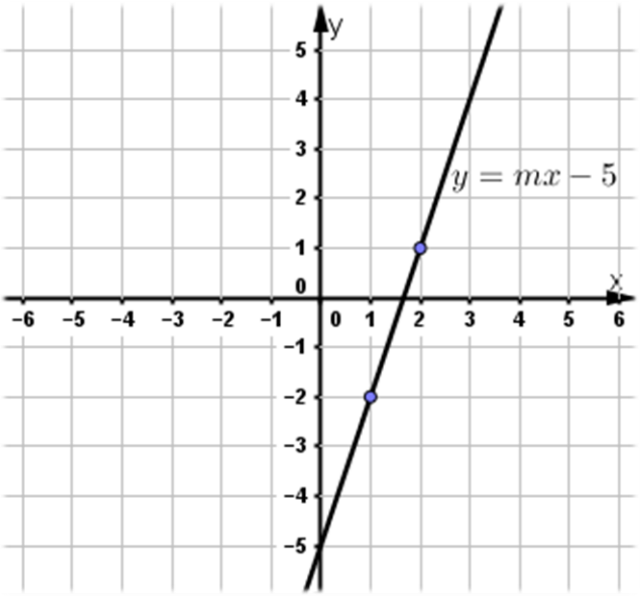


Рисунок 20 – График функции к задаче 7

Задача 8 (АГА). Решить уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Учащиеся 8 классов умеют решать данные уравнения только графически. В данной задаче графический образ, присутствующий только в решении (задан неявно), служит средством для нахождения корней уравнения.

Задача 9 ((АС)Г(АС)). Сколько корней может иметь уравнение, в левой части которого стоит квадратный трехчлен с переменной *x*, а в правой выражение вида $kx + l$? Запишите это уравнение.

Предложив эту задачу учащимся 8 класса после изучения темы «Графическое решение уравнений» при условии, что они не знают формул корней квадратного уравнения, мы получим визуализированную задачу с неявным присутствием графического образа типа (АС)Г(АС). В ходе решения учащиеся составляют уравнение $ax^2 + bx + c = kx + l$ и схематически выясняют взаимное расположение параболы и прямой (рисунок 21).

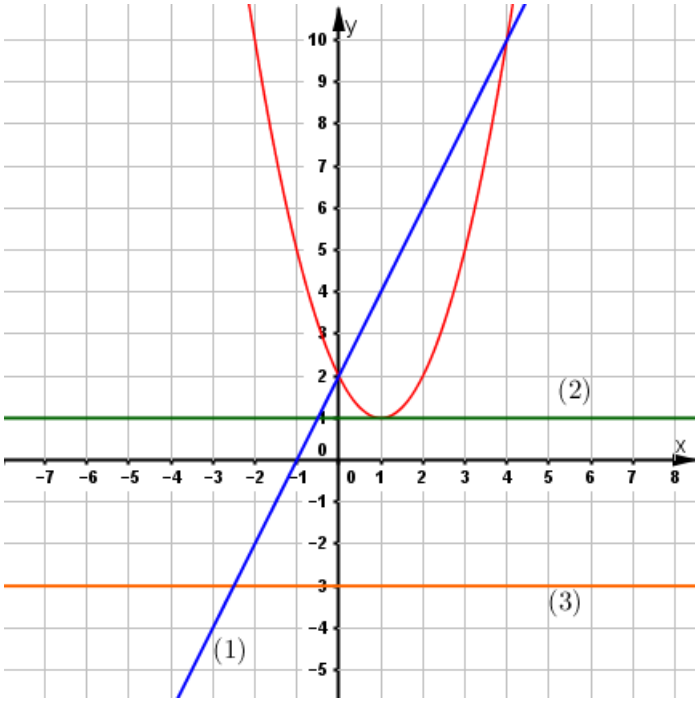


Рисунок 21 – Взаимное расположение параболы и прямой

Ответ: 1) $ax^2+bx+c=kx+l$;

2) уравнение может иметь 1 корень, 2 корня или не иметь корней.

Задача 10 ((АС)ГС). В какой четверти координатной плоскости находится точка $A(3; y)$, принадлежащая графику прямой пропорциональности с положительным угловым коэффициентом?

При решении этой задачи у учащегося возникает образ координатной плоскости с прямой, лежащей в I и III координатных углах. Так как абсцисса точки – положительное число, следовательно, точка находится в I четверти.

Визуализированные задачи присутствуют и в ОГЭ по математике, что делает актуальным их применение в процессе обучения алгебре.

Задача 11 ((ГС)(ГС), демонстрационный вариант ОГЭ, 2017 г). Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (рисунок 22).

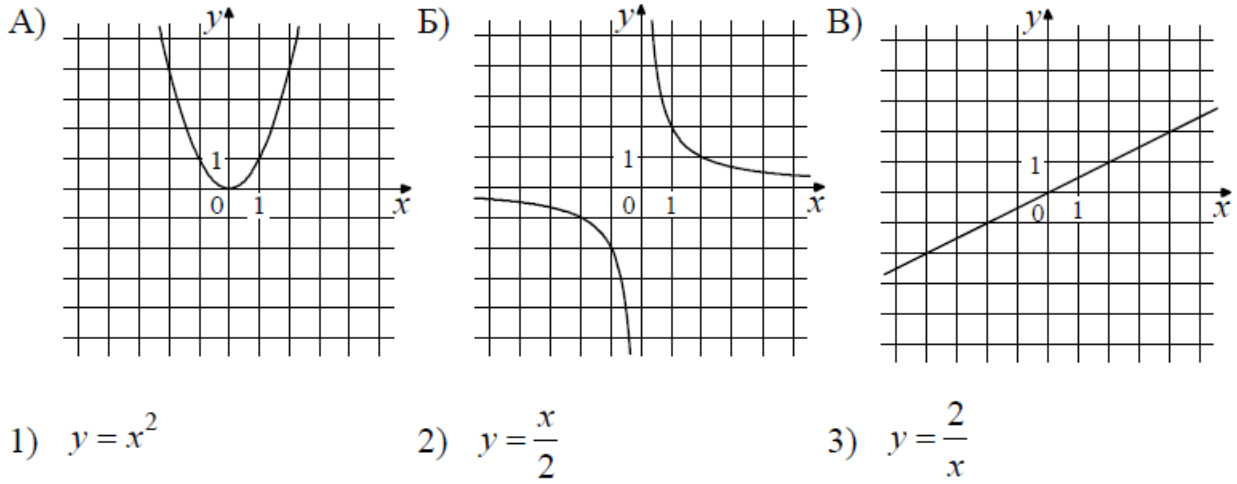


Рисунок 22 – Задача 11

Данная задача относится к базовым и предполагает образно-символьную перекодировку.

Задача 12 ((АС)(АГ), демонстрационный вариант ОГЭ, 2017 г). Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Данная задача соответствует творческому уровню. Чтобы построить график данной функции учащиеся 9 класса должны упростить формулу:

$$\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = (x+3)(x-2).$$

При построении графика функции необходимо учитывать ее область определения $D(y) = (-\infty;-2) \cup (3;+\infty)$.

Таким образом, графиком функции является знакомая учащимся парабола, но с «выколотыми» точками, соответствующими значениям аргумента –2 и 3. Формула $y = c$ задает на плоскости семейство «скользящих» прямых, параллельных оси x. Графическая иллюстрация решения задачи представлена на рисунке 23.

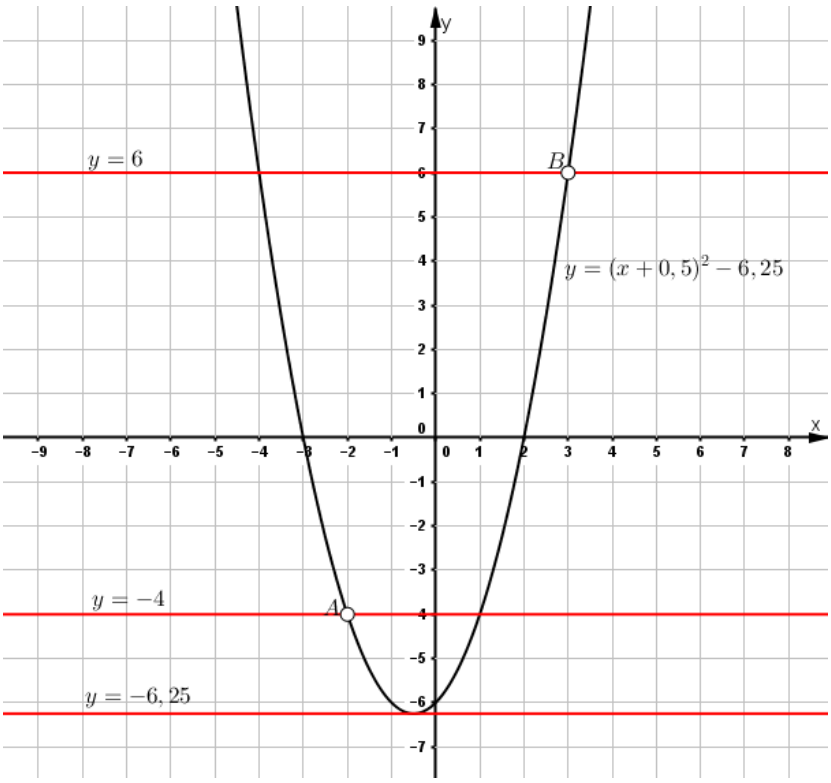


Рисунок 23 – Графическая иллюстрация решения задачи 12

Ответ: –6,25; –4 и 6.

В качестве визуального образа могут выступать не только графики функций и уравнений, но и таблицы, схемы, круги Эйлера и другие средства визуализации. Приведем примеры таких задач.

Задача 13 (СГ). Изобразите с помощью кругов Эйлера соотношение объемов понятий линейное уравнение с двумя переменными, линейная функция, прямая пропорциональность.

Особое значение мы придаем визуализированным задачам, в которых условие, решение или ответ заданы в виде таблицы. Традиционно таблицы используются для систематизации учебного материала. А. Я. Цукарь [226] в своем исследовании делит таблицы на:

- справочные, содержащие справочный материал по темам курса математики;
- иллюстративные, сопровождающие процесс формирования математических понятий, иллюстрирующие применение формул, алгоритмов, методов решения задач;

– комбинированные, предполагающие синтез первых двух видов.

Однако таблицы могут служить и средством развития ПУУД, если они включены в условие, решение или ответ задачи. Например, задания типа: составьте таблицу; заполните таблицу; пользуясь таблицей, проведите сравнение показателей; пользуясь таблицей, сделайте выводы и др. В этом случае исключается пассивное созерцание представленной в таблице информации, и учащиеся включаются в активную учебно-познавательную деятельность.

Табличный способ записи учебной математической информации позволяет:

– визуализировать зависимость между переменными;
– сформулировать выводы;
– визуализировать расчеты;
– овладеть учащимся более рациональными приемами работы с учебным материалом;
– представить информацию в сжатом виде, снижая тем самым информационную нагрузку;
– развивать общеучебные и логические ПУУД, связанные с поиском и структурированием информации, знаково-символические ПУУД.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 14 ((АГ)Г). Заполните таблицу (таблица 12) и постройте график функции.

Таблица 12 – Таблица к задаче 14

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = 3x$	9							

В данной задаче таблица позволяет визуализировать зависимость между переменными.

Задача 15 ((ГС)(АГС)). Задайте формулой линейную функцию, график которой представлен на рисунке 24 и заполните таблицу (таблица 13).

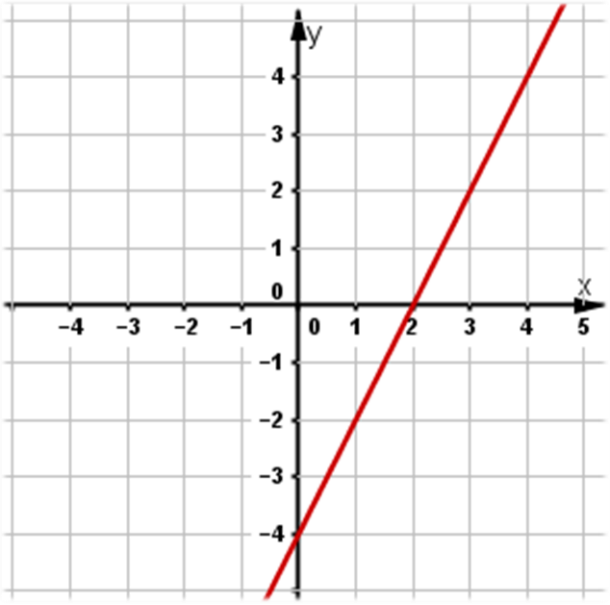


Рисунок 24 – График функции к задаче 15

Таблица 13 – Таблица к задаче 15

Аналитическая модель (формула)	$y =$
Координаты точки пересечения с осью абсцисс	
Координаты точки пересечения с осью ординат	
Возрастает или убывает функция	
При $x = 4$	$y =$
При $y = 8$	$x =$

В данной задаче таблица позволяет визуализировать зависимость между переменными, представить информацию в компактном виде, развивать знаково-символические ПУУД за счет сложной перекодировки информации по схеме: формула – текст – график.

Задача 16 ((АГ)(АГ)). Заполните таблицу (таблица 14).

Таблица 14 – Таблица к задаче 16

$y = ax^2 + bx + c$	a	b	c	Координаты вершины параболы	
				$x_0 =$	$y_0 =$
$y = 2x^2 - 8x + 1$					
$y = -x^2 + 2x - 3$					
$y = x^2 + 6x$					
$y =$ ____ $+ 2x$ ___	–2		–5		
$y =$ _____ $+ 6$	–6	0			

Примером визуализированной задачи, в которой таблица используется и в условии и в ответе может служить тест-матрица, обеспечивающая:

- быструю обратную связь;
- систематизацию знаний;
- учет особенностей разных уровней обученности.

Задача 17 ((АГС)Г). Не выполняя построений, определите, графикам каких функций принадлежат точки (таблица 15)

Таблица 15 – Тест-матрица к задаче 17

Функции / Точки	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = -x^2$
$A(5; 125)$		✓ $125 = 5^3$	
$B(1{,}1; -1{,}21)$			
$C(-0{,}5; 0{,}25)$			
$D(-1; -1)$			

Констатирующий эксперимент показал, что при изучении понятий функциональной линии в курсе алгебры учителями в основном реализуются формальный и аналитический подходы, в то время как содержание функциональной линии с использованием средств визуализации позволяет изучать многие понятия и свойства многосенсорно, ориентируясь на различные

когнитивные стили учащихся (параграф 1.2 и Приложение А). Продемонстрируем это на примерах.

Пример 1.

а) Постройте график функции $y = -4x^2$ (аналитический стиль, левополушарное доминирование).

б) Выделите цветом график функции (рисунок 25), заданной формулой $y = -4x^2$ (синтетический стиль, правополушарное доминирование).

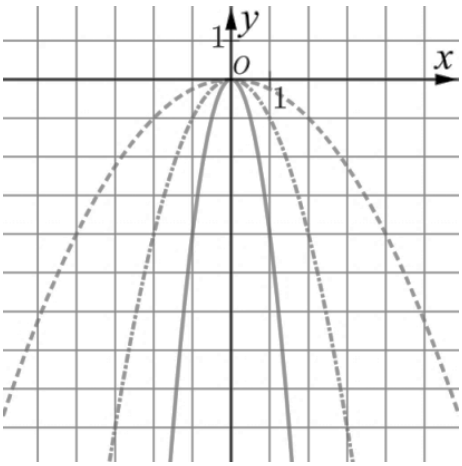


Рисунок 25 – Графики функций к примеру 1б)

Пример 2.

а) Решите графически уравнение $2x^2 = -2x + 4$ (аналитический стиль, левополушарное доминирование).

б) Укажите уравнение, графическая модель которого представлена на рисунке 26 (синтетический стиль, правополушарное доминирование).

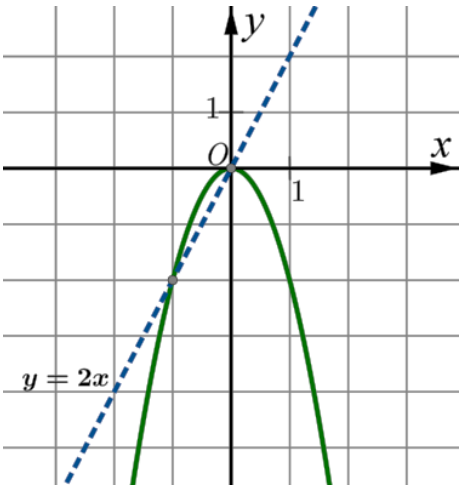


Рисунок 26 – Графическая модель уравнения

В соответствии с этапами и уровнями развития ПУУД, указанными в параграфе 1.1 и исследованием Д. А. Филипповой [204], разработанный нами комплекс визуализированных задач содержит задачи репродуктивного уровня (Р), продуктивного (П) и творческого (Т).

Задачи репродуктивного уровня.

Визуализированные задачи, соответствующие этому уровню являются базовыми по теме (знание решения этих задач необходимо для решения более сложных задач). Задачи репродуктивного уровня, как правило, не требуют от учащихся самостоятельного перекодирования и содержат готовые элементы перекодировки. Чаще всего такие задачи представлены в тестовой форме закрытого типа на соответствие или в виде тест-матрицы. При решении задач репродуктивного типа учащиеся используют ранее усвоенную информацию об объектах, процессах или действиях, осуществляя известную алгоритмическую деятельность самостоятельно или «с подсказкой».

Приведем несколько примеров.

Задача Р1. Распределите графики линейных функций по группам, где основанием деления является знак углового коэффициента линейной функции (рисунок 27).

Развиваемые ПУУД: знаково-символические действия, анализ, синтез, классификация, подведение под понятие.

Рассматриваемая задача ориентирована на образно-символьную перекодировку. При решении задачи учащимся нужно распределить графики линейных функций по классам, причем для классификации уже задано делимое понятие (линейная функция), основание деления (знак углового коэффициента) и три члена деления (линейные функции с отрицательным, положительным и нулевым коэффициентами). Анализируя графики линейных функций и распределяя их по группам, учащиеся демонстрируют умение соотносить математические объекты с членами деления классификации.

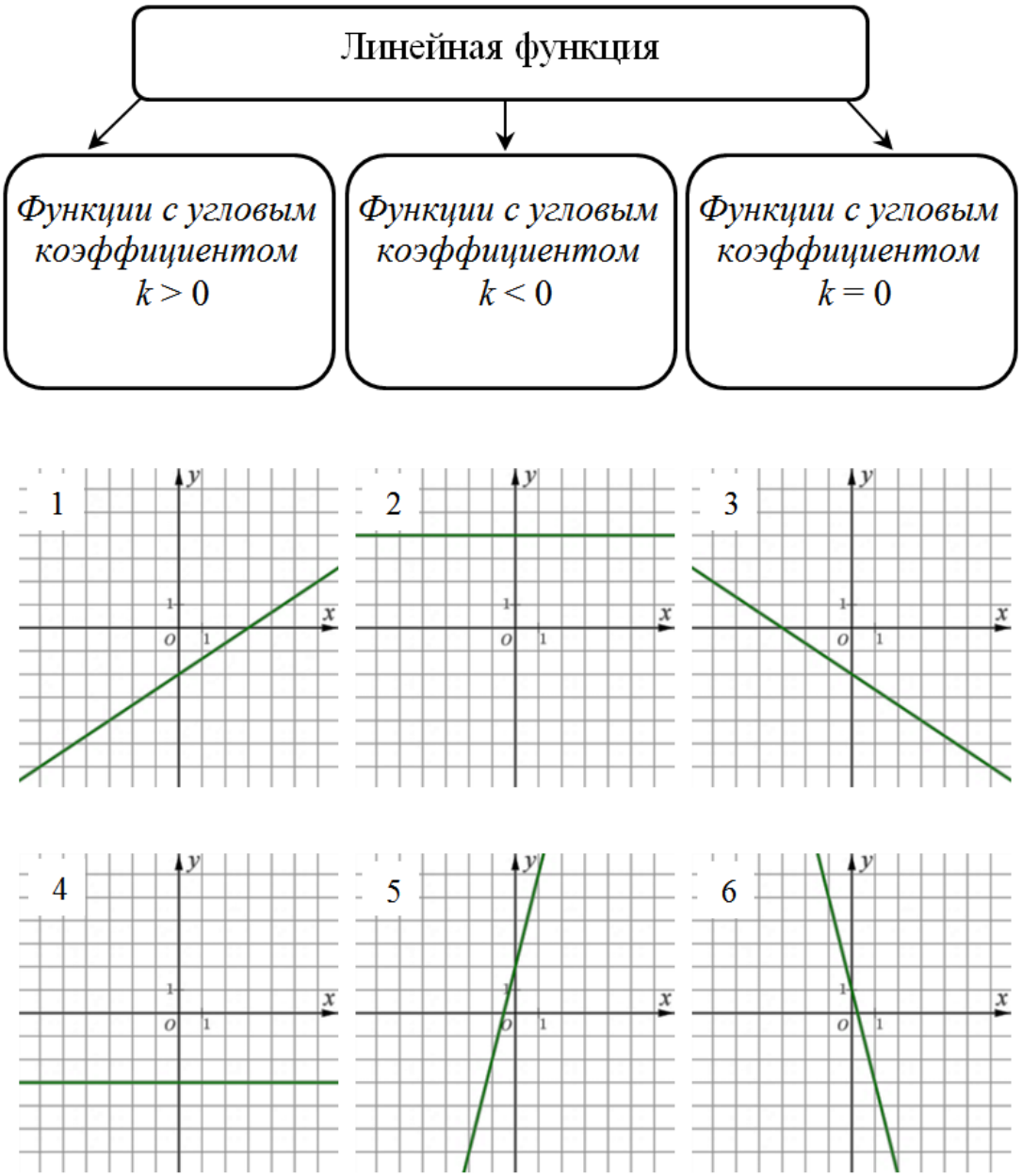


Рисунок 27 – Графики функций к задаче Р1

Задача Р2. Заполните таблицу, установив соответствие между функциями, заданными аналитически и названиями графиков функций (таблица 16)

Развиваемые ПУУД: анализ, синтез, знаково-символические действия, структурирование информации.

Рассматриваемая задача ориентирована на словесно-символьную перекодировку, но использует в качестве явного визуального образа таблицу и в качестве неявного – графики соответствующих функций. Первая строка таблицы содержит образец оформления решения задачи.

Таблица 16 – Таблица к задаче Р2

Функции	Названия графиков		
	парабола	гипербола	прямая
$y = 2x$			✓
$y = 4x^2$			
$y = \frac{1}{x}$			
$y = \frac{x}{2}$			
$y = 0$			
$y = -0{,}5x^2$			
$y = -\frac{4}{x}$			

Задача Р3. Заполните таблицу (таблица 17) и постройте график функции.

Таблица 17 - Таблица к задаче Р3

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = -3x$	9							

Развиваемые ПУУД: структурирование знаний, анализ, синтез.

Данная задача является стандартной ситуацией для учащихся 7 классов и требует от них действия по образцу. Для заполнения второй строки таблицы необходимо вычислить значения переменной *y*, зная значения переменной *x*. Зависимость, представленная в виде таблицы, является прямой пропорциональностью, график которой – прямая, проходящая через начало координат. При построении графика нужно помнить, что для построения графика прямой пропорциональности достаточно взять две точки, одна из которых – точка (0; 0). Отмечать все восемь точек – не рационально.

Задачи продуктивного уровня.

Визуализированные задачи, соответствующие этому уровню, опираются на умение решать задачи репродуктивного уровня, содержат измененные условия, требующие от учащихся внести коррективы в свои действия, теоретические основы при этом остаются такими же.

Задачи продуктивного уровня предполагают самостоятельное выполнение обучающимися несложных перекодировок (меньше трех видов представления учебной математической информации). Как правило, в таких задачах требуется преобразование усвоенной ранее учебной информации об объектах, процессах и действиях и их приспособление к ситуации в задаче.

Приведем примеры таких задач.

Задача П1. Дополните рисунок (рисунок 28) заданными в системах прямыми. Для каждой системы уравнений укажите верное утверждение.

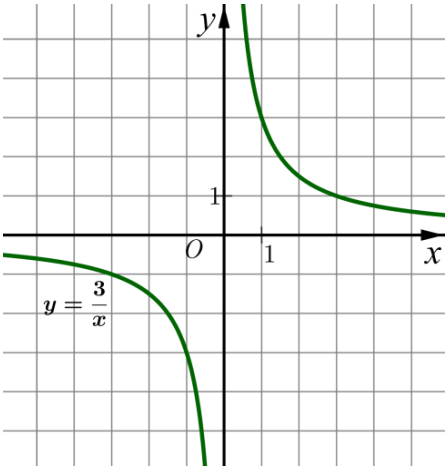


Рисунок 28 – Рисунок к задаче П1

Системы уравнений

А) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = x - 2; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 2 - x; \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 2; \end{cases}$

Утверждения

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

4) система имеет бесконечное множество решений

Ответ:

А	Б	В
2	3	1

Развиваемые ПУУД: знаково-символические действия, анализ, синтез.

Данная задача предполагает владение учащимися знаково-символическими действиями, при этом перекодировка включает все три способа представления учебной математической информации текст – образ – символ. Однако самостоятельно учащиеся осуществляют только символьно-образную перекодировку, дополняя рисунок тремя прямыми: $y = x - 2$, $y = 2 - x$, $y = 2$. Сопоставляя графическую модель системы со словесным описанием и аналитической записью системы, учащиеся оформляют ответ в виде таблицы.

Задача П2. Используя график функции (рисунок 29), запишите формулу, задающую функцию. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке (1; 7].

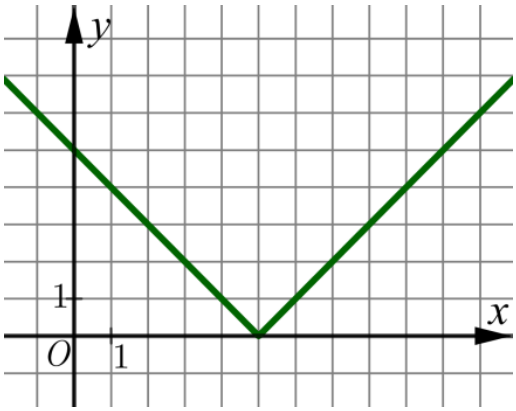


Рисунок 29 – График функции к задаче П2

Развиваемые ПУУД: знаково-символические действия, анализ, синтез.

При решении данной задачи, учащимся необходимо самостоятельно осуществить образно-символьную перекодировку, задав функцию формулой, а затем применить известный им алгоритм нахождения по графику функции наибольшего и наименьшего значения функции.

Задача П3. Заполните таблицу (таблица 18) и постройте график функции.

Таблица 18 - Таблица к задаче П3

x	–4	–2			1	2		5
$y = –0{,}5x$			0,5	0			–2	

Развиваемые ПУУД: структурирование знаний, анализ, синтез.

Решение этой задачи опирается на умение решать задачу *P3*. Однако в ней изменены условия – необходимо заполнить пропуски в обеих строках таблицы. Для этого нужно вычислять не только значения переменной *y* при соответствующем значении переменной *x*, но и решать обратную задачу – находить значение переменной *x*, зная значение переменной *y*.

Задачи творческого уровня.

Визуализированные задачи этого уровня – задачи на сложные перекодировки, требующие, как правило, от обучающихся самостоятельного перекодирования информации всех трех способов представления (словесный, аналитический и визуальный). Решение данных задач опирается на решение задач предыдущих уровней, но содержит незнакомые для обучающихся ситуации, требующие от них самостоятельного поиска действий, ведущих к достижению цели.

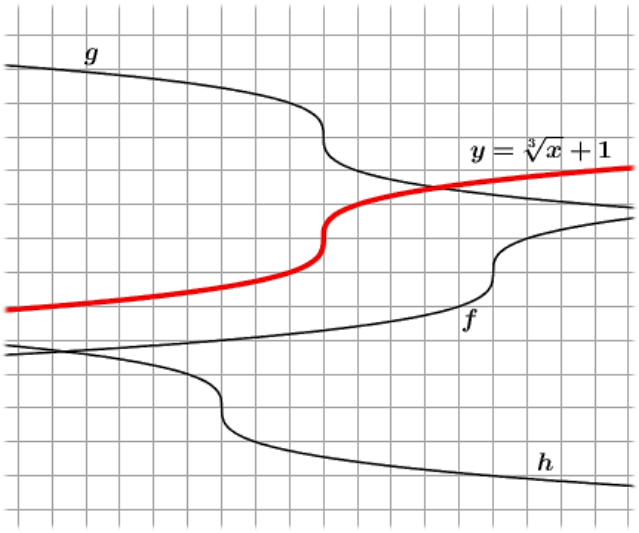
Приведем примеры визуализированных задач творческого уровня.

Задача T1. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $M(2;-4)$ и параллелен графику функции $y=-3x+7$. Постройте график полученной функции.

Развиваемые ПУУД: знаково-символические действия, анализ, синтез.

Данная задача предполагает владение учащимися всеми тремя способами представления учебной математической информации. Из условия параллельности графиков функций следует, что угловой коэффициент искомой функции равен $k=-3$. Зная координаты точки *M*, принадлежащей графику искомой функции можно найти неизвестный коэффициент *l*: $-4=-3\cdot 2+l \Rightarrow l=2$. Таким образом, формула искомой функции имеет вид $y=-3x+2$. Зная формулу, можно построить график функции и проверить графически исходные условия задачи.

Задача T2. Проведите оси координат так, чтобы выделенный график (рис. 30) был графиком функции $y=\sqrt[3]{x}+1$ (единичные отрезки – 1 клетка). Узнайте и запишите формулы для функций *f*, *g* и *h*, заполните пропуски.



$f(x) =$ _____

$g(x) =$ _____

$h(x) =$ _____

Нули функции $f(x)$: _____

Промежуток, где $y \geq 0$: _____

Рисунок 30 – Задача Т2

Развиваемые ПУУД: знаково-символические действия, анализ, синтез.

В данной задаче учащиеся 9 класса встречаются с новой для себя ситуацией – на рисунке отсутствуют оси координат. Опираясь на формулу функции, график которой выделен красным цветом, учащиеся должны провести оси координат и определить аналитические модели остальных функций, а затем заполнить пропуски.

Задача Т3. Заполните таблицу (таблица 19) и постройте график функции.

Таблица 19 - Таблица к задаче Т3

x	–1,5	–1		0,6	1,2			5
$y = kx$			–2	2,4		14,4	18	

Развиваемые ПУУД: знаково-символические действия, структурирование знаний, анализ, синтез, поиск и выделение необходимой информации в таблице.

Решение данной задачи опирается на решение задач Р3 и П3. Однако при ее решении учащиеся 7 класса сталкиваются с новой для себя ситуацией – отсутствует формула для вычисления значений функции. В нахождении коэффициента k поможет пятый столбец таблицы, в котором содержатся значения аргумента и функции: $k = 2{,}4 : 0{,}6 = 4$.

Визуализированные задачи указанных типов являются не только средством развития указанных в параграфе 1.1 ПУУД, но и средством их диагностики.

В качестве средства визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии в ходе эксперимента нами использовались и визуальные модели представления учебной математической информации: модель Фрейер, фреймы, ментальные карты, блок-схемы, кластеры и др. Обязательным требованием к использованию визуальных моделей представления учебной математической информации является использование трех языков знаковой информации (визуальный образ, текст, формула) и сжатость информации. Это способствует развитию таких общеучебных ПУУД как знаково-символические действия и умение структурировать знания, а также логических действий анализа и синтеза. Как пишет В. А. Далингер: «Когда необходимо воспринять, осмыслить и переработать большой объем информации, то трудно обойтись без умения выделять содержательные связи, структурировать информацию. Схемы появляются как продукт анализа, синтеза, обобщения материала, они позволяют разом охватить множество понятий, лучше проследить за развитием узловых понятий, видеть каждое из них в центре всех отношений, в которые оно вступает со всеми остальными» [63, с. 82]. Остановимся на наименее распространенных моделях, но, с нашей точки зрения, обладающих высокой эффективностью в развитии ПУУД.

Модель Фрейер. Как показал формирующий эксперимент, одной из эффективных моделей представления учебной математической информации, способствующей развитию указанных ПУУД, является модель Фрейер, разработанная группой американских ученых [242]. Основная дидактическая функция данной модели – введение и закрепление понятий. Для создания этой модели используется лист бумаги формата не меньше А4, разделенный на 4 равные части, в центре которого располагается рассматриваемый термин. Как правило, левый верхний угол отражает существенные характеристики понятия, правый верхний угол – его несущественные характеристики, примеры объектов, входящих в объем понятия располагаются в левом нижнем углу и контрпримеры

(примеры объектов, не входящих в объем понятия) – в правом нижнем углу. Содержание элементов модели Фрейер может варьироваться. Например, на рисунке 31 в левом верхнем углу располагается определение термина, а на рисунке 32, на котором представлена заполненная модель Фрейер, вместо определения приводится аналитическая модель рассматриваемого термина.

Модель Фрейер способствует развитию таких ПУУД, как знаково-символические действия, включая моделирование; умение структурировать знания; поиск и выделение необходимой информации; определение основной и второстепенной информации; анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); синтез как составление целого из частей в т. ч. самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов; подведение под понятие.

