Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского
Уральское отделение РАН

На правах рукописи

НИРОВА Марина Сефовна

Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и их группы автоморфизмов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
чл.-корр. РАН **А.А. Махнев**

Екатеринбург - 2018

Введение

В связи с завершением классификации конечных простых групп возникла задача единого представления конечных простых групп автоморфизмами конечных геометрий. Перспективным направлением является поиск такого класса конечных геометрий, что каждая конечная простая группа действует флаг-транзитивно на некоторой геометрии, и геометрии этого класса можно классифицировать. Например, класс билдингов Титса характеризует группы лиева типа [1]. Позднее в этом направлении возникли задачи, не связанные с групповым действием. В частности, такой является задача изучения дистанционно регулярных графов [2].

Классификация дистанционно регулярных графов кажется безнадежной задачей. Реальной (но очень сложной) представляется задача классификации дистанционно транзитивных графов. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если его группа автоморфизмов G действует транзитивно на множестве вершин и для вершины u и любого $i \in \{1, ..., d\}$ стабилизатор G_u вершины u действует транзитивно на $\Gamma_i(u)$.

Дистанционно регулярный граф Γ диаметра d называется импримитивным, если граф Γ_i несвязен для некоторого $i \in \{2, ..., d\}$. По теорема Смита импримитивный дистанционно регулярный граф является двудольным ($i = 2$) или антиподальным ($i = d$).

Связные компоненты графа Γ_2 для двудольного регулярного графа Γ называются половинными графами графа Γ. Половинный граф двудольного дистанционно регулярного графа является дистанционно регулярным.

Программа классификации дистанционно транзитивных графов состоит из описания примитивных графов, а затем описания двудольных графов, половинными графами которых являются примитивные графы, и антиподальных накрытий примитивных графов.

Пусть G — транзитивная группа подстановок на множестве Ω. Если стабилизатор G_p точки $p \in \Omega$ имеет r орбит на Ω, то говорят, что G—

группа ранга r. Пусть $r = 3$ и соответствующие 3 орбиты—это $\{p\}, \Delta, \Sigma$. Если Δ и Σ содержат разное число элементов, то на множестве Ω можно построить сильно регулярный граф Γ. Для этого положим $\Gamma(p) = \Delta$, и для каждого $g \in G$ вершина p^g смежна со всеми вершинами из Δ^g. Если вместо Δ здесь взять Σ, то мы получим дополнительный сильно регулярный граф.

Д. Хигмен (см. [3], [4]) развил теорию групп ранга 3. Эти группы являются группами автоморфизмов сильно регулярных графов, причем они действуют транзитивно как на множестве вершин и ребер, так и на множестве пар различных несмежных вершин. Такие графы являются дистанционно транзитивными графами диаметра 2.

Дистанционно транзитивные графы диаметра 2 (графы ранга 3) сыграли важную роль в классификации конечных простых групп. Более половины спорадических групп могут быть представлены (а некоторые и найдены) как группы автоморфизмов графов ранга 3 [5].

В диссертации изучаются некоторые классы дистанционно регулярных графов, влияние локальных подграфов, симметричных структур и собственных значений на строение дистанционно регулярных графов, а также группы автоморфизмов графов.

Основные результаты диссертации.

В диссертации завершены программы исследования:

- дистанционно регулярных локально $GQ(4, t)$-графов,

- примитивных дистанционно регулярных реберно симметричных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000,

- реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100 (проблема Лама);

заложены основы теории решения обратных задач для дистанцинно регулярных графов, связанных с экстремальными собственными значениями графов, сильно регулярными структурами и максимальными кодами; и классифицированы реберно симметричные дистанцинно регулярные графы, возникшие в этой теории.

Заметим, что дистанционно регулярные локально $GQ(4, t)$-графы тесно связаны с конечными группами и геометриями: это граф Джонсона $J(10, 5)$ или его стандартное частное, графы Мэтона с массивами пересечений $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$ и $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, сильно регулярный граф с параметрами $(126, 45, 12, 18)$ на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве типа "$-$" над $GF(3)$ и его антиподальное 3-накрытие.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Регулярным графом степени k называется граф Γ, такой что для любой вершины $u \in \Gamma$ выполняется равенство $|\Gamma(u)| = k$. *Реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ) называется регулярный граф степени k на v вершинах, любое ребро которого лежит точно в λ треугольниках. *Вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) называется реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), в котором любые две вершины $u, w \in \Gamma$ на расстоянии 2 имеют ровно μ общих соседей. *Сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) называется реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), в котором любые две несмежные вершины $u, w \in \Gamma$ имеют ровно μ общих соседей.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. *Дистанционно регулярным графом* с массивом пересечений $\{b_0, b_1, ..., b_{d-1}; c_1, c_2, ..., c_d\}$ называется граф диаметра d, в котором параметры $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от вершин u, w, а зависят только от расстояния i на котором эти вершины находятся в графе Γ для всех $i \in \{0, 1, ..., d\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d и $i \in \{2, ..., d\}$. Определим граф Γ_i на множестве вершин графа Γ, считая вершины u, w смежными в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Заметим, что сильно регулярный граф с $\mu > 0$ является дистанционно регулярным графом диаметра 2, а дистанционно регулярный граф с $d \geq 2$ — вполне регулярным графом с $k = b_0$, $\lambda = k - b_1 - 1$ и $\mu = c_2$.

Поскольку каждый дистанционно регулярный граф является вполне регулярным графом (в частности, реберно регулярным графом), то некоторые результаты об этих классах графов могут быть использованы в теории дистанционно регулярных графов.

Граф Γ диаметра d называется антиподальным, если бинарное отношение на мгножествае его вершин – совпадать или находиться га расстоянии d – является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются антиподальными классами. Еслм каждый антиподальный класс состоит из r вершин, то r называется индексом антиподальности. Антиподальное частное Γ' в качестве вершин имеет антиподальные классы, и классы u', w' смежны в Γ', если найдется ребро графа Γ, соединяющее вершину из u' с вершиной из w'. Антиподальное частное дистанционно регулярного графа является дистанционно регулярным.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией* порядка (s,t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha=1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s,t)$. Точечным графом частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой (коллинеарны). Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α,s,t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Пусть задан класс графов $\mathcal{F}$. Мы скажем, что граф Γ является *локально $\mathcal{F}$-графом*, если для любой вершины $a\in\Gamma$ имеем $\Gamma(a)\in\mathcal{F}$. Можно поставить задачу описания локально $\mathcal{F}$-графов. Если граф Γ вершинно транзитивен, то окрестности всех его вершин изоморфны, и граф Γ является локально $\mathcal{F}$-графом, где $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ. В этом случае назовем Γ *локально Δ-графом.* В более общем случае $\mathcal{F}$ может быть классом графов, удовлетворяющих некоторым условиям. Например, класс связных, реберно регулярных графов — это в точности класс связных, локально регулярных графов.

Определим несколько семейств сильно регулярных графов, которые будут фигурировать в диссертации, а также являются примерами локально Δ-графов.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим *полный n-дольный граф*, с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1=\dots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,\mu,1;1,\mu,k\}$.

Пусть M и N—конечные множества порядка m и n, соответственно. Два элемента из $M\times N$ будем считать смежными, если они различаются точно в одной координате. Полученный граф называется *$m\times n$-решеткой*, при $m=n$ он сильно регулярен с параметрами $(n^2,2(n-$

$1), n-2, 2)$.

Треугольным графом $T(n)$ называется граф 2-подмножеств множества порядка n, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они пересекаются в точности по одной точке. Граф $T(n)$ также сильно регулярен и имеет параметры $(n(n-1)/2, 2(n-2), n-2, 4)$. Окрестность каждой вершины в $T(n)$ изоморфна $2 \times (n-2)$-решетке, т.е. $T(n)$— локально $2 \times (n-2)$-решеточный граф. Верно и обратное: связный локально $2 \times (n-2)$-решеточный граф для $n \geq 3$ изоморфен треугольному графу $T(n)$.

Единственный сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$ называется *графом Шлефли* (это дополнительный граф к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$). Единственный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 10, 6, 6)$ называется *графом Клебша.* Граф Шлефли является локально графом Клебша.

Классы $n \times n$-решеток и треугольных графов допускают обобщения на дистанционно регулярные графы диаметра, большего 2.

Графом Хэмминга $H(n, m)$ называется граф с множеством вершин M^n, где $|M| = m$ и вершины $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ смежны, если они различаются точно в одной координате.

Графом Джонсона $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m-подмножества данного n-множества N и вершины $\{x_1, ..., x_m\}$, $\{y_1, ..., y_m\}$ смежны, если $|\{x_1, ..., x_m\} \cap \{y_1, ..., y_m\}| = m - 1$.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e + 1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leq p^d_{dd} + 2$. В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $c_d \geq a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leq k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности (см. [6]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$ (см. [7]).

Изучение автоморфизмов дистанционно регулярных графов опирается на метод Хигмена приложения теории характеров конечных групп, представленный в третьей главе монографии Камерона [8]. При этом граф Γ диаметра d рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для подходящих неотрицательных целых чисел p^l_{ij}, называемых *числами пересечений* графа Γ. $\mathbf{R}$-алгебра $M = \langle I, A_1, ..., A_d \rangle$ называется алгеброй Боуза-Меснера графа Γ. Дистанционно регулярный граф Γ существует тогда и только тогда, когда существует алгебра Боуза-Меснера M.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j \rangle$ (здесь $\langle u_j, w_j \rangle$ — скалярное произведение в Евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{d+1}$). Фактически, w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

В главе 1 получено описание параметров сильно $(s-2)$-однородных расширений частичных геометрий $pG_\alpha(s, t)$, классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы, найдены параметры сильно регулярных графов, отвечающих 4-изорегулярным графам и некоторые автоморфимы 4-изорегулярных графов.

В кандидатской диссертации М.С. Нировой классифицированы s-однородные и сильно $(s-1)$-однородные расширения частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$ (см. [9]).