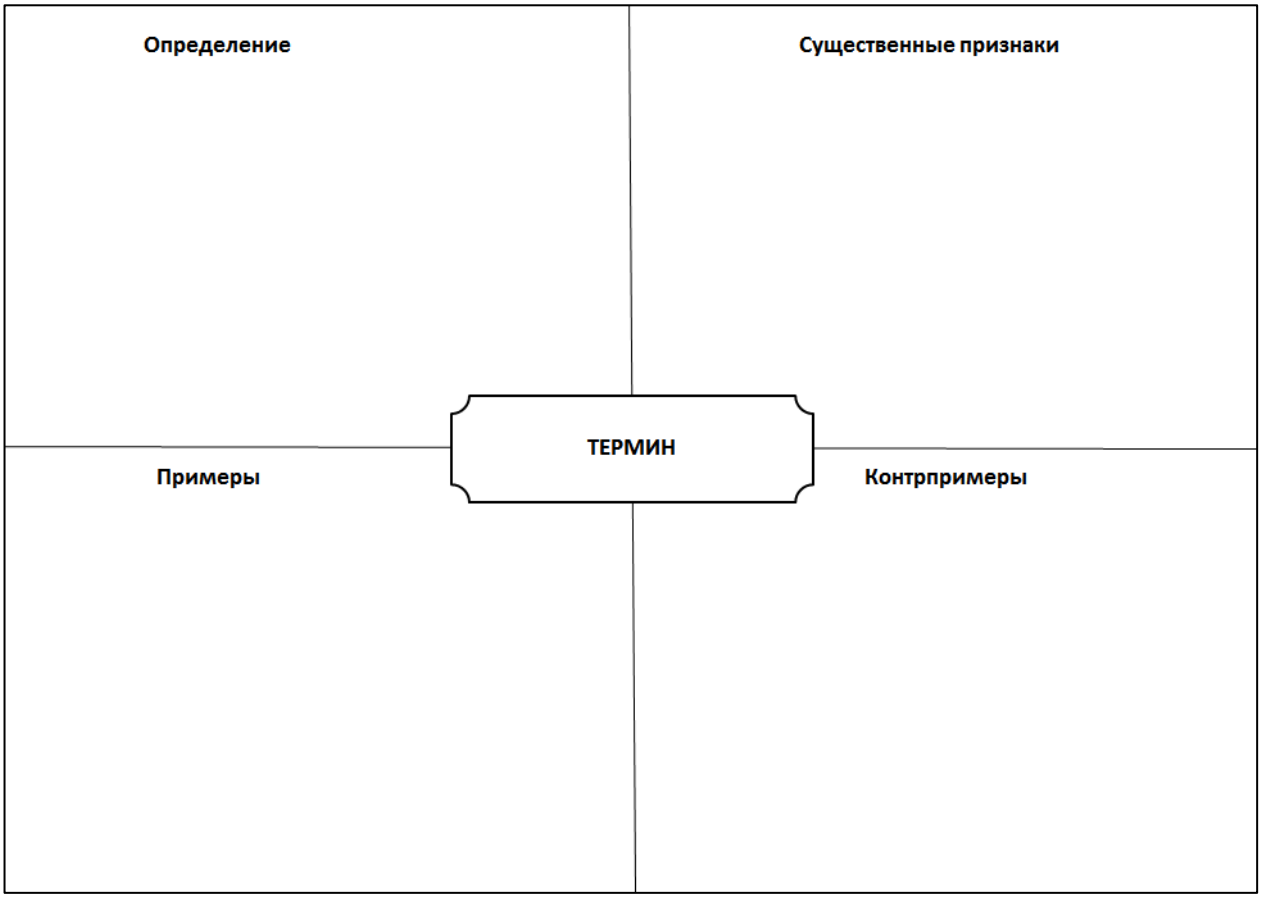


Рисунок 31 – Каркас модели Фрейер

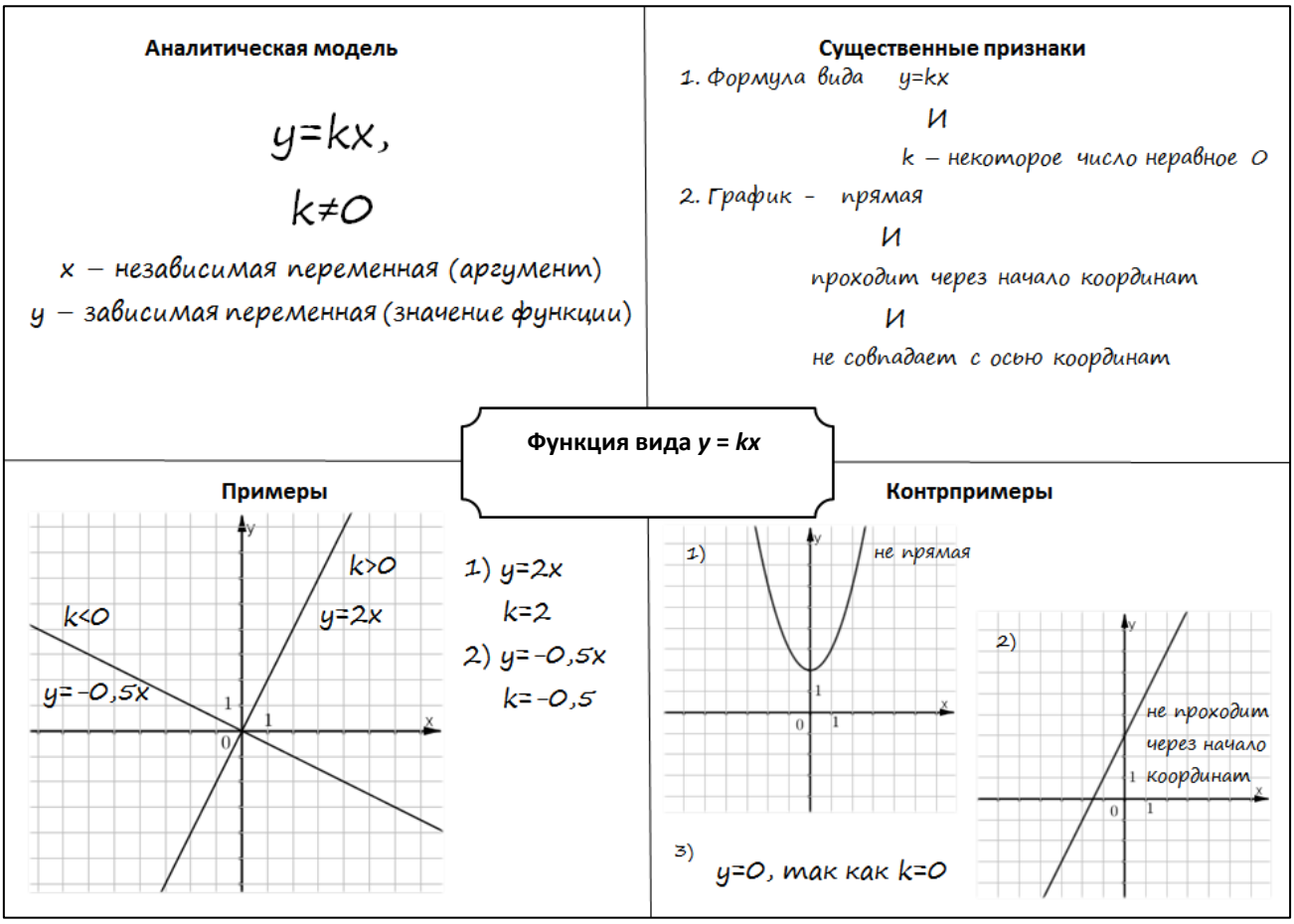


Рисунок 32 – Модель Фрейер по теме «Функция вида $y = kx$»

Данная модель (рисунок 32) позволяет ввести понятие функции вида $y = kx$ многосенсорно, ориентируясь на различные когнитивные стили учащихся. Блоки аналитическая модель и существенные признаки соответствуют когнитивным стилям учащихся, характерным для левополушарного доминирования, тогда как присутствие целостного образа понятия, подкрепленного графическими изображениями, учитывает когнитивные стили, характерные для правополушарного доминирования.

Фреймы. Фрейм (от англ. framework – каркас, рамка) – стандартная ситуация или структура для представления стереотипных ситуаций [219, с. 4]. Основоположник теории фреймов М. Минский [138] считает отправным моментом для этой теории тот факт, что человек, пытаясь познать новую для себя ситуацию или по-новому взглянуть на уже привычные вещи, выбирает из своей памяти некоторую структуру данных (образ), которую он называет фреймом.

Созданная в процессе решения проблемы представления знаний в системах искусственного интеллекта, теория фреймов находит свое применение и в педагогике (Р. В. Гурина [54, 219], С. В. Ковалева [100], Т. Н. Колодочка [103], А. М. Лозинская [120] и др.).

Т. Н. Колодочка [103] определяет фрейм как рамочную, каркасную структуру ключевой идеи учебного материала, которую можно наложить на большинство тем и разделов, выраженную в графической форме. Р. В. Гурина [54] под фреймом понимает структуру данных для представления стереотипных ситуаций или бланк, имеющий пустые графы (слоты), которые должны быть заполнены. По ее мнению, из всех моделей представления информации фреймовая модель обладает наибольшей универсальностью, информационной емкостью и интегративностью.

К основным функциям фрейма Р. В. Гурина [54] относит:

- формализацию и категоризацию знаний, заключенных в тексте;
- визуализацию знаний в виде таблиц и схем;
- выделение в тексте нужной информации;
- свёртывание и сжатие информации (смысловая и информационная компрессия);
- структурирование, упорядочивание и систематизацию знаний;
- увеличение объема памяти и скорости мыслительных операций.

На основании перечисленных функций можно сделать вывод, что фреймы в обучении математике развивают в первую очередь такие ПУУД как: знаково-символические действия, включая моделирование; умение структурировать знания; поиск и выделение необходимой информации; определение основной и второстепенной информации; анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); синтез как составление целого из частей в т. ч. самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов; подведение под понятие, выведение следствий; выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов.

На рисунке 33 приведен пример заполненного фрейма частного алгоритма графического решения уравнения, приводимого к виду $x^2 = kx + l$.

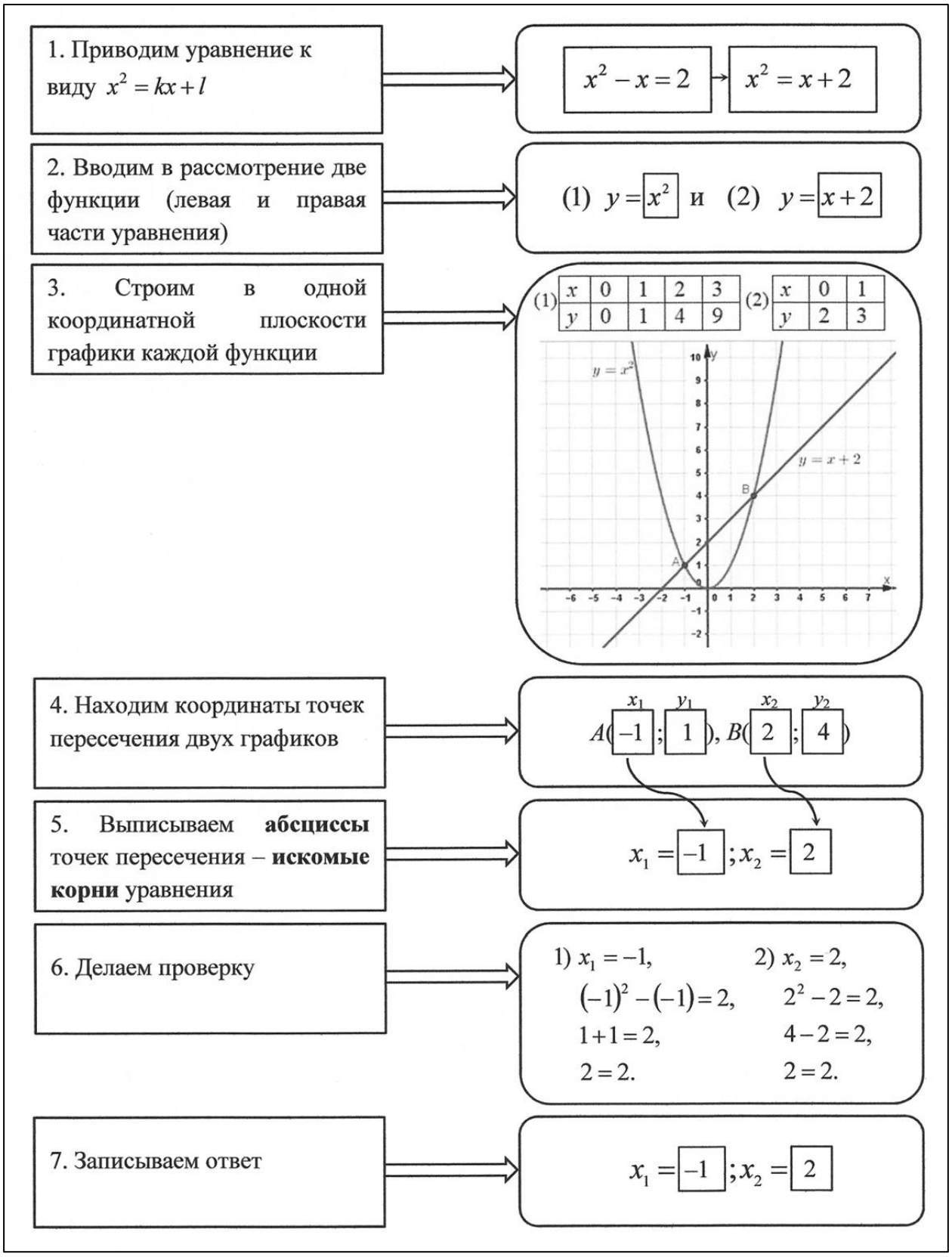


Рисунок 33 – Фрейм алгоритма графического решения уравнения, приводимого к виду $x^2 = kx + l$

Если в первой рамке фрейма уравнение $x^2 = kx + l$ поместить в рамку-окошко, мы получим фрейм общего алгоритма графического решения произвольного уравнения.

В обучении математике фрейм может быть представлен как:

- структура данных для представления стереотипных ситуаций (например, таблица значений для построения графиков функций);
- типовая стандартная ситуация (например, общий или частный алгоритмы);
- как модель, схема (например, схема-фрейм решения задачи);
- как пространственная или временная рамка (например, окно с определением или формулой);
- как сценарий (например, тематический фрейм, определяющий структуру ответа конкретной темы) и др.

К существенным признакам фрейма, позволяющим отличить его от других моделей представления информации, можно отнести стереотипность и повторяемость.

Рассмотренные выше визуализированные дидактические материалы – визуализированные задачи и визуальные модели представления учебной математической информации, являясь визуальным средством обучения понятиям функциональной линии, развивающим ПУУД, являются и средством диагностики уровня их развития.

С разработанным нами комплексом визуализированных задач можно ознакомиться в учебном пособии «Визуализированные задачи по алгебре. Функции и графики» [208] или на сайте https://sites.google.com/view/visualized-tasks. Некоторые задачи репродуктивного уровня имеют интерактивные аналоги, разработанные в среде Learningapps.org ссылки на которые имеются в указанном выше учебном пособии. Фрагменты комплекса приведены в Приложении Б.

2.2. Методические особенности развития познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в условиях применения средств визуализации в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры

В первой главе было теоретически обосновано использование средств визуализации в процессе обучения понятиям функциональной линии и представлена модель развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации. В данном параграфе конкретизируем основные методические особенности развития ПУУД.

Разработанный комплекс визуализированных дидактических материалов положен в основу методики развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации, реализуемой в соответствии с представленной в параграфе 1.4 моделью. Особенностями данной методики являются следующие положения:

1. Визуализация процесса обучения понятиям функциональной линии в контексте развития ПУУД предполагает систематическое и целенаправленное использование визуализированных дидактических материалов на каждом из этапов учебного процесса: мотивационно-диагностическом, операционно-исполнительском и рефлексивно-оценочном.

2. Для развития ПУУД средствами визуализации используются следующие методические приемы: распределение математических объектов по группам, составление модели Фрейер, алгоритмизация информации, перекодирование информации, «дополни рисунок (схему)», «выдели цветом», «заполни таблицу», составление ментальных карт.

3. В процессе обучения понятиям функциональной линии курса алгебры целесообразно использовать средства интерактивной компьютерной визуализации, позволяющие учащимся оперировать графическими образами математических понятий и стимулирующими их инициативу в процессе обучения.

4. В процессе развития ПУУД следует сделать акцент на когнитивную функцию наглядности.

5. Содержание визуализированных дидактических материалов (комплекса визуализированных задач и визуальных моделей представления учебной информации) представлено различными сочетаниями способов представления учебной математической информации (аналитический, вербальный и визуальный), ориентировано на различные когнитивные стили учащихся, тем самым способствует развитию выделенных в параграфе 1.1 ПУУД.

6. Визуализация в процессе развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии должна создавать условия не только для актуализации наличных когнитивных стилей учащихся, но и для обогащения и мобильности (гибкости) когнитивных стилей, подразумевающих возможность перехода с одного полюса стиля на другой в зависимости от собственных потребностей и требований учебной ситуации.

Рассмотрим на примерах основные методические приемы и типовые задачи, направленные на развитие ПУУД при обучении понятиям функциональной линии.

Прием «Распредели по группам». Данный прием направлен, в первую очередь, на развитие таких ПУУД, как классификация и подведение под понятие. В качестве средств визуализации в данном приеме мы использовали классификационные схемы.

На этапе введения ПУУД следует предлагать готовые классификационные схемы, в которых требуется заполнить пропуски, определить основание деления или найти ошибки.

Пример 1. Заполните пропуски в классификации функций по четности (рисунок 34).

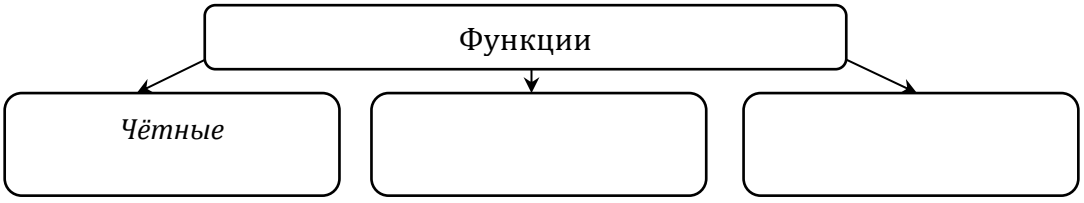


Рисунок 34 – Классификационная схема-каркас функций по четности

Пример 2. Правильно ли выполнена классификация? Ответ обоснуйте (рисунок 35).

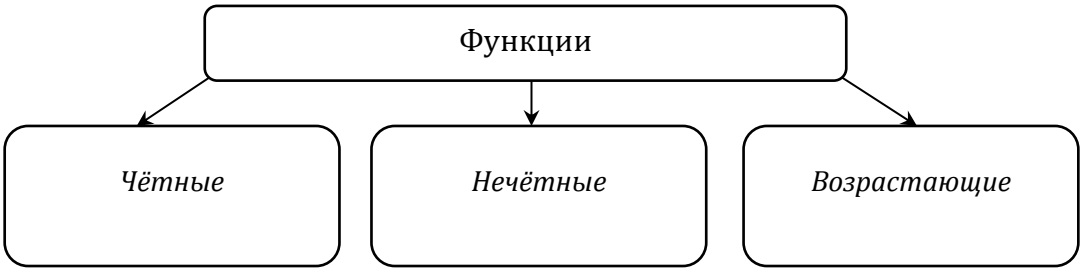


Рисунок 35 – Классификационная схема функций по четности с ошибкой

При решении этой задачи учащиеся знакомятся с требованиями к классификации, в частности с требованием одного основания деления.

Пример 3. При изучении прямой пропорциональности учащимся предлагается следующая задача: правильно ли выполнена классификация функции вида $y = kx$ (рисунок 36), где основанием деления является знак углового коэффициента? Ответ обоснуйте.

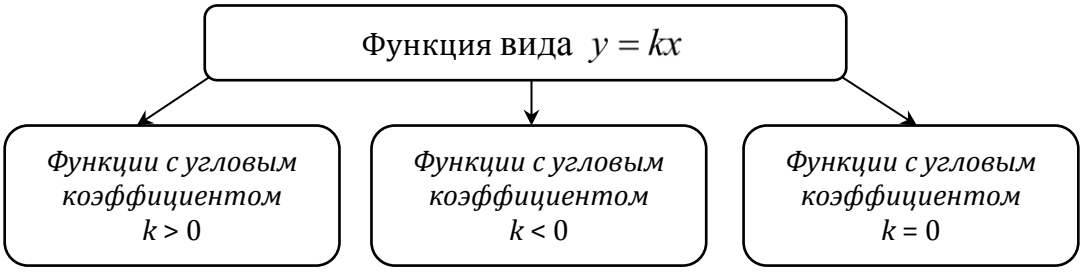


Рисунок 36 – Классификация функции вида $y = kx$ с ошибкой

Опираясь на определение функции вида $y = kx$, учащиеся делают вывод, что классификация составлена не верно, так как в объем рассматриваемого понятия не входят функции с нулевым угловым коэффициентом. Таким образом, учащиеся знакомятся с одним из требований классификации – все члены деления (классы) не должны быть пустыми множествами.

После внесения изменений в классификацию, для формирования умения определять, к какой группе относится объект, предлагается решить следующую задачу: распределите графики функции вида $y = kx$ по группам (впишите номера в соответствующие рамки) (рисунок 37).

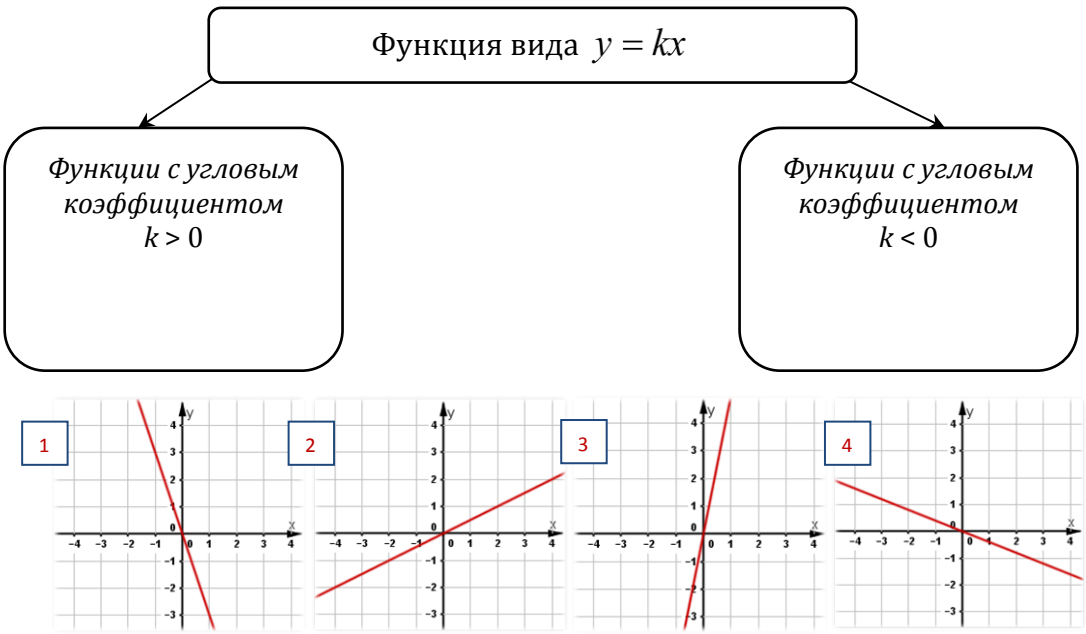


Рисунок 37 – Задание на распределение графиков функции вида $y = kx$ по группам

Одновременное представление в этой задаче информации несколькими способами позволяет также развивать и знаково-символические действия.

Как показала практика, такие задачи целесообразно предъявлять с помощью сервиса Learningapps.org (см. параграф 1.3, рисунок 10). В этом случае каждый учащийся решает задачу в комфортном для него темпе. Учащиеся с преобладанием импульсивного когнитивного стиля имеют возможность избегать большого количества ошибок за счет многократного повторения и наличию обратной связи. Учащиеся с рефлективным когнитивным стилем имеют возможность научиться решать задачи быстрее. Для этого учащиеся могут использовать личные мобильные устройства, имеющие выход в интернет. В нашем пособии такие задачи имеют QR-коды для быстрого перехода к интерактивной версии.

На следующем этапе учащиеся сами приводят примеры функций, относящихся к каждому классу, заданные как аналитически, так и графически. Здесь можно предложить учащимся выбрать, в каком виде они будут приводить примеры.

О достижении учащимися творческого уровня говорит их способность самостоятельно составлять классификационные схемы и приводить примеры

объектов, принадлежащих каждому члену деления и представленных различными способами.

Составление модели Фрейер. Составление модели Фрейер является комплексным приемом с точки зрения развития ПУУД. Обязательным условием при составлении модели Фрейер является наличие всех трех способов представления учебной математической информации, что будет способствовать развитию знаково-символической деятельности. При заполнении блока «Существенные признаки» (параграф 2.1, рисунок 31) развиваются общеучебные ПУУД (поиск и выделение необходимой информации, определение основной и второстепенной информации) и логические (анализ объектов с целью выделения признаков и синтез). При заполнении блоков «Примеры» и «Контрпримеры» развиваются логические ПУУД (анализ, синтез, подведение под понятие). В целом же, составление модели Фрейер способствует развитию умения структурировать знания и осуществлять знаково-символические действия.

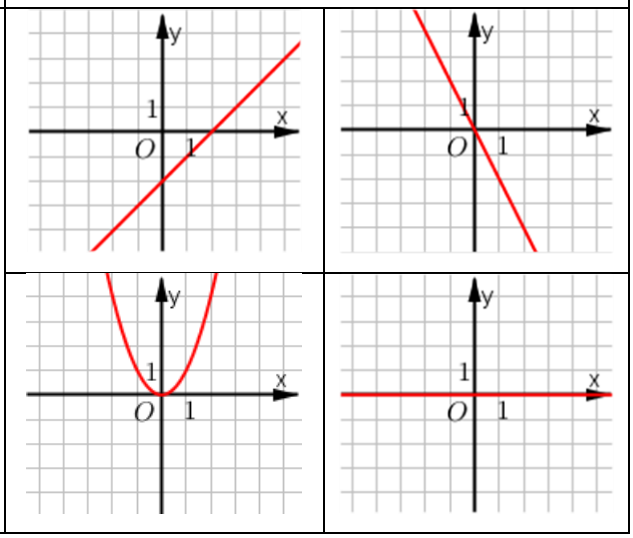
Рассмотрим на примере методику использования модели Фрейер.

В большинстве учебников алгебры [139, 4, 3, 132, 145] с понятием функции учащиеся знакомятся в 7 классе. Как правило, строгое определение данного понятия в 7 классе не приводится, учащиеся знакомятся с конкретными видами функций – линейной функцией и ее частным случаем функцией вида $y = kx$.

Изучение линейной функции в 7 классе мы проводили по схеме функция вида $y = kx$ – линейная функция вида $y = kx + l$ – линейное уравнение с двумя переменными. Введение каждого понятия целесообразно осуществлять конкретно-индуктивным методом. На этапе мотивации изучения функции рассматривается подготовительная задача (например, рассчитать стоимость товара в рублях в зависимости от веса товара для функции $y = kx$); рассматриваются конкретные примеры изучаемой функции, для которых составляются таблицы значений и строятся графики; исследуются основные свойства функции по ее графику. Обобщая полученные результаты, составляется модель Фрейер. При первичном ознакомлении модель составляется учащимися совместно с учителем, например, при изучении функции $y = kx$ (параграф 2.1,

рисунок 32). Учитель объясняет правила составления модели и задает учащимся наводящие вопросы. Для более эффективной работы с моделью мы использовали интерактивную доску, на которой был представлен каркас модели (параграф 2.1, рисунок 31). Учащиеся заполняют модель на листах формата А4. Для заполнения блоков «Примеры» и «Контрпримеры» можно предложить учащимся готовый набор объектов как относящихся к объему понятия, так и не принадлежащие ему, как например, в таблице 20.

Таблица 20 – Набор объектов для подведения под понятие функции вида $y = kx$

Аналитические модели	Графические модели
$y = 2x + 1;$ $y = \frac{2}{x};$ $y = 2x^2;$ $y = -2x;$ $y = 0;$ $y = x;$ $y = -x$	

При предъявлении учащимся данного набора объектов удобно воспользоваться интерактивной доской и приложением Learningapps.org (рисунок 38).

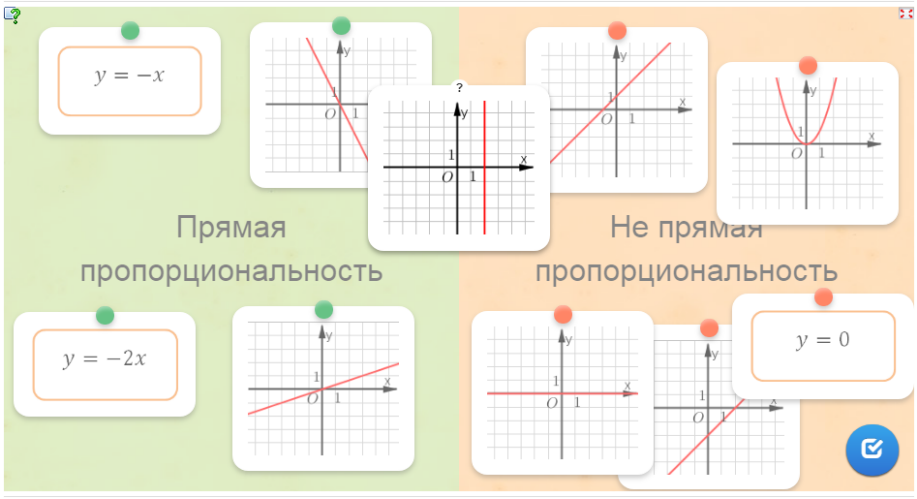


Рисунок 38 – Интерактивное упражнение в среде Learningapps.org «Прямая пропорциональность или нет?»

Данную задачу можно рассматривать и как дихотомическую классификацию (деление на два противоречащих понятия).

При введении понятия линейной функции можно предложить учащимися найти и исправить ошибки в уже заполненной модели или заполнить некоторые блоки самостоятельно (например, блоки примеров или контрпримеров). Как показал эксперимент, освоив модель Фрейер, учащиеся без особых затруднений могут приводить примеры и контрпримеры, опираясь на блок «Существенные признаки».

В 9 классе понятия вводятся в основном абстрактно-дедуктивным способом. В этом случае модель Фрейер может быть получена в результате анализа текста определения (например, приведенного в учебнике или в заготовке модели). На рисунке 39 приведена заготовка модели Фрейер для понятия четной функции, предложенная нами для учащихся 9 классов.

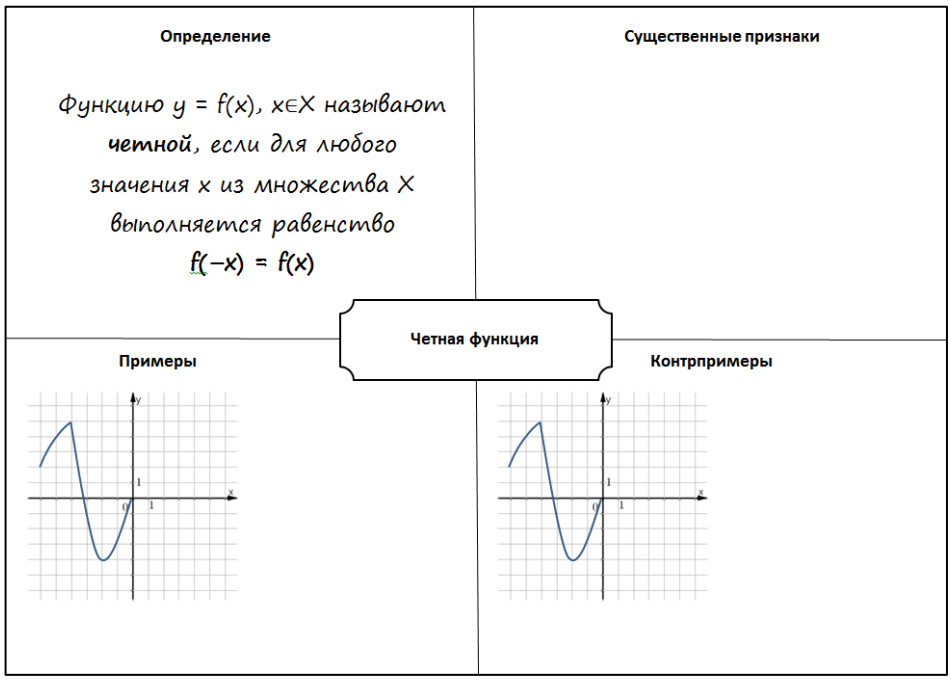


Рисунок 39 – Модель Фрейер для понятия «четная функция»

На основе логических ПУУД анализа и синтеза, а также общеучебного действия поиска и выделения необходимой информации учащимися совместно с учителем заполняется блок «Существенные признаки». В блоки «Примеры» и «Контрпримеры» помещены визуализированные задачи, в которых учащимся необходимо достроить предложенные фрагменты графиков функций.

Далее учащимся предлагается самостоятельно заполнить подобную модель для нечетной функции.

Составление ментальных карт. На этапе систематизации и обобщения учебного материала нами применялись ментальные карты (интеллект-карты или карты знаний) – средство визуализации информации, позволяющее «сворачивать» информацию и представлять ее в графическом виде, что приводит к лучшему запоминанию и пониманию учебного материала. Метод интеллект-карт (mindmaps) был предложен американским ученым и бизнесменом Томасом Бьюзеном.

При составлении ментальных карт развиваются такие ПУУД как определение основной и второстепенной информации, поиск и выделение необходимой информации, умение структурировать знания, знаково-символические действия, сравнение, анализ и синтез.

Перед составлением ментальной карты, на мотивационно-диагностическом этапе учащиеся с помощью мультимедийной презентации знакомятся с правилами составления карт:

1. Лист (минимальный размер А4) необходимо расположить горизонтально.
2. В центре располагается образ (ключевое слово) всей проблемы, задачи, области знания.
3. От центра исходят толстые основные ветви с подписями – они означают главные разделы карты. Основные ветви далее делятся на более тонкие ветви.
4. Все ветви подписываются ключевыми словами (желательно печатными буквами), заставляющими вспомнить то или иное понятие.
5. Желательно использовать как можно более разнообразную визуальную декорацию – форма, цвет, объем, шрифт, стрелки, значки.
6. Важно вырабатывать свой собственный стиль в рисовании карты, который позволяет вам лучше в ней ориентироваться.

Затем учитель совместно с учащимися составляет ментальную карту, давая последним возможность проявить творчество в ее оформлении. В качестве

альтернативного домашнего задания учитель предлагает учащимся составить по аналогии ментальную карту самостоятельно. С примерами ментальных карт, составленных учащимися 7 класса, можно ознакомиться в Приложении В.

Следует отметить, что ментальные карты также могут выявить пробелы в усвоении учебного материала учащимися. Так, на рисунке В.2, учащийся отнес независимую переменную x к коэффициентам. Так же на карте не отмечен факт неравенства нулю коэффициента k.

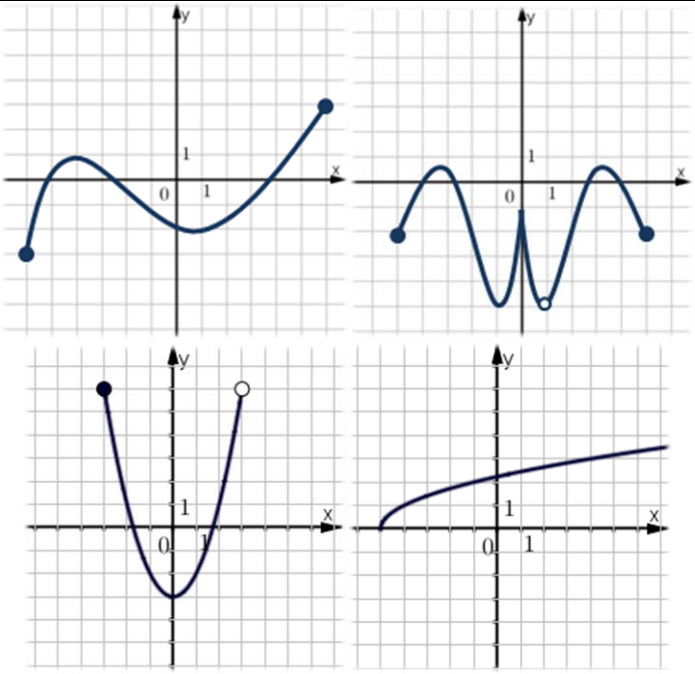
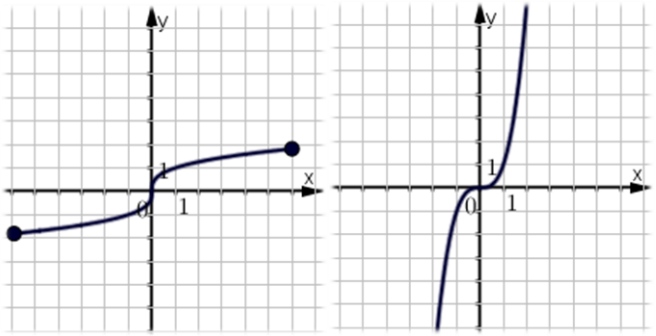
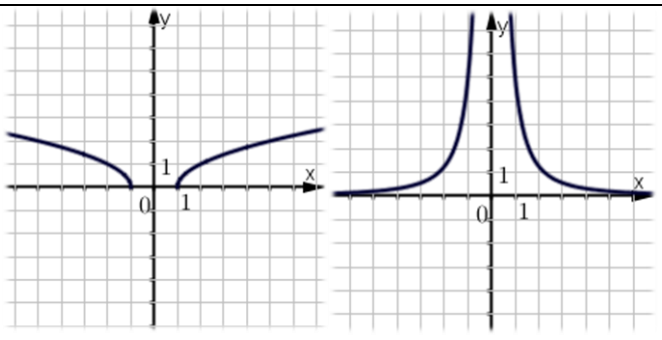
Выложив фото карт с помощью Google-формы, мы привлекли учащихся к голосованию за лучшую ментальную карту по теме, что послужило дополнительной мотивацией к выполнению задания.

Алгоритмизация информации. Школьный курс алгебры включает типы задач, для решения которых используются общие методы. Для более прочного формирования умения решать такие задачи используется алгоритмизация – особый способ структурирования информации, преобразующий ее из декларативного типа в процедурный. В школьных учебниках алгебры если и встречаются алгоритмы, то они представлены в виде списка последовательных шагов, что ориентировано на работу левого полушария. Средства визуализации позволяют сделать процесс усвоения более успешным, так как позволяют «подключить» правое полушарие.

В ходе обучающего эксперимента в качестве средств визуализации алгоритмов мы использовали блок-схемы и фреймы.

Методику использования блок-схем рассмотрим на примере алгоритма исследования функции на четность. После введения с помощью модели Фрейер понятий четной и нечетной функций учитель предлагает учащимся исследовать функцию на четность, которая задана графически, подобрав графики, соответствующие всем траекториям будущей блок-схемы. В таблице 21 приведены примеры задач для каждой траектории алгоритма.

Таблица 21 – Задачи для блок-схемы алгоритма исследования функции, заданной графически, на четность

Траектория	Графики
1-2-3	
1-2-4	
1-5	

Анализируя и обобщая процесс решения задач, учащиеся заполняют пропуски в каркасе блок-схемы (рисунок 40), «проходят» по ее траекториям, одновременно определяя к какой из них принадлежит каждая задача. Далее можно предложить учащимся придумать свои графики на каждую траекторию.

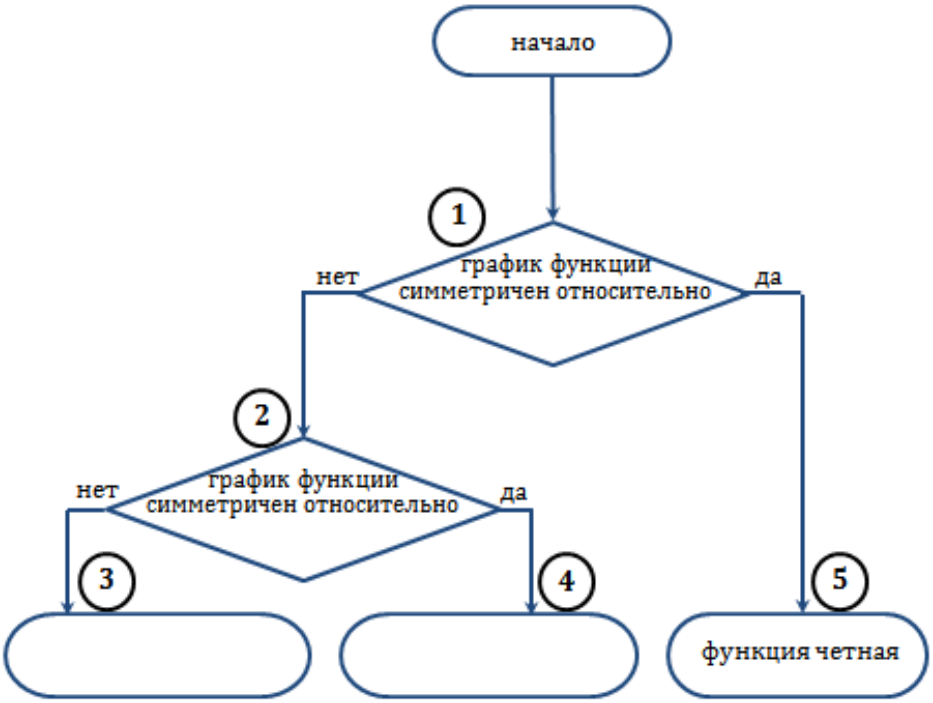


Рисунок 40 – Каркас блок-схемы алгоритма исследования функции на четность, заданной графически

Каркас блок-схемы для алгоритма исследования функции на четность, заданной аналитически приведен на рисунке 41.

В дальнейшем составленные блок-схемы могут играть роль ориентировочной основы действий.

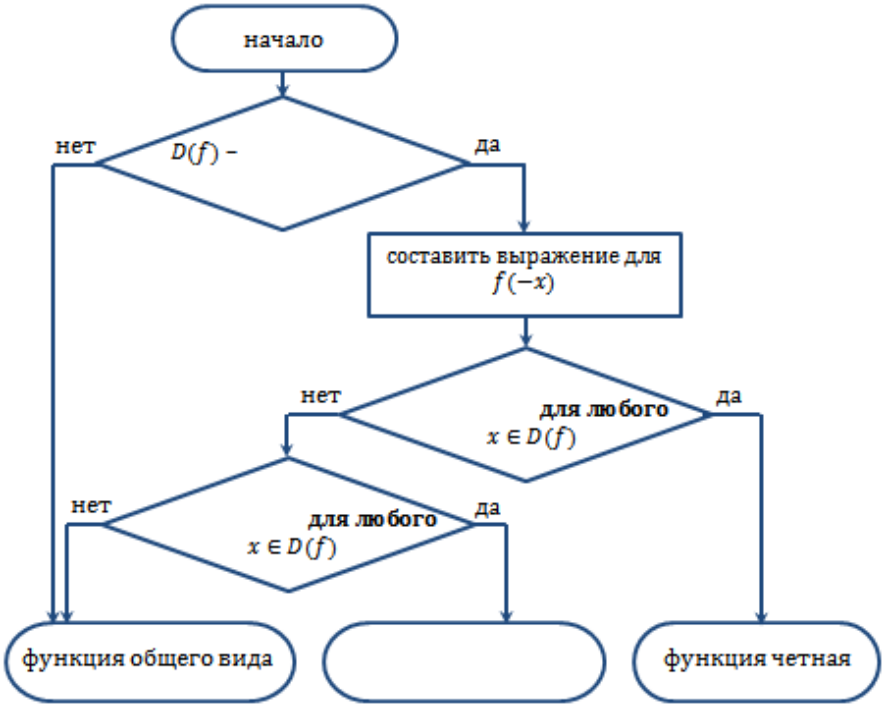


Рисунок 41 – Каркас блок-схемы алгоритма исследования функции на четность, заданной аналитически

Организация такой деятельности не только развивает ПУУД, но и устанавливает межпредметные связи между математикой и информатикой. Тестирование и коррекция алгоритмов связана с профессиональной деятельностью программистов, что может служить дополнительной мотивацией для освоения ПУУД.

Использование фреймов рассмотрим на примере обучения алгоритму графического решения уравнений вида $x^2 = kx + l$ учащихся 7 класса общеобразовательной школы.

На первом этапе учитель подбирает задачи, решаемые с помощью рассматриваемого алгоритма. Например, решить уравнение $x^2 = -x + 6.$ Учащиеся 7 класса не знают формул для нахождения корней квадратного уравнения и решают данное уравнение графически. В процессе решения учитель акцентирует внимание на каждом шаге. Далее учитель предлагает решить уравнение $x^2 - x - 2 = 0.$ Учащиеся не умеют строить график квадратичной функции вида $y = ax^2 + bx + c$, поэтому чтобы решить данное уравнение графически, его нужно преобразовать к виду $x^2 = kx + l.$ Остальные шаги в решении обоих уравнений совпадают. Для решения последующих уравнений учитель знакомит учащихся с готовым фреймом (параграф 2.1, рисунок 33), выполняющим роль ориентировочной основы действия.

На следующем этапе учитель предлагает решить уравнение $x^2 - x + 3 = 0.$ Дойдя до пункта 4 алгоритма, учащиеся сталкиваются с проблемой – точки пересечения графиков отсутствуют, и приходят к выводу, что полученный алгоритм не является универсальным, так как не охватывает весь класс рассматриваемых задач. Совместно с учителем учащиеся вносят изменения во фрейм (рисунок 42).

В дальнейшем данный фрейм может быть обобщен для графического решения произвольного уравнения.

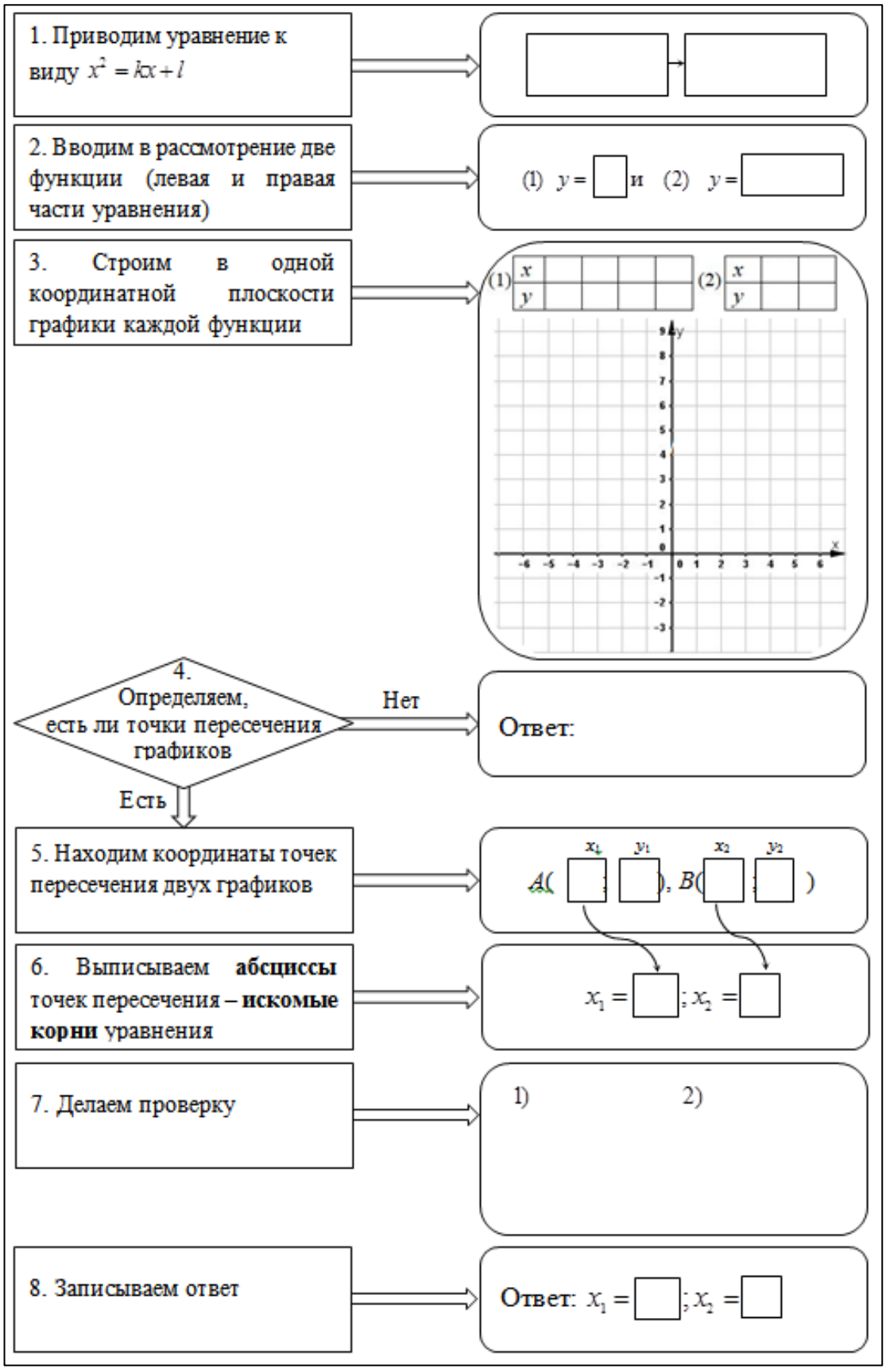


Рисунок 42 – Фрейм обобщенного алгоритма графического решения уравнения вида $x^2 = kx + l$

Перекодирование информации. Данный прием направлен на развитие, прежде всего знаково-символических действий, которые при обучении алгебре занимают главенствующее место и осуществляются посредством перевода информации из одного способа в другой.

На первом этапе учащиеся решают задачи, в которых не требуется самостоятельный перевод информации. Такие задачи имеют преимущественно тестовую форму закрытого типа. Учебная математическая информация представлена двумя способами.

Пример 4. Установите соответствие между графиками функций (рисунок 43) и формулами, которые их задают.

Графики функций

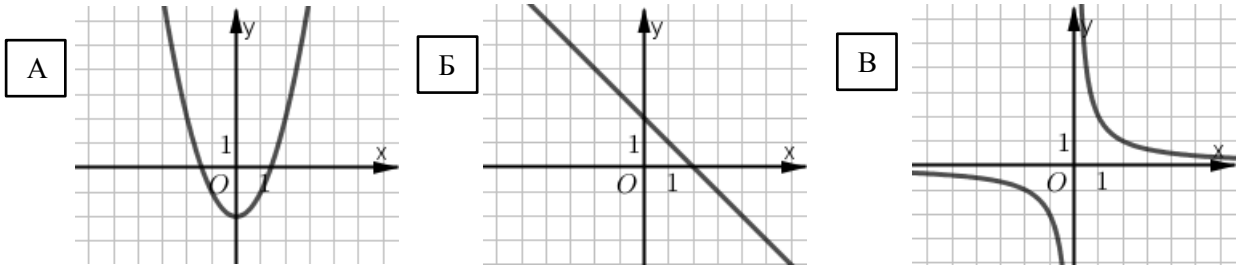


Рисунок 43 – Графики функций к примеру 4

Формулы

1) $y = -x + 2$ **2)** $y = \frac{2}{x}$ **3)** $y = x - 2$ **4)** $y = x^2 - 2$

Ответ:

А	Б	В
4	1	2

Данная задача представлена в тестовой форме закрытого типа (задача на соответствие) и направлена на развитие образно-символьного перекодирования (тип (АГ)(АГ)). Самостоятельного перевода информации из одного вида в другой от учащихся не требуется.

Следующая задача представлена в тестовой форме закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов и направлена на развитие словесно-образной перекодировки (тип (ГС)(Г)). В ней также не предусмотрен самостоятельный перевод информации учащимися.

Пример 5. Отметьте графики линейных функций (рисунок 44).

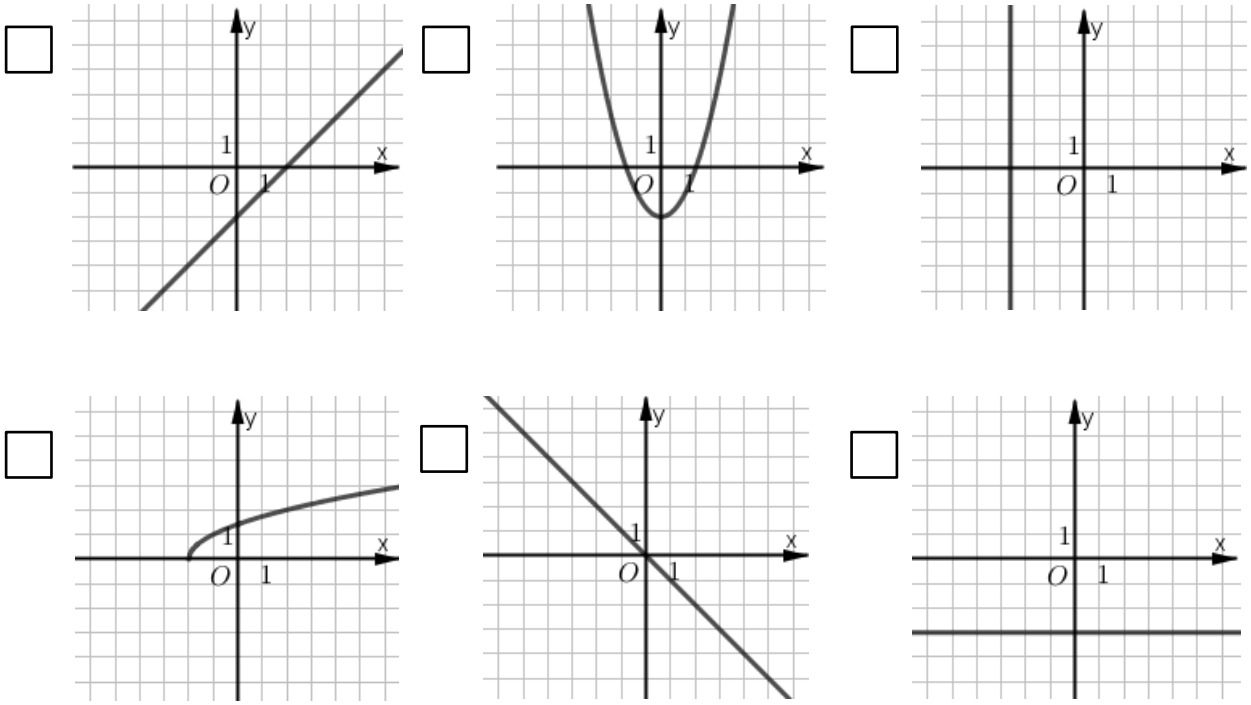


Рисунок 44 – Графики функций к примеру 5

Пример 6. Заполните таблицу, выяснив взаимное расположение графиков линейных функций, заданных аналитически (таблица 22).

Таблица 22 – Тест-матрица «Взаимное расположение графиков линейных функций»

Линейные функции	Графики пересекаются	Графики параллельны	Графики совпадают
$y = 7x - 4$ и $y = 7x + 3$		✓	
$y = 10x + 8$ и $y = 5x + 8$			
$y = 2x$ и $y = -2x + 5$			
$y = -0{,}6x + 4{,}5$ и $y = -0{,}6x - 9$			
$y = 5x - 4$ и $y = -4 + 5x$			
$y = -6x + 8$ и $y = 3x - 7$			
$y = -3x - 5$ и $y = -3x$			
$y = 0{,}2x - 6$ и $y = \frac{1}{5}x - 6$			

Продолжение таблицы 22

Линейные функции	Графики пересекаются	Графики параллельны	Графики совпадают
$y = 13x - 7$ и $y = 15x - 7$			
$y = -5x + 3$ и $y = -\frac{10}{2}x - 4$			
$y = -6x + 5$ и $y = 5 - 6x$			
$y = \frac{12}{16}x + \frac{8}{10}$ и $y = \frac{15}{20}x + \frac{4}{5}$			
$y = 7x + 9$ и $y = 9 - 7x$			

Данная задача представлена в виде тест-матрицы – таблицы, в которой нужно поставить галочки в соответствующие ячейки. Учебная информация представлена в ней в словесно-символьном виде, при этом самостоятельного перевода от учащихся не требуется.

На следующем этапе обучающиеся решают задачи, требующие от них самостоятельного перевода информации из одного вида в другой.

Пример 7. Построить график четной функции, проходящей через точки (2; 4) и (–4; –2).

Данная визуализированная задача типа (СГ) требует от учащихся самостоятельной словесно-образной перекодировки. Воспользовавшись определением четной функции, можно сделать вывод, что искомый график также проходит через точки, симметричные данным относительно оси ординат, а именно через точки (–2; 4) и (4; –2). Учитывая симметричность графика относительно оси ординат, проводим произвольную кривую через полученные точки (рисунок 45).

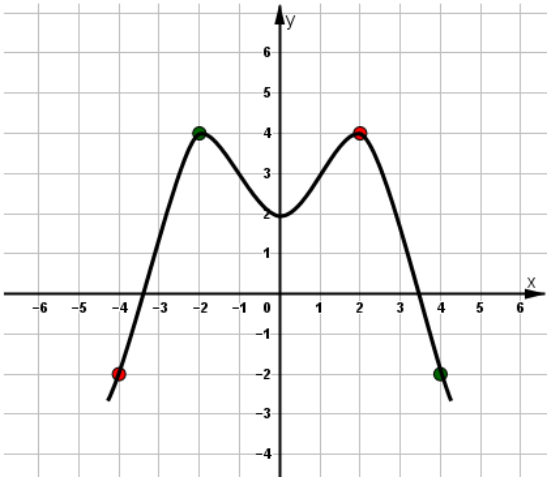


Рисунок 45 – Решение примера 7

Пример 8. На рисунке 46 построены графики уравнений. Запишите соответствующую систему уравнений и укажите ее решение.

Данная визуализированная задача типа (ГА) требует от учащихся самостоятельной образно-символьной перекодировки.

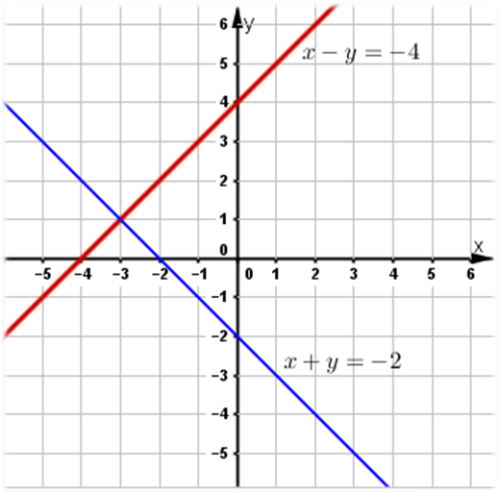


Рисунок 46 – Графики уравнений к примеру 8

Ответ: $\begin{cases} x - y = -4, \\ x + y = -2; \end{cases}$ $(-3; 1)$.

При решении подобного рода задач нами активно использовался прием «заполни таблицу». О дидактических возможностях таблиц было написано в первой главе и параграфе 2.1. Учебная задача с таблицей в качестве условия и одновременно ответа требует от учащихся не только умения работать с таблицами, но и осуществлять знаково-символические действия, так как учебная информация представлена несколькими способами. Для заполнения таблицы

также используются логические ПУУД: анализ данных таблицы и синтез (заполнение пустых ячеек таблицы), а также сравнение.

Приведем примеры задач с таблицами.

Пример 9. Заполните таблицу (таблица 23), подобрав такие значения *k*, при которых выполняются указанные условия.

Таблица 23 – Таблица для примера 9

Система уравнений	Значение *k*, при котором система		
	не имеет решений	имеет единственное решение	имеет бесконечное множество решений
$\begin{cases} y = 3x - 5, \\ y = kx + 4; \end{cases}$	3		нет
$\begin{cases} 2y = 3x - 2, \\ y = 1{,}5x + k; \end{cases}$			

Данная задача направлена, в первую очередь, на развитие словесно-символьной перекодировки. В качестве средства визуализации нами используется таблица, которая позволяет представить в совокупности сразу несколько задач, что является комфортным для учащихся с рефлективным и синтетическим когнитивными стилями. Первая система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда угловые коэффициенты линейных функций различны, т.е. при $k \neq 3$. Чтобы заполнить ячейки таблицы для второй системы, ее сначала необходимо преобразовать к виду $\begin{cases} y = 1{,}5x - 1, \\ y = 1{,}5x + k. \end{cases}$ Так как угловые коэффициенты линейных функций равны, то случай существования единственного решения невозможен. Система имеет бесконечное множество решений, если линейные функции заданы одной и той же формулой, т.е. при $k = 1$. Очевидно, что система не имеет решений при $k \neq -1$, так как в этом случае прямые, соответствующие уравнениям системы параллельны. В данном случае графический образ используется не явно.

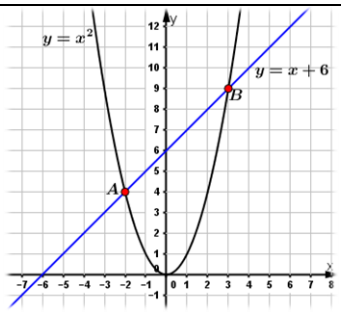
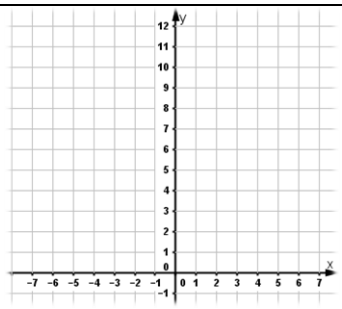
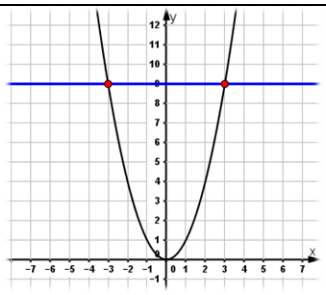
Перед решением подобных задач (примеры 6 и 9) полезно вместе с учащимися составить таблицу «перевода» (таблица 24).

Таблица 24 – Взаимное расположение графиков линейных функций

Линейные функции	Алгебраическое условие	Геометрическое условие
$y = k_1x + l_1$ $y = k_2x + l_2$	_____	Прямые $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ параллельны
	$k_1 = k_2$; _____	Прямые $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ совпадают
	_____	Прямые $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ _____

Пример 10. Заполни таблицу (таблица 25)

Таблица 25 – Таблица для примера 10

Уравнение	$x^2 = x + 6$	$x^2 = 4x - 3$	
Графическая модель уравнения			
Корни уравнения	$x_1 = -2,\ x_2 = 3$		

Второй столбец таблицы содержит пример заполнения. Анализ данных этого столбца позволяет заполнить пустые ячейки. В третьем столбце необходимо построить графическую модель уравнения и по ней определить его корни, что является комфортным для учащихся с аналитическим когнитивным стилем. Четвертый столбец содержит обратную задачу – по графической модели уравнения необходимо составить его аналитическую модель и записать его корни, что является комфортным для учащихся с синтетическим когнитивным стилем. Данную задачу можно предложить учащимся в качестве домашнего задания с возможностью выбора столбцов для заполнения. При этом нужно стараться их мотивировать на заполнение всех столбцов таблицы для развития мобильности их когнитивных стилей.

После того, как учащиеся усвоили самостоятельное перекодирование информации с одного способа представления на другой, им можно предложить задачи на сложные перекодировки, при выполнении которых учащимся необходимо перекодировать информацию несколько раз. В таких задачах, как правило, информация должна быть представлена всеми тремя способами. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 11. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $M(3;\ -8)$ и параллелен графику функции $y=-4x+5$. Постройте график искомой функции.

Для решения этой задачи нужно сначала задать искомую функцию аналитически, исходя из ее словесно-символьного описания, а затем построить ее график. Таким образом, в задаче требуется дважды осуществить перевод информации с одного способа представления на другой. Чтобы задать функцию аналитически, находим ее угловой коэффициент из условия параллельности прямой $y=-4x+5$ $(k=-4)$. Зная угловой коэффициент прямой и точку $M(3;\ -8)$, через которую проходит график искомой функции, находим формулу, ее задающую: $y=-4x+l \Rightarrow -8=-4\cdot 3+l \Rightarrow l=4 \Rightarrow$ формула имеет вид $y=-4x+4$. Зная формулу, можно построить график искомой функции (рисунок 47).

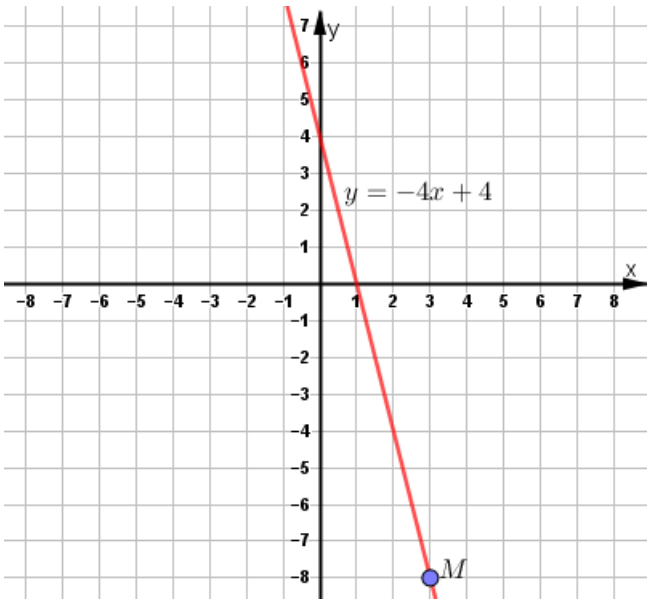


Рисунок 47 – График функции для примера 11

Пример 12. Постройте график нечетной функции, проходящей через точки $(-1;-1)$ и $(8;2)$. Задайте эту функцию формулой.

Эта задача аналогична примеру 7, однако она относится к сложной перекодировке, так как добавлено требование символьного представления информации.

Пример 13. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения [110, с. 50].

Данная задача является визуализированной типа (АС)(АГ) и относится к задачам со сложной перекодировкой. При ее решении необходимо осуществить сначала перевод из словесно-символьного способа представления информации в графический способ, а затем «считать» информацию с графика и представить ее снова в символьном виде. Рассмотрим подробнее решение этой задачи.

Решение. Чтобы построить график функции, преобразуем ее формулу: $y=\dfrac{x^2-x}{x-1}=\dfrac{x(x-1)}{x-1}=x$. Таким образом, получаем функцию $y=x$ с областью определения $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Уравнение $y=p$ задает на плоскости семейство «скользящих» вдоль оси ординат прямых. Из них только прямая $y = 1$ не имеет с графиком заданной функции точек пересечения (рисунок 48).

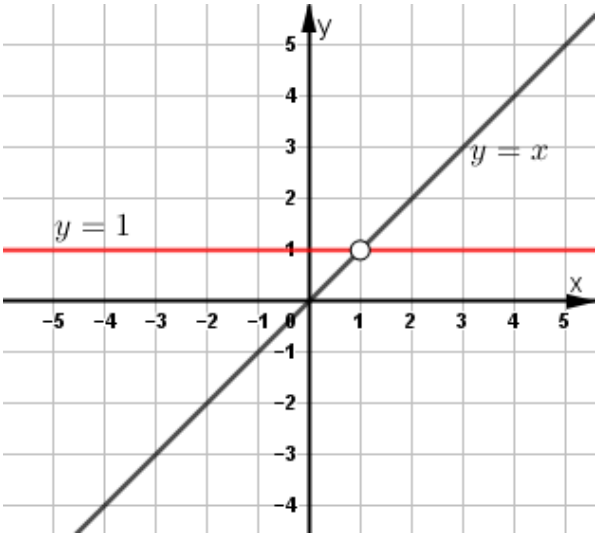


Рисунок 48 – Графическое решение примера 13

Ответ: при $p = 1$.

Прием «Дополни рисунок». Данный прием подразумевает преобразование учащимся графического образа. Чтобы дополнить рисунок, необходимо проанализировать условие задачи и сам рисунок, а затем дополнить его недостающими графическими элементами, что сочетает в себе характерные черты как аналитического, так и синтетического когнитивных стилей. Данный прием используется в задачах продуктивного и творческого уровня. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 14. На рисунке 49 изображен график функции $y = 2x^2 - 2$. Дополните рисунок графиком функции $y = f(x)$, если известно, что график функции $y = 2x^2 - 2$ получен сдвигом графика функции $y = f(x)$ на 2 единицы масштаба вниз. Задайте функцию $y = f(x)$ аналитически.

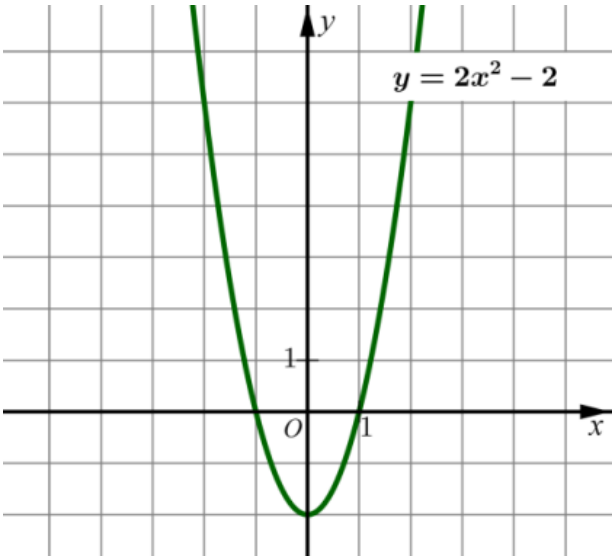


Рисунок 49 – График функции к примеру 14

Данная задача типа (АГС)(АГ) относится к продуктивному уровню. Для ее решения необходимо владеть знаково-символическими действиями, анализом и синтезом.

Пример 15. Дополните рисунок (рисунок 50) графиком функции $y = f(x-2)+5$.

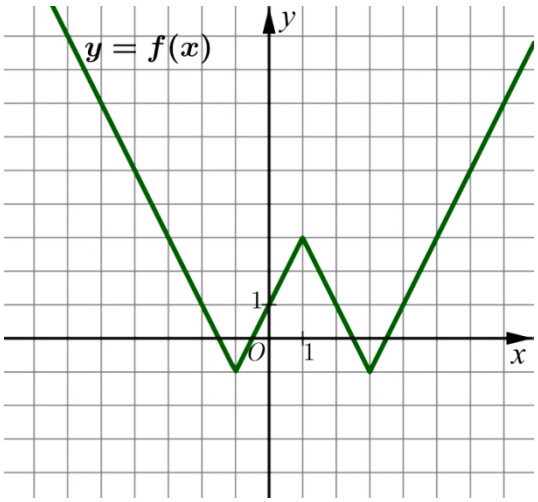


Рисунок 50 – График функции к примеру 15

Данная задача типа (АГ)(АГ) относится к творческому уровню, так как функции заданы в общем виде и учащиеся не смогут построить график известным для них способом, используя таблицы значений.

Пример 16. Дополните рисунок (рисунок 51) осями координат. Найдите координаты точек A, B и C и задайте функцию $y = f(x)$ аналитически (единичный отрезок – 1 клетка).

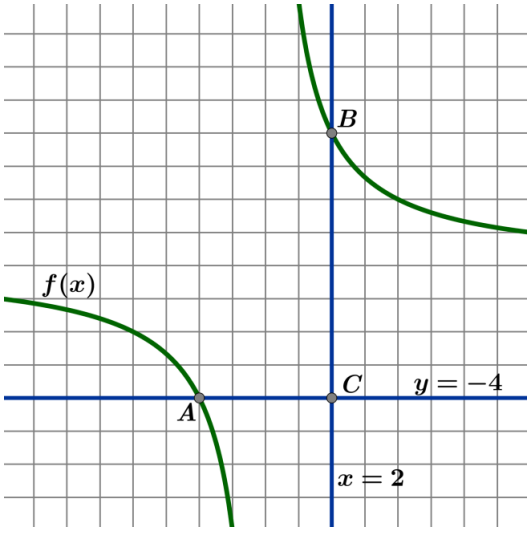


Рисунок 51 – Пример 16

Как и в примере 15, рассматриваемая задача относится к типу (АГ)(АГ). Для решения задачи учащимся необходимо найти способ построения осей координат, необходимых для определения формулы, задающей функцию. В нахождении координат точек помогают прямые $y = -4$ и $x = 2$. Данная ситуация является новой для учащихся 8 класса, поэтому является творческой. Для ее

решения необходимо владеть знаково-символическими ПУУД, действиями анализа, синтеза, поиска и выделения необходимой информации на творческом уровне.

Прием «Выдели цветом». Рассматриваемый прием, так же как и прием «дополни рисунок», предполагает самостоятельное преобразование учащимся графического образа. Использование этого приема позволяет развивать мобильность когнитивного стиля «полезависимость-поленезависимость», так как предполагает вычленение на заданном фоне необходимого объекта. При этом развиваются следующие ПУУД: знаково-символические действия, поиск и выделение необходимой информации, анализ, синтез.

Пример 17. Выделите цветом график функции $y = \frac{3}{x}$ (рисунок 52).

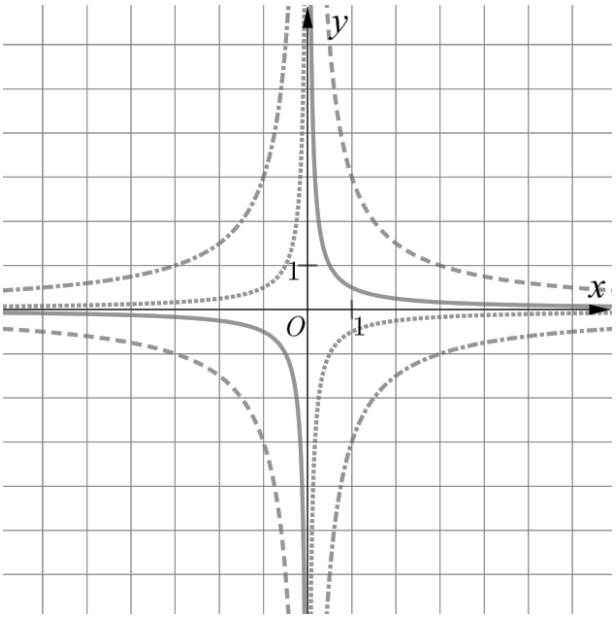


Рисунок 52 – Графики функций к примеру 17

Пример 18. Выделите цветом график функции $y = \begin{cases} \frac{2}{x}, \text{ если} -4 \le x \le 1, \\ x+1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

(рисунок 53).

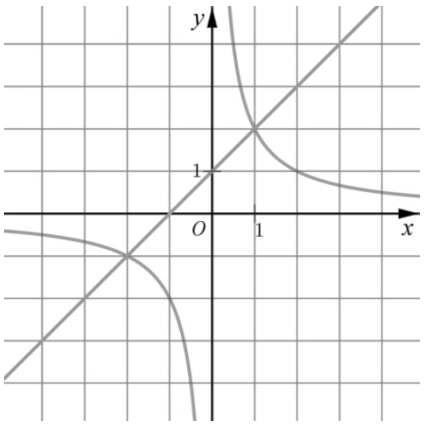


Рисунок 53 – Графики функций к примеру 18

Данные задачи относятся к типу (АГ)Г и репродуктивному уровню, так как не требуют самостоятельного перекодирования информации. Умение решать подобного рода задач демонстрирует проявление поленезависимости, так как учащимся приходится выделять нужный график на «загруженном» лишними элементами рисунке.

Пример 19. Выделите цветом часть графика функции (рисунок 54), соответствующую промежутку $x \in [1; 3]$. Запишите формулу, задающую функцию. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на этом промежутке.

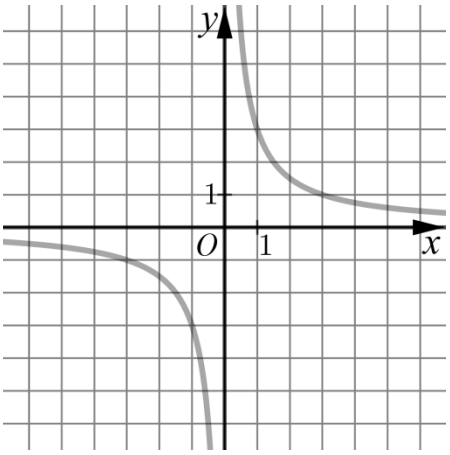


Рисунок 54 – График функции к примеру 19

В отличие от предыдущих примеров, данная задача относится к типу (АГ)(АГ) и продуктивному уровню. Выделив часть графика, соответствующую множеству $x \in [1; 3]$, учащиеся осуществляют символьно-образную перекодировку. Определяя формулу, задающую функцию, наибольшее и

наименьшее значения функции учащиеся осуществляют образно-символьное перекодирование.

Описанные выше визуализированные задачи предъявлялись учащимся в виде рабочих листов – визуальных конспектов-практикумов, представляющих собой лист формата А4, разбитый на блоки и содержащий специально подобранные задачи. Например, на рисунке 55 представлен рабочий лист по теме «Координатная плоскость».