Пара (a,L) частичной геометрии $(P,\mathcal{L})$ называется флагом, если точка a принадлежит прямой L, и антифлагом в противном случае. Если (a,L) является антифлагом, то через $f(a,L)$ обозначим число точек в L, коллинеарных a. Геометрия называется φ-однородной, если для любого антифлага (a,L) число $f(a,L)$ равно 0 или φ, и сильно φ-однородной, если это число всегда равно φ. Геометрия $pG_t(s,t)$ является сетью, а $pG_{s+1}(s,t)$ является 2-схемой с $\lambda=1$ (системой Штейнера). Если $\mathcal{S}$ — частичная геометрия $pG_\alpha(s,t)$, то двойственная геометрия $(\mathcal{L},P)$, в которой каждая точка отождествляется с пучком проходящих через нее прямых, является частичной геометрией $pG_\alpha(t,s)$.

Геометрия EpG называется *треугольной*, если любые три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке (необходимо единственном).

Геометрия $EpG_\alpha(s,t)$ — одноточечное расширение тогда и только тогда, когда она является 2-(v,k,λ) схемой с $v=1+(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s+2$, $\lambda=t+1$. В этом случае число ее блоков равно $b=(t+1)(\alpha+st)(\alpha+(s+1)(\alpha+st))/(\alpha^2(s+2))$ и $(s+2)$ делит $2t(t+1)(2t-\alpha)$.

Хобарт и Хьюз [41]: точечный граф Γ сильно φ-однородной $EpG_\alpha(s,t)$ является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_\varphi(s{+}1,st/\alpha)$. В частности, он сильно регулярен с параметрами $v=1+(s+1)(1+st(s+2))/(\varphi\alpha)$, $k=(s+1)(1+st/\alpha)$, $\lambda=s+st(\varphi-1)/\alpha$, $\mu=\varphi(1+st/\alpha)$ и собственными значениями $k,s+1-\varphi,-(1+st/\alpha)$.

Хобарт и Хьюз [41]: если геометрия $\mathbf{S}$ является одноточечным расширением сети типа (n,m), то

(1) $m=n+1$ и $\mathbf{S}$ — инверсивная плоскость порядка n, или

(2) $m=(n+1)/2$ и $\mathbf{S}$ является 2-$(n^2+1,n+1,(n+1)/2)$-схемой.

Далее, мы имеем $\varphi(a,L)=n+1$, поэтому в первом случае геометрия треугольна, а во втором — нет.

Пример 1.1. Пусть q — степень нечетного простого числа, $G=PSL(2,q^2)$, H — подгруппа из G, изоморфная $PGL(2,q)$, G и H естественно действуют на проективной прямой $F_{q^2}\cup\infty$. Пусть точками геометрии $\mathbf{S}$ являются точки этой прямой, а блоками — G-сопряженные с $B=F_q\cup\infty$ подмножества. Так как стабилизатор блока B совпадает с

H, то $\mathbf{S}$ является расширенной сетью типа (2) из предыдущего результата. (Заметим, что $\mathbf{S}$ является полуинверсивной плоскостью, так как она естественно вкладывается в инверсивную плоскость и содержит половину блоков этой плоскости).

Пример 1.2. Пусть q — степень простого числа, W — $3 \times (q+1)$-матрица над F_q такая, что любые ее три столбца линейно независимы (столбцы W образуют овал в проективной плоскости $PG(2,q)$). Пусть точками геометрии $\mathbf{S}$ являются пары (i,x), где i — номер столбца W, $x \in F_q$; а блоками — вектора из пространства, порожденного строками W; пара (i,x) инцидентна w, если i-тая координата w равна x.

Тогда $\mathbf{S}$ является сильно однородным треугольным расширением сети типа (n,n).

Пример 1.3. Пусть G — дважды транзитивная группа подстановок на множестве $\mathcal{Y}$ из $n+1$ элементов такая, что только 1 фиксирует 3 точки, и пусть $|G| = (n+1)nm$. Точками геометрии $\mathbf{S}$ являются пары (i,j), где $i,j \in \mathcal{Y}$; а блоками — символы $[g]$, $g \in G$; пара (i,j) инцидентна g, если $j = ig$.

Тогда $\mathbf{S}$ является сильно $(n-1)$-однородным расширением сети типа (n,m).

В параграфе 1.1 получено описание параметров сильно $(s-2)$-однородных расширений частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$

Теорема 1.1 [68]. *Пусть $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$, $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$. Тогда либо геометрия $\mathcal{S}$ является расширением двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2,t)$, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3,2t)$ и дополнительный граф к блочному графу является псевдогеометрическим графом для $pG_{t+2}(2t+3,t^2+2t)$, либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\alpha = 1$, Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9,8)$, $pG_2(5,8)$, $pG_4(7,24)$, $pG_6(9,32)$ или $pG_{10}(13,120)$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EGQ(8,1)$, $EGQ(4,2)$, $EGQ(6,4)$, $EGQ(8,4)$ или $EGQ(12,10)$ соответственно;

(2) $t = \alpha > 1$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_6(9,8)$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_t(8,t)$ для некоторого $t \in \{2,...,5\}$;

(3) Γ — псевдогеометрический граф для $pG_3(6,20)$, $pG_4(7,3)$, $pG_4(7,4)$, $pG_4(7,8)$ или $pG_4(7,20)$ и $\mathcal{S}$ — это $EpG_2(5,8)$, $EpG_2(6,1)$, $EpG_3(6,2)$, $EpG_3(6,4)$ или $EpG_3(6,10)$ соответственно;

(4) Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_5(8,140)$, $pG_6(9,56)$, $pG_6(9,8r)$ $(r \in \{2,4\})$, $pG_6(9,2t)$ $(t \in \{3,7,13\})$, $pG_6(9,32)$, $pG_8(11,40)$, $pG_8(11,95)$ или $pG_8(11,2u)$ $(u \in \{4,16\})$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_4(7,80)$,

$EpG_2(8,14)$, $EpG_3(8,3r)$, $EpG_4(8,t)$, $EpG_5(8,20)$, $EpG_3(10,12)$, $EpG_4(10,$ $38)$ или $EpG_5(10,u)$ соответственно;

(5) $10 < s \leq 20$, *Γ — псевдогеометрический граф для одной из геометрий $pG_9(12,99)$, $pG_{12}(15,56)$, $pG_{12}(15,16)$, $pG_{12}(15,26)$, $pG_{15}(18,170)$, $pG_{16}(19,56)$, $pG_{17}(20,323)$, $pG_{18}(21,150)$ или $pG_{18}(21,24)$ и $\mathcal{S}$ — $EpG_\alpha(11,$ $9\alpha)$ $(\alpha \in \{3,4,6\})$, $EpG_\alpha(14,4\alpha)$ $(\alpha \in \{2,3,5,9\})$, $EpG_7(14,8)$, $EpG_7(14,13)$, $EpG_\alpha(17,10\alpha)$ $(\alpha \in \{2,3,8\})$, $EpG_9(18,28)$, $EpG_\alpha(19,17\alpha)$, $\alpha \in \{3,10,13\}$, $EpG_6(20,45)$ или $EpG_{15}(20,18)$ соответственно;*

(6) $20 < s \leq 40$, *Γ — псевдогеометрический граф для одной из геометрий $pG_{32}(35,136)$, $pG_{32}(35,136)$, $pG_{32}(35,136)$ или $pG_{32}(35,104)$ и $\mathcal{S}$ — это одна из геометрий $EpG_{11}(34,44)$, $EpG_{28}(34,112)$, $EpG_7(34,28)$ или $EpG_{17}(34,52)$ соответственно;*

(7) $40 < s$, *Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_{48}(51,880)$ или $pG_{48}(51,200)$ и $\mathcal{S}$ — одна из геометрий $EpG_{15}(50,264)$ или $EpG_\alpha(50,4\alpha)$ $(\alpha \in \{3,8,23,33\})$ соответственно.*

В работе Ф.Бюкенхаута и К.Юбо [10] рассматривается задача классификации локально полярных пространств, в частности, локально $GQ(s,t)$-графов. Там же получено решение этой задачи в случае $s = 2$.

В случае $s = 3$ описание локально $GQ(s,t)$-графов завершено в работе А.А. Махнева [11].

В случае $s = 4$ известны вполне регулярные локально $GQ(4,t)$-графы для $t \in \{2,4,6,8,11,16\}$ (см. [12–17]). Кроме того, известны сильно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы [18].

В параграфе 1.2 изучены дистанционно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы, $t \in \{1,12\}$. Тем самым завершена классификация дистанционно регулярных локально $GQ(4,t)$-графов.

Теорема 1.2 [72]. *Пусть Γ — связный вполне регулярный локально $GQ(4,1)$-граф диаметра, большего 2, с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда диаметр Γ равен 3 и $\mu \in \{4,6,8\}$.*

Теорема 1.3 [72]. *Пусть Γ — связный вполне регулярный локально $GQ(4,12)$-граф с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда диаметр Γ равен 3 и $\mu \in \{56,60,64,70,80,84\}$.*

Следствие 1.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный локально $GQ(4,t)$-граф с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $t = 1$, *либо $\mu = 4$ и Γ — граф Джонсона $J(10,5)$ или его стандартное частное, либо $\mu = 8$ и Γ имеет массив пересечений $\{25,16,1;1,8,25\}$;*

(2) $t=2$, Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(126,45,12,18)$ *на множестве векторов нормы* 1 *в* 6*-мерном ортогональном пространстве типа* "$-$" *над* $GF(3)$ *или* Γ — *единственный локально* $GQ(4,2)$*-граф с массивом пересечений* $\{45,32,12,1;1,6,32,45\}$*;*

(3) $t=6$, Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(726,125,28,20)$ *или* Γ — *граф с массивом пересечений* $\{125,96,1;1,48,125\}$.

Интересно, что графы диаметра, большего 2 из заключения следствия 1.1 существуют. Граф Мэтона группы $L_2(25)$ имеет массив пересечений $\{25,16,1;1,8,25\}$. Граф с цоколем группы автоморфизмов, изоморфным $SU_3(5)$ и стабилизатором $G_{\{F\}}$ антиподального класса F, изоморфным расширению экстраспециальной группы порядка 125 с помощью циклической группы порядка 24, имеет массив пересечений $\{125,96,1;1,48,125\}$.

Для подмножества вершин S графа Γ через $\Gamma(S)$ обозначим $\cap_{a\in S}([a]-S)$.

Граф Γ называется t*-изорегулярным*, если для любого $i\leq t$ и любого i-вершинного подмножества S число $|\Gamma(S)|$ зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного S. Ясно, что класс 2-изорегулярных графов совпадает с классом сильно регулярных графов. Граф Γ на v вершинах называется *абсолютно изорегулярным*, если он является $(v-1)$-изорегулярным. Далее, t-изорегулярный граф называется *точно* t*-изорегулярным*, если он не является $(t+1)$-изорегулярным.

Камерон [19, теорема 8.21] доказал, что каждый 5-изорегулярный граф Γ является абсолютно изорегулярным и, с точностью до перехода к дополнительному графу, является полным многодольным графом $K_{m\times n}$, пятиугольником или 3×3-решеткой. Далее, каждый точно 4-изорегулярный граф, с точностью до перехода к дополнительному графу, является псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$. Через $Izo(r)$ будем обозначать такой граф. При $r=1$ получим точечный граф единственного обобщенного четырехугольника порядка $(2,4)$, а при $r=2$ — граф Маклафлина.

Существование плотной сферической 5-схемы в S^{n-1} (см. [20]) равносильно существованию графа $Izo(r)$, где $n=(2r+1)^2-2$. В [20, следствие 4.7] доказано несуществование плотных 5-схем для бесконечного набора значений параметра r: $3,4,6,10,12,22,28,30,34,42,46,\ldots$.

В параграфе 1.3 найдены параметры 6 сильно регулярных подграфов из $\Gamma=Izo(r)$: $\Sigma=[a]$, $\Delta=\Gamma_2(a)$ для вершины $a\in\Gamma$; $\Sigma(b)$, $\Sigma_2(b)$ для вершины $b\in\Sigma$; $\Delta(c)$, $\Delta_2(c)$ для вершины $c\in\Delta$. Более того, множество вершин графа Σ имеет разбиение двумя сильно регулярными графами

$\Sigma \cap [c]$ и $\Sigma - [c]$ с одинаковыми параметрами $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$ [66, лемма 1.7].

Предложение 1.1. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_r(2r, 2r^3+3r^2-1)$. Тогда он имеет $v = 8r^4+16r^3+6r^2-2r-1$ вершин и собственные значения $k = 4r^4+6r^3, r, -(2r^3+3r^2)$ кратностей $1, f = 8r^4+16r^3+2r^2-6r, g = 4r^2+4r-2$ соответственно. Далее, для любой вершины a:*

(1) *подграф $\Sigma = [a]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$, имеет $v_1 = 4r^4+6r^3$ вершин и собственные значения $k_1 = 2r^4+r^3-3r^2+r, r_1 = r, s_1 = -(r^3+r^2-r)$ кратностей $1, f_1 = 4r^4+6r^3-4r^2-4r+2, g_1 = 4r^2+4r-3$ соответственно;*

(2) *подграф $\Delta = \Gamma_2(a)$ сильно регулярен, имеет $v_2 = 4r^4+10r^3+6r^2-2r-2$ вершин и собственные значения $k_2 = 2r^4+3r^3, r_2 = r, s_2 = -(r^3+2r^2)$ кратностей $1, f_2 = 4r^4+10r^3+2r^2-6r, g_2 = 4r^2+4r-3$ соответственно.*

Предложение 1.2. *Пусть Σ — псевдогеометрический граф для $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$. Тогда он имеет $v = 4r^4+6r^3$ вершин и собственные значения $k = 2r^4+r^3-3r^2+r, r, -(r^3+r^2-r)$ кратностей $1, f = 4r^4+6r^3-4r^2-4r+2, g = 4r^2+4r-3$ соответственно. Далее, для любой вершины $b \in \Sigma$:*

(1) *подграф $\Sigma(b)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-2}(2r-2, (r^3-3r-2)/2)$, имеет $v_1 = 2r^4+r^3-3r^2+r$ вершин и собственные значения $r^4-r^3-3r^2+3r, r, -(r^3-3r)/2$ кратностей $1, f_1 = 2r^4+r^3-7r^2-3r+3, g_1 = 4r^2+4r-4$ соответственно;*

(2) *подграф $\Sigma_2(b)$ сильно регулярен с параметрами $(2r^4+5r^3+3r^2-r-1, r^4+r^3-r^2, (r^4-r^3-3r^2+3r)/2, (r^4-r^2)/2)$ и собственными значениями $r^4+r^3-r^2, r, -(r^3+2r^2-r)/2$ кратностей $1, 2r^4+5r^3-r^2-5r+2, 4r^2+4r-4$ соответственно.*

Предложение 1.3. *Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(4r^4+10r^3+6r^2-2r-2, 2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, r^4+r^3)$ и собственными значениями $k = 2r^4+3r^3, r, -(r^3+2r^2)$ кратностей $1, 4r^4+10r^3+2r^2-6r, 4r^2+4r-3$ соответственно. Если $r \geq 2$, то для любой вершины $c \in \Delta$:*

(1) *подграф $\Delta(c)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$ и собственными значениями $r^4-2r^2+r, r, -(r^3+r^2-2r)/2$ кратностей $1, 2r^4+3r^3-4r^2-4r+3, 4r^2+4r-4$ соответственно;*

(2) *подграф $\Delta_2(c)$ сильно регулярен с параметрами $(2r^4+7r^3+6r^2-2r-3, r^4+2r^3, (r^4-3r^2+2r)/2, (r^4+r^3)/2)$, собственными значениями*

$r^4+2r^3, r, -(r^3+3r^2)/2$ *кратностей* $1, 2r^4+7r^3+2r^2-6r, 4r^2+4r-4$ *соответственно.*

Далее, с помощью метода Хигмена для автоморфизма g графа $Izo(r)$ найдена формула для значения характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-2$

$$\chi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/((r+1)(2r+1))+(2r^2+2r-1)/(r+1).$$

Найдены возможные простые порядки автоморфизмов g графа $Izo(r)$ таких, что подграф $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ является пустым, кликой или кокликой.

Теорема 1.4 [66]. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω — *пустой граф, то либо*

(i) p *делит* $(2r+1)(4r^3+6r^2-1)$, *в частности,* $p\neq 2$, *либо*

(ii) *если* $p=3$, *то* $r\equiv 1 \pmod 3$, $\alpha_1(g)=wr(2r+1)$ *и* $w+1$ *делится на* $r+1$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то* $n=1$ *и либо* $p=37$, $r=37u+17$, *либо* $p=2$;

(3) *если* Ω *является* m*-кокликой,* $m\geq 2$, *то* $3\leq m\leq 4r^2+4r-2$, p *делит* r *и* $m+1$.

А.А. Махнев [21] доказал, что псевдогеометрический граф для $pG_2(5, 32)$ не существует. Так как окрестность вершины в графе $Izo(3)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(5,32)$, то и граф $Izo(3)$ не существует. Однако вопрос о существовании сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) (это параметры второй окрестности вершины в графе $Izo(3)$) остается открытым.

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (640,243, 66,108), a — вершина графа Γ. Тогда Γ имеет собственные значения $k=243, r=3, s=-45$ и достигается равенство во втором условии Крейна $(s+1)(k+s+2rs)\leq (k+s)(r+1)^2$. Поэтому $[a]$ является сильно регулярным графом с параметрами (243,66,9,21) и $\Gamma_2(a)$ является сильно регулярным графом с параметрами (396,135,30,54). В работах [22, 23] найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярных графов с параметрами (243,66,9,21) и (396,135,30,54). С помощью этих результатов найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108). При этом решалась задача восстановления автоморфизма графа по его действию на окрестности и на антиокрестности неподвижной точки.

Теорема 1.5 [67]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(640, 243, 66, 108)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка*

p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{240, 480\}$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) \in \{96, 192, 288, 384, 480, 592\}$;*

(2) *Ω является 1-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 99$;*

(3) *Ω является m-кокликой, $m \geq 2$, $p = 3$ и $(|\Omega|, \alpha_1(g)) \in \{(4, 204), (13, 87), (13, 519), (22, 402), (31, 285), (37, 351), (40, 168)\}$;*

(4) *$p = 3$, Ω является регулярным графом степени $3t$, $0 \leq t \leq 24$, $\alpha_1(g) = 54r + 9t + 135q + 6s$, $s \neq 0$ и $28 \leq |\Omega| = 1 + 3t + 3s \leq 100$;*

(5) *$p = 2$, Ω содержит вершину степени $2t + 1$, $\alpha_1(g) = 36r + 6t + 45q + 12s + 12$, q четно, $-2 \leq q \leq 6$, $s \neq 0$ и $16 \leq |\Omega| = 2t + 2 + 6s \leq 154$.*

Следствие 1.2. *Сильно регулярный граф с параметрами $(640, 243, 66, 108)$ не является реберно симметричным.*

Граф назовем псевдоциклическим, если он регулярен степени 2. В главе 2 перечислены массивы пересечений локально псевдоциклических дистанционно регулярных графов с числом вершин, не большим 4096. Для примитивных графов с числом вершин, не большим 1000, найдены автоморфизмы. Доказано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, нет (решена проблема Лама).

В.П. Буриченко и А.А. Махнев [24] нашли массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с $\mu > 1$ и числом вершин не большим 1000. Отметим, что в [24] пропущены массивы $\{9, 6, 3; 1, 2, 3\}$ графа Хемминга $H(3, 4)$ с $v = 64$, $\{12, 9, 6, 3; 1, 2, 3, 4\}$ графа Хемминга $H(4, 4)$ с $v = 256$ и массив $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, зато имеется лишний массив $\{13, 10, 7; 1, 2, 7\}$ (граф с таким массивом пересечений не существует). Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$ найдены А.А. Махневым в [25], а сам граф построен С.С. Кротовым с соавторами в [26].

Предложение 2.1 [24]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 1000$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и $\mu > 1$, то либо Γ имеет массив пересечений графа Хэммингa $H(n, 3)$, $n = 3, 4$, либо верно одно из утверждений:*

(1) *Γ — примитивный граф с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$;*

(2) *Γ — антиподальный граф с $\mu = 2$ и массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r \in \{3, 4, ..., 21\} - \{10, 16\}$ и $v = 2r(r + 1)$;*

(3) *Γ — антиподальный граф с $\mu \geq 3$ и массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$,*

$\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

Заметим, что В.П. Буриченко и А.А. Махнев не рассматривали случай $\mu = 1$. А.А. Махнев поставил задачу нахождения массивов пересечений антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = 2$, $\mu = 1$ и числом вершин, не большим 1000. В параграфе 2.1 решена более общая задача. Найдены массивы пересечений антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda \leq 2$ и $\mu = 1$. Далее, найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$.