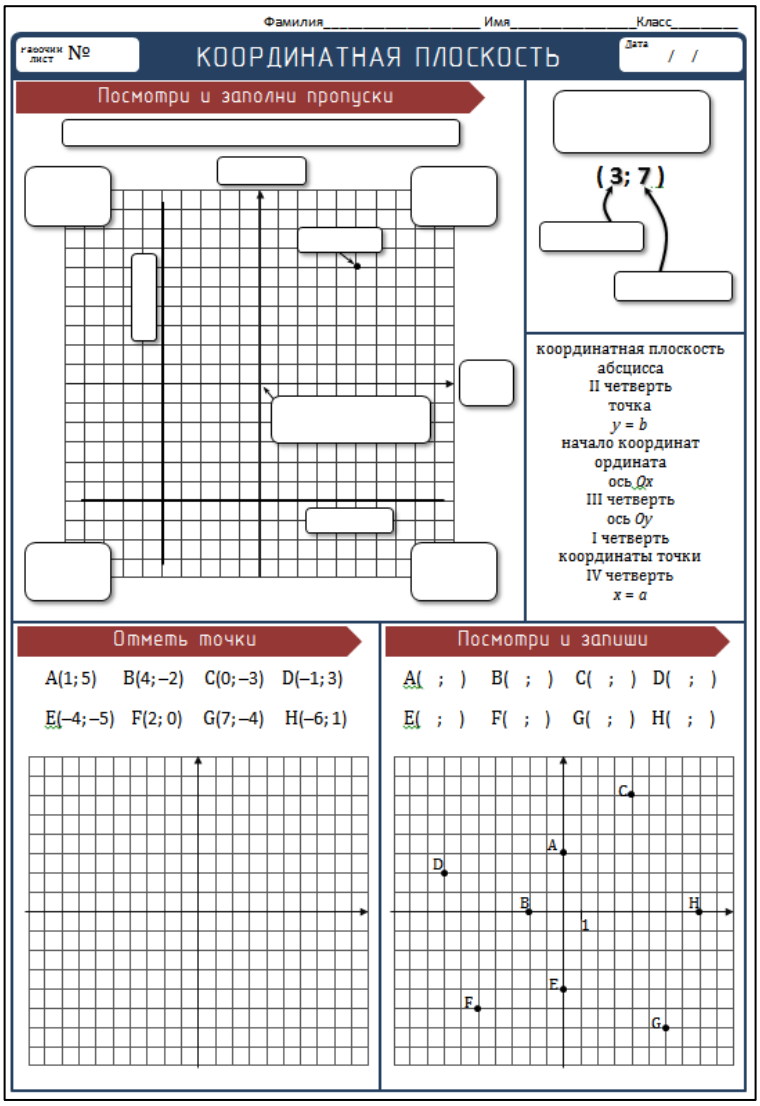


Рисунок 55 – Рабочий лист по теме «Координатная плоскость»

Формы работы с рабочими листами очень разнообразны. В ходе фронтальной работы с классом фрагменты рабочих листов предъявлялись в виде интерактивных презентаций, созданных в MS PowerPoint, с помощью программного обеспечения для интерактивных досок или Google-презентаций.

Рабочие листы могут служить основой для организации самостоятельной деятельности учащихся на уроке, выступать в качестве контрольных материалов или домашнего задания. Как показал эксперимент, учащимся нравится работать с такими листами, они охотно выполняют предложенные задания.

В ходе экспериментальной работы активно использовались созданные нами электронные образовательные ресурсы. С помощью web-приложения к учебному пособию (рисунок 56) учитель мог самостоятельно конструировать рабочие листы, посылать с помощью электронного дневника ссылки на интерактивные версии задач или презентации.

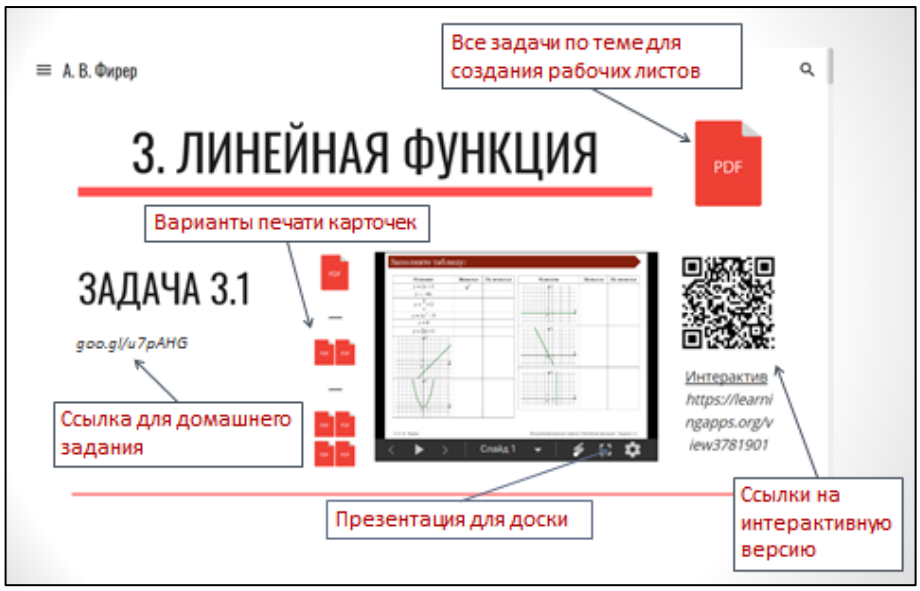


Рисунок 56 – Интерфейс web-приложения к пособию

Кроме указанных выше интерактивных мультимедийных презентаций, web-приложения и визуализированных задач в сервисе Learningapps.org мы применяли компьютерные интерактивные модели, при создании которых в качестве программного средства применялась система динамической математики GeoGebra. Включение данной программы в систему средств обучения позволяет достичь двух основных эффектов: визуализации математических объектов и предоставления учащимся возможности экспериментирования с ними. Визуализированные задачи, разработанные в GeoGebra, приобретают при этом свойство интерактивности, что невозможно достичь в «бумажном» варианте.

Среди организационных форм обучения, а именно практических занятий, самостоятельной работы, консультаций, индивидуально-групповых занятий, мы особо выделяем лабораторные работы с привлечением указанных выше интерактивных моделей, разработанных в среде GeoGebra.

Мы придерживались следующей структуры лабораторных работ:

1. Актуализация знаний в виде фронтального опроса.

2. Формулирование цели лабораторной работы.

3. Ход работы (проведение компьютерных экспериментов и заполнение протоколов наблюдений).

4. Формулирование выводов на основе анализа и обобщения наблюдений.

5. Серия визуализированных задач на применение сформулированных выводов.

6. Рефлексия.

При проведении лабораторных работ нами использовалась модель «1 ученик: 1 компьютер», то есть каждый учащийся выполнял задания индивидуально.

Нами был разработан комплект лабораторных работ в среде GeoGebra по темам: «Функция $y = kx$ и ее график», «Линейная функция $y = kx + l$ и ее график», «Взаимное расположение графиков линейных функций», «Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график», «Функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график», «Преобразование графиков функций». Тем не менее, применять на каждом уроке ознакомления с новым материалом лабораторные работы, мы считаем не целесообразным. Однако, интерактивные модули, созданные для лабораторных работ в GeoGebra, применялись и на этапе актуализации знаний, и в ходе эвристической беседы.

Приведем фрагмент лабораторной работы для 8 класса.

Тема: «Построение графиков функций $y = f(x+l)$, $y = f(x)+m$, если известен график функции $y = f(x)$».

Цель работы – выработать алгоритм построения графиков функций $y = f(x+l)$ и $y = f(x)+m$, если известен график функции $y = f(x)$.

Первые два задания учащиеся выполняют на компьютере в среде GeoGebra. Приведем формулировки этих заданий.

Задание 1. Выясните, как построить график функции $y = f(x+l)$, если известен график функции $y = f(x)$. Для этого:

1. Откройте файл *Лабораторная работа №1* в GeoGebra.

2. Поставьте флажок в *Задании 1* (рисунок 57).

3. Изменяя с помощью ползунка значение коэффициента l, заполните протокол наблюдений №1.

4. Сделайте выводы.

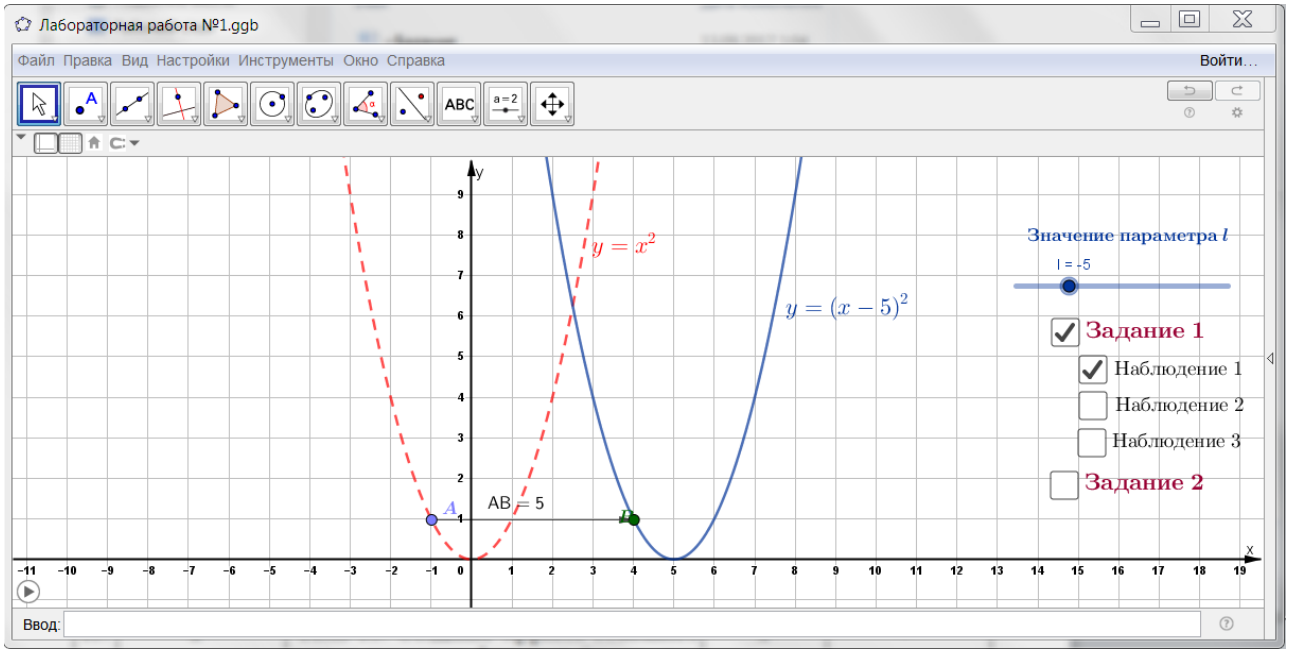


Рисунок 57 – Рабочая область для задания 1 в системе Geogebra

Задание 2. Выясните, как построить график функции $y = f(x)+m$, если известен график функции $y = f(x)$. Для этого:

1. Уберите флажки в *Задании 1* и поставьте флажок в *Задании 2* (рисунок 58).

2. Изменяя с помощью ползунка значение коэффициента m, заполните протокол наблюдений №2.

3. Сделайте выводы.

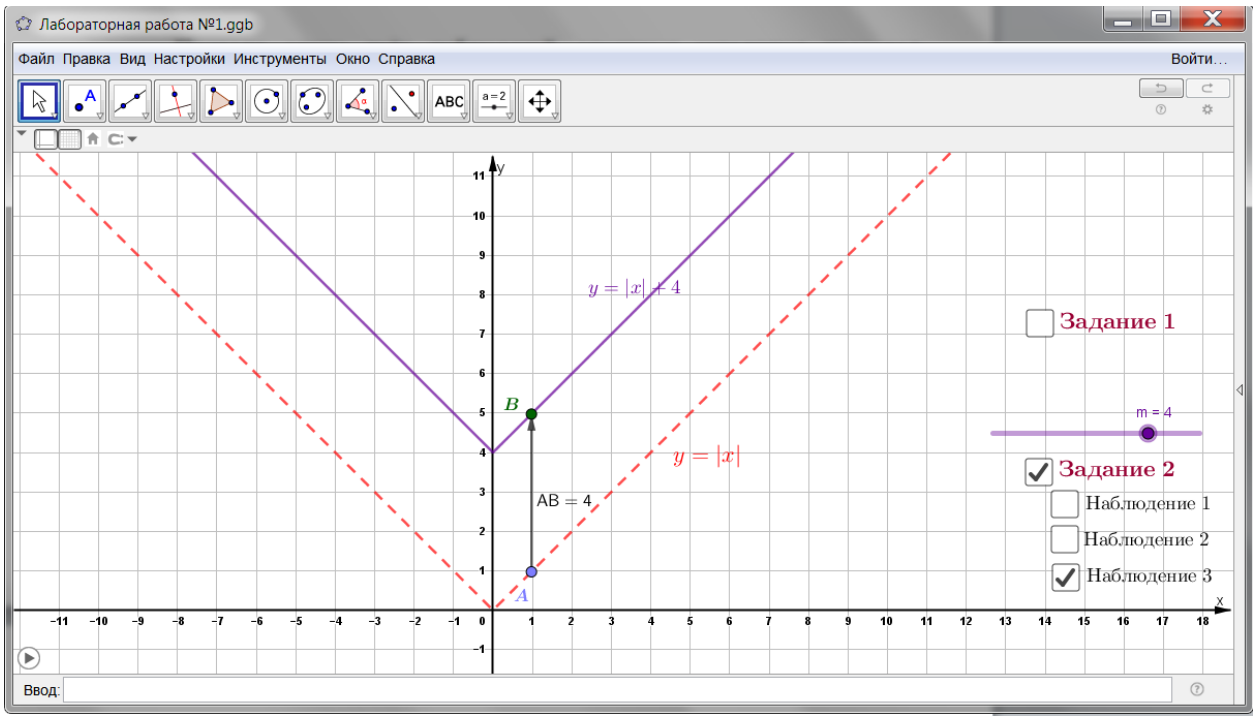


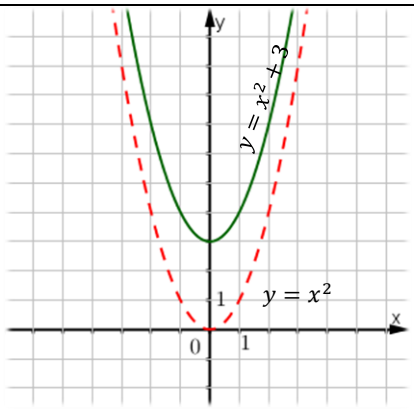
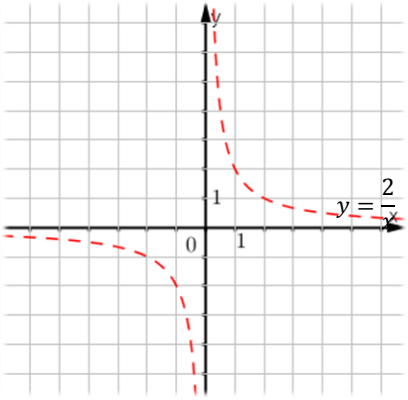
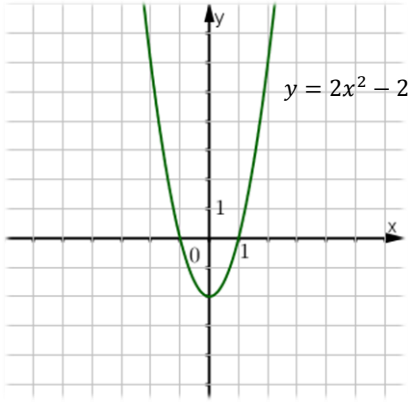
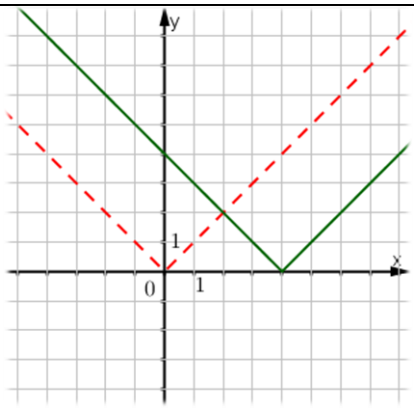
Рисунок 58 – Рабочая область для задания 2 в системе Geogebra

Проводя серию из трех наблюдений, учащиеся заполняют протоколы наблюдений (Приложение Г), представляющие собой рабочие листы, содержащие таблицы для регистрации данных наблюдений и пустые строки для формулирования выводов.

После заполнения протоколов и формулирования выводов учащимся предлагается решить задачи на их применение (например, см. таблицу 26) Также в каждой лабораторной работе предусмотрены дополнительные задания для сильных учащихся.

При заполнении протоколов и выполнении практических заданий у учащихся развиваются логические ПУУД (анализ, синтез и сравнение) и общеучебные ПУУД (знаково-символические действия, включая моделирование, определение основной и второстепенной информации, умение структурировать знания). Таким образом, система динамической математики GeoGebra может помочь учителю дополнить традиционные средства наглядности, выполняющие в основном иллюстративную функцию, средствами интерактивной визуализации, актуализирующими когнитивную функцию наглядности.

Таблица 26 – Практические задания для лабораторной работы

№ п/п	Исходная функция	Описание преобразования графика исходной функции	Новая функция	Графики исходной и новой функции
1	$y = x^2$	Сдвиг (параллельный перенос) вдоль оси *y* на 3 единицы масштаба вверх	$y = x^2 + 3$	
2	$y = \frac{2}{x}$	Сдвиг (параллельный перенос) вдоль оси *x* на 1 единицу масштаба влево		
3		Сдвиг (параллельный перенос) вдоль оси *y* на 2 единицы масштаба вниз	$y = 2x^2 - 2$	
4				

Для проверки эффективности разработанной методики нами был проведен педагогический эксперимент, организация и результаты которого описаны в параграфе 2.3.

2.3. Организация и результаты педагогического эксперимента

В рамках этого параграфа опишем проведенную нами опытно-экспериментальную работу и ее результаты, целью которой является подтверждение сформулированной гипотезы.

Педагогический эксперимент проводился нами в период 2012–2018 гг и осуществлялся в три этапа: констатирующий этап (2012–2013 гг.); поисковый этап (2014–2015 гг.); формирующий (2016–2018 гг.). Экспериментальной площадкой служило МБОУ «СОШ №9» г. Лесосибирска, а также выборочно ряд школ Российской Федерации и Лесосибирский педагогический институт – филал ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет». Всего в эксперименте участвовало 53 учителя математики общеобразовательных учреждений, 30 студентов 1 курса физико-математического факультета и 337 учащихся 7-9 классов МБОУ «СОШ №9».

Организация и проведение констатирующего эксперимента. Целью педагогического эксперимента на констатирующем этапе являлось теоретическое и практическое обоснование актуальности темы исследования. Методами исследования на данном этапе являлись: анализ литературы по теме исследования; интервьюирование; опросы; анкетирование учителей; наблюдение за учебной деятельностью; беседы с учениками и учителями; обобщение передового отечественного и зарубежного педагогического опыта.

В ходе констатирующего этапа были решены следующие задачи.

I. Анализ философской, психолого-педагогической и научно-методической литературы по теме исследования, а также нормативно-правовой документации позволил определить и уточнить базовые понятия исследования: «универсальные

учебные действия», «познавательные универсальные учебные действия», «визуализация учебной информации».

Опытно-поисковая работа на данном этапе педагогического эксперимента предоставила возможность выделить ПУУД, которые целесообразно развивать у учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии; определить уровни развития выделенных ПУУД, а также критерии, характеризующие эти уровни; раскрыть возможности визуализированных дидактических материалов в развитии ПУУД учащихся основной школы.

II. Изучение посредством анкетирования отношения учителей к проблеме развития ПУУД и визуализации (Приложение Д).

Быстрота применения и обработки результатов, а также анонимность, позволяющая получить письменные ответы на вопросы, которые по разным субъективным причинам устно остаются без ответа, послужили причиной выбора нами метода анкетирования. В анкетировании принимали участие 53 учителя математики общеобразовательных учреждений. Использование современных средств ИКТ, а именно Google-формы позволило расширить географию респондентов. Анализ результатов анкетирования показал, что:

1. Большинство учителей (86,7%) знакомы с вопросом развития универсальных учебных действий у учащихся основной школы при обучении алгебре. При этом 66,7% опрошенных согласны с тем, что обучение алгебре нацелено, в первую очередь, на развитие ПУУД.

2. Все учителя считают, что развитие познавательных УУД учащихся основной школы требует использования современных технологий и форм обучения и признают роль визуализации в запоминании и усвоении математических фактов и утверждений. Средства визуализации, используемые респондентами, представлены на диаграмме (рисунок 59).

Как видно из диаграммы, наиболее распространенными средствами визуализации являются ставшие традиционными таблицы, блок-схемы, опорные конспекты и диаграммы. Однако, наблюдение за процессом обучения понятиям

функциональной линии и интервьюирование учителей показали, что учителя чаще всего используют систематизирующие таблицы и таблицы значений функций, что является недостаточным для развития ПУУД.

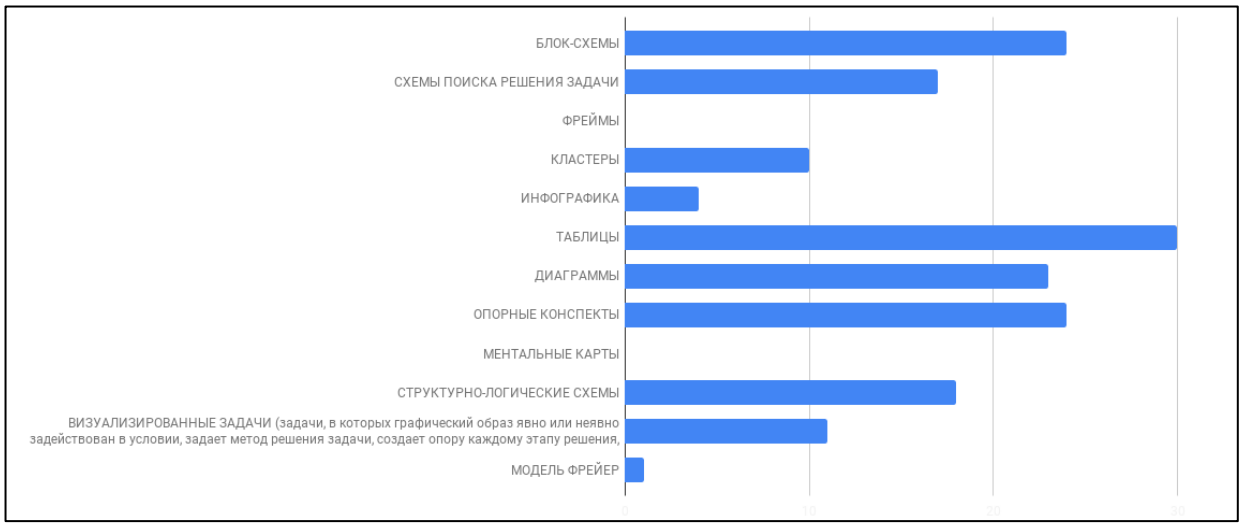


Рисунок 59 – Диаграмма использования учителями средств визуализации

3. Среди средств ИКТ, используемых учителями при обучении алгебре, лидируют мультимедийные презентации (90%), электронные образовательные ресурсы из готовых коллекций (70%) и презентации для интерактивной доски (56,7%). Но как показывает наблюдение, не все презентации, созданные для интерактивной доски, используют ее функциональные возможности и обладают свойством интерактивности.

4. Недостаточный объем наглядности в учебно-методических пособиях по алгебре отметили 43,3% опрошенных. При этом учителей, полностью удовлетворенных наглядным содержанием пособий, нет.

III. Анализ комплексов задач функциональной линии учебников по алгебре.

Наблюдение за учебным процессом, а также беседы с учителями математики и учащимися показали, что наиболее трудной для усвоения в курсе алгебры основной школы является функциональная линия. Парадоксально, что именно эта содержательно-методическая линия обладает наиболее широким спектром наглядности и возможностью визуализации. Учитывая это и результаты проведенного анкетирования, в ходе констатирующего эксперимента мы провели анализ комплексов задач, относящихся к функциональной линии в наиболее

распространенных учебно-методических комплектах по алгебре с точки зрения наличия визуализированных задач. Результаты анализа представлены в таблице 27.

Таблица 27 – Визуализированные задачи в учебниках по алгебре

Автор учебника	Визуальный образ в условии	Визуальный образ в ответе	Визуальный образ в условии и в ответе	Всего задач с визуальным образом	Всего задач
7 класс					
Г. В. Дорофеев и др. [1]	17	31	5	53	58
Ю. Н. Макарычев и др. [3]	32	21	12	65	147
А. Г. Мерзляк и др. [132]	17	46	17	80	220
А. Г. Мордкович и др. [4]	24	103	1	128	306
Г. К. Муравин и др. [145]	4	16	15	35	80
8 класс					
Г. В. Дорофеев и др. [5]	32	71	22	125	212
Ю. Н. Макарычев и др. [7]	3	12	2	17	39
А. Г. Мерзляк и др. [133]	4	23	3	30	76
А. Г. Мордкович и др. [141]	19	147	0	166	361
Г. К. Муравин и др. [146]	5	8	3	16	36
С. М. Никольский и др.[6]	21	70	15	106	275
9 класс					
Г. В. Дорофеев и др. [8]	22	87	18	127	202
Ю. Н. Макарычев и др. [10]	28	74	3	105	229
А. Г. Мерзляк и др. [134]	23	53	9	85	180
А. Г. Мордкович и др. [143]	15	65	1	81	242
Г. К. Муравин и др. [147]	13	16	0	29	117
С. М. Никольский и др. [9]	2	21	2	25	83

Для большей наглядности представим данные таблицы на диаграммах (рисунки 60-62).

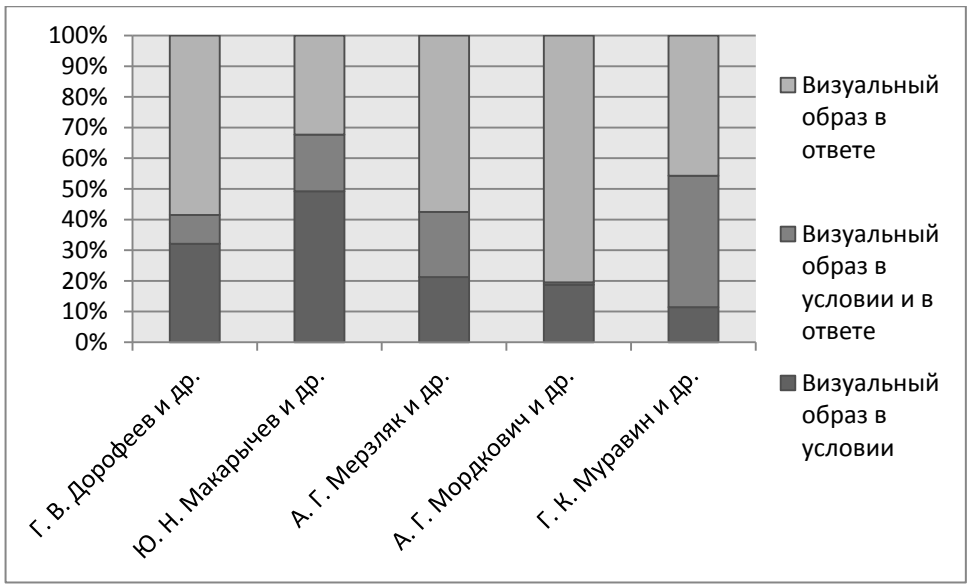


Рисунок 60 – Визуализированные задачи в учебниках алгебры для 7 класса

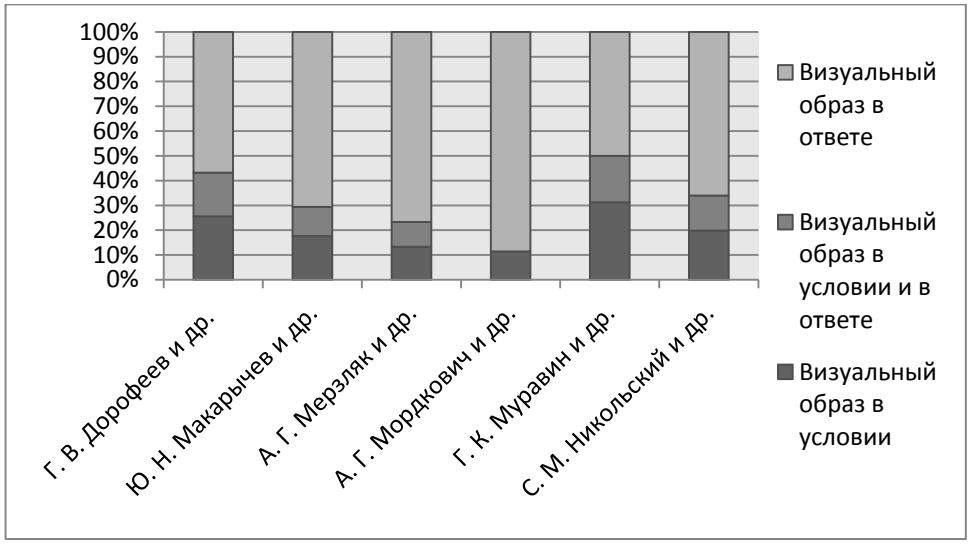


Рисунок 61 – Визуализированные задачи в учебниках алгебры для 8 класса

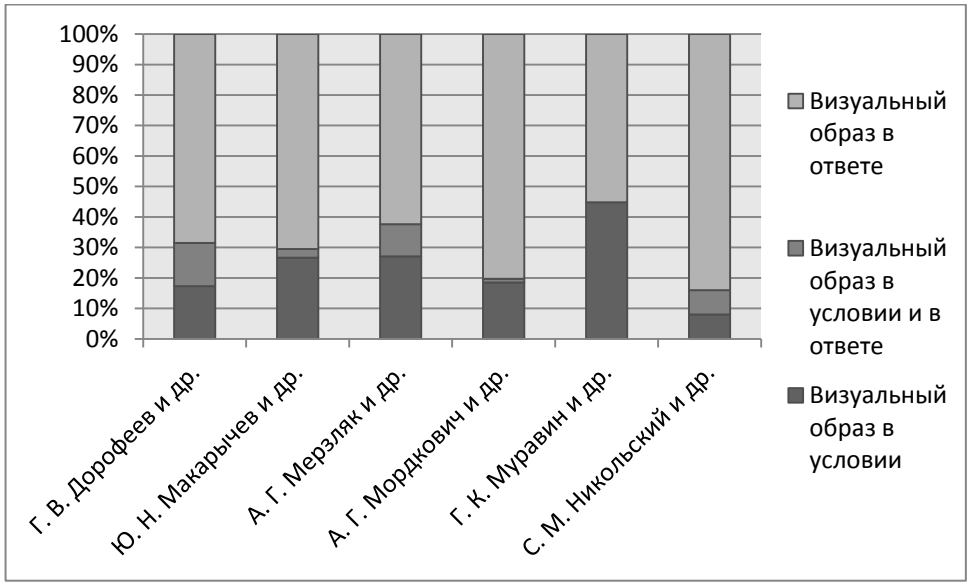


Рисунок 62 – Визуализированные задачи в учебниках алгебры для 9 класса

Как видно из диаграмм в большинстве учебников алгебры преобладают задачи, в которых визуальный образ присутствует только в ответе и совсем мало задач, в которых визуальный образ содержится в условии или и в условии, и в ответе одновременно. Например, на рисунке 63 приведен анализ комплекса задач функциональной линии комплекта учебников алгебры А. Г. Мерзляка и др. [132, 133, 134], проведенный на основе разработанной нами типологии визуализированных задач. Очевидно значительное преобладание задач типа АА и (АС)А. Среди визуализированных задач преобладают задачи типов АГ и (АС)(АГ).

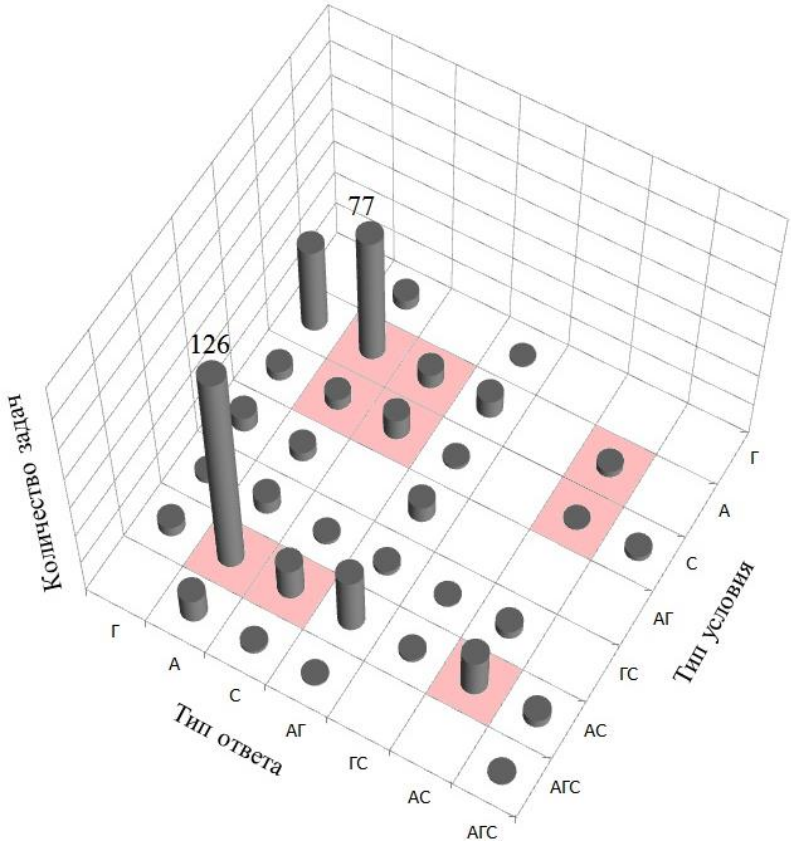


Рисунок 63 – Анализ комплекса задач функциональной линии учебников алгебры для 7-9 классов (А. Г. Мерзляк и др.)

Похожие ситуации и в других учебниках. Исключение составляют учебники алгебры для 7 класса Ю. Н. Макарычева и др. [3] и Г. К. Муравина и др. [145], однако количество задач в этих учебниках невелико. Хуже всего разнообразие визуализированных задач представлено в учебниках под редакцией

А. Г. Мордковича [4, 141, 143], которыми пользуется большинство учителей математики (около 80% опрошенных).

Заметим также, что в качестве визуальных образов во всех учебниках выступают только графики или таблицы значений функций.

Таким образом, все вышесказанное подтверждает актуальность и значимость проводимого нами исследования. Изучение и анализ литературы по теме исследования, проведенное анкетирование и интервьюирование, беседы с учителями и учащимися, наблюдение за учебным процессом, обобщение передового педагогического опыта, содержательный анализ комплексов задач учебников алгебры позволили определить категориально-понятийный аппарат исследования и подтвердить наличие исследуемой проблемы, а именно: как организовать с применением средств визуализации обучение алгебре учащихся основной школы, чтобы обеспечить у них эффективное развитие познавательных универсальных учебных действий?

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента помогли нам определить направление следующего, поискового этапа.

Организация и проведение поискового эксперимента. В ходе поискового этапа педагогического эксперимента (2014-2015 гг.) разрабатывались модель и методика развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации, разрабатывался и апробировался комплекс визуализированных дидактических материалов.

Опираясь на расширенную нами классификацию визуализированных задач по алгебре и результаты констатирующего эксперимента, мы разрабатывали комплекс визуализированных задач, способствующий развитию ПУУД.

Проверить умение учащихся решать визуализированные задачи с визуальным образом в условии нам позволило включение такого типа задач во входное тестирование учащихся 9-х классов и студентов 1 курса физико-математического факультета. Всего в тестировании участвовало 95 учащихся и 30 студентов, которым было предложено решить следующие задачи:

№1. Отметьте графики линейных функций (рисунок 64).

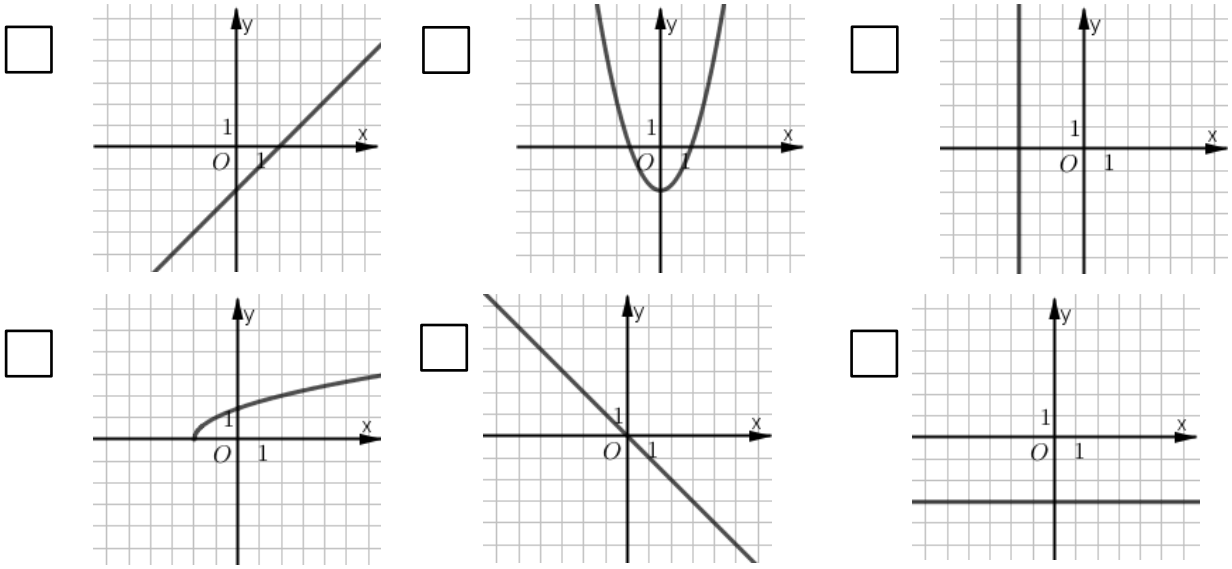


Рисунок 64 – Графики функций для задачи №1

№2. Установите соответствие между графиками функций (рисунок 65) и формулами, которые их задают.