Теорема 2.1 [70]. *Пусть* Γ *является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с* $\lambda \leq 2$ *и* $\mu = 1$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\lambda = 0$ *и* $k \in \{2, 6, 56\}$;

(2) $\lambda = 1$ *и* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{2^e, 2^e - 2, 1; 1, 1, 2^e\}$;

(3) $\lambda = 2$, Γ *имеет массив пересечений* $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$ *и спектр* $42^1, 6^{774}, -1^{30}, -5^{903}$.

Существование графа в пункте (1) теоремы равносильно существованию сильно регулярного графа с параметрами $((k + 1)^2 + 1, k + 1, 0, 1)$ (графа Мура).

А.А. Махнев и М.С. Нирова нашли массивы пересечений графов с $\lambda = 2$, $\mu = 1$, имеющих не более 4096 вершин.

Теорема 2.2 [74]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с* $\lambda = 2$, $\mu = 1$, *имеющий не более* 4096 *вершин. Тогда* Γ *имеет один из следующих массивов пересечений:*

(1) $\{21, 18; 1, 1\}$ $(v = 400)$;

(2) $\{6, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 2\}$ (Γ *— обобщенный восьмиугольник порядка* $(3, 1)$, $v = 160$), $\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$ (Γ *— обобщенный шестиугольник порядка* $(3, 1)$, $v = 52$), $\{12, 9, 9; 1, 1, 4\}$ (Γ *— обобщенный шестиугольник порядка* $(3, 3)$, $v = 364$), $\{6, 3, 3, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 1, 2\}$ (Γ *— обобщенный двенадцатиугольник порядка* $(3, 1)$, $v = 1456$);

(3) $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$ ($v = 1 + 18 + 270 + 243 = 532$, Γ_3 *— сильно регулярный граф*); $\{33, 30, 8; 1, 1, 30\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$, $\{21, 18, 12, 4; 1, 1, 6, 21\}$ ($v = 1 + 21 + 378 + 756 + 144 = 1300$, $q^4_{3,4} = 0$).

Завершает классификацию дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и не более 4096 вершинами

Следствие 2.1 [74]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, с* $\lambda = 2$*, имеющий не более* 4096 *вершин. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) Γ *— примитивный граф с массивом пересечений* $\{6,3,3;1,1,2\}$, $\{9,6,3;1,2,3\}$, $\{12,9,9;1,1,4\}$, $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{18,15,9;1,1,10\}$, $\{19,16,8;1,2,8\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{30,27,24;1,2,10\}$, $\{33,30,8;1,1,30\}$, $\{33,30,15;1,2,15\}$, $\{35,32,8;1,2,28\}$, $\{35,32,28;1,4,8\}$, $\{39,36,4;1,1,36\}$, $\{39,36,20;1,2,20\}$, $\{39,36,22;1,2,18\}$, $\{39,36,27;1,4,13\}$, $\{42,39,24;1,2,12\}$, $\{48,45,9;1,1,40\}$, $\{51,48,8;1,4,36\}$, $\{51,48,24;1,2,24\}$, $\{55,52,34;1,2,22\}$, $\{58,55,8;1,2,44\}$, $\{60,57,16;1,4,30\}$, $\{60,57,32;1,4,18\}$, $\{63,60,10;1,2,54\}$, $\{63,60,49;1,4,15\}$, $\{68,65,32;1,4,40\}$, $\{75,72,8;1,2,60\}$, $\{75,72,42;1,4,50\}$, $\{75,72,31;1,8,45\}$, $\{80,77,61;1,7,20\}$, $\{90,87,60;1,15,18\}$, $\{99,96,12;1,4,88\}$, $\{99,96,20;1,4,72\}$, $\{99,96,6;1,6,88\}$, $\{120,117,5;1,5,108\}$, $\{143,140,34;1,7,110\}$, $\{147,144,39;1,12,117\}$, $\{224,221,32;1,16,208\}$*;*

(2) Γ *— антиподальный граф с* $\mu = 1$ *и массивом пересечений* $\{42,39,1;1,1,42\}$*;*

(3) Γ *— антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r+1,2r-2,1;1,2,2r+1\}$, $r \in \{3,4,...,44\} - \{10,16,28,34,38\}$ *и* $v = 2r(r+1)$*;*

(4) Γ *— антиподальный граф с* $\mu \geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15,12,1;1,4,15\}$, $\{18,15,1;1,5,18\}$, $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,4,35\}$, $\{45,42,1;1,6,45\}$, $\{42,39,1;1,3,42\}$, $\{63,60,1;1,4,63\}$, $\{75,72,1;1,12,75\}$, $\{99,96,1;1,4,99\}$, $\{108,105,1;1,5,108\}$, $\{147,144,1;1,16,147\}$, $\{171,168,1;1,12,171\}$, $\{243,240,1;1,20,243\}$*;*

(5) Γ *— примитивный граф с массивом пересечений* $\{6,3,3,3;1,1,1,2\}$, $\{12,9,6,3;1,2,3,4\}$, $\{21,18,12,4;1,1,6,21\}$, $\{15,12,9,6,3;1,2,3,4,5\}$, $\{6,3,3,3,3,3;1,1,1,1,1,2\}$, $\{18,15,12,9,6,3;1,2,3,4,5,6\}$.

В [27-30] найдены возможные простые порядки автоморфизмов графов с 4 первыми массивами пересечений из пункта (1) заключения предложения 2.1. В параграфе 2.2 изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{51,48,8;1,4,36\}$. Тем самым завершается описание автоморфизмов графов из пункта (1) заключения предложения. Ни один из этих графов не является реберно симметричным.

Граф с массивом пересечений $\{51,48,8;1,4,36\}$ имеет $v = 1+51+612+136 = 800$ вершин и спектр $51^1, 11^{102}, 3^{425}, -9^{272}$, причем Γ_2 — псевдогеометрический граф для $pG_{39}(51,11)$.

Теорема 2.3 [73]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{51,48,8;1,4,36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из*

G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,17\}$ и выполняются следующие утверждения:

(1) Ω — пустой граф и либо

(i) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 400 + 100l - 60s$, $\alpha_2(g) = 120s$ и $\alpha_3(g) = 400 - 100l - 60s$, либо

(ii) $p = 2$, $\alpha_1(g) = 400 + 40r - 24t$, $\alpha_2(g) = 48t$ и $\alpha_3(g) = 400 - 40r - 24t$;

(2) $p = 17$, $|\Omega| = 1$, $\alpha_2(g) = 204$ и либо $\alpha_1(g) = 595, \alpha_3(g) = 0$, либо $\alpha_1(g) = 255$ и $\alpha_3(g) = 340$;

(3) $p = 3$, либо

(i) $2 \leq |\Omega| \leq 14$ и Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3, либо

(ii) $14 \leq |\Omega| \leq 62$, либо

(iii) $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 120r+40-5\alpha_0(g)$, $\alpha_2(g) = 760+4\alpha_0(g)-120r$ и $65 \leq |\Omega| \leq 98$;

(4) $p = 2$, $|\Omega|$ четно и либо

(i) $\alpha_1(g) = \alpha_(g) = 0$ и $\Omega \in \{32, 80\}$, либо

(ii) $4 \leq |\Omega| \leq 62$, либо

(iii) $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 80r - 5\alpha_0(g) \neq 0$, $\alpha_2(g) = 20\alpha_0(g) + 800 - 80r$ и $64 \leq |\Omega| \leq 106$.

Следствие 2.2. *Граф с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ не является реберно симметричным.*

Далее, найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$.

Теорема 2.4 [70]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω — пустой граф и либо

(i) $p = 43$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 430r$ и $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, либо

(ii) $p = 5$, $\alpha_3(g) = 200s+120$, $\alpha_1(g) = 50t+40$ и $5t+20s \leq 155$, либо

(iii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 80s + 40$, $\alpha_1(g) = 80l$ и $l + s \leq 21$;

(2) Ω лежит в антиподальном классе графа Γ и либо

(i) $p = 7$, $|\Omega| = 26$ и $|\alpha_2(g)| \geq 42 \cdot 26$, либо

(ii) $p = 3$, $|\Omega| \in \{1, 4, ..., 40\}$ и $|\alpha_1(g)| \leq 42|\Omega|$, либо

(iii) $p = 2$, $|\Omega| \in \{2, 4, ..., 38\}$ и $|\alpha_2(g)| \geq 42|\Omega|$;

(3) $p = 13$ и Ω является 4-кликой;

(4) $p = 2$ и Ω — шестиугольник или вторая окрестность вершины в графе Хофмана-Синглтона.

Следствие 2.3. *Группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$ *действует интранзитивно на множестве вершин.*

В параграфе 2.4 изучаются сильно регулярные графы с числом вершин, не большим 100, и их автоморфизмы.

Хорошо известно, что имеются 30 наборов параметров неизвестных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100. Из результатов Бехбахани и Лама [31] следует, что только 11 из них могут отвечать реберно симметричным графам.

Предложение 2.2. *Пусть* Γ *— неизвестный реберно симметричный сильно регулярный граф с числом вершин, не большим* 100, *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) Γ *имеет параметры* $(85, 30, 11, 10)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 17\}$;
(2) Γ *имеет параметры* $(85, 54, 33, 36)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 17\}$;
(3) Γ *имеет параметры* $(88, 27, 6, 9)$ *и* $\{2, 3, 11\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11\}$;
(4) Γ *имеет параметры* $(88, 60, 41, 40)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$;
(5) Γ *имеет параметры* $(96, 45, 24, 18)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$;
(6) Γ *имеет параметры* $(96, 50, 22, 30)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$;
(7) Γ *имеет параметры* $(96, 60, 38, 36)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$;
(8) Γ *имеет параметры* $(99, 42, 21, 15)$ *и* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$;
(9) Γ *имеет параметры* $(99, 56, 28, 36)$ *и* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$;
(10) Γ *имеет параметры* $(100, 33, 8, 12)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$;
(11) Γ *имеет параметры* $(100, 66, 44, 42)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$.

Проблема Лама. Существуют ли новые реберно симметричные сильно регулярные графы с числом вершин, не большим 100?

А.А. Махневым и М.С. Нировой предложена программа решения проблемы Лама и сделан первый шаг на пути реализации этой программы.