Графики функций

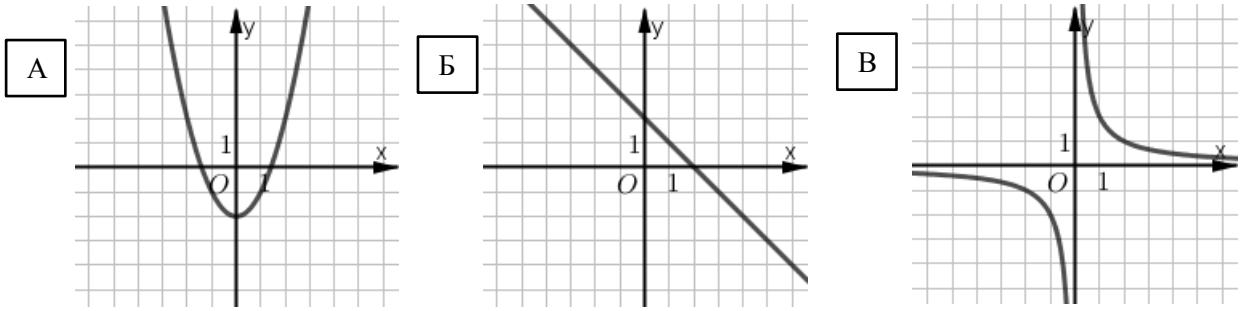


Рисунок 65 – Графики функций для задачи №2

Формулы

1) $y = -x + 2$ **2)** $y = \frac{2}{x}$ **3)** $y = x - 2$ **4)** $y = x^2 - 2$

Ответ:

А	Б	В

№3. Установите соответствие между графиками функций (рисунок 66) и формулами, которые их задают.

Графики функций

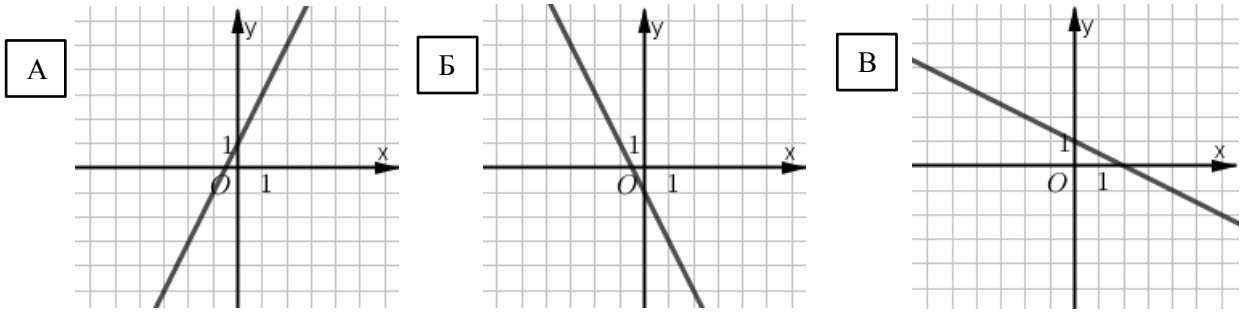


Рисунок 66 – Графики функций для задачи №3

Формулы

1) $y=-2x-1$ **2)** $y=2x+1$ **3)** $y=-2x+1$ **4)** $y=-0{,}5x+1$

Ответ:

А	Б	В

Правильно решили первую задачу только 15% учащихся, что свидетельствует об их неверных графических представлениях, которые не позволили им осуществить грамотно образно-словесную перекодировку. В рассмотренных нами учебниках алгебры говорится о том, что графиком линейной функции является прямая и не акцентируется внимание на том, что прямая не должна быть параллельна или совпадать с осью ординат. В учебниках есть задачи, в которых требуется от учащихся осуществить действие «подведение под понятие» для функций, заданных аналитически, но ни в одном учебнике нет заданий с функциями, заданными графически. В результате у большинства учащихся сформировался неправильный графический образ линейной функции – произвольная прямая.

Вторая задача была выбрана по аналогии с задачей №5 основного государственного экзамена по математике. В соответствии с требованиями, предъявляемыми к тестовым заданиям на соответствие, нами был добавлен еще один вариант во множестве формул. С данной задачей справилось 67% учащихся. Однако, при решении подобной задачи №3, в которой представлены графики

одного типа (линейных функций), процент учащихся, выполнивших задание верно, уменьшился до 45%.

Учитывая вышесказанное, основной акцент при разработке комплекса визуализированных задач нами был сделан на задачах, в которых визуальный образ присутствует в условии или в условии и в ответе задачи. При этом в качестве визуального образа в задачах выступают не только графики функций и таблицы значений функции, но и визуальные модели представления учебной математической информации (тест-матрицы, блок-схемы, фреймы, модели Фрейер, таблицы).

В ходе поискового этапа нами была изучена материально-техническая база школы, участвующей в эксперименте, а именно технические средства ИКТ (наличие и типы интерактивных досок, возможность выхода в интернет, количество автоматизированных рабочих мест учеников, программное обеспечение и т. п.). Это позволило в дальнейшем создать эффективные визуализированные электронные образовательные ресурсы (web-приложение к учебному пособию, интерактивные презентации, интерактивные визуализированные задачи в MS PowerPoint, компьютерные лабораторные работы в среде GeoGebra и т. д.). Разработанные визуализированные дидактические материалы проходили апробацию на уроках математики в МБОУ «СОШ №9» г. Лесосибирска и на практических занятиях по математике и элементарной математике в ЛПИ – филиале СФУ.

В ходе апробации визуализированных дидактических материалов, мы пришли к выводу об эффективности объединения ряда визуализированных задач в визуальные рабочие листы, позволяющие актуализировать познавательную активность учащихся и интенсифицировать процесс обучения.

Таким образом, в результате проведенного нами поискового этапа экспериментальной работы нами были решены следующие задачи:

1) дополнена классификация визуализированных задач;

2) разработан комплекс визуализированных задач, относящихся к функциональной содержательно-методической линии школьного курса алгебры и направленных на развитие познавательных универсальных учебных действий;

3) разработана модель и методика развития ПУУД в процессе обучения понятиям функциональной линии в соответствии с выделенными этапами (мотивационно-диагностическим, операционно-исполнительским, рефлексивно-оценочным) и уровнями развития ПУУД (репродуктивным, продуктивным, творческим). Отличительной особенностью методики является использование визуализированных дидактических материалов, разработанных на основе сочетаний трех способов представления учебной математической информации и ориентированных на различные когнитивные стили учащихся.

Результаты поискового этапа педагогического эксперимента послужили базой для организации следующего, формирующего этапа.

Организация и результаты формирующего этапа эксперимента. Цель формирующего этапа эксперимента – проверить эффективность разработанной нами методики развития ПУУД учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии.

Формирующий этап проводился в 2016-2018 гг. в естественных условиях учебного процесса на уроках алгебры обучающихся 7, 8 и 9 классов (242 человека) МБОУ «СОШ №9» г. Лесосибирска Красноярского края.

В экспериментальных группах (ЭГ) обучение осуществлялось по разработанной нами методике развития ПУУД средствами визуализации, а в контрольных группах (КГ) – по традиционной методике. До эксперимента учащиеся этих групп находились в одинаковых начальных условиях.

Объективность результатов эксперимента обусловлена выбором экспериментальных и контрольных групп:

1) 7 класс, 2016: $ЭГ_7$ – 43 человека, $КГ_7$ – 46 человек;
2) 8 класс: $ЭГ_8$ – 34 человек, $КГ_8$ – 32 человека;
3) 9 класс (1 год обучения): $ЭГ_{9.1}$ – 44 человека, $КГ_{9.1}$ – 43 человека;
4) 9 класс (2 год обучения): $ЭГ_{9.2}$ – 34 человека, $КГ_{9.2}$ – 32 человека

Распределение классов на экспериментальные и контрольные происходило следующим образом. Среди учащихся этих классов было проведено входное тестирование, результаты которого показали, что ученики имеют равнозначные возможности: средний балл по $ЭГ_7$ – 3,5, $КГ_7$ – 3,8; по $ЭГ_8$ – 3,1, $КГ_8$ – 3,3; по $ЭГ_9$ – 2,9, $КГ_9$ – 3,2. Этим обеспечивается однородность экспериментальных и контрольных групп и репрезентативность выборки при статистическом анализе.

Для исследования динамики развития ПУУД нами были проведены контрольные срезы в экспериментальных и контрольных группах до и после изучения разделов функциональной линии в 7, 8 и 9 классах. В приложениях приведены пример входной контрольной работы для 7 класса (Приложение Е), контрольной работы на выходе для 7 класса (Приложение Ж).

Распределение учащихся по уровням развития ПУУД представлено в таблице 28.

Таблица 28 – Распределение учащихся по уровням развития ПУУД

Классы	Уровни	Контрольные группы (КГ)		Экспериментальные группы (ЭГ)	
		До эксперимента	После эксперимента	До эксперимента	После эксперимента
7	Репродуктивный	23	17	29	8
	Продуктивный	23	29	13	32
	Творческий	0	0	1	3
8	Репродуктивный	20	17	17	9
	Продуктивный	12	15	15	21
	Творческий	0	0	2	4
9 (1 год)	Репродуктивный	18	21	23	10
	Продуктивный	20	8	17	29
	Творческий	5	4	4	5
9 (2 год)	Репродуктивный	16	18	13	7
	Продуктивный	14	14	18	23
	Творческий	2	0	3	4

Для наглядности представим полученные данные на диаграммах, выразив их для объективности в процентном соотношении (рисунки 67-71).

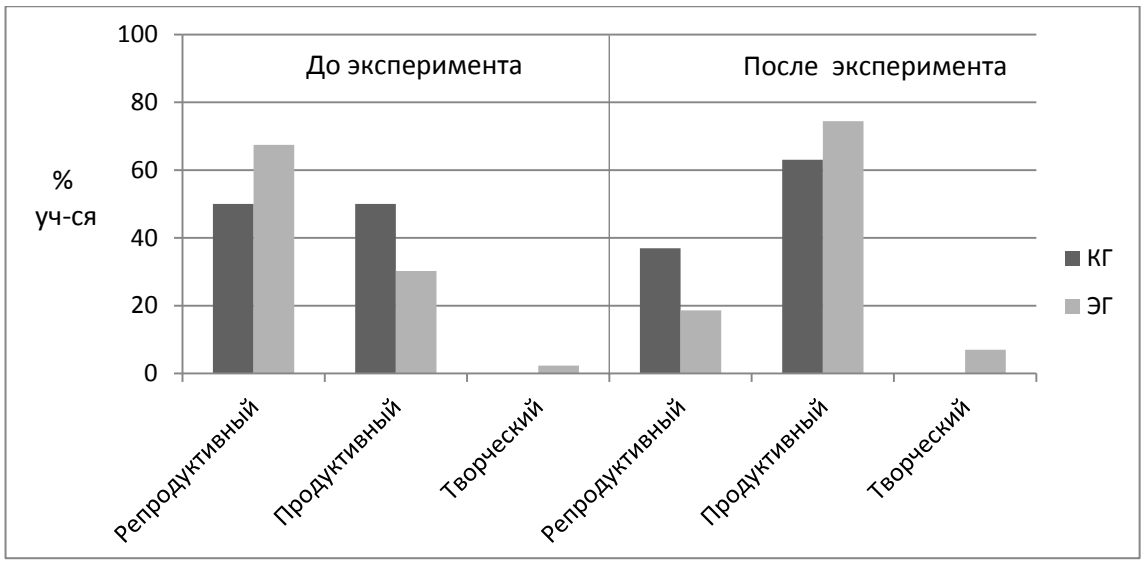


Рисунок 67 – Динамика развития ПУУД у учащихся 7 класса

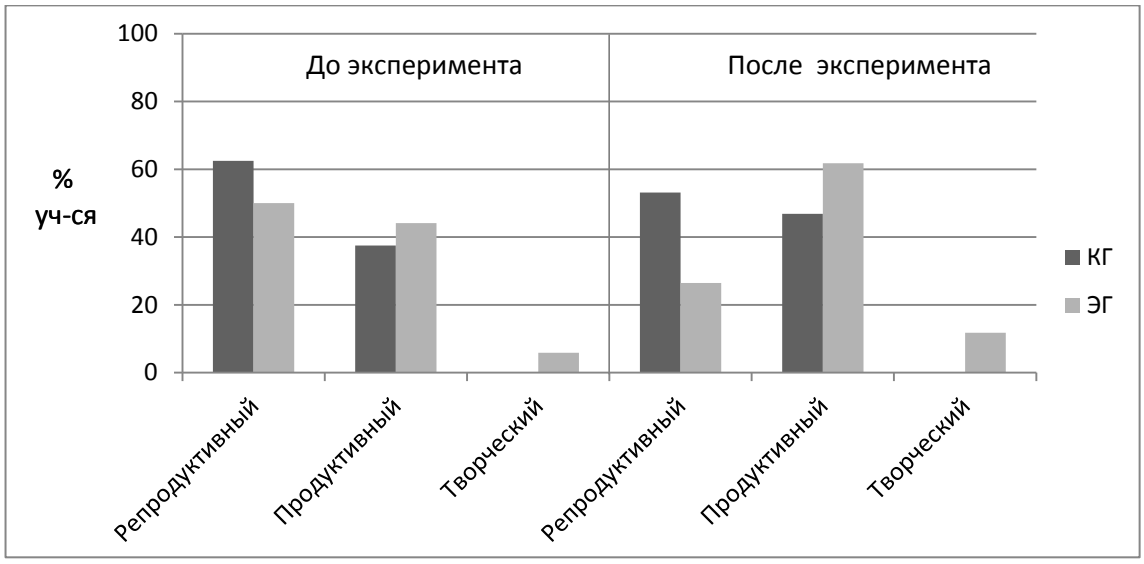


Рисунок 68 – Динамика развития ПУУД у учащихся 8 класса

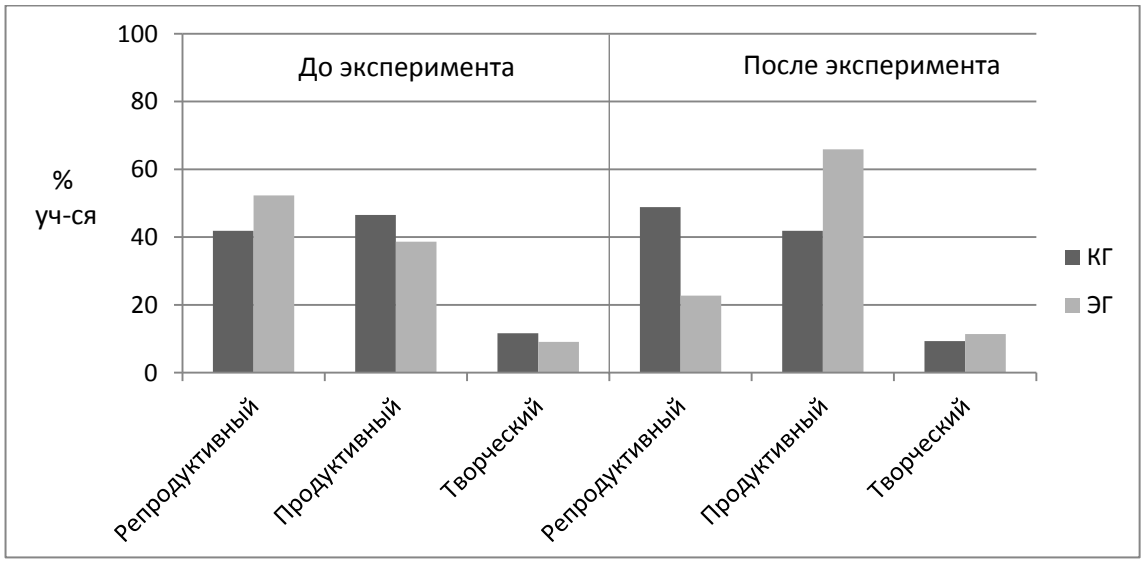


Рисунок 69 - Динамика развития ПУУД у учащихся 9 класса (1 год обучения)

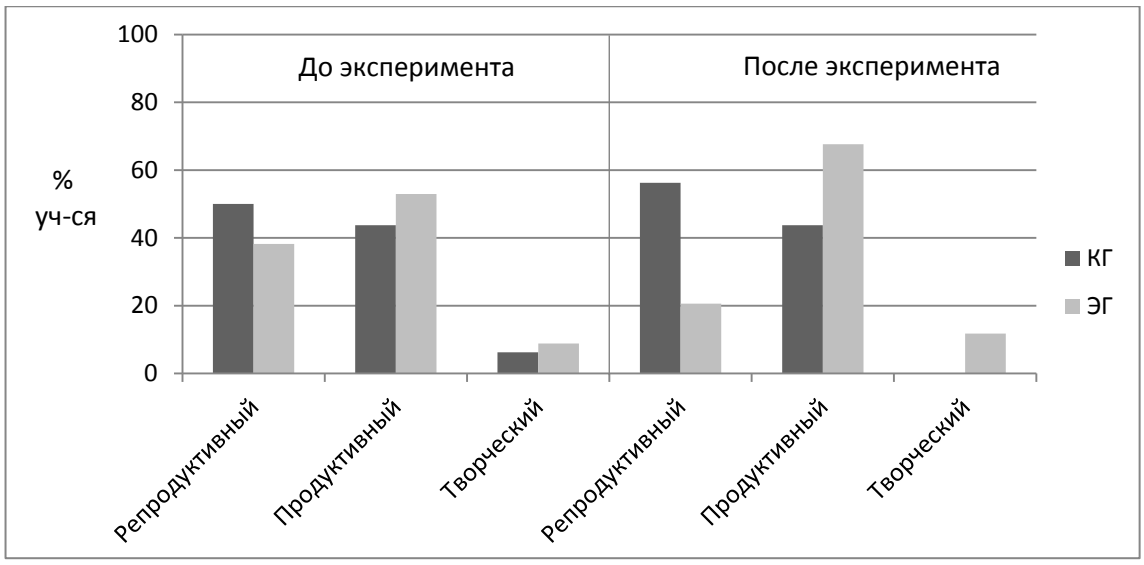


Рисунок 70 - Динамика развития ПУУД у учащихся 9 класса (2 год обучения)

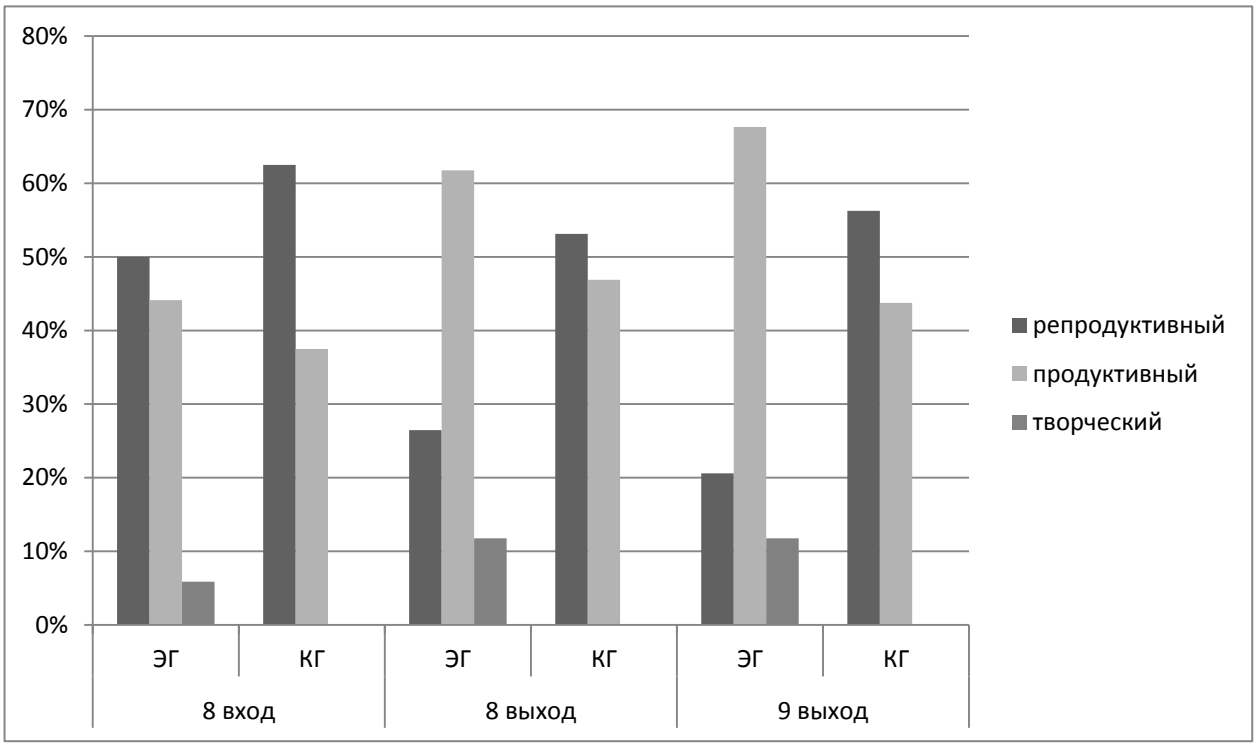


Рисунок 71 – Динамика развития ПУУД у учащихся 9 класса (случай пролонгированного обучения)

Анализ представленных результатов позволил сделать следующие выводы:

1. Во всех экспериментальных группах произошло значительное снижение доли учащихся с репродуктивным уровнем развития выделенных нами в параграфе 1.1. ПУУД: в 7 классах на 49%; в 8 классах на 28%; в 9 классах (1 год обучения) на 30%; в 9 классах (2 год обучения) на 18%, что отразилось на увеличении долей учащихся с продуктивным и творческим уровнями развития.

Так, доля учащихся 7 классов с продуктивным уровнем развития ПУУД была 30%, стала – 74% , с творческим уровнем была 2%, стала – 7%. Доля учащихся 8 классов с продуктивным уровнем развития ПУУД была 44%, стала – 62% , с творческим уровнем была 6%, стала – 12%. Доля учащихся 9 классов (1 год обучения) с продуктивным уровнем развития ПУУД была 39%, стала – 66% , с творческим уровнем была 9%, стала – 11%. Доля учащихся 9 классов (2 год обучения) с продуктивным уровнем развития ПУУД была 53%, стала – 68% , с творческим уровнем была 9%, стала – 12%.

Приведенные данные подтверждают, что предложенная нами методика развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации, реализуемая с учетом разработанной структурно-функциональной модели, и содержательную основу которой составляют визуализированные дидактические материалы, разработанные с учетом этапов (мотивационно-диагностический, операционно-исполнительский, рефлексивно-оценочный) и уровней развития ПУУД (репродуктивный, продуктивный, творческий), обеспечивает положительную динамику уровней их развития.

2. В контрольных группах в целом произошли незначительные изменения в разных направлениях, что может говорить о несущественном влиянии традиционной методики обучения понятиям функциональной линии на развитие выделенных ПУУД.

В ходе диссертационного исследования нас интересовал вопрос о влиянии разработанной методики на учащихся с правополушарным доминированием, так как именно они, чаще других, оказываются неуспешными в обучении алгебре. Распределение учащихся экспериментальных классов по доминирующему полушарию головного мозга представлено на рисунке 72.

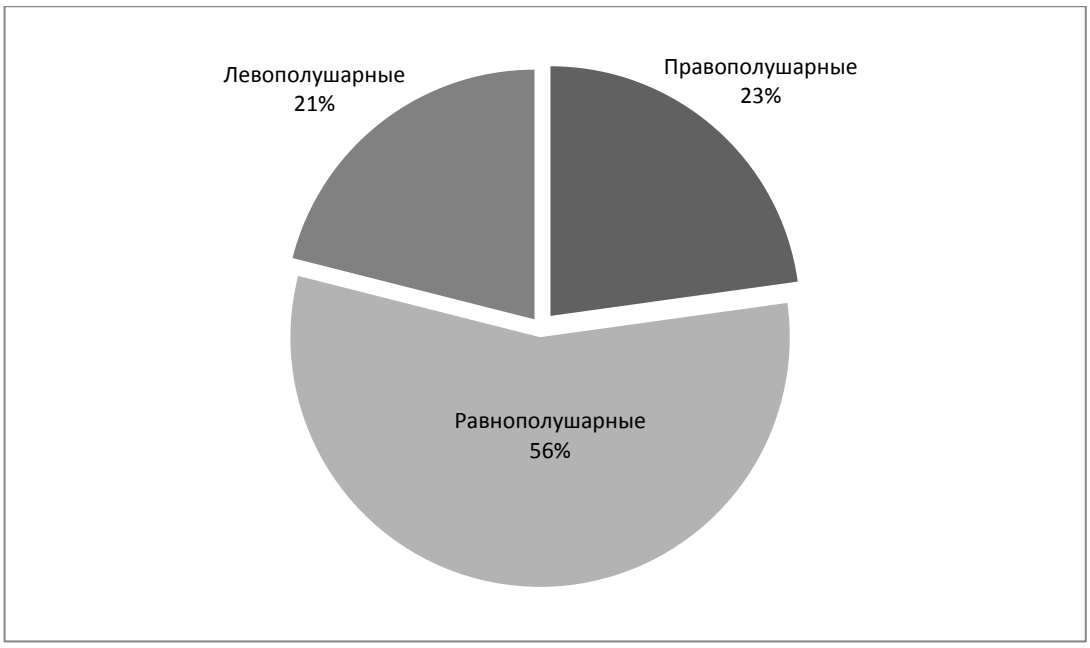


Рисунок 72 – Распределение учащихся экспериментальных классов по ведущему полушарию

До начала эксперимента 54% «правополушарных» учащихся находились на репродуктивном уровне развития ПУУД (рисунок 73).

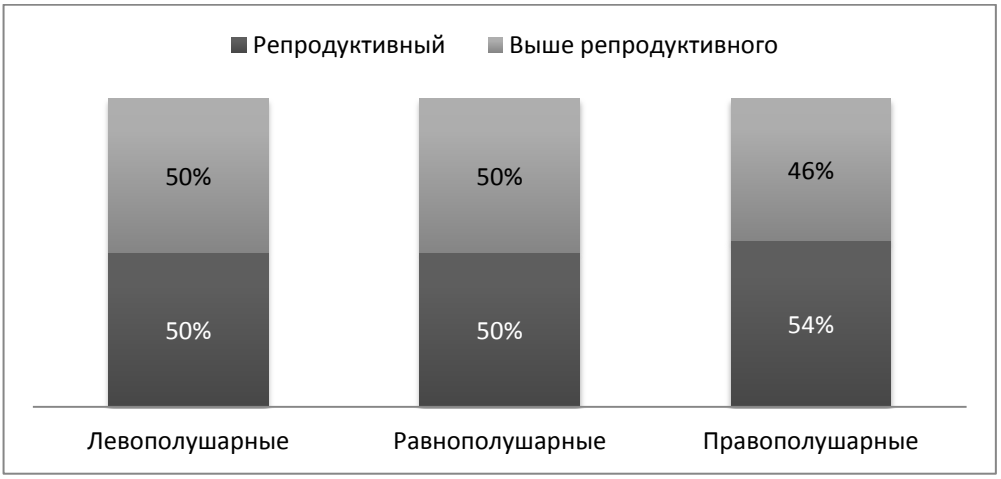


Рисунок 73 – Распределение учащихся по уровню развития ПУУД в начале эксперимента в зависимости от ведущего полушария

Как видно из диаграммы, представленной на рисунке 73, после эксперимента доля «правополушарных» учащихся с репродуктивным уровнем снизилась до 8%, что говорит о том, что визуализация процесса обучения понятиям функциональной линии позволяет сделать обучение алгебре, более комфортным и успешным для таких детей. При этом доли репродуктивного уровня остальных учащихся также снизилась. Все вышесказанное подтверждает

тот факт, что визуализация в процессе обучения понятиям функциональной линии действительно способна обеспечить активизацию правого полушария.

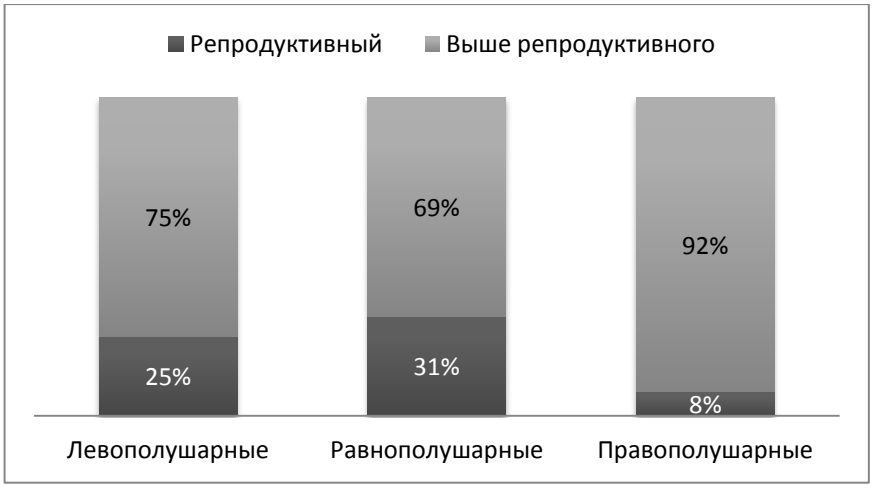


Рисунок 74 – Распределение учащихся по уровню развития ПУУД в конце эксперимента в зависимости от ведущего полушария

Так как полученные экспериментальные данные могут быть представлены в порядковой шкале и число разрядов $L = 3$ (три уровня развития ПУУД: репродуктивный, продуктивный и творческий), то для обоснования достоверности результатов целесообразно использовать критерий χ^2 (критерий Пирсона для определения расхождения или согласия распределений).

Сформулируем нулевую и альтернативную гипотезы.

Нулевая гипотеза (H_0): показатели развития ПУУД у учащихся контрольной и экспериментальной групп существенно не различаются.

В случае отклонения гипотезы H_0 принимается альтернативная гипотеза H_1: показатели развития ПУУД у учащихся контрольной и экспериментальной групп различны.

Статистическая обработка результатов диагностики уровня развития ПУУД учащихся экспериментальных и контрольных групп 7-9 классов (Приложение И) показала, что до эксперимента существенного различия в распределении учащихся контрольной и экспериментальной групп не выявлено (таблица 29).

Таблица 29 – Сопоставление уровней развития познавательных универсальных учебных действий учащихся контрольных и экспериментальных групп по критерию Пирсона до проведения формирующего этапа эксперимента

	7 классы	8 классы	9 классы (1 год обучения)	9 классы (2 год обучения)
$\chi^2_{крит}$	5,991	5,991	5,991	5,991
$\chi^2_{эмп}$	4,374	2,518	0,953	0,951
Принятая гипотеза	H_0	H_0	H_0	H_0

Так как для каждого класса $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{крит}$ при уровне значимости 0,05, то до проведения эксперимента принимается гипотеза H_0.

После проведения формирующего этапа педагогического эксперимента статистическая обработка результатов итоговой диагностики уровня развития ПУУД учащихся экспериментальных и контрольных групп 7-9 классов подтвердила гипотезу о достоверности различий в распределении уровней развития ПУУД учащихся (таблица 30).

Таблица 30 – Сопоставление уровней развития познавательных универсальных учебных действий учащихся контрольных и экспериментальных групп по критерию Пирсона после проведения формирующего этапа эксперимента

	7 классы	8 классы	9 классы (1 год обучения)	9 классы (2 год обучения)
$\chi^2_{крит}$	5,991	5,991	5,991	5,991
$\chi^2_{эмп}$	6,294	7,408	6,578	10,979
Принятая гипотеза	H_1	H_1	H_1	H_1

Так как для каждого класса $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{крит}$ при уровне значимости 0,05, то после проведения формирующего этапа эксперимента принимается гипотеза H_1. Достоверность различий в распределении учащихся контрольной и экспериментальной групп по уровням развития ПУУД составляет 95%.

Таким образом, результаты педагогического эксперимента подтвердили эффективность разработанной методики развития ПУУД учащихся при обучении понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

В данной главе представлена методика развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии курса алгебры средствами визуализации и результаты ее экспериментального обоснования.

1. Предложена классификация задач по наличию визуального образа в ее структурных компонентах: условии, обосновании, решении или заключении. Если визуальный образ отсутствует во всех указанных компонентах, то такая задача относится к классу не визуализированных. Если же хотя бы один из структурных компонентов содержит визуальный образ, то такая задача относится к классу визуализированных.

2. Уточнена и расширена типология визуализированных задач. В ее основе лежат способы предъявления учебной математической информации, с помощью которых представлены условие и заключение (ответ) задачи. Приведена модель типологии.

3. На основе уровней развития ПУУД создан комплекс визуализированных задач репродуктивного, продуктивного и творческого.

4. Определены основные положения разработанной методики развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии курса алгебры средствами визуализации:

– визуализация процесса обучения понятиям функциональной линии в контексте развития ПУУД предполагает систематическое и целенаправленное использование визуализированных дидактических материалов на каждом из этапов учебного процесса: мотивационно-диагностическом, операционно-исполнительском и рефлексивно-оценочном;

– для развития ПУУД средствами визуализации используются следующие методические приемы: распределение математических объектов по группам, составление модели Фрейер, алгоритмизация информации, перекодирование информации, «дополни рисунок (схему)», «выдели цветом», «заполни таблицу», составление ментальных карт;

– в процессе обучения понятиям функциональной линии целесообразно использовать средства интерактивной компьютерной визуализации, позволяющие учащимся оперировать графическими образами математических понятий и стимулирующими их инициативу в процессе обучения;

– в процессе развития ПУУД следует сделать акцент на когнитивную функцию наглядности;

– содержание визуализированных дидактических материалов (комплекса визуализированных задач и визуальных моделей представления учебной информации) представлено различными сочетаниями способов представления учебной математической информации (аналитический, вербальный и визуальный), ориентировано на различные когнитивные стили учащихся, тем самым способствует развитию выделенных в параграфе 1.1 ПУУД.

5. Раскрыты методические особенности развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии средствами визуализации:

– среди организационных форм обучения, используемых нами во время эксперимента, особо выделены лабораторные работы, как обязательный компонент методики;

– описаны методические приемы развития выделенных ПУУД, использующие средства визуализации: распределение математических объектов по группам, «заполни таблицу»; алгоритмизация информации (составление предписаний для решения класса задач в виде блок-схем и фреймов); составление модели Фрейер и ментальных карт, перекодирование информации, «дополни рисунок (схему)», «выдели цветом».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры является открытой и ищущей свое решение, что обусловливает актуальность диссертационного исследования, цель которого состояла в теоретическом обосновании и разработке методики развития ПУУД учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации.

В ходе исследования полностью подтвердилась его гипотеза, решены поставленные задачи, получены следующие результаты и выводы.

1. На основе анализа психолого-педагогической и научно-методической литературы, а также нормативной документации выделены ПУУД, которые возможно и целесообразно развивать у учащихся основной школы посредством визуализации процесса обучения понятиям функциональной линии алгебры. Определены этапы развития выделенных ПУУД (мотивационно-диагностический, операционно-исполнительский и рефлексивно-оценочный) и уровни развития (репродуктивный, продуктивный, творческий).

2. Предложена классификация задач по наличию визуального образа в ее структурных компонентах. Уточнена и расширена типология визуализированных задач, позволяющая конструировать и использовать в учебном процессе задачи с визуальными образами, представленными в явном или неявном виде в условии и/или требовании задачи, ориентированные на различные когнитивные стили учащихся.

3. На основе уровней развития выделенных ПУУД определены типы визуализированных задач (репродуктивные, продуктивные и творческие), обеспечивающие планомерное развитие ПУУД.

4. Разработана структурно-функциональная модель и апробирована методика развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации. Отличительной чертой методики является использование в процессе обучения в соответствии с выделенными этапами и уровнями развития ПУУД

визуализированных дидактических материалов (комплекса разноуровневых визуализированных задач и визуальных моделей представления учебной математической информации), сконструированных на основе различных сочетаний способов представления учебной математической информации, соответствующих когнитивным стилям учащихся.

5. Критерием динамики уровней развития ПУУД учащихся являются знания и способы действий, усвоенные ими в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры, а средством диагностики являются визуализированные задачи.

6. Экспериментально доказана с привлечением методов математической статистики эффективность разработанной методики развития ПУУД учащихся основной школы в процессе обучения понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации.

Полученные научные результаты могут быть использованы в качестве теоретической и практической основы для проведения дальнейших исследований: организация развития ПУУД посредством визуализации процесса обучения может быть адаптирована к учащимся любого возраста при условии создания соответствующего содержанию комплекса визуализированных дидактических материалов; методы и средства визуализации могут быть расширены и применены в рамках других содержательно-методических линий алгебры и учебных предметов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 287 с.
2. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2013. – 287 с.
3. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 256 с.
4. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. – 17-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 271 с.
5. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016. – 320 с.
6. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2014. – 301 с.
7. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 287 с.
8. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во Просвещение – 5-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 304 с.
9. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2014. – 335 с.

10. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. – 21-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 271 с.
11. Андерсен, Б. Б. Мультимедиа в образовании: информационные технологии в образовании: специализированный учебный курс / Б. Б. Андерсен, К. ван ден Бринк. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Дрофа, 2007. – 223 с.
12. Арнхейм, Р. Визуальное мышление. Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Р. Анхейм ; под ред. Ю. Б. Гипленрейтер, В. В. Петухова. – М. : Изд-во МГУ, 1981. – С. 97-107.
13. Арнхейм, Р. Искусство и визуальное восприятие / Р. Арнхейм. – М. : Прогресс, 1974. – 392 с.
14. Артюхина, М. С. Особенности современных средств обучения в контексте интерактивных технологий / М. С. Артюхина // Вестник РУДН. – 2014. – №2. – С. 76-80.
15. Аршавский, В. Различия, которые нас объединяют / В. Аршавский. – Рига : Пед. центр «Эксперимент», 2001. – 234 с.
16. Асмолов, А. Г. и др. Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе : от действия к мысли : пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская и др.; под ред. А. Г. Асмолова. – М. : Просвещение, 2008. – 151 с.
17. Асмолов, А. Г. и др. Формирование универсальных учебных действий в основной школе : от действия к мысли. Система заданий : пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская и др.; под ред. А. Г. Асмолова. – М. : Просвещение, 2011. – 159 с.
18. Асмолов, А. Г. Системно-деятельностный подход в разработке стандартов нового поколения / А. Г. Асмолов // Педагогика. – 2009. – №4. – С. 18-22.
19. Аствацатуров, Г. О. Три уровня интерактивной мультимедийной разработки [Электронный ресурс] / Г. О. Аствацатуров. – Режим доступа : http://didaktor.ru/tri-urovnya-interaktivnosti-multimedijnoj-razrabotki/.

20. Бабанский, Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1982. – 192 с.

21. Бабанский, Ю. К. Педагогика / под общ. ред. Ю. К. Бабанского. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 1988. – 479 с.

22. Бабанский, Ю. К. Рациональная организация учебной деятельности / Ю. К. Бабанский. – М. : Знание, 1981. – 96 с.

23. Баландина, И. В. Обзор технологий компьютерной визуализации, применяемых для создания учебных наглядных материалов / И. В. Баландина // Теоретические и методологические проблемы современного образования: материалы V международной научно-практической конференции. – М., 2011. – С. 24-28.

24. Балл, Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с.

25. Бархатова, Д. А. Методика визуализированного обучения педагогов-бакалавров профиля «Информатика» дисциплинам предметной подготовки : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Д. А. Бархатова. – Красноярск, 2011. – 26 с.

26. Батуев, А. С. Нейрофизиология коры головного мозга: модульный принцип организации. Курс лекций / А. С. Батуев. – Л. : Изд-во Ленингр. Ун-та, 1984. – 216 с.

27. Башмаков, М. И. Информационная среда обучения / М. И. Башмаков, С. Н. Поздняков, Н. А. Резник. – Спб. : Свет, 1997. – 400 с.

28. Башмаков, М. И. Развитие визуального мышления на уроках математики / М. И. Башмаков, Н. А. Резник // Математика в школе. – 1991. – №1. – С. 4-8.

29. Берсиров, Б. М. Предикаты принципа наглядности и качество их реализации в современной педагогике / Б. М. Берсиров, А. Б. Бгуашев, К. И. Бузаров, К. Д. Чермит // Вестник Адыгейского государственного университета. – 2014. – №4. – С. 90-95.

30. Беспалько, В. П. Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько. – М. : Педагогика, 1989. – 192 с.

31. Богатырев, А. И. Теоретические основы педагогического моделирования: сущность и эффективность [Электронный ресурс] / А. И. Богатырев, И. М. Устинова. – Режим доступа: http://www.rusnauka.com/SND/Pedagogica/2_bogatyrev%20a.i..doc.htm.

32. Боженкова, Л. И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении алгебре / Л. И. Боженкова. – М. : Лаборатория знаний, 2016. – 243 с.

33. Боженкова, Л. И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии / Л. И. Боженкова. – 2-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 205 с.

34. Болтянский, В. Г. Формула наглядности – изоморфизм плюс простота / В. Г. Болтянский // Советская педагогика. – 1970. – №5. – С. 46-60.

35. Большой психологический словарь / под ред. В. П. Зинченко, Б. Г. Мещерякова, 2008. – 672 с.

36. Бондаревская, Е. В. Личностно-ориентированное образование: опыт разработки парадигмы / Е. В. Бондаревская. – Ростов-на-Дону : Изд-во РГПУ, 1997. – 264 с.

37. Брагина, Н. Н. Функциональные асимметрии человека / Н. Н. Брагина, Т. А. Доброхотова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Медицина, 1988. – 240 с.

38. Брыксина, О. Ф. Информационно-коммуникационные технологии в начальной школе : учеб. для студ. учреждений высш. образования / О. Ф. Брыксина, Е. С. Галанжина, М. А. Смирнова. – М. : Издательский центр «Академия», 2015. – 208 с.

39. Васенина, Е. А. Визуализация информации и создание разнообразных информационных продуктов с помощью инструментальных информационных сред: анализ образовательных возможностей / Е. А. Васенина // Информатика и образование. – 2012. – №6 (235). – С. 79-83.

40. Веккер, Л. М. Психика и реальность: единая теория психических процессов / Л. М. Веккер. – М. : Смысл, 1998. – 685 с.

41. Вербицкий, А. А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход / А. А. Вербицкий. – М. : Высш. шк., 1991. – 207 с.
42. Воровщиков, С. Г. Развитие универсальных учебных действий: внутришкольная система учебно-методического и управленческого сопровождения / С. Г. Воровщиков, Е. В. Орлова. – М. : Прометей, 2012. – 290 с.
43. Выготский, Л. С. Избранные педагогические исследования / Л. С. Выготский. – М., 1956. – 519 с.
44. Гавронская, Ю. Ю. «Интерактивность» и «интерактивное обучение» / Ю. Ю. Гавронская // Высшее образование в России. – 2008. – №7. – С. 101-104.
45. Гальперин, П. Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка / П. Я. Гальперин. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – 45с.
46. Гельфман, Э. Г. Формирование универсальных учебных действий в процессе создания учебного проекта на уроках математики / Э. Г. Гельфман, А. Г. Подстригич // Вестник Томского государственного университета . – 2012. – №8. – С. 160-166.
47. Гильберт, Д. Наглядная геометрия / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен / пер. с нем. С. А. Каменецкого. – М.-Л. : ОНТИ, 1936. – 304 с.
48. Глезер, В. Д. Зрение и мышление. – Л. : Наука, 1985. – 246 с.
49. Глинский, Б. А. Моделирование как метод научного познания / Б. А. Глинский, Б. С. Грязнов, Е. А. Никитин. – М. : Изд-во МГУ, 1965. – 280 с.
50. Грановская, Р. М. Элементы практической психологии / Р. М. Грановская. – Л. : Издательство Ленинградского университета, 1988. – 560 с.
51. Грегори, Р. Л. Глаз и мозг. Психология зрительного восприятия [пер. с англ.] / Р. Л. Грегори. –М. : Прогресс, 1970. – 272 с.
52. Грегори, Р. Л. Разумный глаз [пер. с англ.] / Р. Л. Грегори. – М. : Мир, 1972. – 216 с.

53. Гриндер, М. Исправление школьного конвейера или НЛП в педагогике / М. Гриндер. – М. : Независимая ассициация психологов-практиков, 1995. – 77 с.

54. Гурина, Р. В. Фреймовое представление знаний : Монография / Р. В. Гурина, Е. Е. Соколова. – М. : Народное образование; НИИ школьных технологий, 2005. – 176 с.

55. Давыдов В. В. Психологические основы организации учебной деятельности, опосредованной использованием компьютерных систем / В. В. Давыдов, В. В. Рубцов, А. Г. Крицкий // Психологическая наука и образование. – 1996. – №2. – С. 68-72.

56. Давыдов, В. В. Понятие деятельности как основания исследований научной школы Л. С. Выготского / В. В. Давыдов // Вопросы психологии. – 1996. – №5. – С. 7-20.

57. Давыдов, В. В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования / В. В. Давыдов. – М. : Педагогика, 1986. – 240 с.

58. Давыдов, В. В. Учебная деятельность: Состояние и проблемы исследования / В. В. Давыдов // Вопросы психологии. – 1991. – №6. – С. 5-11.

59. Давыдов, В. В. Формирование учебной деятельности школьников / В. В. Давыдов [и др.] – М. : Педагогика, 1982. – 216 с.

60. Далингер, В. А. Когнитивно-визуальный подход к обучению математике: учеб. пособие / В. А. Далингер, О. О. Князева. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2004. – 344 с.

61. Далингер, В. А. Наглядные образы математических объектов как предмет и средство изучения: учебное пособие / В. А. Далингер. – Омск : Изд-во ООО «Амфора», 2013. – 75 с.

62. Далингер, В. А. Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода / В. А. Далингер // Вестник Брянского государственного университета. – 2011. –№1. – С. 297-303.

63. Далингер, В. А. Теоретические основы когнитивно-визуального подхода к обучению математике: Монография / В. А. Далингер. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2006. – 144 с.

64. Далингер, В. А. Формирование визуального мышления у учащихся в процессе обучения математике / В. А. Далингер. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 1999. – 157 с.

65. Дахин, А. Н. Модели и цели общего образования / А. Н. Дахин // Школьные технологии. – 2012. – №3. – С. 28-34.

66. Демина, Е. В. Информационная интерактивная среда школы как средство обеспечения качественных образовательных услуг : дис. … канд. пед. наук: 13.00.01 / Е. В. Демина. – Томск, 2016. – 218 с.

67. Деятельность: теории, методология, проблемы / Сост. И. Т. Касавин. – М. : Политиздат, 1990. – 366 с.

68. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики / Под ред. М. Н. Скаткина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1982. – 319 с.

69. Дружинин, В. Н. Психологическая диагностика способностей: Теоретические основы / В. Н. Дружинин. – Саратов : Изд-во СГУ, 1990. – 160 с.

70. Евдокимов, В. И. Использование средств наглядного обучения в условиях проблемно-поисковой деятельности учащихся: автореф. дис. … канд. пед. наук : / В. И. Евдокимов. – Киев, 1973. – 17 с.

71. Ежова, Н. М. Визуальная организация информации в компьютерных средствах обучения (на примере математики): автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Н. М. Ежова. – М., 2004. – 19 с.

72. Елисеева, Д. С. Познавательные универсальные учебные действия младшего школьника как педагогический феномен / Д. С. Елисеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Образование». Педагогические науки. – 2014. – №4-6. – С. 16-26.

73. Емелин, А. В. Изучение иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы с использованием самоподобных визуальных моделей: автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / А. В. Емелин. – Нижний Новгород, 2012. – 23 с.

74. Епишева, О. Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: Книга для учителя / О. Б. Епишева. – М. : Просвещение, 2003. – 223 с.

75. Епишева, О. Б. Технология обучения математике на основе формирования приемов учебной деятельности учащихся: Теоретические основы / О. Б. Епишева. – Тобольск, 1998. – 158 с.

76. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Кн. для учителя / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М. : Просвещение, 1990. – 128 с.

77. Ефремова, Д. Д. Реализация принципа наглядности при изучении математики в старших классах средней школы : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Д. Д. Ефремова. – Москва, 2004. – 17 с.

78. Жуковский, В. И. Визуальное мышление в структуре научного познания / В. И. Жуковский, Д. В. Пивоваров, Р. Ю. Рахматуллин. – Красноярск : Изд-во Краснояр. ун-та, 1988. – 180 с.

79. Жуковский, В. И., Пивоваров, Д. В. Зримая сущность (визуальное мышление в изобразительном искусстве) / В. И. Жуковский, Д. В. Пивоваров. – Свердловск : УрГУ, 1986. – 130 с.

80. Заболотский, В. П. Математические модели в управлении : учебное пособие / В. П. Заболотский, А. А. Оводенко, А. Г. Степанов. – СПб. : СПбГУАП, 2001. – 196 с.

81. Зайцева, Е. Н. Информационно-обучающая среда как средство развития самостоятельной работы студентов при обучении иностранному языку : дис. … канд. пед. наук: 13.00.08 / Е. Н. Зайцева. – Москва, 2002. – 204 с.

82. Захаров, А. И. Неврозы у детей / А. И. Захаров. – СПб. : Дельта, 1996. – СПб. : 479 с.

83. Зинченко, В. П. Образ и деятельность / В. П. Зинченко. – М. : Издательство «Институт практической психологии», Воронеж : НПО «МОДЭК», 1997. – 608 с.

84. Зинченко, В. П. Современные проблемы образования и воспитания / В. П. Зинченко // Вопросы философии. – 1973. – №11. – С. 207-215.

85. Зинченко, П. И. Непроизвольное запоминание / П. И. Зинченко. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1961. – 562 с.

86. Иванов, О. А. Системы компьютерной алгебры на уроках математики в школе / О. А. Иванов // Математика в школе. – 2012. – №3. – С. 39-43.

87. Иванова, О. А. Межпредметные понятия и формирование универсальных учебных действий при изучении математики / О. А. Иванова // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2013. – №161. – С. 215-219.

88. Иванова, О. А. Обучение функциональной линии на уроках математики в 7-11 классах на основе метаметодического подхода: автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / О. А. Иванова. – Санкт-Петербург, 2013. – 22 с.

89. Иванова, Т. А. Теоретические основы обучения математике в средней школе : учебное пособие / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Т. П. Григорьева, Л. И. Кузнецова; под общ. ред. Т. А. Ивановой. – Н. Новгород : НГПУ, 2003. – 320 с.

90. Иванчук, Н. В. Использование визуальных средств обучения при формировании и актуализации математических знаний и навыков у учащихся основной школы : автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Н. В. Иванчук. – М., 2003. – 17 с.

91. Ижденева, И. В. Некоторые особенности визуализации учебной информации / И. В. Ижденева // Science Time. – 2015. – №1 (13). – С. 167-169.

92. Ильюченок, Р. Ю. Взаимодействие полушарий мозга у человека: Установка, обработка информации, память / Р. Ю. Ильюченок, А. Л. Финкельберг, А. Л. Ильюченок [и др.]. – Новосибирск: Наука. Сиб. Отд-ние, 1989. – 169 с.

93. Инструментальная дидактика и дидактический дизайн: теория, технология и практика многофункциональной визуализации знаний : материалы Первой всероссийской научно-практической конференции, Москва – Уфа, 28 января 2013 г. : Издательство БГПУ им. М. Акмуллы, 2013. – 266 с.

94. Ительсон, Л. Б. Учебная деятельность. Ее источники, структура и условия / Л. Б. Ительсон // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов периода 1964-1980 гг. – М. : Изд-во Моск. Ун-та, 1981. – С. 79-83.

95. Кабанова-Меллер, Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Е. Н. Кабанова-Меллер. – М. : Знание, 1981. – 96 с.

96. Капустина, Т. В. Компьютерная система Mathematica 3.0 в вузовском образовании / Т. В. Капустина. – М. : Изд-во МПУ, 2000. – 153 с.

97. Карпенко, А. В. Соотношение наглядности и моделирования в обучении [Электронный ресурс] / А. В. Карпенко. – Режим доступа: http://school2100.com/upload/iblock/c57/c57fc454ea01f3f5a0bf55c13e79759a.pdf.

98. Картежников, Д. А. Визуальная учебная среда как условие развития математической компетентности студентов экономических специальностей : дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Д. А. Картежников. – Омск, 2007. – 196 с.

99. Князева, О. О. Реализация когнитивно-визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа : дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / О. О. Князева. – Омск, 2003. – 200 с.

100. Ковалева, С. В. Использование фреймовой модели структурирования учебной информации в практикуме по химии / С. В. Ковалева, И. А. Шабанова, С. Е. Чиркова // Вестник ТГПУ. – 2012. – №2 (117). – С. 152-157.

101. Коджаспирова Г. М. Словарь по педагогике / Г. М. Коджаспирова, А. Ю. Коджаспиров. – Москва : ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д : Издательский центр «МарТ», 2005. – 448 с.

102. Колга, В. А. Дифференциально-психологичесоке исследование когнитивного стиля и обучаемости : дис. … канд. психол. наук: 13.00.02 / В. А. Колга. – Л. : ЛГУ, 1976. – 190 с.

103. Колодочка, Т. Н. Дидактические возможности фреймовой технологии / Т. Н. Колодочка // Школьные технологии. – 2003. – №3. – С. 27-30.

104. Краевский, В. В. Предметное и общепредметное в образовательных стандартах / В. В. Краевский, А. В. Хуторской // Педагогика. – 2003. – №2. – С. 3-10.

105. Куликова, Н. Ю. Методика формирования готовности будущего учителя информатики к использованию интерактивных средств обучения : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. Ю. Куликова. – Волгоград, 2014. – 181 с.

106. Кулюткин, Ю. Н. Психология обучения взрослых / Ю. Н. Кулюткин. – М. : Просвещение, 1985. – 128 с.

107. Куприянова, М. А. Составление математических задач как инструмент развития универсальных учебных действий на уроках математики основной школы / М. А. Куприянова // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2012. – №150. – С. 207-211.

108. Кучурин, В. В. Электронные (цифровые) наглядные средства обучения на основе современных компьютерных технологий / В. В. Кучурин // НМЦ-ИНФО Информационный бюллетень. – 2009. – №7-8 (24-25). – С. 19-22.

109. Ланг, А. П. О понятии наглядности и ее роли в познании / А. П. Ланг. – Таллин, 1967. – 83 с.

110. Лаппо, Л. Д. Основной государственный экзамен. 9 класс. Математика. 3 модуля. Тематические тестовые задания / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. – М. : Издательство «Экзамен», 2016. – 71 с.

111. Лапчик, М. П. Информатика и информационные технологии в системе общего и педагогического образования : монография / М. П. Лапчик. – Омск : Издательство ОмГПУ, 1999. – 294 с.

112. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность / А. Н. Леонтьев. – М., 1975.
113. Леонтьев, А. Н. Мышление: / А. Н. Леонтьев // Философская энциклопедия: в 5 т. Т. 4. – М. : Советская энциклопедия, 1970. – С. 435-437.
114. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М. : Педагогика, 1981. – 184 с.
115. Лернер, И. Я. Качества знаний учащихся: какими они должны быть? / И. Я. Лернер. – М. : Знание, 1978. – 64 с.
116. Лернер, И. Я. Современная дидактика: теория – практике / И. Я. Лернер, И. К. Журавлев. – М. : Изд. ИТП и МИОРАО, 1993. – 288 с.
117. Леутин, В. П. Функциональная асимметрия мозга: мифы и действительность / В. П. Леутин, Е. И. Николаева. – СПб. : Речь, 2005. – 368 с.
118. Ливер, Б. Л. Обучение всего класса / Бетти Лу Ливер. – М. : Новая школа, 1995. – 48 с.
119. Литовченко, О. В. Познавательные умения учащихся: проблемы формирования в современной школе / О. В. Литовченко // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2012. – №153-1. – С. 103-110.
120. Лозинская, А. М. Фреймовое структурирование содержания обучения физике в рамках модульной технологии / А. М. Лозинская // Педагогическое образование в России. – 2014. – №1. – С. 80-89.
121. Лошкарева, Н. А. Развитие общих учебных умений и навыков школьников / Н. И. Лошкарева // Воспитание школьников. – 1984. – №4. – С. 4-69.
122. Лошкарева, Н. А. Формирование системы общих учебных умений и навыков школьников: методические рекомендации для ФПК директоров и завучей школ / Н. А. Лошкарева. – Москва : МГПИ, 1982. – 88 с.
123. Лурия, А. Р. Основы нейропсихологии / А. Р. Лурия. – М. : Издательство Моск. Ун-та, 1973. – 374 с.

124. Лурия, А. Р. Ум мнемониста // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / А. Р. Лурия ; под ред. Ю. Б. Гипленрейтер, В. В. Петухова. – М. : Изд-во МГУ, 1981. – С. 11-35.

125. Магалашвили, В. В. Ориентированная на цели визуализация знаний [Электронный ресурс] / В. В. Магалашвили, В. Н. Бодров // Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society). – 2008. – V.11. – №1. – Режим доступа: http://ifets.ieee.org/russian/depositary/v11_i1/html/11.htm.

126. Маслов, В. М. Наглядность и визуализация в парадигмальном и гуманистическом планах [Электронный ресурс] / В. М. Маслов // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – №2. – Режим доступа: www.science-education.ru/116-12460.

127. Матросов, В. Л. Интенсивные педагогические и информационные технологии. Организация управления обучением / В. Л. Матросов, В. А. Трайнев, И. В. Трайнев. – М. : Прометей, 2000. – 354 с.

128. Машбиц, Е. И. Компьютеризация обучения: проблемы и перспективы / Е. И. Машбиц. – М. : Педагогика, 1986. – 80 с.

129. Медведенко, Н. В. Фрейм как базовое понятие педагогических технологий / Н. В. Медведенко // Сибирский педагогический журнал. – 2011. – №.1 – С. 102-107.

130. Менчинская, Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника / Н. А. Менчинская. – М. : Педагогика, 1989. – 224 с.

131. Менчинская, Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника: Избр. психол. труды. – М. : Педагогика, 1982. – 218 с.

132. Мерзляк, А. Г. Алгебра : 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2015. – 272 с.

133. Мерзляк, А. Г. Алгебра : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2013. – 256 с.

134. Мерзляк, А. Г. Алгебра : 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2014. – 304 с.

135. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.

136. Милованов, Н. Ю. Методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. Ю. Милованов.– Волгоград, 2016. – 161 с.

137. Миннегалиева, Ч. Б. Создание интерактивных моделей при помощи Wolfram Programming Cloud / Ч. Б. Миннегалиева // Математика в школе. – 2015. – №7. – С. 32-36.

138. Минский, М. Фреймы для представления знаний : пер. с англ. / М. Минский. – М. : Энергия, 1979. – 152 с.

139. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 17-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 175 с.

140. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 14-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2012. – 175 с.

141. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. – 14-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2012. – 280 с.

142. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2010. – 224 с.

143. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова,

Т. Н. Мишустина и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2010. – 223 с.

144. Мордкович, А. Г. Преподавание алгебры в 8-9 классах по учебникам А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева : метод. пособие для учителя / А. Г. Мордкович. – 2-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2014. – 128 с.
145. Муравин, Г. К. Алгебра. 7 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2013. – 285 с.
146. Муравин, Г. К. Алгебра. 8 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2013. – 254 с.
147. Муравин, Г. К. Алгебра. 9 кл. : учебник / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2014. – 315 с.
148. Непрокина, И. В. Метод моделирования как основа педагогического исследования / И. В. Непрокина // Теория и практика общественного развития. – 2013. – №7. – С. 61-64.
149. Неудахина, Н. А. Разработка когнитивных визуальных моделей учебной информации для активизации мышления студентов ВТУЗа / Н. А. Неудахина, О. С. Родя // Ползуновский вестник. – 2006. – №3. – С. 156-164.
150. Николаенко, Н. Н. Творчество и мозг / Н. Н. Николаенко. – СПб. : Ин-т спец. педагогики и психологии, 2001.
151. Новиков, А. М. Построение образовательных моделей. Как строится образовательная модель? / А. М. Новиков, Д. А. Новиков // Инновационные проекты и программы в образовании. – 2010. – №1. – С. 3-9.
152. Новиков, А. М. Методология учебной деятельности / А. М. Новиков. – М. : Издательство «Эгвес», 2005. – 176 с.
153. Новиков, Д. А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи) / Д. А. Новиков. – М. : МЗ-Пресс, 2004. – 67 с.
154. Новикова, Л. Ю. Использование предметного опыта учащихся при обучении математике как условие формирования универсальных учебных

действий / Л. Ю. Новикова // Вестник Томского государственного педагогического университета. – 2011. – №10. – С. 141-144.

155. Нуридинов, Л. Н. О сущности понятия «наглядность» при проблемном обучении / Л. Н. Нуридинов // Новые исследования в пед. науках. – 1976. – №2. – С. 90-102.
156. Павлова, О. А. Визуальная среда обучения в процессе музыкального развития младших школьников: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.01, 13.00.02 / О. А. Павлова. – М., 2004. – 20 с.
157. Панфилов, М. А. Педагогическое моделирование в учебном процессе вуза / М. А. Панфилов, В. М. Панфилова // Интеграция образования. – 2004. – №1. – С. 32-37.
158. Педагогика : учебник / Л. П. Крившенко [и др.]. – М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2004. – 432 с.
159. Педагогика : учеб. пособие для студентов пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, А. И. Мищенко, Е. Н. Шиянов. – 4-е изд. – М. : Школьная Пресса, 2004. – 512 с.
160. Педагогический словарь: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Загвязинский, А. Ф. Закирова, Т. А. Строкова и др. ; под ред. В. И. Загвязинского, А. Ф. Закировой. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 352 с.
161. Пекшева, А. Г. Использование средств ИКТ для интерактивной когнитивной визуализации учебного материала / А. Г. Пекшева // Информатика и образование. – 2012. – №10. – С. 7-10.
162. Перминова, Л. М. Взаимосвязь стандартов первого и второго поколения / Л. М. Перминова // Народное образование. – 2010. – № 7. – С. 209-216.
163. Пидкасистый, П. И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении: Теоретико-экспериментальное исследование / П. И. Пидкасистый. – М. : Педагогика, 1980. – 240 с.
164. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учебное пособие / Под ред. проф. В. Д. Шадрикова. –М. : Гардарики, 2002. – 383 с.

165. Пойа, Дж. Как решить задачу? / Дж. Пойа. –Львов : Квантор, 1991. – 216 с.
166. Поляков, В. М. Функциональная асимметрия мозга в онтогенезе (обзор литературы отечественных и зарубежных авторов) / В. М. Поляков, Л. И. Колесников // Бюллетень ВСНЦ СО РАМН. – 2006. – №5(51). – С. 322-331.
167. Полянская, А. В. Генезис проблемы компьютерной визуализации учебной информации в педагогическом знании / А. В. Полянская // Вестник РУДН. – 2013. – №1. – С. 21-27.
168. Попадьина, С. Ю. Реализация функционально-графической линии в персонализированном обучении общеобразовательному курсу математики с использованием компьютерной системы MathCAD : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / С. Ю. Попадьина. – Москва, 2009. – 22 с.
169. Пурышева, Н. С. И др. О метапредметности, методологии и других универсалиях / Н. С. Пурышева, Н. В. Ромашкина, О. А. Крысанова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2012. – №1. – С. 11-17.
170. Пустовит, Е. А. Развитие универсальных учебных действий учащихся основной школы при решении алгебраических задач с модулем : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Е. А. Пустовит. – Чита, 2015. – 196 с.
171. Резник, Н. А. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления: автореф. дис. … докт. пед. наук : 13.00.02 / Н. А. Резник. – Москва, 1997. – 31 с.
172. Роберт, И. В. Информатизация образования как новая область педагогического знания / И. В. Роберт // Человек и образование. – 2012. – №1 (30). – С. 14-18.
173. Роберт, И. В. Теория и методика информатизации образования (психолого-педагогический и технологический аспекты) / И. В. Роберт. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 398 с.
174. Рок, И. Введение в зрительное восприятие / И. Рок ; под ред. Б. М. Величковского, В. П. Зинченко. – М. : Педагогика, 1980. – 312 с.

175. Ромадина, О. Г. Интерактивные ресурсы как средство формирования универсальных учебных действий учащихся / О. Г. Ромадина, М. С. Соловьева // Вестник КГПУ им. В. П. Астафьева. – 2015. – №1(31). – С. 69-73.
176. Ротенберг, В. С. Мозг. Обучение. Здоровье: Кн. для учителя / В. С. Ротенберг, С. М. Бондаренко. – М. : просвещение, 1989. – 239 с.
177. Рубинштейн, С. Л. Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – СПб. : Питер, 2000. – 720 с.
178. Салмина, Н. Г. Знак и символ в обучении / Н. Г. Салмина. – М. : Изд-во Моск. ун-та,1988. – 288 с.
179. Сатьянов, П. Г. Задачи графического содержания при обучении алгебре и началам анализа / П. Г. Сатьянов // Математика в школе. – 1987. – №1. – С. 56-60.
180. Селевко, Г. К. Энциклопедия образовательных технологий: В 2 т. Т. 1 / Г. К. Селевко. – М. : НИИ школьных технологий, 2006. – 816 с.
181. Сериков, В. В. Личностно-развивающая образовательная модель в аспекте модернизации российского образования / В.. В. Сериков // Модернизация педагогического образования в Сибири: проблемы и перспективы. Ч. 1 : Сборник научных статей. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. – С. 155-172.
182. Сластенин, В. А. Педагогика : Учебное пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов. – М. : Издательский центр «Академия», 2002. – 576 с.
183. Смирнов, С. Д. Психология образа: проблема активности психического отражения / С. Д. Смирнов. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – 231 с.
184. Смолянинова, О. Г. Развитие методической системы формирования информационной и коммуникативной компетентности будущего учителя на основе мультимедиа-технологий: дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / О. Г. Смолянинова. – Санкт-Петербург, 2002. – 504 с.
185. Современный словарь по педагогике / сост. Рапацевич Е. С. – Мн. : Современное слово, 2001. – 928 с.

186. Соловьева, М. С. Построение системы задач для формирования универсальных учебных действий в процессе изучения информатики и математики / М. С. Соловьева // Вопросы современной науки и практики. – 2012. – №4-42. – С. 136-143.

187. Солсо, Р. Когнитивная психология. – СПб. : Питер, 2002. – 592 с.

188. Спрингер, С., Дейч, Г. Левый мозг, правый мозг: пер. с англ. / С. Спрингер, Г. Дейч. – М. : Мир, 1983. – 256 с.

189. Суходольский, Г. В. Структурно-алгоритмический анализ и синтез деятельности. – Л. : ЛГУ, 1976. – 120 с.

190. Сюсюкина, И. Е. Формирование универсальных учебных действий младших школьников в оценочной деятельности: автореф. дис. … канд. пед. наук / Сюсюкина И. Е. – Магнитогорск, 2010. – 23 с.

191. Талызина, Н. Ф. Теория программированного обучения / Н. Ф. Талызина. – М. : Знание, 1975. – 51 с.

192. Талызина, Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н. Ф. Талызина. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 344 с.

193. Талызина, Н. Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников / Н. Ф. Талызина. – М. : Просвещение, 1988. – 175 с.

194. Татьченко, Д. В. Развитие общеучебных умений школьников / Д. В. Татьянченко, С. Г. Воровщиков // Народное образование. – 2003. – №8. – С. 115-127.

195. Теплоухова, Л. А. Формирование универсальных учебных действий учащихся основной школы средствами проектной технологии : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.01 / Л. А. Теплоухова. – Ижевск, 2012. – 26 с.

196. Титова, С. В. Интерактивность как основное дидактическое свойство учебного процесса, основанного на применении Интернет-технологий / С. В. Титова // Россия и Запад: Диалог культур. Материалы X международной научной конференции Россия-Запад: диалог культур 28-30 ноября 2003 г. — Т. 2 из 12. — Москва : Центр по изучению взаимодействия культур, 2004.

197. Тихобаев, А. Г. Интерактивные компьютерные технологии обучения / А. Г. Тихобаев // Вестник ТГПУ. – 2012. – №8 (123). – С. 81-84.

198. Трухан, И. А. Визуализация учебной информации в обучении математике, ее значение и роль / И. А. Трухан, Д. А. Трухан // Успехи современного естествознания. – 2013. – №10. – С. 113-115.

199. Туканова, Л. Е. Реализация принципа наглядности в современном педагогическом образовании : дис. … канд. пед. наук : 13.00.01 / Л. Е. Туканова. – Мурманск, 2010. – 177 с.

200. Усова, А. В. Формирование у учащихся учебных умений / А. В. Усова, А. А. Бобров. – М. : Знание, 1987. – 80 с.

201. Ушаков, А. А. Развитие исследовательской компетентности учащихся общеобразовательной школы в условиях профильного обучения : дис. … канд. пед. наук : 13.00.01 / А. А. Ушаков. – Майкоп, 2008. – 190 с.

202. Уэно, Х. Представление и использование знаний / Х. Уэно, М. Исидзука. – М. : Мир, 1989. – 326 с.

203. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. – М. : Просвещение, 2011. – 48 с.

204. Филиппова, Д. А. Задачи на перекодирование как средство, способствующее пониманию учебного материала при изучении алгебры в основной школе: автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Д. А. Филиппова. – Санкт-Петербург, 2012. – 23 с.

205. Фирер, А. В. GeoGebra как средство визуализации процесса обучения алгебре / А. В. Фирер, Н. В. Иванова // Информационные технологии в математике и математическом образовании. Материалы V Всеросс. научно-методической конф. – Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2016. – С.87-91.

206. Фирер, А. В. Визуализация учебной информации как средство развития познавательных универсальных учебных действий школьников при обучении алгебре / А. В. Фирер // Вестник КГПУ им. В. П. Астафьева. – 2016. – №2(36). – С. 231-235.

207. Фирер, А. В. Визуализированные алгебраические задачи в контексте развития познавательных универсальных учебных действий / А. В. Фирер // Проблемы современного педагогического образования. Сер. : Педагогика и психология : Ялта : РИО ГПА, 2017. – Вып. 56. – Ч. 8. – С. 247-255.

208. Фирер, А. В. Визуализированные задачи по алгебре. Функции и графики : учеб. пособие / А. В. Фирер. – Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2017. – 272 с.

209. Фирер, А. В. Интерактивные визуализированные упражнения в обучении алгебре / А. В. Фирер, Л. Б. Новикова, И. А. Падалко // Проблемы теории и практики обучения математике. Сб. науч. работ, представляемых на Международ. науч. конф. «70 Герценовские чтения». – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2017. – С. 99-102.

210. Фирер, А. В. Интерактивные средства визуализации в обучении алгебре / А. В. Фирер // Проблемы теории и практики обучения математике. Сб. науч. работ, представляемых на Международ. науч. конф. «69 Герценовские чтения». – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. – С.156-159.

211. Фирер, А. В. Использование динамической системы математики GeoGebra как средства визуализации в процессе обучения алгебре [Электронный ресурс] / А. В. Фирер, Н. В. Иванова, И. А. Падалко // Педагогический поиск: от профессионального мастерства педагога к образовательным результатам учащихся. Сб. методических материалов по итогам науч.-практ. конференции «Городские педагогические чтения». – Лесосибирск, 2017. – Режим доступа: http://www.mimc.org.ru/ru-RU/metodicheskie-sobytiya.

212. Фирер, А. В. Использование средств информационно-коммуникационных технологий в визуализации процесса обучения алгебре / А. В. Фирер // Вестник ТГПУ (TSPU Bulletin). – 2018. – №1(190). – С. 155-163.

213. Фирер, А. В. Методика развития познавательных учебных действий учащихся при помощи средств визуализации в процессе обучения алгебре / А. В. Фирер // Научное мнение. – 2017. – №11. – С. 82-87.

214. Фирер, А. В. Модель Фрейер как средство развития познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения функциональным понятиям / А. В. Фирер, Н. В. Иванова, И. А. Падалко // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты : материалы V Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2017 г. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева. – Красноярск, 2017. – С. 105-110.

215. Фирер, А. В. Реализация принципа наглядности посредством создания интерактивных демонстраций в системе Mathematica / А. В. Фирер, Т. Ю. Войтенко // Проблемы теории и практики обучения математике. Сб. научных работ по материалам Междунар. научн. конф. – СПб. : Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2012. – С.307-311.

216. Фирер, А. В. Система Mathematica при изучении некоторых математических дисциплин / Т. Ю. Войтенко, А. В. Фирер // Информационные технологии в математике и математическом образовании: Материалы III Всеросс. научно-методической конф. – Красноярск : Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева , 2014. – С.12-16.

217. Фирер, А. В. Совершенствование процесса развития познавательных универсальных учебных действий учащихся средствами визуализации / А. В. Фирер // Дискуссия. – 2017. – №10(84). – С. 104-110.

218. Фирер, А. В. Формирование познавательных универсальных учебных действий при обучении алгебре / А. В. Фирер // Педагогика и психология: тенденции и перспективы развития. Сб. науч. трудов по итогам международной научно-практической конференции. – Волгоград: ИЦРОН. – 2015. – № 2. – С.76-78.