Теорема 2.5 [69]. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(85, 30, 11, 10)$, g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ *— пустой граф и либо* $p = 5$, $\alpha_1(g) \in \{25, 70\}$, *либо* $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 34$;

(2) Δ *является* β*-кликой, и либо*

(*i*) $p = 2$ *и* $\beta = 3$, $\alpha_1(g) \in \{4, 22, 40, 58, 76\}$ *или* $\beta = 5$, $\alpha_1(g) \in \{14, 32, 50, 68\}$ *или* $\beta = 7$, $\alpha_1(g) \in \{6, 24, 42, 58, 76\}$, *либо*

(*ii*) $p = 3$ *и* $\beta = 1$, $\alpha_1(g) \in \{12, 39, 66\}$ *или* $\beta = 4$, $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$ *или* $\beta = 7$, $\alpha_1(g) \in \{15, 42, 69\}$;

(3) *$p=5$, Δ является γ-кокликой и $\gamma=5$, $\alpha_1(g)\in\{5,50\}$ или $\gamma=10$, $\alpha_1(g)\in\{30,75\}$;*

(4) *$p=3$, $|\Delta|=3t+1$, $2\le t\le 7$ и $(12t-30+\alpha_1(g))/9$ сравнимо с 1 по модулю 3;*

(5) *$p=2$, $|\Delta|=2s+1$, $2\le s\le 13$ и $8s-30+\alpha_1(g)$ делится на 18.*

Следствие 2.4. *Сильно регулярный граф с параметрами $(85,30,11,10)$ не является вершинно симметричным.*

В работах [32-35] доказано несуществование реберно симметричных сильно регулярных графов с параметрами $(88,27,6,9)$, $(88,60,41,40)$, $(96,45,24,18)$, $(96,50,22,30)$, $(96,60,38,36)$, $(99,42,21,15)$ и $(99,56,28,36)$. Завершает вышеуказанную программу

Теорема 2.6 [71]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(100,33,8,12)$, g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Δ — пустой граф, $p=2$ и $\alpha_1(g)=20t$ или $p=5$ и $\alpha_1(g)=0,50,100$;*

(2) *Δ является 4-кликой, $p=2$ и $\alpha_1(g)-12$ делится на 20, или $p=3$ и $\alpha_1(g)-12$ делится на 30;*

(3) *Δ является γ-кокликой, либо*

(*i*) *$\gamma=1$, $p=3$ и и $\alpha_1(g)=3,33,63,93$ или $p=11$ и $\alpha_1(g)=33$, либо*

(*ii*) *$p=3$, $\gamma=4,7,...,16$ и $\alpha_1(g)-3\gamma$ делится на 30;*

(4) *Δ является объединением $n\ge 2$ изолированных m_i-клик, $p=2$, $m_i\in\{2,4\}$ и $|\Delta|\le 20$;*

(5) *Δ содержит геодезический 2-путь и либо*

(*i*) *$p=3$, $|\Delta|=3t+1$, $3\le t\le 8$, либо*

(*ii*) *$p=2$, $|\Delta|=2s$, $3\le s\le 25$.*

Следствие 2.5. *Сильно регулярные графы с параметрами $(100,33,8,12)$ и $(100,66,44,42)$ не являются реберно симметричными.*

Из следствий 2.4–2.5 и результатов [32-35] получаем решение проблемы Лама.

Следствие 2.6. *Сильно регулярные графы с параметрами из заключения предложения 2.2 не являются реберно симметричными.*

В главе 3 приведен обзор свойств 4-графов и найдены автоморфизмы $4(4,6,5)$-графа с массивом пересечений $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$. Вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144,125,32,1;1,8,125,144\}$. Найдены также автоморфизмы указанного графа.

Аналогичные задачи возникают для $AT4(3,5,4)$-графа с массивом пересечений $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$ и вторай окрестности вершины в этом графе с массивом пересечений $\{75,64,18,1;1,6,64,75\}$ (Журтов А.Х., Шерметова М.Х.) и для $AT4(5,7,r)$-графа, $r \in \{3,6\}$ с массивом пересечений $\{329,288,(r-1)84/r,1;1,84/r,288,329\}$ (Циовкина Л.Ю.) и вторай окрестности вершины в этом графе с массивом пересечений $\{245,216,(r-1)60/r,1;1,60/r,216,245\}$.

Доказано, что для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с собственным значением $\theta_2 = -1$ граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. С помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44,35,3;1,$
$5,42\}$.

В § 3.3 изучены свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Наконец, перечислены массивы пересечений в случае, когда Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \leq 11$. В § 3.4 найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$ (для которого граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников).

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. Тогда выполняется фундаментальная граница [36]:

$$(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d},\ b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальная границе, называется плотным. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-. Фундаментальная граница может быть записана в виде $k(a_1 + b^+b^-) \leq (a_1-b^+)(a_1-b^-)$. Хорошо известно, что плотный граф диаметра 3 является графом Тэйлора. В этом случае окрестность любой вершины является сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4, $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа $\bar{\Gamma}$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{k, k-a_1-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k-a_1-1, k\}$. Далее, Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q^4_{11} = 0$. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, и индексом антиподальности r, то все параметры Γ выражаются через p, q, r. В этом случае назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p, q, r)$-графом).

Предложение 3.1 [57]. *Пусть Γ является $AT4(p, q, r)$-графом, u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Если $q = p + 2$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *число $2p(p+1)(p+2)/r$ четно, $r < p+2$, r — делит $2(p+1)$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{(p+1)(p+2)^2, (p+3)(p+1)^2, (r-1)2(p+1)(p+2)/r, 1; 1, 2(p+1)(p+2)/r, (p+3)(p+1)^2, (p+1)(p+2)^2\}$;*

(2) *антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ является графом с параметрами $((p+1)^2(p+4)^2/2, (p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), 2(p+1)(p+2))$ и собственными значениями $p, -(p^2+4p+4)$;*

(3) *вторая окрестность вершины в графе $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$ и собственными значениями $p, -(p^2+2p+2)$, имеющий дистанционно регулярное r-накрытие с массивом пересечений $\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}$.*

По предложению 3.1 вторая окрестность вершины в $4(4, 6, 5)$-графе является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Теорема 3.1 [75]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 200(4 + m - l)$, $\alpha_2(g) = 1000l$ и $\alpha_3(g) = 200(16 - m - 4l)$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80(4 + m - l)$, $\alpha_2(g) = 400l$ и $\alpha_3(g) = 80(46 - m - 4l)$;*

(2) *g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, $p = 5$ и $\alpha_4(g) = v$;*

(3) *Ω является антиподальным классом графа Γ, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 340 + 680n$, $\alpha_2(g) = 2975$ и $\alpha_3(g) = 680(1 - n)$;*

(4) *Ω является объединением двух антиподальных классов, $p = 7$, $\alpha_1(g) = 910 + 280n - 70l$, $\alpha_2(g) = 350l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$, $l = 1, 5, 9$;*

(5) *$p = 5$, $t = 5, s = 5$, $\alpha_1(g) = 700 + 200(m - l)$, $\alpha_2(g) = 1000l - 125$ и $\alpha_3(g) = 200(17 - m - 4l)$.*

Следствие 3.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом* *пересечений* $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *разрешима.*

Для доказательства теоремы 3.1 полезны следующие результаты.

Теорема 3.2 [75]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(204, 28, 2, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 34$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30l - 6$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20m + 4$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 70r + 28$, *либо* $n = 4$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 50s$, $s \le 2$;

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t - 6l + 4$ *и* $l = 8, 10, ..., 34$;

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p = 3$, Ω *– октаэдр и* $\alpha_1(g) = 30t + 18$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, *степени вершин в* Ω *равны* $2, 4, ..., 26$ *и* $|\Omega| = 4, 6, ..., 34$.

Следствие 3.2. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(204, 28, 2, 4)$ *и группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве его вершин. Тогда* $S(G) = O_2(G)$, *цоколь* $\bar{T}$ *группы* $\bar{G} = G/O_2(G)$ *изоморфен* $L_2(16)$ *и либо группа* G *изоморфна* $\mathrm{Aut}(L_2(16))$, *либо* $|\bar{G} : \bar{T}| = 2$, $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 2$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* $O_2(G)$, *либо* $\bar{G} = \bar{T}|$ *и* $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 4$.

Теорема 3.3 [75]. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(800, 204, 28, 60)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 200l$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 40m$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 204$, *либо* $n = 5$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 200s + 20$, *либо* $n = 2$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 280t + 168$;

(3) Ω *является* l*-кокликой, либо* $p = 3$, $l = 3m + 2$, $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, *либо* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80t + 4l$ *и* $l = 8, 10, ..., 92$;

(4) Ω *является объединением* m *изолированных* 5*-клик,* $2 \le m \le 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p = 3$, Ω *является объединением* $3m + 1$ *полных многодольных графов* $K_{4\times 2}$ *и* $\alpha_1(g) = 96m + 120t + 72$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $|\Omega| = 2l \le 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, ..., 26$, *степени вершин в* Ω *равны* $0, 2, ..., 34$ *и* $\alpha_1(g) = 80t + 8l$.

Следствие 3.3. *Если сильно регулярный граф* Γ *с параметрами* $(800, 204, 28, 60)$ *является вершинно симметричным, то* $|\mathrm{Aut}(\Gamma)|$ *не делится на* 17*. В частности,* Γ *не является реберно симметричным.*

Перечислим автоморфизмы дистанционно регулярного графам с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Теорема 3.4 [76]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$*,* $\alpha_1(g) = 170$*,* $\alpha_2(g) = 25 \cdot 85$ *и* $\alpha_3(g) = 680$*, либо* $p = 7$*,* $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$*,* $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$*, и* $\alpha_3(g) = 20 \cdot 7(16 - 6s) - 420t$*, либо* $p = 5$*,* $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$*,* $\alpha_4(g) = 25l$*,* $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ *и* $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$*,* l *делится на* 6*;*

(2) Ω *— непустой граф и* $p \leq 13$*.*

Следствие 3.4. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$*. Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ*, то* G *разрешима.*

Для доказательства теоремы 3.4 полезен следующий результат.

Теорема 3.5 [76]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(595, 144, 18, 40)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$ *и* $\alpha_2(g) = 425$*, либо* $p = 7$ *и* $\alpha_2(g) = 210l + 35$*, либо* $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l + 125$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$*,* $p = 3$ *и* $\alpha_2(g) = 90r$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_2(g) = 60r + 30$*, либо* $n = 5$*,* $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 50s + 20$*;*

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $p = 2$*,* $\alpha_2(g) = 60m - 5l + 25$ *и* $l = 5, 7, ..., 91$*;*

(4) Ω *является объединением* m *изолированных* 5*-клик,* $p = 5$*,* $m \leq 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l - 25m + 125$*;*

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \leq 29$*.*

Ранее было известно, что дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ тогда и только тогда, когда граф Γ_3 сильно регулярен. Однако параметры графа Γ_3 были неизвестны.

Теорема 3.6 [78]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3*, для которого граф* Γ_3 *сильно регулярен. Тогда* $\theta_2 = -1$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_2 = a_3 + 1$, $b_1 = rc_2$ *и граф* $\bar{\Gamma}_3$ *является псевдогеометрическим для* $pG_{c_3}(k, r)$*;*

(2) *если* Γ *— антиподальный граф и граф* Γ_2 *сильно регулярен, то либо* Γ *— граф Тэйлора без треугольников, либо граф* $\bar{\Gamma}_2$ *является псевдогеометрическим для* $GQ(r-1, c_2+1)$.

Замечание 3.1. *Пусть псевдогеометрический граф для* $GQ(s,t)$ *имеет разбиение множества вершин множеством* $\mathcal{S}$ *клик порядка* $s+1$ *(спред). Превратив* $\mathcal{S}$ *в множество коклик, по [**?**, предложение 12.5.2] получим дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{st, s(t-1), 1; 1, t-1, st\}$.

Обобщенные четырехугольники имеют спред для порядков $(s,1), (1,t)$, $(q,q), (q,q^2), (q-1,q+1)$ для q, являющихся степенями простых чисел, $(q+1, q-1)$ для q, являющихся степенями 2.

Следствие 3.6 [78]. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ *не существует.*

Несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ независимо получено в [37].

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_i может быть сильно регулярным для $i = 2$ или $i = 3$. Нахождение параметров Γ_i по массиву пересечений графа Γ является прямой задачей. Нахождение массива пересечений графа Γ по параметрам Γ_i является обратной задачей. Прямая и обратная задачи решены для $i = 3$ в теореме 3.6.

В § 3.4 продолжено решение обратной задачи в случаях, когда графы Γ_3 или $\bar{\Gamma}_2$ являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника.

Теорема 3.7 [82]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3*, для которого граф* Γ_3 *или граф* Γ_2 *сильно регулярен. Тогда графы* $\bar{\Gamma}_3$ *или* Γ_2 *не являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника.*

Пусть дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности. Юришич и Видали доказали, что [6, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$.

Теорема 3.8 [82]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра 3. Если* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника* $GQ(l,t)$*, то* $\bar{\Gamma}_3$ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{(l-1)t}(lt, l-1)$ *и* Γ *имеет массив пересечений*

$\{lt, c_2(l-1), t+1; 1, c_2, (l-1)t\}$ *(массив Юришича-Видали первого типа для $a = t, p = l-1, c = c_2$).*

Обратная задача решена для $i = 2$ в [65, теорема 1].

Предложение 3.2. *Пусть для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(v, \kappa, \lambda, \mu)$, собственными значениями $\kappa, r, -s$ и $x = b_2 + c_2$. Тогда можно представить массив пересечений Γ в виде:*

(1) $b_0 = (\mu + rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(r(s-1)) - s$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(r^2 s(s-1))$, $c_2 = x(\mu x - rs(s-1))/(r^2 s(s-1))$, $c_3 = \mu x/(r(s-1))$, *и для* $u = \sqrt{(\mu x - s(s-1)(x(r+2s) - r(s-1)))^2 - 4s^3 x(-r+x)(r+s)(s-1)^2}$ Γ *имеет спектр: значение* $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x - u)/(2rs(s-1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1) - u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, *значение* $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x + u)/(2rs(s-1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1) + u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, *значение* $-\mu x/(rs(s-1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(s-1)/(\mu(r+s))$;

(2) $b_0 = (\mu + rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(s(r+1)) + r$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(rs^2(r+1))$, $c_2 = x(\mu x + rs(r+1))/(rs^2(r+1))$, $c_3 = \mu x/(s(r+1))$, *и для* $u = \sqrt{(\mu x + r(r+1)(x(2r+s) + s(r+1)))^2 - 4r^3 x(r+1)^2(r+s)(s+x))}$ *граф* Γ *имеет спектр: значение* $(rs(r+1)(-r+x-1) + \mu x - u)/(2rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1) + u(x(\mu(2r+s+1) + rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$, *значение* $(rs(r+1)(-r+x-1) + \mu x + u)/(2rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1) - u(x(\mu(2r+s+1) + rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$, *значение* $\mu x/(rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(r+1)/(\mu(r+s))$ *или*

(3) $\{\kappa, \kappa-1, 1; 1, \kappa-1, \kappa\}$.

Теорема 3.9 [82]. *Пусть $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(s,r)$. Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr, s-1)$ с собственными значениями $\kappa = s^2 r, r, -s$ и для $\mu = s(s-1)r$, $x = b_2 + c_2$ выполняется одно из утверждений:*

(1) Γ *имеет массив типа* (1) *и является антиподальным графом с массивом пересечений* $\{sr, s(r-1), 1; 1, r-1, sr\}$;

(2) $b_0 = sx$, $b_1 = r(r+1+xs-x)/(r+1)$, $b_2 = x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2 = x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3 = (s-1)rx/(r+1)$, $(r+1)$ *делит* $(s-1)x$, s *делит* $x(r+1-x)$.

В главе 4 изучены общие свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Перечислены массивы пересечений графов в случае, когда Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \leq 11$. Найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$.

Теорема 4.1 [80]. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$b_1 = rc_2$, $b_2 = a_3+1$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$, $c_3 = r(c_2+1)$, $a_1 = a_3+r-1$, $k_2 = kr$, $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$, $p^1_{33} = a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu(\Gamma_3)$ и Γ имеет массив пересечений $\{r(c_2+1) + a_3, rc_2, a_3 + 1; 1, c_2, r(c_2 + 1)\}$;*

(2) *если $a_3 = \alpha(c_2 + 1)$, то $k = (r + \alpha)(c_2 + 1)$, Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(r + \alpha, \alpha(c_2 + 1))$ и $k_3 = (r + \alpha)(\alpha(c_2 + 1) + 1)$;*

(3) *если $\alpha = 1$, то Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(r+1, c_2+1)$, граф Γ имеет массив пересечений $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2 + 1)\}$, собственные значения $\theta_1 = c_2 + r + 1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -c_2 - 1$ и $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(r + 1, 2c_2 + 2)$.*

Известно существование следующих сильно регулярных графов без треугольников:

а) полный двудольный граф $K_{k,k}$;

б) граф Мура с параметрами $(k^2 + 1, k, 0, 1)$, $k = 2, 3, 7$ (неизвестно существование графа Мура с $k = 57$);

в) граф Клебша с параметрами $(16, 5, 0, 2)$, граф Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, граф Матье с параметрами $(77, 16, 0, 4)$, граф Хигмена-Симса с параметрами $(100, 22, 0, 6)$.

Теорема 4.2 [80]. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Если Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \leq 11$, то Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$, $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ или $\{(r + 5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r = 4, 6, 10, 16, 19, 24, 28, 40, 46, 52, 58, 60, 70, 79$.*

В случае $r = 4$ получим граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, автоморфизмы которого найдены в [77]. Такой граф имеет спектр $69^1, 13^{69}, -1^{276}, -15^{46}$ и $1 + 69 + 276 + 46 = 392$ вершины.

Теорема 4.3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 23\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 7$, $\alpha_3(g) = 98s$, $\alpha_2(g) = 198t$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ и $\alpha_2(g) = 56t$;*

(2) *$|\Omega| = 1$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$ и $\alpha_3(g) = 46$;*

(3) *$|\Omega| = 21s + 14$, $p = 3$, $s = 0, 1, 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 84t$.*

Следствие 4.1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то либо* $|G| = 8\cdot 49$ *и* Γ *является графом Кэли, либо* $G = Z(G) \times L$, $Z(G) \cong Z_7$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ *и* L_a *— силовская 3-подгруппа из* L, *либо* G *содержит подгруппу индекса* 2, *изоморфную* $Z_7 \times L_2(7)$, $|L_a| = 6$ *и* $G/S(G) \cong PGL_2(7)$.

В главе 5 изучаются максимальные 1-коды в дистанционно регулярных графах диаметра 3. Юришич и Видали доказали, что дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий локально регулярный максимальный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае граф имеет собственное значение $\theta = -1$ и граф Γ_3 являетсяпсевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$. Во втором случае получаем граф Шилла с $b_2 = c_2$. Обратно, граф Шилла с $b_2 = c_2$ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $p = b - 1$.

Сначала исследуем дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен (равносильно $\theta_2 = -1$).

Теорема 5.1 дает частичный ответ на вопрос о существовании дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{7, 7, 6; 1, 1, 2\}$. В предложении 5.2 найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, с помощью которого возможно построение вышеуказанного дистанционно регулярного графа, а в следствии 5.1 найдены простые композиционные факторы группы автоморфизмов вершинно симметричного сильно регулярного графа с параметрами $(176, 49, 12, 14)$.

Теорема 5.1 [79]. *Если существует сильно регулярный граф с параметрами* $(176, 49, 12, 14)$, *в котором окрестности вершин являются* 7×7*-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7, 7, 6; 1, 1, 2\}$.

Предложение 5.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(176, 49, 12, 14)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *– элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(G)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 44$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 24l + 8$;

(2) Ω *является* β*-кликой, либо*

(*i*) $p = 7$, $\beta = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 49, 133$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $\beta = 2, 4, 6, 8$ *и* $\alpha_1(g) = 24l + 8 + 5\beta$, *либо*

(*iii*) $p = 3$, $\beta = 2, 5, 8$ *и* $\alpha_1(g) = 36l - 4 + 5\beta$;

(3) Ω *является* γ*-кокликой,* $\gamma = 8, 15, 22$*,* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 84l - 40 + 5\gamma$*;*

(4) Ω *содержит ребро и является объединением (по крайней мере двух) изолированных клик,* $p = 2$ *и порядок любой максимальной клики из* Ω *равен* $2, 4$ *или* 6*;*

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \leq 11$*.*

Следствие 5.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(176, 49, 12, 14)$*, группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действвет транзитивно на множестве его вершин и* $\bar{T}$ *— цоколь группы* $\bar{G} = G/O_2(G)$*. Тогда либо* $\bar{T} \cong M_{11}$*,* $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 11, 22$*, либо* $\bar{T} \cong M_{22}$*, группа* $\bar{T}_a$ *изоморфна* $L_3(4)$ *и имеет индекс* 22 *в* $\bar{T}$*.*

Существование сильно регулярного графа с параметрами (176,49,12, 14), в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, остается неизвестным.