219. Фреймовые опоры. Методическое пособие / Р. В. Гурина, Е. Е. Соколова, О. А. Литвинко, А. М. Тарасевич, С. И. Федорова, А. Д. Уадилова / Под ред. Р. В. Гуриной. – М. : НИИ школьных технологий, 2007. – 96 с.

220. Фридман, Л. М. Наглядность и моделирование в обучении / Л. М. Фридман. – М. : Знание, 1984. – 79 с.

221. Харламов, И. Ф. Педагогика в вопросах и ответах : Учебное пособие / И. Ф. Харламов. – М. : Гардарики, 2001. – 256 с.

222. Хирьянова, И. С. Использование интерактивных схемознаковых моделей представления учебного материала в процессе обучения младших школьников / И. С. Хирьянова // Информатика в школе. – 2014. – №5 (98). – С. 34-39.

223. Холодная, М. А. Когнитивные стили. О природе индивидуального ума / М. А. Холодная. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2004. – 384 с.

224. Хомская, Е. Д. Нейропсихология / Е. Д. Хомская. – М. : Изд-во МГУ, 1987. – 288 с.

225. Хуторской, А. В. Метапредметное содержание образования с позиций человекосообразности. [Электронный ресурс] // Вестник Института образования человека; 02.03.2012 г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://eidos-institute. ru/journal/2012/0302.htm.

226. Цукарь, А. Я. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием образного мышления : дис. … докт. пед. наук : 13.00.02 / А. Я. Цукарь. – Новосибирск, 1999. – 433 с.

227. Чопова, С. В. Формирование познавательных универсальных учебных действий учащихся профильных классов: автореф. дис. … канд. пед. наук 13.00.01 / С. В. Чопова. – Москва, 2013. – 25 с.

228. Чошанов, М. А. Визуальная математика / М. А. Чошанов. – Казань : Абак, 1997. – 157 с.

229. Чутко, Н. Я. Учебная деятельность: знакомая и незнакомая. От теории – к практике обучения / Н. Я. Чутко. – Самара : Издательство «Учебная литература», 2005. – 128 с.

230. Шеховцова, Д. Н. Использование компьютерных технологий для визуализации математического знания / Д. Н. Шеховцова // Вестник ТГПУ. – 2010. – №10. – С. 99-103.

231. Широкова, Е. А. Наглядные динамические образы понятий математического анализа / Е. А. Широкова // Мир науки, культуры, образования. – 2009. – №1(13). – С. 182-184.

232. Шкуратова, И. П. Когнитивные стили как регуляторы мировосприятия личности / И. П. Шкуратова // Первая российская конференция по когнитивной науке. Тезисы докладов. – Казань : КГУ, 2004. – С. 256-257.

233. Штофф, В. А. Моделирование и философия / В. А. Штофф. – М. : Наука, 1966. – 301 с.

234. Щукина, Г. И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе / Г. И. Щукина. – М. : Просвещение, 1979. – 160 с.

235. Щукина, Г. И. Роль деятельности в учебном процессе: Кн. для учителя / Г. И. Щукина. – М. : Просвещение, 1986. – 144 с.

236. Щукина, Н. В. Наглядность как средство управления учебно-познавательной деятельностью студентов при обучении математическому анализу : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Щукина Н. В. – Омск, 2005. – 206 с.

237. Эльконин, Д. Б. Психологические вопросы формирования учебной деятельности в младшем школьном возрасте / Д. Б. Эльконин // Вопросы психологии обучения и воспитания / Под ред. Г. С. Костюка, П. Р. Чалматы. – Киев, 1961. – С. 12-14.

238. Эльконин, Д. Б. Психология обучения младших школьников / Д. Б. Эльконин // Избранные психологические труды. – М. : Педагогика, 1989. – 560 с.

239. Эльконин, Д. Б. Формирование учебной деятельности школьников / Под ред. В. В. Давыдова, И. Ломпшера, А. К. Марковой. – М. : Педагогика, 1982. – 216 с.

240. Якиманская, И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе / И. С. Якиманская. – М. : Сентябрь, 1996. – 96 с.

241. Яковлева, Е. В. Разработка и применение специальных заданий и задач, направленных на формирование универсальных учебных действий /

Е. В. Яковлева, Т. Г. Макусева // Вестник Казанского технологического университета. – 2010. – №12. – С. 383-388.

242. Frayer, D. A Schema for Testing the Level of Cognitive Mastery / D. Frayer, W. C. Frederick, H. J. Klausmeier. – WI . : Wisconsin Center for Education Research, 1969.
243. Jonassen, D. H. Computers as Mindtools for Schools: Engaging Critical Thinking (2nd ed.) / D. H. Jonassen. – Upple Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2000.
244. Sessoms, D. Interactive instruction: Creating interactive learning environments through tomorrow's teachers / D. Sessoms // International Journal of Technology in Teaching and Learning. – 2008. – 4(2). – P. 86-96.
245. Witkin, H. Cognitive style: essence and origins / H. Witkin, D. Goodenough. – N. Y., 1982. – 135 p.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А
(рекомендуемое)

Таблица А.1 – Сводная характеристика когнитивных стилей и типы предпочитаемых учебных заданий (по Бетти Лу Ливер) [23]

Стиль	Определение	Типичные черты	Предпочитаемые виды заданий и контроля
Полезависимость - полезависимость	Типы отражают степень дифференцированности поля восприятия (умение при восприятии предмета выделять фигуру и фон); влияет на вид Я-концепции, характер взаимодействия с другими людьми	Контекст-зависимые: неспособные отделить необходимую информацию от «фоновой», зависимые от ситуации, нерасчленённые представления о себе и мире, успешны в общении. Контекст-независимые: легко отделяют существенную информацию от второстепенной, не зависят от внешних референтов, ситуации, дифференцированные представления о себе и мире	Контекст-зависимые: сочинения на свободную тему, мозговые штурмы, математические задания в словах/картинках с контекстом, некоторые упражнения с использованием индукции, текстовые прикладные задачи. Контекст-независимые: вопросы с выбором ответа, задания на заполнение пустых мест, заучивание через повторение, математические вычисления вне контекста, составление словаря терминов, не любят выводить правила
Усилители - усреднители	Типы отражают узкость широты зоны эквивалентности понятий, влияют на особенности построения классификации информации	Усилители: нацелены на нахождение различий между объектами. Усреднители: нацелены на нахождение сходства между объектами	Усилители: контраст нахождения мелких и крупных различий, классификация. Усреднители: сравнение, выявление типов, упражнения на беглость чтения, топологические задачи
Преобладание дедуктивного - индуктивного мышления	–	Дедуктивное мышление – порядок рассуждения от общего к частному. Индуктивное мышление – от частного к общему	Дедуктивный тип: объяснения, правила, все исключения надо логически обосновывать. Индуктивный тип: самостоятельный вывод правил исключения, задания с использованием неизвестного языка, не терпят отсутствия возможности что-то сделать самим

Продолжение таблицы А.1

Стиль	Определение	Типичные черты	Предпочитаемые виды заданий и контроля
Аналитики - синтетики	Типы отражают способ оперирования информацией для понимания её смысла	Аналитики: анализируют, разбирают целое на части. Синтетики: интегрируют, строят целое из частей	Аналитики: тесты множественного выбора, считывание информации из учебника, концентрация на деталях, работа в одиночку, вычисления, доказательство теорем. Синтетики: чтение без словаря на иностранном языке, аутентичная информация (газеты, журналы, ТВ программы), концентрация на общем содержании, формулирование теорем, поиск взаимосвязей, тесты с «открытыми» вопросами
Преобладание абстрактного - конкретного типа мышления	Типы определяются уровнем концептуализации преимущественным уровнем абстрагирования при восприятии предметов	Абстрактные: мыслят на уровне концепций, источник включается в общую понятийную систему, которая достаточно подвижна. Конкретные: склонные к тому, «что можно пощупать», прагматичны, жесткая пространственно-временная привязка к источнику, тяга к составлению набора жестких схем	Абстрактный тип: лекции, письменные упражнения. Конкретный тип: учебные экскурсии, упражнения «на пальцах», моделирование в реальности абстрактных конструкций
Преобладание линейного - нелинейного (дивергентного мышления)	Типы отражают степень необходимости строгого порядка поступления информации для овладения и оперирования ею	Линейный тип: склонность к порядку, определённая педантичность, нужна строгая последовательность и внешняя организация действий. Нелинейный тип: склонность к свободе, широким границам деятельности	Линейный тип: точно заданная последовательность действий, работа по алгоритму. Нелинейный тип: неструктурированная деятельность, свободный поиск в заданном направлении

Продолжение таблицы А.1

Стиль	Определение	Типичные черты	Предпочитаемые виды заданий и контроля
Импульсивный - рефлективный тип	Типы определяются характером реагирования в ситуации решения задач	Импульсивный тип: учится методом проб и ошибок, отличается быстротой реакции, не раздумывает над ответом. Рефлективный тип: требует времени на усвоение и обработку информации, начинает действовать, внутренне опробовав гипотезы, взвешенно осторожно	Импульсивный тип: задания на время, математические марафоны. Рефлективный тип: долгосрочные проекты, домашние контрольные, письменные ответы

Приложение Б
(обязательное)
Комплекс визуализированных задач по алгебре. Функции и графики (фрагмент)

Тема 12. Функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график

12.1. Заполните таблицу (таблица Б.1), выяснив, являются или нет квадратичными заданные функции.

Таблица Б.1

Функции	Является	Не является
$y = 2x^2 - 6x + 1$	✓	
$y = -2x - 9$		
$y = \frac{3}{x}$		
$y = \frac{3}{x^2}$		
$y = 3 - 2x^2$		
$y = 0$		
$y = -\frac{x^2}{4} + 5x + 4$		
$y = \frac{2}{x^2} - 7x + 2$		
$y = 3x - 4x^2 + 8$		
$y = 5x^2$		
$y = x - 1{,}5x^2$		

12.2. Заполните таблицу (таблица Б.2).

Таблица Б.2

Квадратичная функция	a	b	c	Направление ветвей параболы
$y = 2x^2 - 8x + 1$				
$y = 4 + 9x - 7x^2$				
$y =$ _____	–1	4	9	
$y = 0{,}5x^2 - 7$				
$y = 4x^2$_____		–2	3	
$y =$ ____$- 5x$_____	–2		4	
$y =$ _____+7	–6	3		
$y = x^2$_____$- 8$		10		

12.3. Заполните таблицу (таблица Б.3).

Таблица Б3

Квадратичная функция	a	b	c	Координаты вершины параболы	
				x_0	y_0
$y = -2x^2 + 4x + 1$					
$y = 2x - x^2 - 3$					
$y = 6x + x^2$					
$y =$ ____ $+ 2x$_____	–2		–5		
$y =$ _____ $+ 6$	–6	0			

12.4. Соедините стрелками квадратичные функции с равными старшими коэффициентами:

А) $y = -3x^2 + 7x - 2$

Б) $y = 3x - \frac{x^2}{2} + 5$

В) $y = 11 - 0{,}25x^2$

Г) $y = 7x^2 - 4x + 0{,}5$

1) $y = -0{,}5x^2 - 4x + 1$

2) $y = 5 - \frac{x^2}{4} + 7x$

3) $y = -3x^2 + 3x + 11$

4) $y = -2 + 7x^2 - 3x$

5) $y = -4x^2 - 0{,}25$

12.5. Заполните таблицу (таблица Б.4), отметив функции, графики которых проходят через заданные точки.

Таблица Б.4

Функции	Точки			
	$A(5;0)$	$B(0;0)$	$C(1;8)$	$D(2;6)$
$y = 2x^2$		✓		
$y = -x^2 + 5x$				
$y = x^2 + 3x - 4$				
$y = -0{,}5x^2 + x + 7{,}5$				

12.6. Для каждой параболы, изображённой на рисунке (рисунок Б.1), проведите ось симметрии и заполните таблицу (таблица Б.5).

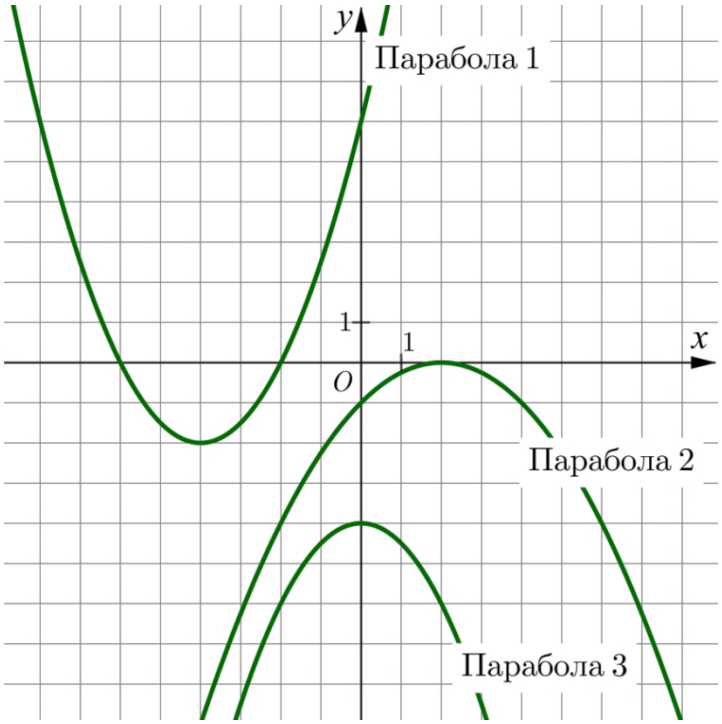


Рисунок Б.1 – Графики функций к задаче 12.6

Таблица Б.5

График	Направление ветвей	Уравнение оси симметрии	Координаты вершины
Парабола 1			
Парабола 2			
Парабола 3			

12.7. Установите соответствие между квадратичными функциями и их свойствами:

Функции

А) $y = x^2 - x$

Б) $y = 2x^2 - 3$

В) $y = 5x^2 + 1$

Г) $y = x^2 + 4x + 4$

Д) $y = -4x^2 + 7$

Свойства функций

1) вершина параболы лежит на оси абсцисс

2) осью симметрии параболы является ось ординат

3) парабола проходит через начало координат

4) парабола не пересекает ось абсцисс

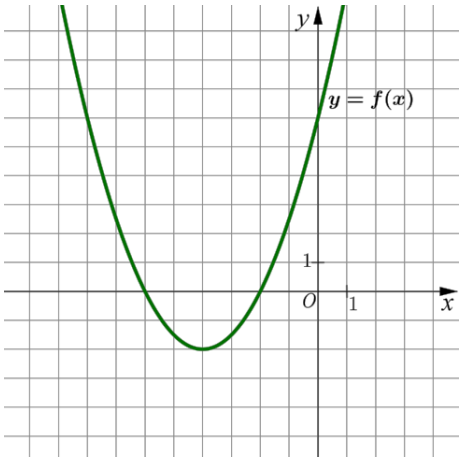
5) ветви параболы направлены вниз

Ответ:

А	Б	В	Г	Д

12.8. На рисунке (рисунок Б.2) изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Укажите верные утверждения.

а)



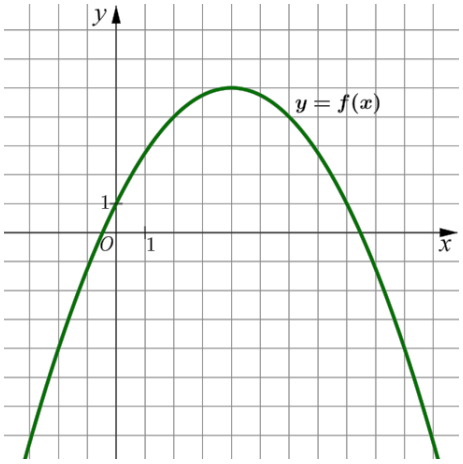
☐ $f(-6)=0$

☐ $f(-4)>0$

☐ $f(0)=f(-8)$

☐ $f(-4)>f(-3)$

б)



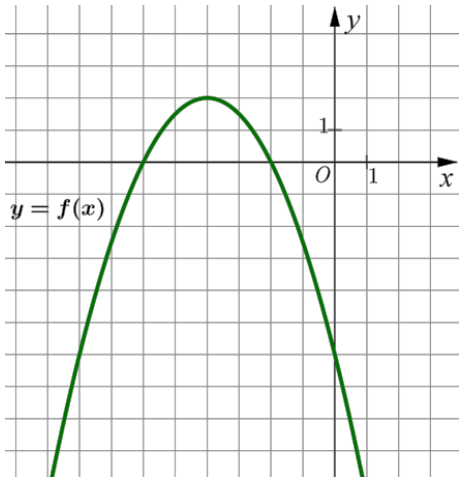
☐ $f(1)<f(3)$

☐ $f(-1)>0$

☐ $f(8)=0$

☐ $f(2)=f(6)$

в)



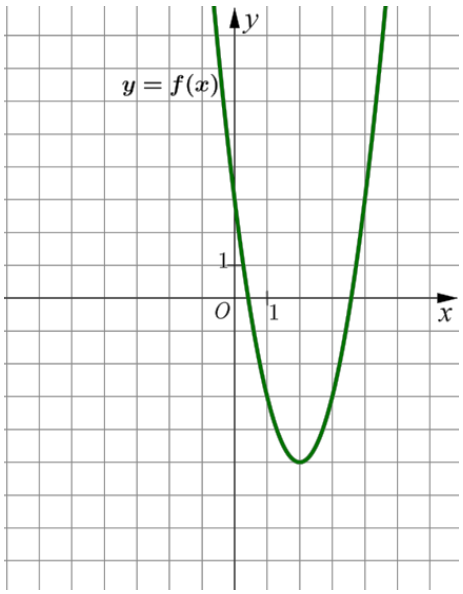
☐ на промежутке $[-4;+\infty)$ функция возрастает

☐ $x=-4$ – ось симметрии параболы

☐ $(2;-4)$ – вершина параболы

☐ функция пересекает ось ординат в точке $(0;-6)$

г)



☐ на промежутке $(-\infty;2]$ функция убывает

☐ $x=0$ – ось симметрии параболы

☐ $(2;-5)$ – вершина параболы

☐функция пересекает ось ординат в точке $(3;0)$

Рисунок Б.2 – Рисунок к задаче 12.8

12.9.• На рисунке (рисунок Б.3) изображены графики квадратичных функций. Выясните, у каких из этих функций есть наибольшее (наименьшее) значение? Запишите эти значения.

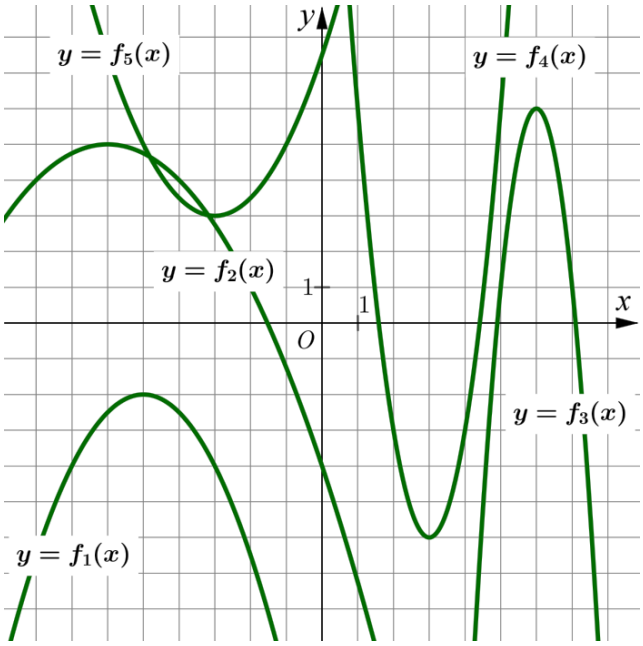


Рисунок Б.3 – Графики функций к задаче 12.9

$y=f_1(x)$:_____

$y=f_2(x)$:_____

$y=f_3(x)$:_____

$y=f_4(x)$:_____

$y=f_5(x)$:_____

12.10.• На рисунке (рисунок Б.4) изображён график квадратичной функции на отрезке $[-1;3]$. Дорисуйте его на отрезке $[-3;-1]$.

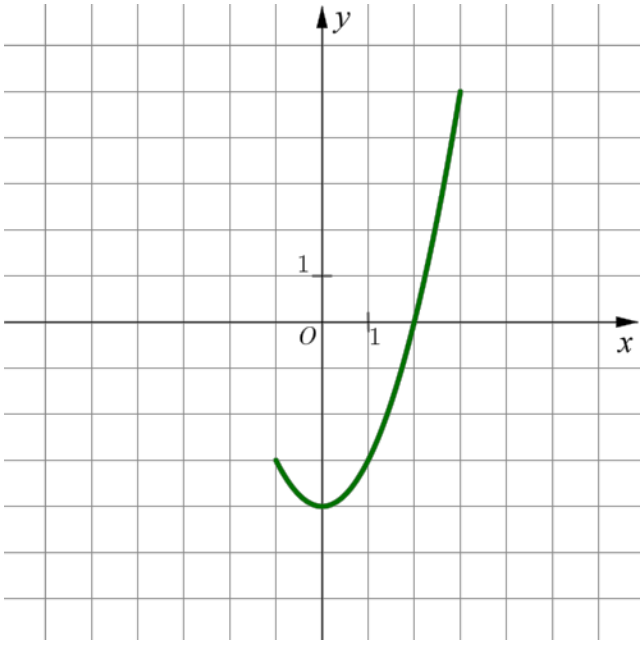


Рисунок Б.4 – График функции к задаче 12.10

12.11.• На рисунке (рисунок Б.5) изображён график квадратичной функции на отрезке $[-4;4]$. Дорисуйте его на отрезке $[4;8]$.

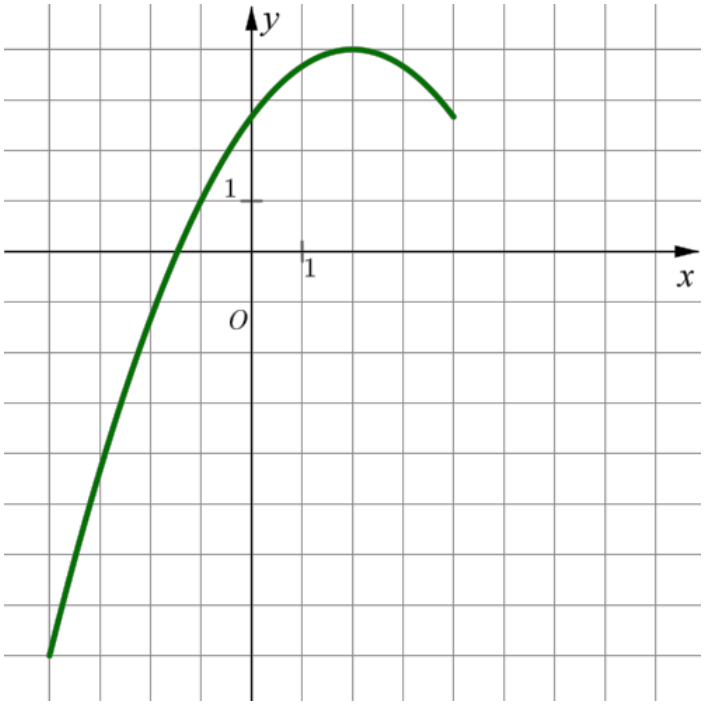
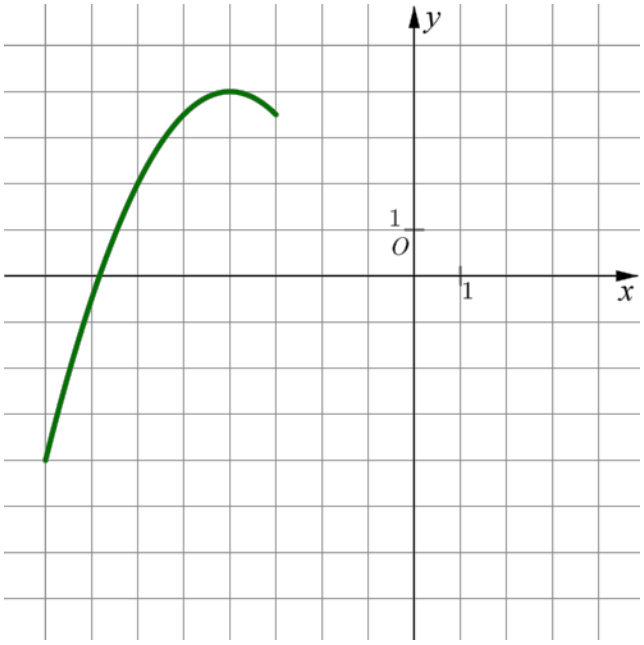


Рисунок Б.5 – График функции к задаче 12.11

12.12.• На рисунке (рисунок Б.6) изображён график квадратичной функции на отрезке $[-8;-3]$. Найдите $f(-2)$ и $f(0)$.

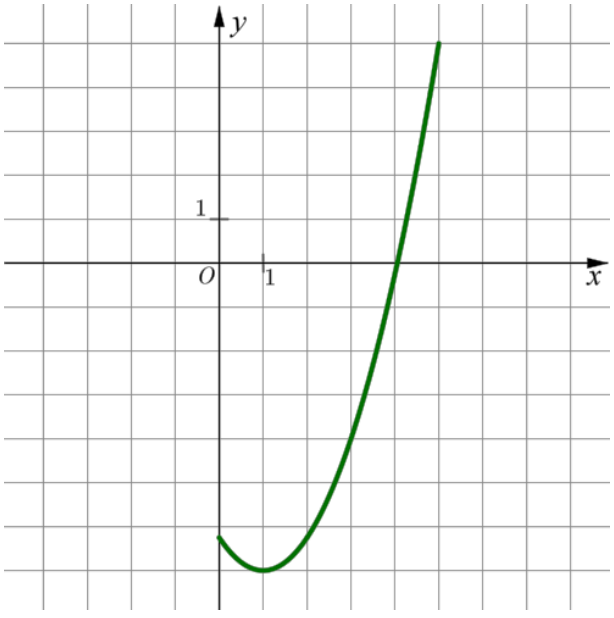


$f(-2) =$ _____

$f(0) =$ _____

Рисунок Б.6 – График функции к задаче 12.12

12.13.• На рисунке (рисунок Б.7) изображен график квадратичной функции на отрезке $[0;5]$. Найдите $f(-1)$ и $f(-3)$.



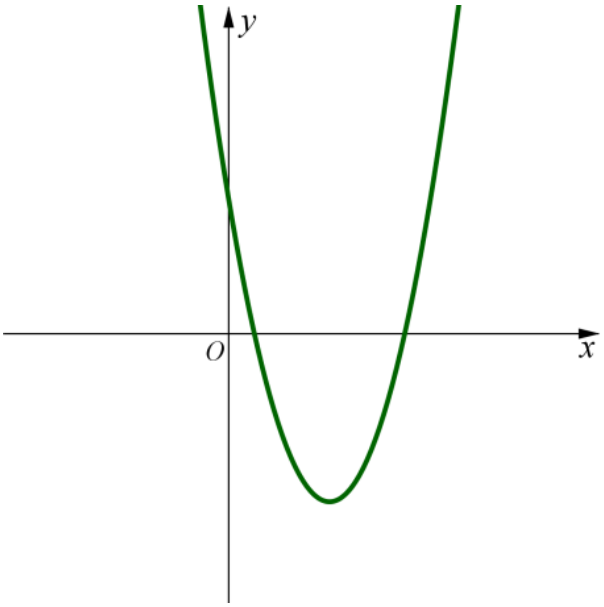
$f(-1) =$ _____

$f(-3) =$ _____

Рисунок Б.7 – График функции к задаче 12.13

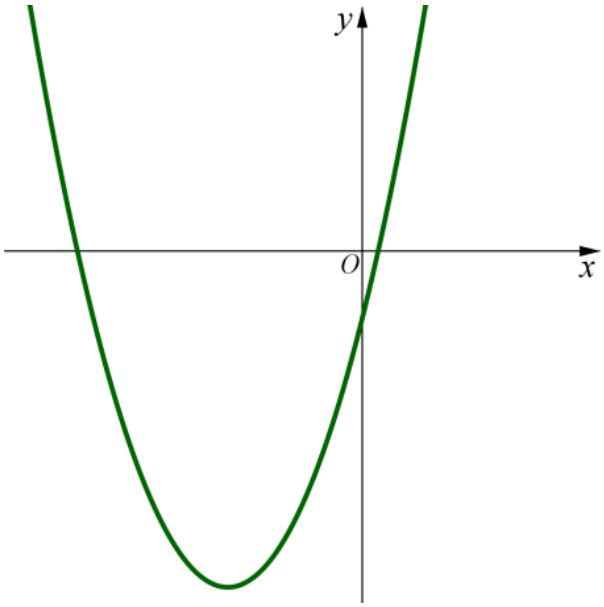
12.14.• Определите по графику функции $y = ax^2 + bx + c$ знаки коэффициентов a, b и c (рисунок Б.8).

а)



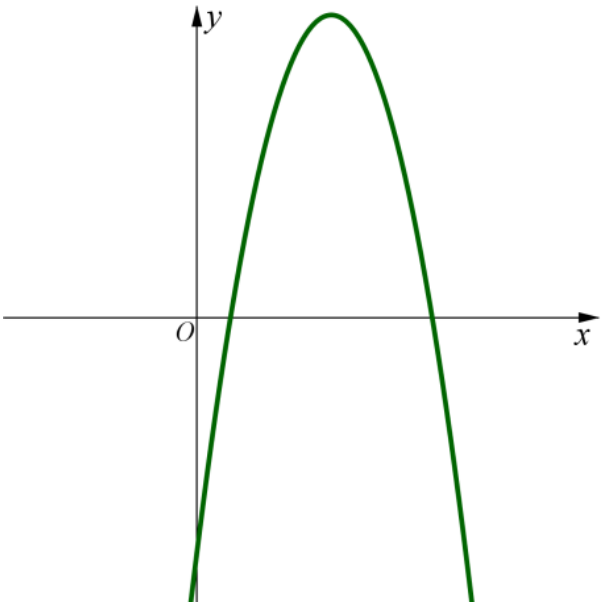
_____

б)



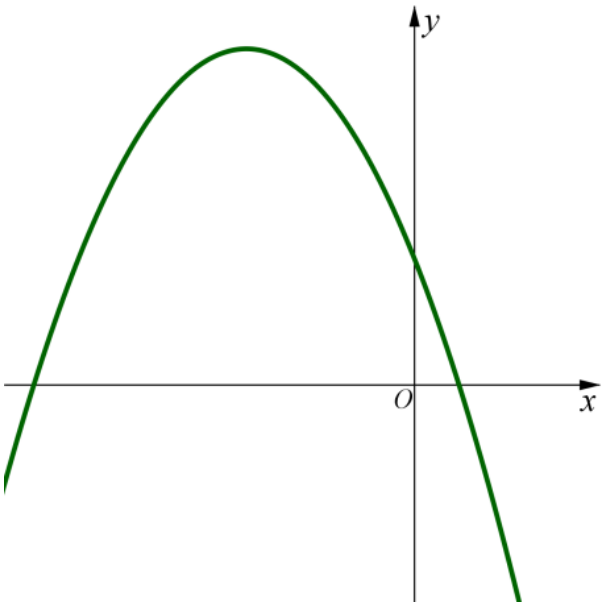
_____

в)



_____

г)

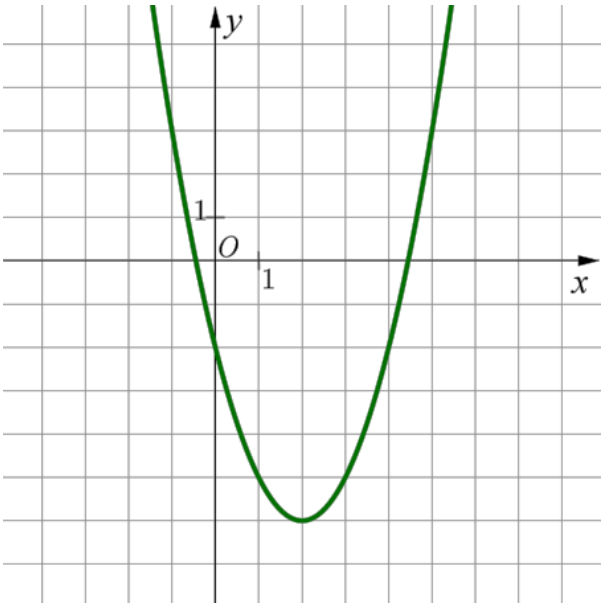


_____

Рисунок Б.8 – Рисунок к задаче 12.14

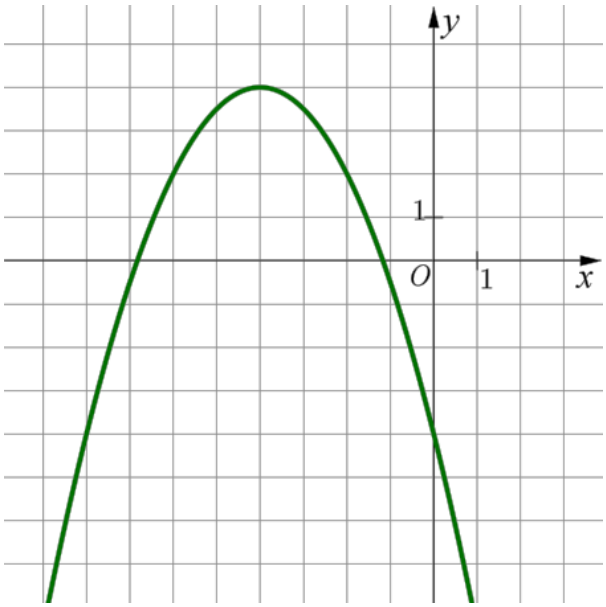
12.15.• С помощью графика функции $y = ax^2 + bx + c$ найдите произведение коэффициентов a и c (рисунок Б.9).

а)



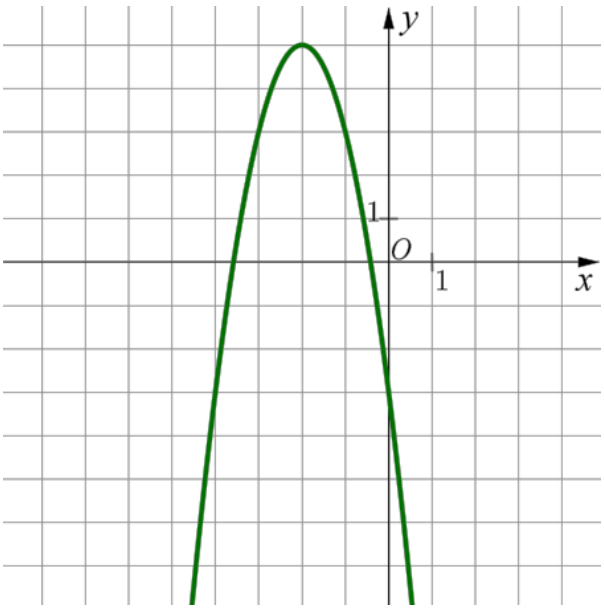
_____

б)



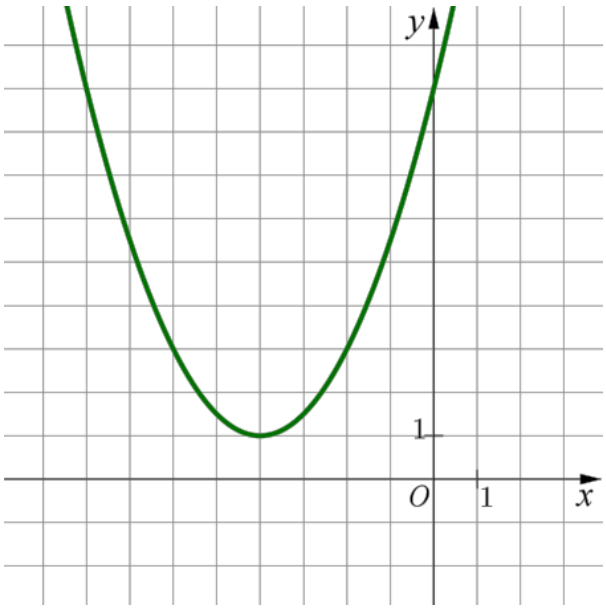
_____

в)



_____

г)

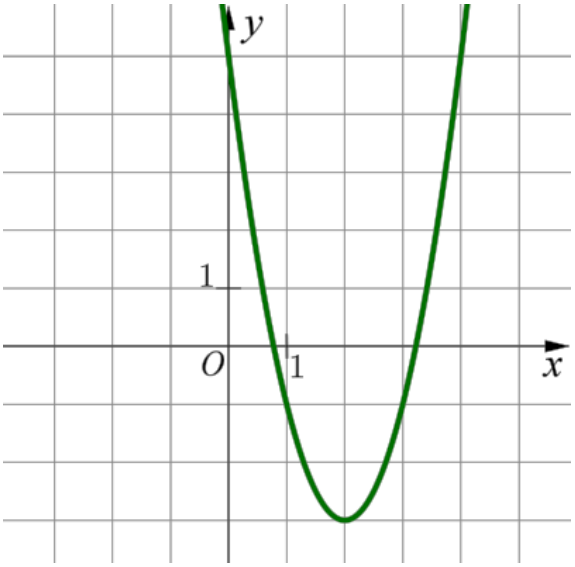


_____

Рисунок Б.9 – Рисунок к задаче 12.15

12.16.• Приведите пример квадратичной функции, график которой имеет с осью абсцисс:
а) только одну общую точку;
б) две общие точки.