В теореме 5.2 получены новые верхние границы для порядков клик сильно регулярных графов Γ_3, уточняющие классическую границу Хофмана-Дельсарта. С помощью этих оценок доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$.

Теорема 5.2 [81]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с* $\theta_2 = -1$ *и граф* Γ_3 *содержит* n*-клику* $\{u, u_2, ..., u_n\}$*. Тогда* $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^{n}\Gamma(u_i)$ *содержит* $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ *вершин и для графа с массивом пересечений* $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ *имеем* $n \leq 3$*, с массивом* $\{31, 24, 8; 1, 4, 24\}$ *имеем* $n \leq 7$*, с массивом* $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ *имеем* $n \leq 15$*, с массивом* $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$ *имеем* $n \leq 12$*, с массивом* $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$ *имеем* $n \leq 6$*, с массивом* $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$ *имеем* $n \leq 9$*, с массивом* $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$ *имеем* $n \leq 10$*, с массивом* $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ *имеем* $n \leq 7$*, с массивом* $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$ *имеем* $n \leq 3$*, с массивом* $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ *имеем* $n \leq 9$*, с массивом* $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$*, имеем* $n \leq 6$*, с массивом* $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$ *имеем* $n \leq 10$*, с массивом* $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$ *имеем* $n \leq 12$*, с массивом* $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$ *имеем* $n \leq 15$*.*

Следствие 5.2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ *не существует.*

Для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ можно выдвинуть следующее предположение (А.А.Махнев):

Гипотеза 5.1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$*. Тогда либо* Γ *принадлежит некоторому конечному множеству графов, либо* $c = a - 1$*. В* *последнем случае граф* $\bar\Gamma_2$ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_2(p+1,2a)$ *и кратности неглавных собственных значений равны* $(a+1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1)$, $(ap+a+1)a(p+2)(p+1)/((2a+p)(a+p+1))$, $(ap+a+1)(p+1)p/(2a+p)$.

Теорема 5.3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$. *Тогда* $a<p(p+1)$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $a\le c$, *то либо* $a=c$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{a(p+1),ap,a+1;1,a,ap\}$, *либо* $2p+2\le a$;

(2) *параметр* a *не равен* $c-1$;

(3) *если* $a=c-2$, *то* $\theta_1=a-x$, $\theta_3=-(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x)=a(a+p+3)$ *и* $0<x<p/2$;

(4) *если* $a=c+2$, *то* $\theta_1=a+x$, $\theta_3=2p+1-a-x$, $(a+x)(a+x-2p-1)=a(p+a-1)$ *и* $3p/2<x<2p+1$.

(5) *если* $a=c+1$ *и* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(p+1,a)$ *с квазиклассическими параметрами* $\{p+1,a\}=\{q,q\},\{q^2,q\}$, $\{q^2,q^3\},\{q-1,q+1\}$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{q^2-1,q^2-2q,q+2;1,q,q^2-q-2\}$, $\{15,8,4;1,2,12\}$, $\{27,16,4;1,2,24\}$ *или* $\{195,168,14;1,11,182\}$.

Для массива пересечений $\{a(p+1),ap,a+1;1,a,ap\}$ при $1\le a,p\le 1000$ только для следующих пар (a,p) кратности собственных значений целые: $(1,4),(1,54),(6,28),(6,119),(204,984)$.

Теорема 5.4. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{a(p+1),(a-1)p,a+1;1,a-1,ap\}$. *Тогда следующие серии содержат бесконечное число допустимых массивов*

(1) $p=a-3$: $\{a(a-2),(a-1)(a-3),a+1;1,a-1,a(a-3)\}$, $a\ge 5$;

(2) $p=2a+2$: $\{a(2a+3),2(a-1)(a+1),a+1;1,a-1,2a(a+1)\}$, a *не сравнимо с* 1 *по модулю* 3;

(3) $p=2a-4$: $\{a(2a-3),2(a-1)(a-2),a+1;1,a-1,2a(a-2)\}$, a *четно и не сравнимо с* 1 *по модулю* 3;

(4) $p=3a-5$: $\{a(3a-4),(a-1)(3a-5),a+1;1,a-1,a(3a-5)\}$, a *четно и сравнимо с* $0,2$ *по модулю* 5.

Изучение автоморфизмов графов с массивами пересечений из заключения теоремы 5.4 является интересной, но трудной задачей.

Во второй части главы 5 рассматриваются графы Шилла.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3.

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\max\{a_3,(a_1+\sqrt{k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1=a_3$

по [5, теорема 7] имеем $\theta_1 = (a_1 + \sqrt{k + a_1^2})/2$ и k делится на a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k и полагают $b(\Gamma) = k/a$.

Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = c_2$. Тогда $a_1 = a - b$, Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ и собственные значения θ_2, θ_3, являющиеся корнями уравнения $x^2 - (a_2 + a - b - ab)x + (b-1)b_2 - a_2 = 0$. Если θ_2, θ_3 – целые числа, то $(a_2 + a - b - ab)^2 - 4((b-1)b_2 - a_2)$ является квадратом натурального числа, в противном случае кратности θ_2 и θ_3 совпадают.

Известные графы Шилла – это граф Хэмминга $H(3,3)$ с массивом пересечений $\{6,4,2;1,2,3\}$, нечетный граф $O(4)$ с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$, обобщенный шестиугольник $GH(2,2)$ с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$,
граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{10,6,4;1,2,5\}$, граф Доро с массивом пересечений $\{12,10,3;1,3,8\}$, унитарный граф на множестве неизотропных векторов с массивом пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$ или граф Джонсона $J(9,3)$ с массивом пересечений $\{18,10,4;1,4,9\}$.

Возможные автоморфизмы графов Шилла с массивами пересечений $\{15,12,6;1,2,10\}$ и $\{24,21,3;1,3,18\}$ найдены в [27] и [29]. Если собственное значение θ_2 графа Шилла Γ с $b_2 = c_2$ равно -1, то ввиду [78] Γ имеет массив пересечений $\{35,32,8;1,8,28\}$. Но в этом случае $q^3_{33} = -36/25$, противоречие.

Имеются бесконечные серии допустимых массивов пересечений графов Шилла с $b_2 \neq c_2$ и собственным значением $\theta_2 = -1$ (см. [38]).

Теорема 5.5 [78]. *Пусть граф Шилла* Γ *с* $b_2 = c_2$ *содержит нецелое собственное значение. Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$*, а кратности неглавных собственных значений равны* $(b^2-b+2)(b-1)b/2$*,* $(b^2-b+2)(b-1)b/2$ *и* $(b^2-b+1)b$.

Теорема 5.6. *Пусть граф Шилла* Γ *с* $b_2 = c_2$ *не содержит треугольников и* $b < 170$*. Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{25,24,3;1,3,20\}$*,* $\{81,80,18;1,18,72\}$*,* $\{441,440,9;1,9,420\}$ *или* $\{441,440,49;1,49,420\}$.

Утверждение следует из [78] с привлечением [38, лемма 1.5].

Теорема 5.7 [78]. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $b_2 = c_2$ *и* $b = 4$*. Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{24,21,3;1,3,18\}$*,* $\{40,33,3;1,3,30\}$*, или* $\{20(q-2), 3(5q-9), 2q; 1, 2q, 15(q-2)\}$*,* $q = 6,9,18$.

Глава 1

Однородные расширения частичных геометрий, локально $GQ(4,t)$-графы и 4-изорегулярные графы

В этой главе получено описание параметров сильно $(s-2)$-однородных расширений частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$, классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы, найдены параметры сильно регулярных графов, отвечающих 4-изорегулярным графам и некоторые автоморфимы 4-изорегулярных графов.

§ 1.1. Расширения частичных геометрий

Пусть геометрия $\mathcal{S}$ является φ-однородной $EpG_\alpha(s,t)$. Если $\varphi = s+2$, то $\mathcal{S}$ называется одноточечным расширением (и граф $\Gamma(\mathcal{S})$ является полным). Например, 3-$(22,6,1)$ схема Матье — это одноточечное расширение проективной плоскости $PG(2,4)$.

Если $\varphi = s+1$, то геометрия $\mathcal{S}$ будет сильно $(s+1)$-однородной, и Γ является полным многодольным графом $K_{(s+2)\times(1+st/\alpha)}$. В этом случае для любой точки a множество точек вычета $\mathcal{S}_a$ имеет разбиение $s+1$ овоидами.

Среди известных обобщенных четырехугольников только $GQ(s,1)$, $GQ(1,t)$, $GQ(2^\alpha,2^\alpha)$, $GQ(q^2,q)$, $GQ(q-1,q+1)$, $GQ(q+1,q-1)$, где q – степень простого числа, допускают разбиение точечного множества овоидами.

Случаи s-однородных и сильно $(s-1)$-однородных геометрий $EpG_\alpha(s,t)$ рассмотрены в [6]. В данном параграфе изучены сильно $(s-2)$-однородные геометрии $EpG_\alpha(s,t)$.