12.17.• Задайте квадратичную функцию, график которой изображён на рисунке (рисунок Б.10), аналитически в виде $y = a(x+l)^2 + m$ и $y = ax^2 + bx + c$.



$y =$ _____;

$y =$ _____.

Рисунок Б.10 – График функции к задаче 12.17

12.18.• Дополните рисунок (рисунок Б.11) заданными в системах прямыми. Каждую систему уравнений соедините стрелкой с соответствующим утверждением.

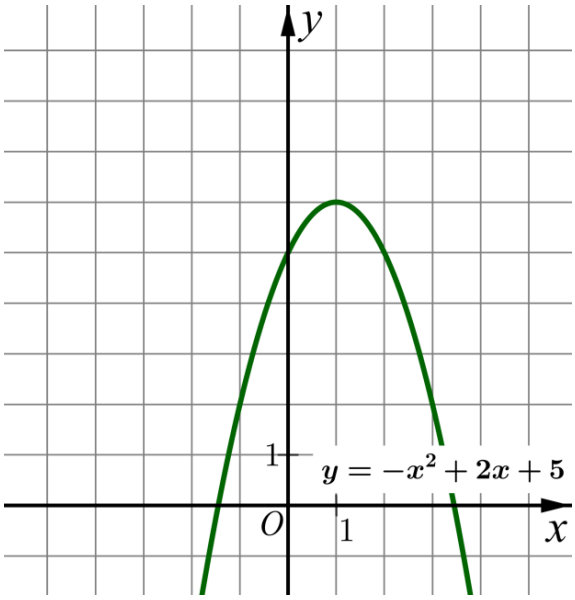


Рисунок Б.11 – График функции к задаче 12.18

Системы уравнений

А) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 5, \\ x - 2y + 4 = 0; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 5, \\ y = 6; \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 5, \\ y = x + 7; \end{cases}$

Утверждения

1) система имеет одно решение;

2) система имеет два решения;

3) система не имеет решений;

4) система имеет бесконечное множество решений.

12.19.• Постройте график функции $y = f(x)$ (рисунок Б.12) и заполните таблицу, где $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 3, \text{ если } x \le 0, \\ -x^2 + 3, \text{ если } 0 < x \le 2, \\ -1, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

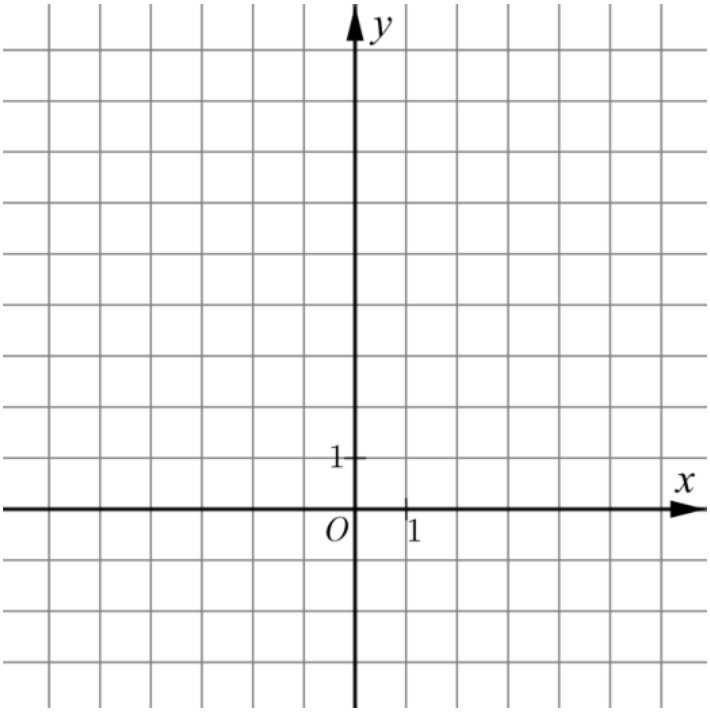
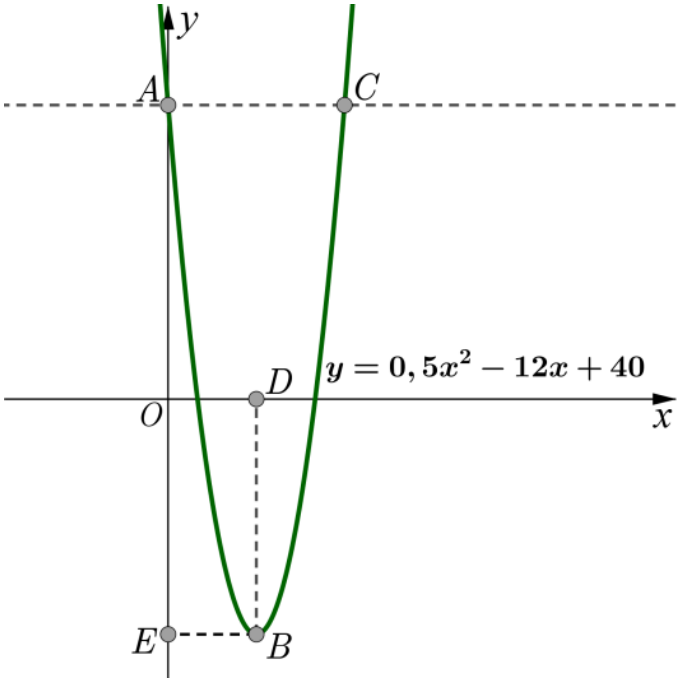


Рисунок Б.12 – Рисунок к задаче 12.9

$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

12.20.* Используя данные рисунка (рисунок Б.13), найдите координаты указанных точек:



A(_____; _____),

B(_____; _____),

C(_____; _____),

D(_____; _____),

Рисунок Б.13 – Рисунок к задаче 12.20

12.21.* Постройте график функции, симметричный графику функции $y = 2x^2 - 4x + 3$ относительно оси ординат. Задайте получившуюся функцию аналитически.

12.22.* Постройте график функции, симметричный графику функции $y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ относительно оси абсцисс. Задайте получившуюся функцию аналитически.

12.23.* Постройте график функции $y = -2x^2 - ax - 1$, возрастающую на промежутке $(-\infty; -2]$ и убывающую на промежутке $[-2; +\infty)$.

12.24.* Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке (рисунок Б.14), и заполните таблицу ее значений. С помощью графика опишите свойства функции.

$$f(x) = \begin{cases} _____ \\ _____ \\ _____ \end{cases}$$

$f(-6)$	$f(-3)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(4)$	$f(6)$

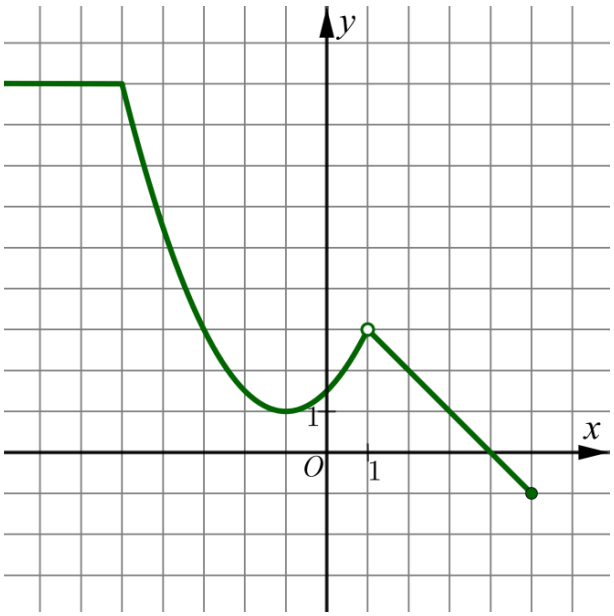


Рисунок Б.14 – График функции к задаче 12.24

1) Область определения функции: _____;

2) $y = 0$ при _____;

$y > 0$ при _____;

$y < 0$ при _____;

3) функция_____;

(непрерывная; имеет точки разрыва)

4) функция возрастает при _____;

функция убывает при _____;

функция постоянна при _____;

5) функция_____;

(ограничена; не ограничена)

6) $y_{наим}$ = _____ при x = _____;

$y_{наиб}$ = _____ при x = _____;

7) область значений функции: _____.

Приложение В

(рекомендуемое)

Примеры ментальных карт, выполненных учащимися 7 класса экспериментальной группы

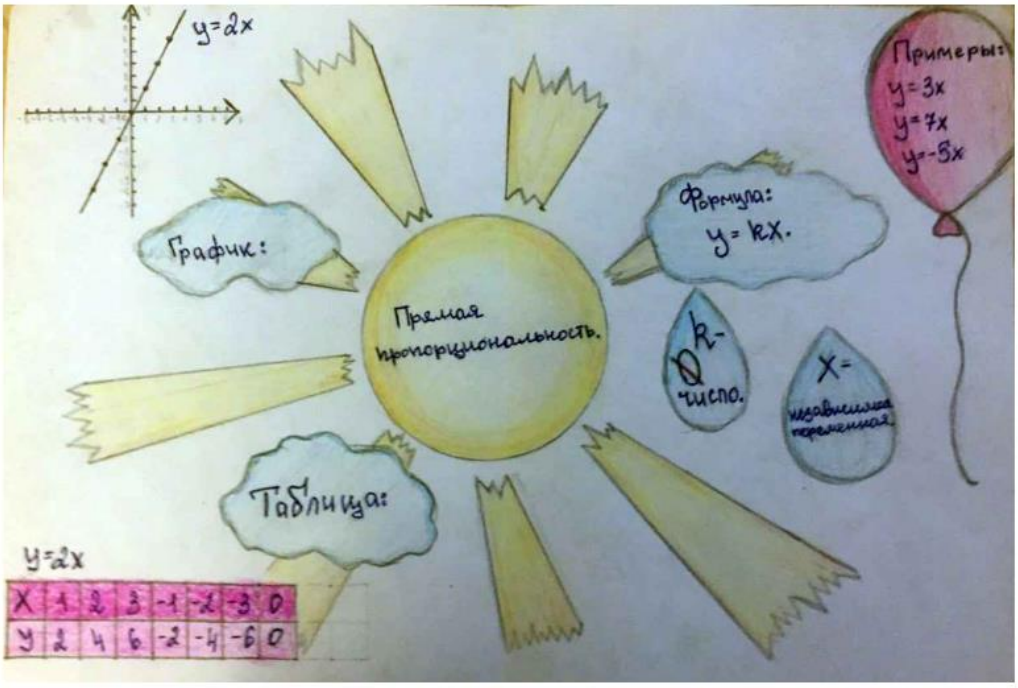


Рисунок В.1 – Пример 1 ментальной карты

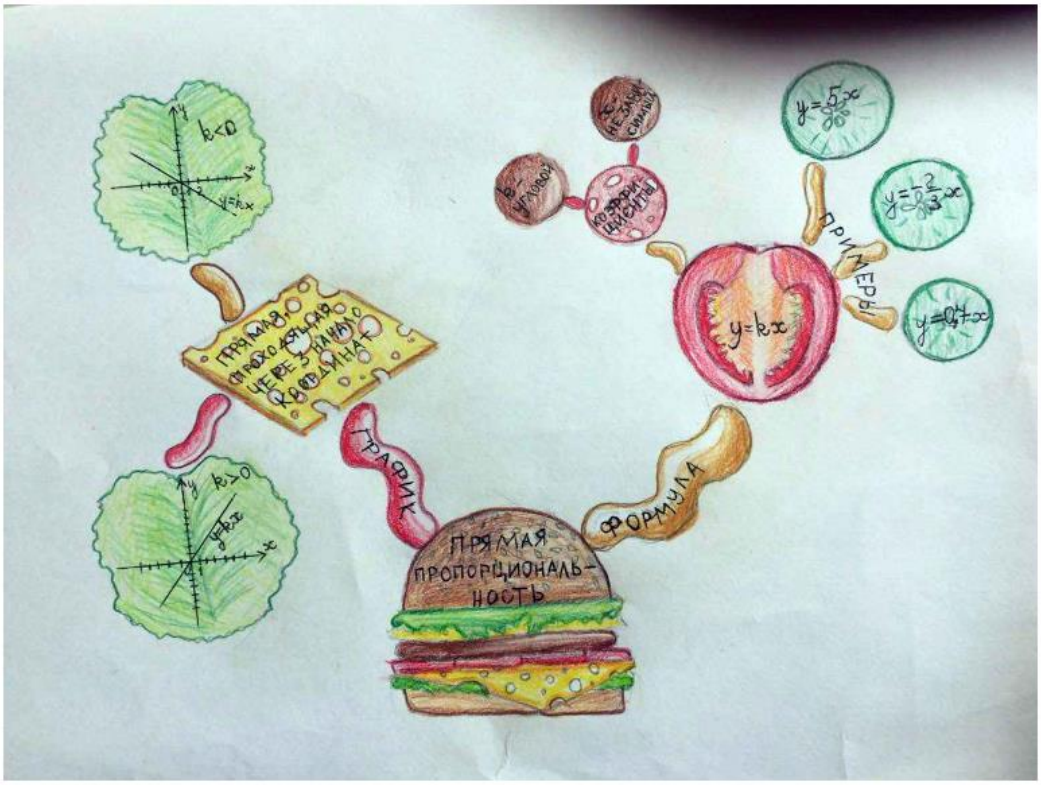


Рисунок В.2 – Пример 2 ментальной карты

Приложение Г

(рекомендуемое)

Протоколы наблюдений для проведения лабораторной работы в 8 классе на тему «Построение графиков функций $y = f(x+l)$, $y = f(x)+m$, если известен график функции $y = f(x)$».

Фамилия Имя _____ **Класс** _____

Протокол наблюдений №1

№ наблюдения	Исходная функция $y = f(x)$	Коэффициент l (>0, <0)	Функция $y = f(x + l)$	Длина отрезка AB	Описание смещения графика
1	$y = x^2$	$l = 2$	$y = (x + 2)^2$	2	Сдвиг вдоль оси x на 2 единицы масштаба влево
		$l = -3$	$y =$		Сдвиг вдоль оси ___ на____ единицы масштаба _____
2	$y = -\frac{3}{x}$	$l =$			Сдвиг вдоль оси ___ на____ единицы масштаба _____
		$l =$			Сдвиг вдоль оси ___ на ____ единицы масштаба _____
3	$y =$	$l =$			Сдвиг вдоль оси ___ на ____ единицы масштаба _____
		$l =$			Сдвиг вдоль оси ___ на ____ единицы масштаба _____

Выводы:

1) Чтобы построить график функции $y = f(x + l)$, где $l > 0$, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси _____ на ____ единиц масштаба _____.

2)Чтобы построить график функции $y = f(x + l)$, где $l < 0$, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси _____ на ____ единиц масштаба _____.

Протокол наблюдений №2

№ наблюдения	Исходная функция $y = f(x)$	Коэффициент m (>0, <0)	Функция $y = f(x) + m$	Длина отрезка AB	Описание смещения графика
1	$y = x^2$	$m = 2$	$y = x^2 + 2$	2	Сдвиг вдоль оси у на 2 единицы масштаба вверх
		$m = -3$	$y =$		Сдвиг вдоль оси ___ на____ единицы масштаба _____
2	$y = -\frac{3}{x}$	$m =$			Сдвиг вдоль оси ___ на____ единицы масштаба _____
		$m =$			Сдвиг вдоль оси ___ на ____ единицы масштаба _____
3	$y =$	$m =$			Сдвиг вдоль оси ___ на ____ единицы масштаба _____
		$m =$			Сдвиг вдоль оси ___ на ____ единицы масштаба _____

Выводы:

1) Чтобы построить график функции $y = f(x) + m$, где $m > 0$, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси _____ на ____ единиц масштаба _____.

2)Чтобы построить график функции $y = f(x) + m$, где $m < 0$, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси _____ на ____ единиц масштаба _____.

Приложение Д

(рекомендуемое)

Анкета для учителей математики

Город_____

Наименование образовательного учреждения_____

№1. Укажите классы, в которых Вы работаете _____

№2. Укажите Ваш стаж работы _____

№3. Укажите учебный комплект по алгебре, по которому Вы работаете _____

_____

№4. Знакомы ли Вы с вопросами развития универсальных учебных действий (УУД) учащихся основной школы при обучении алгебре?

☐ да

☐ нет

№5. Согласны ли Вы с тем, что обучение алгебре нацелено, в первую очередь, на развитие познавательных УУД?

☐ да

☐ нет

☐ затрудняюсь ответить

№6.Согласны ли Вы с тем, что развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы требует использования современных технологий и форм обучения?

☐ да

☐ нет

№7. Согласны ли Вы с тем, что запоминание и усвоение математических понятий, фактов и утверждений, представленных с помощью зрительно воспринимаемых форм (визуализации учебной информации) происходит качественнее и быстрее, чем представленных в словесной форме?

☐ да

☐ нет

№8. Удовлетворены ли Вы наглядностью содержания используемых Вами учебных пособий по алгебре?

☐ да
☐ нет
☐ скорее да, чем нет
☐ скорее нет, чем да

№9. Используете ли вы графические иллюстрации математических понятий и утверждений при решении задач по алгебре?

☐ да
☐ нет

№10. Какие средства визуализации учебной математической информации Вы используете при обучении алгебре?

☐ таблицы
☐ ментальные карты
☐ инфографика
☐ блок-схемы
☐ кластеры
☐ фреймы
☐ структурно-логические схемы
☐ модель Фрейер
☐ схемы поиска решения задачи
☐ опорные конспекты
☐ диаграммы
☐ визуализированные задачи (задачи, в которых графический образ явно или неявно задействован в условии, задает метод решения задачи, создает опору каждому этапу решения либо явно или неявно сопутствует на определенных этапах ее решения)
☐ другие (указать какие)_____
_____

№11. Какие средства ИКТ Вы используете при обучении алгебре?

☐ мультимедийные презентации
☐ интерактивные презентации для интерактивной доски
☐ ЭОР, ЦОР из готовых коллекций
☐ сервисы Web 2.0 для создания визуальных моделей представления учебной информации (кластеров, инфографики и т. п.)
☐ личный блог
☐ интерактивные задания в среде LearningApps.org
☐ облачные технологии (например, Googledocs)
☐ личный сайт
☐ электронную почту
☐ другие (указать какие) _____

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(рекомендуемое)

Диагностическая контрольная работа для 7 класса (до эксперимента)

Контрольная работа
1 вариант

Фамилия Имя _____

Класс _____

№1.Отметьте линейное уравнение

☐$\frac{3}{5x+2}-\frac{7}{4x-3}=6$

☐$|x|=3x$

☐$\frac{5-4x}{2}+\frac{7-2x}{4}=4$

☐$(2x-3)(x-2)=0$

№2. По количеству корней линейные уравнения делятся на уравнения, которые:

1)имеют один корень

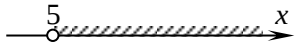
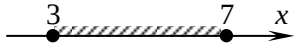
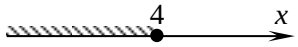
2)_____

3) имеют бесконечное множество корней

Заполните пропуск и определите, к какому виду относится уравнение $5x-2=\frac{3}{2}x+1{,}5$.

Решение:

№3. Заполните таблицу

Геометрическая модель	Обозначение	Название числового промежутка	Аналитическая модель
	$(5;+\infty)$		$x>5$
	$[3;7]$	отрезок	
	$(2;5]$	полуинтервал	$2<x\leq 5$
		луч	$x\leq 4$

№4. Найдите значение выражения $\frac{(2{,}41+3{,}25-2{,}44-0{,}22):\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)}{5\cdot 0{,}6\cdot 2}$ наиболее удобным способом.

Решение:

№5. Решите задачу, выделяя три этапа математического моделирования:

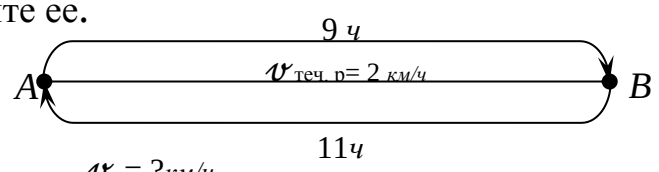
В классе мальчиков в два раза больше, чем девочек. Если из этого класса уйдут два мальчика и придут две девочки, то девочек будет на 6 меньше, чем мальчиков. Сколько учеников в данном классе?

Решение:

№6. При каком значении переменной a значение выражения $7(a-5)$ на 3 меньше значения выражения $-3(a-8)$?

Решение:

№7. По представленной ниже схеме составьте задачу (словесную модель ситуации) и решите ее.



Решение:

Приложение Ж

(рекомендуемое)

Диагностическая контрольная работа для 7 класса (после эксперимента)

Фамилия Имя _____

Класс _____

Контрольная работа
1 вариант

№1. ***Заполните таблицу***

Точка	Абсцисса точки	Ордината точки	Координатная четверть
$A(3; 4{,}5)$	3	4,5	I
$B(\ \ ; -1)$	5		
$C(\ \ ;\ \ )$	–6	5	
$D(-0{,}5;\ \ )$		–9	
$E(\ \ ; 6)$	5		

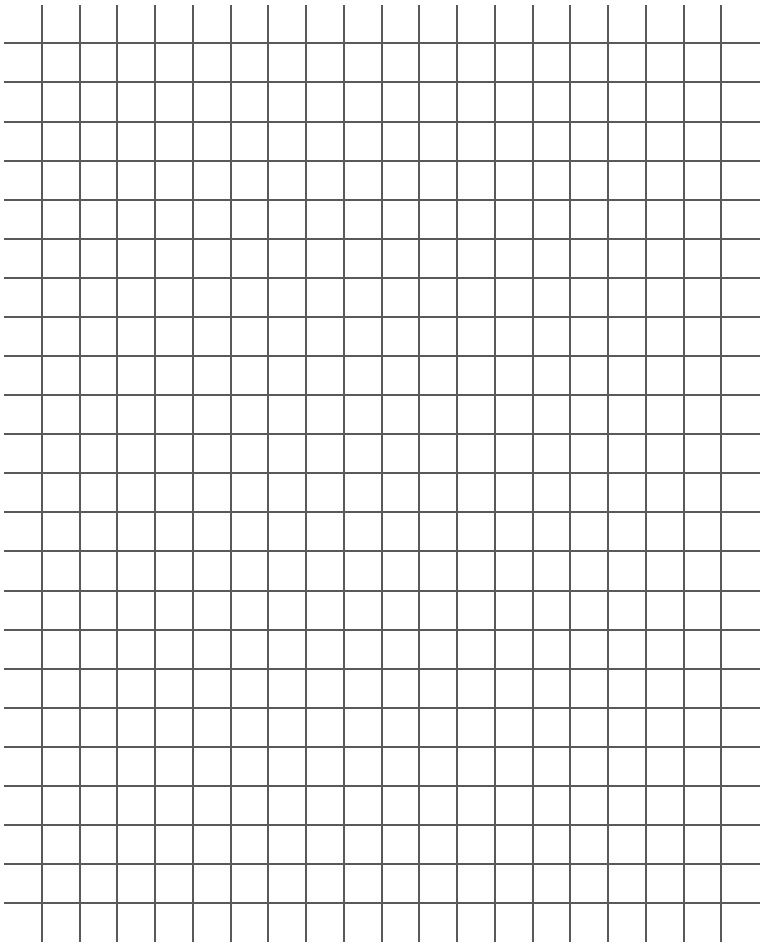
№2. ***Отметь функцию, являющуюся прямой пропорциональностью, построй ее график.***

☐ $y = 3$

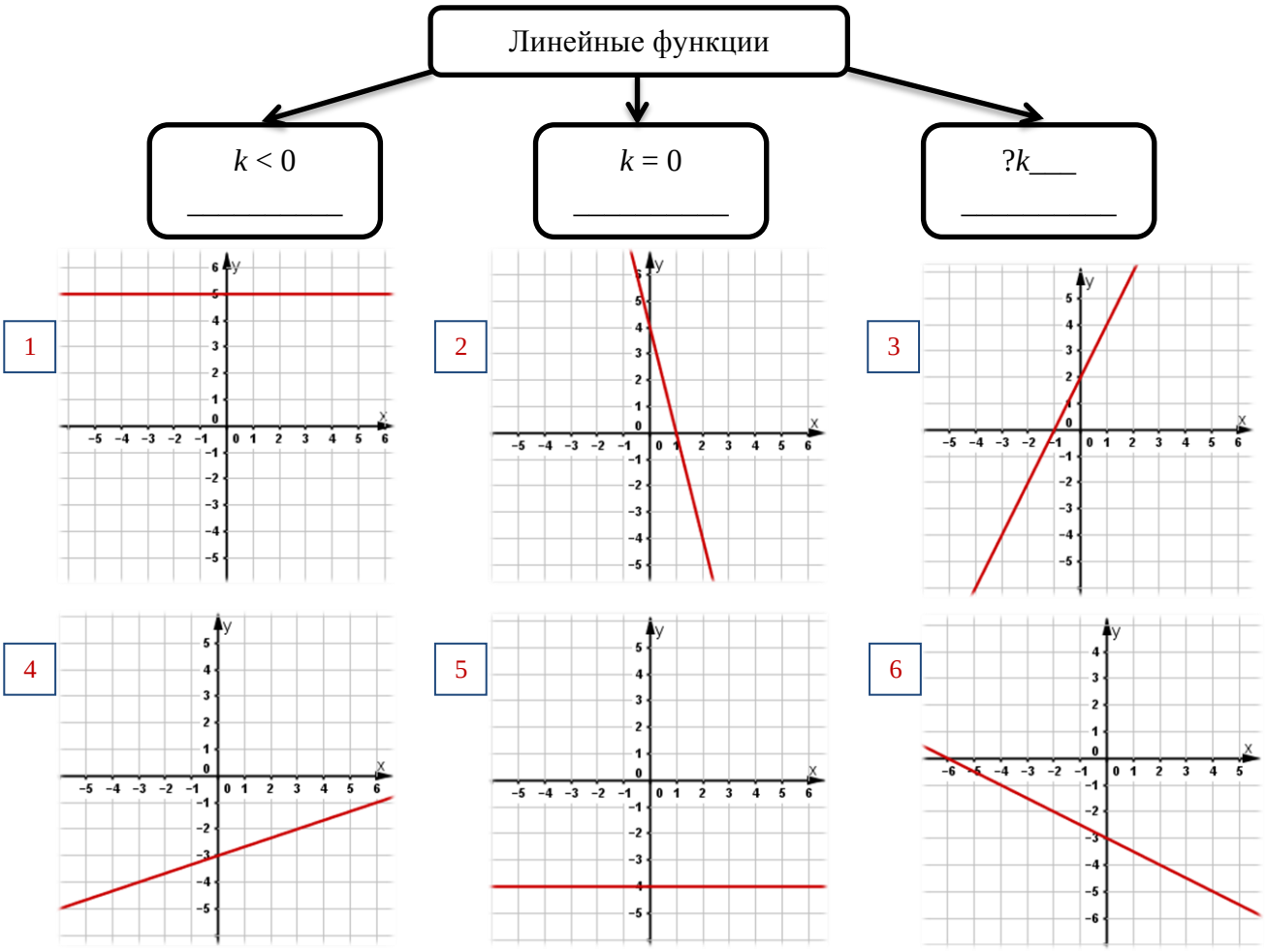
☐ $y = 3x^2$

☐ $y = -\frac{x}{2}$

☐ $y = 2x + 3$



№3. ***Распредели графики линейных функций по группам, где основанием для деления является знак углового коэффициента линейной функции:***

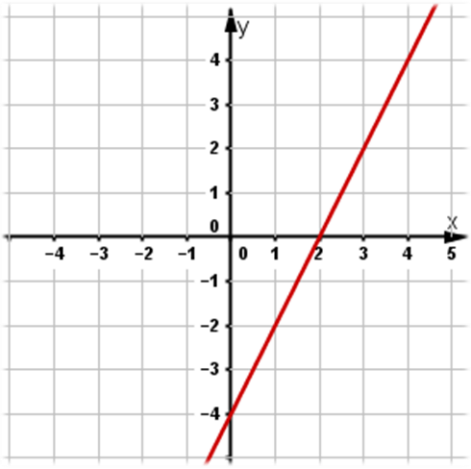


№4. ***Постройте график уравнения*** $2x+y-5=0$ ***и найдите ординату точки с абсциссой 3.***

Решение:

№5. ***Задайте формулой линейную функцию, график которой изображен на рисунке и заполните таблицу***

Аналитическая модель (формула)	$y =$
Координаты точки пересечения с осью абсцисс	
Координаты точки пересечения с осью ординат	
Возрастает или убывает функция	
При $x = 4$	$y =$
При $y = 8$	$x =$



№6. ***Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку M(3; –8) и параллелен графику функции*** $y = -4x + 5$. ***Постройте график полученной функции.***

Решение:

Таблица Ж.1 – Матрица оценивания итоговой контрольной работы по математике (7 класс)

Проверяемые ПУУД	**Баллы**			
	0	**1**	**2**	**3**
1	2	3	4	5
Задача 1				
Умение структурировать знания (умение работать с таблицами по образцу), знаково-символические действия (осуществление словесно-символьного перевода)	учащийся не приступил к заданию или выполнил его неверно	неверно заполнено меньше половины таблицы	таблица заполнена верно	-
Задача 2				
Подведение под понятие, знаково-символические действия, включая моделирование (осуществление перевода информации по схеме слово-символ-график)	учащийся не приступил к заданию или выполнил его неверно	верно выбрана функция, но график построен неверно	функция выбрана верно и правильно построен ее график	-
Задача 3				
Классификация, подведение под понятие, знаково-символические действия (осуществление символьно-графического перевода), анализ-синтез	учащийся не приступил к заданию или выполнил его неверно	классификационная схема дополнена верно, но графики распределены по классам с ошибками	классификационная схема дополнена верно, все графики распределены по классам правильно	-
Задача 4				
Знаково-символические действия, включая моделирование (осуществление перевода информации по схеме символ-график-текст), анализ, синтез	учащийся не приступил к заданию или выполнил его неверно	верно выполнено одно из заданий: график построен верно, но ордината точки найдена неправильно; или ордината точки найдена верно, но график не построен или построен неверно	график уравнения построен правильно, ордината точки определена верно	-

Продолжение таблицы Ж.1

1	2	3	4	5
Задача 5				
Знаково-символические действия, включая моделирование (осуществление перевода информации по схеме символ-график-текст), умение структурировать знания (работать с таблицами), анализ-синтез	учащийся не приступил к заданию или выполнил его неверно	заполнена верно треть таблицы	заполнено правильно больше половины таблицы, но не найдена формула, задающая функцию	вся таблица заполнена верно
Задача 6				
Знаково-символические действия, включая моделирование (осуществление перевода информации по схеме символ-график-текст), анализ-синтез	учащийся не приступил к заданию или выполнил его неверно	построен график известной функции, отмечена точка, построен не точно график искомой функции, формула не найдена	построен график известной функции, отмечена точка, построен не точно график искомой функции, формула найдена с ошибкой или определен только угловой коэффициент искомой прямой	построен график известной функции, отмечена точка, построен точно график искомой функции, верно и аргументированно определена формула искомой функции

Репродуктивный уровень: менее 5 баллов;
Продуктивный уровень: 5-10 баллов;
Творческий уровень: более 10 баллов.
Максимальное количество баллов: 14 баллов.

Приложение И
(обязательное)

Статистическая обработка результатов формирующего этапа педагогического эксперимента

Для определения расхождения или согласия распределений учащихся контрольной и экспериментальной групп по уровню развития познавательных универсальных учебных действий целесообразно применить критерий χ^2 (критерий Пирсона), эмпирическое значение которого вычисляется по формуле:

$$\chi^2_{\text{эмп}} = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{L} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M} \right)}{n_i + m_i}, \quad (1)$$

где N – количество учащихся в экспериментальной группе, M – количество учащихся в контрольной группе. Число разрядов $L = 3$ (три уровня развития ПУУД: репродуктивный (1), продуктивный (2) и творческий (3)). n_i– число членов экспериментальной группы, обладающих уровнем i (i = 1, 2, 3), m_i – число членов контрольной группы, обладающих уровнем i (i = 1, 2, 3).

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ критическое значение критерия χ^2 находим из таблицы [184, с. 52]: $\chi^2_{\text{крит}} = 5{,}991$.

Для определения достоверности совпадений и различий экспериментальных данных контрольных и экспериментальных групп воспользуемся следующим алгоритмом [184]:

1. Вычислим для каждой пары контрольной и экспериментальной групп $\chi^2_{\text{эмп}}$ – эмпирическое значение критерия χ^2 по формуле (1).
2. Сравним это значение с критическим значением $\chi^2_{\text{крит}} = 5{,}991$: если $\chi^2_{\text{эмп}} < \chi^2_{\text{крит}}$, то сделать вывод «характеристики сравниваемых выборок совпадают с уровнем значимости 0,05, то есть принимается гипотеза H_0»; если $\chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то сделать вывод «достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%, то есть принимается гипотеза H_1».

Для удобства все вычисления оформим в таблицах (таблицы И.1-И.8).

Таблица И.1 – Вычисление критерия Пирсона для 7 класса до начала эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	29	23	52	0,674	0,50	0,00059
Продуктивный	13	23	36	0,302	0,50	0,00109
Творческий	1	0	1	0,023	0,00	0,00054
Сумма	43	46				0,00221

$\chi^2_{\text{эмп}} = 43 \cdot 46 \cdot 0{,}00221 \approx 4{,}374,\ \chi^2_{\text{эмп}} < \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_0.

Таблица И.2 – Вычисление критерия Пирсона для 7 класса после эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	8	17	25	0,186	0,37	0,00135
Продуктивный	32	29	61	0,744	0,63	0,00021
Творческий	3	0	3	0,070	0,00	0,00162
Сумма	43	46				0,00318

$\chi^2_{\text{эмп}} = 43 \cdot 46 \cdot 0{,}00318 \approx 6{,}294, \chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_1.

Таблица И.3 – Вычисление критерия Пирсона для 8 класса до начала эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	17	20	37	0,500	0,625	0,00042
Продуктивный	15	12	27	0,441	0,375	0,00016
Творческий	2	0	2	0,059	0,000	0,00173
Сумма	34	32				0,00231

$\chi^2_{\text{эмп}} = 34 \cdot 32 \cdot 0{,}00231 \approx 2{,}518, \chi^2_{\text{эмп}} < \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_0.

Таблица И.4 – Вычисление критерия Пирсона для 8 класса после эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	9	17	26	0,265	0,53	0,00273
Продуктивный	21	15	36	0,618	0,47	0,00062
Творческий	4	0	4	0,118	0,00	0,00346
Сумма	34	32				0,00681

$\chi^2_{\text{эмп}} = 34 \cdot 32 \cdot 0{,}00681 \approx 7{,}408,\ \chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_1.

Таблица И.5 – Вычисление критерия Пирсона для 9 класса (1 год обучения) до начала эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	23	18	41	0,523	0,419	0,00026
Продуктивный	17	20	37	0,386	0,465	0,00017
Творческий	4	5	9	0,091	0,116	0,00007
Сумма	44	43				0,00050

$\chi^2_{\text{эмп}} = 44 \cdot 43 \cdot 0{,}00050 \approx 0{,}953,\ \chi^2_{\text{эмп}} < \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_0.

Таблица И.6 – Вычисление критерия Пирсона для 9 класса (1 год обучения) после эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	10	21	31	0,227	0,49	0,00220
Продуктивный	29	18	47	0,659	0,42	0,00123
Творческий	5	4	9	0,114	0,09	0,00005
Сумма	44	43				0,00348

$\chi^2_{\text{эмп}} = 44 \cdot 43 \cdot 0{,}00348 \approx 6{,}578,\ \chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_1.

Таблица И.7 – Вычисление критерия Пирсона для 9 класса (2 год обучения) до начала эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	13	16	29	0,382	0,500	0,00048
Продуктивный	18	14	32	0,529	0,438	0,00026
Творческий	3	2	5	0,088	0,063	0,00013
Сумма	34	32				0,00087

$\chi^2_{\text{эмп}} = 34 \cdot 32 \cdot 0{,}00087 \approx 0{,}950,\ \chi^2_{\text{эмп}} < \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_0.

Таблица И.8 – Вычисление критерия Пирсона для 9 класса (2 год обучения) после эксперимента

Уровень	n_i	m_i	n_i+m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N}-\frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i+m_i}$
Репродуктивный	7	18	25	0,206	0,56	0,00509
Продуктивный	23	14	37	0,676	0,44	0,00154
Творческий	4	0	4	0,118	0,00	0,00346
Сумма	34	32				0,01009

$\chi^2_{\text{эмп}} = 34 \cdot 32 \cdot 0{,}01009 \approx 10{,}979,\ \chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{крит}} \Rightarrow$ принимается гипотеза H_1.