Теорема 1.1 [68]. *Пусть $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$, $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$. Тогда либо геометрия $\mathcal{S}$ является расширением двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2,t)$, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3,2t)$ и дополнительный граф к блочному графу является псевдогеометрическим графом для $pG_{t+2}(2t+3,t^2+2t)$, либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\alpha=1$, Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9,8)$, $pG_2(5,8)$, $pG_4(7,24)$, $pG_6(9,32)$ или $pG_{10}(13,120)$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EGQ(8,1)$, $EGQ(4,2)$, $EGQ(6,4)$, $EGQ(8,4)$ или $EGQ(12,10)$ соответственно;

(2) $t=\alpha>1$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_6(9,8)$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_t(8,t)$ для некоторого $t\in\{2,...,5\}$;

(3) Γ — псевдогеометрический граф для $pG_3(6,20)$, $pG_4(7,3)$, $pG_4(7,4)$, $pG_4(7,8)$ или $pG_4(7,20)$ и $\mathcal{S}$ — это $EpG_2(5,8)$, $EpG_2(6,1)$, $EpG_3(6,2)$, $EpG_3(6,4)$ или $EpG_3(6,10)$ соответственно;

(4) Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_5(8,140)$, $pG_6(9,56)$, $pG_6(9,8r)$ $(r\in\{2,4\})$, $pG_6(9,2t)$ $(t\in\{3,7,13\})$, $pG_6(9,32)$, $pG_8(11,40)$, $pG_8(11,95)$ или $pG_8(11,2u)$ $(u\in\{4,16\})$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_4(7,80)$, $EpG_2(8,14)$, $EpG_3(8,3r)$, $EpG_4(8,t)$, $EpG_5(8,20)$, $EpG_3(10,12)$, $EpG_4(10,38)$ или $EpG_5(10,u)$ соответственно;

(5) $10<s\le 20$, Γ — псевдогеометрический граф для одной из геометрий $pG_9(12,99)$, $pG_{12}(15,56)$, $pG_{12}(15,16)$, $pG_{12}(15,26)$, $pG_{15}(18,170)$, $pG_{16}(19,56)$, $pG_{17}(20,323)$, $pG_{18}(21,150)$ или $pG_{18}(21,24)$ и $\mathcal{S}$ — $EpG_\alpha(11,9\alpha)$ $(\alpha\in\{3,4,6\})$, $EpG_\alpha(14,4\alpha)$ $(\alpha\in\{2,3,5,9\})$, $EpG_7(14,8)$, $EpG_7(14,13)$, $EpG_\alpha(17,10\alpha)$ $(\alpha\in\{2,3,8\})$, $EpG_9(18,28)$, $EpG_\alpha(19,17\alpha)$, $\alpha\in\{3,10,13\}$, $EpG_6(20,45)$ или $EpG_{15}(20,18)$ соответственно;

(6) $20<s\le 40$, Γ — псевдогеометрический граф для одной из геометрий $pG_{32}(35,136)$, $pG_{32}(35,136)$, $pG_{32}(35,136)$ или $pG_{32}(35,104)$ и $\mathcal{S}$ — это одна из геометрий $EpG_{11}(34,44)$, $EpG_{28}(34,112)$, $EpG_7(34,28)$ или $EpG_{17}(34,52)$ соответственно;

(7) $40<s$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_{48}(51,880)$ или $pG_{48}(51,200)$ и $\mathcal{S}$ — одна из геометрий $EpG_{15}(50,264)$ или $EpG_\alpha(50,4\alpha)$ $(\alpha\in\{3,8,23,33\})$ соответственно.

В этом параграфе помещены также некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s,t)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) в дополнительном графе $\bar\Gamma$ имеем $\bar\mu=(s+1-\alpha)(s-\alpha)t/\alpha$;

(2) $\alpha(s+t+1-\alpha)$ делит $st(s+1)(t+1)$ (условие целочисленности);

(3) $(s+1-2\alpha)t\le(s-1)(s+1-\alpha)^2$ (граница Крейна);

(4) *если* $\alpha < s$, *то* $t \le (2\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)^2$.

Доказательство. Утверждения (2-3) доказаны в теореме 1.1 из [39]. Далее, $\bar{\mu} = \bar{k} - b_1 = kb_1/mu - b_1 = b_1(s/\alpha - 1) = (s + 1 - \alpha)(s - \alpha)t/\alpha$. Наконец, утверждение (4) следует из доказательства теоремы 4.5 из [40].

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathcal{S}$ *является* φ*-однородной геометрией* $EpG_\alpha(s,t)$. *Тогда точечный граф* $\Gamma(\mathcal{S})$ *является реберно регулярным с* $\lambda = s + st(\varphi - 1)/\alpha$. *Кроме того,* $\alpha\varphi$ *делит* $st(s+1)(s+2)$, *и в случае* $\varphi = \alpha + 2$, *число* φ *четно.*

Доказательство. См. [39] (леммы 2.1 и 2.2) для доказательства первого и второго утверждений.

Пусть далее $\varphi = \alpha + 2$ и (a, B) является антифлагом с $f(a, B) = \varphi$. По структуре вычета $\mathcal{S}_b$ для $b \in B \cap P_a$ точка a лежит на α прямых в $\mathcal{B}_b$, пересекающих $B \cap P_a$, так что $B \cap P_a$ содержит единственную точку b^*, такую, что тройка a, b, b^* не лежит ни в одном из блоков множества $\mathcal{B}$. Ясно, что $(b^*)^* = b$, поэтому число $|B \cap P_a| = \varphi$ четно.

Лемма 1.3. *Пусть* $\mathcal{S}$ *— сильно* φ*-однородная геометрия* $EpG_\alpha(s,t)$, *где* $\varphi < s + 2$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *точечный граф* $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ *является псевдогеометрическим для* $pG_\varphi(s + 1, st/\alpha)$;

(2) *для любых двух несмежных вершин* u, w *подграф* $[u] \cap [w]$ *является* φ*-овоидом частичной геометрии* $[u]$;

(3) *в дополнительном графе* $\bar{\Gamma}$ *имеем* $\bar{\mu} = s(s+2-\varphi)(s+1-\varphi)t/(\alpha\varphi)$.

Доказательство. Утверждения (1–2) доказаны в теореме 1.2 из [41]. Утверждение (3) следует из леммы 1.1.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathcal{S}$ *является сильно* $(s-2)$*-однородной геометрией* $EGQ(s,t)$, $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{s-2}(s + 1, st)$, s *четно,* $t \le 16(2s - 5)/s$, $s - 2$ *делит* $24t$ *и в случае* $t = 1$ *граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_6(9, 8)$;

(2) *если* $s = 4$, *то* $(t, \mu) = (2, 18)$ *и* Γ *— граф с параметрами* $(126, 45, 12, 18)$ *на множестве векторов нормы* 1 *в* 6*-мерном ортогональном пространстве типа "−" над* $GF(3)$;

(3) *если* $t > 1, 6 \le s \le 12$, *то* Γ *— псевдогеометрический граф для* $pG_4(7, 24)$, $pG_6(9, 32)$ *или* $pG_{10}(13, 120)$.

Доказательство. По лемме 1.3 точечный граф $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ является псевдогеометрическим для $pG_{s-2}(s + 1, st)$. Далее, s четно, по лемме 1.1

имеем $t \leq 16(2s-5)/s$ и $s-2$ делит $24t/(t,\alpha)$. В случае $t=1$ по условию целочисленности $(s-2)(s+4)$ делит $s(s+1)^2(s+2)$. Поэтому $(s-2)(s+4)$ делит $16 \cdot 27$, $s=8$ и Γ является псевдогеометрическим для $pG_6(9,8)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $s=4$. Тогда Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(5,4t)$ и $t+1$ делит $15t(4t+1)$, поэтому $t \in \{2,4,8\}$. Существование и единственность локально $GQ(4,2)$ графа с параметрами $(126,45,12,18)$ хорошо известны. Это граф на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве над $GF(3)$ типа "$-$" с отношением смежности, задаваемым ортогональностью. По результатам из [13] $GQ(4,4)$ не содержит 34-точечных гиперовалов. Несуществование локально $GQ(4,8)$ графа с параметрами $(486,165,36,66)$ доказано в [15]. Утверждение (2) доказано.

Пусть $s=6$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_4(7,6t)$ и $3t+2$ делит $42t(6t+1)$, поэтому $3t+2$ делит 28 и $t=4$. Утверждение (3) доказано.

Пусть $s=8, t>1$. Тогда Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_6(9,8t)$, $t \leq 22$ и $2t+1$ делит $30t(8t+1)$, поэтому $2t+1$ делит 90 и $t \in \{4,22\}$. Но в случае $t=22$ число $8+t=30$ не делит $st(s+1)(t+1)$.

Пусть $s=10$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11,10t)$, $t \leq 24$ и $2(5t+2)$ делит $55t(10t+1)$, поэтому $5t+2$ делит 66 и $t=4$. Но в этом случае число $10+t=14$ не делит $st(s+1)(t+1)$.

Пусть $s=12$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{10}(13,12t)$, $t \leq 25$, t делится на 5 и $2t+1$ делит $30t(8t+1)$, поэтому $2t+1$ делит $63 \cdot 13$ и $t=10$.

Лемма 1.5. *Пусть* Γ *— псевдогеометрический граф для частичной геометрии* $pG_\alpha(s,t)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $2\alpha \leq s$, *то* $(s+1-2\alpha)t \leq (s-1)(s+1-\alpha)^2$*;*

(2) *если* $\alpha < s \leq 2\alpha$, *то* $(s-\alpha)t \leq (s+1-\alpha)^2\alpha(2s-2\alpha-1)$, *причем в случае равенства имеем* $s-\alpha = t(t+1)(2t+1)$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из условия Крейна (лемма 2.1 из [41]).

Если $\alpha < s \leq 2\alpha$, то утверждение (2) следует из доказательства теоремы 4.5 из [40]. Лемма доказана.

Начнем доказательство теоремы 1.1. Предположим, что $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$. Тогда $\alpha+1 \leq s-2$ и по лемме 1.2 число $\alpha(s-2)$ делит $st(s+1)(s+2)$, поэтому $s-2$ делит $24t$. По лемме 1.3 точечный граф $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_{s-2}(s+1, st/\alpha)$. В частности, α делит st. Далее, собственные значения графа Γ равны $k=(s+1)(1+st/\alpha)$, 3 и $-(1+st/\alpha)$, а в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$ имеем $\bar{\mu}=12st/(\alpha(s-2))$.

Лемма 1.6 *Верны следующие утверждения:*

(1) $\alpha(s+t-1-\alpha)$ *делит* $st(s+1)(t+1)$ *и* $(s-2)(4+st/\alpha)$ *делит* $s(s+1)(s+2)t(1+st/\alpha)/\alpha$;

(2) $t \le 80\alpha(s-2)/(3s)$;

(3) *если* $s \le 6$, *то либо* $\alpha = 1$, *либо* $\mathcal{S}$ *— это одна из геометрий* $EpG_2(5,8)$, $EpG_2(6,1)$, $EpG_3(6,2)$, $EpG_3(6,4)$ *или* $EpG_3(6,10)$;

(4) *если* $t=\alpha$, *то* $\mathcal{S}$ *— это геометрия* $EpG_t(8,t)$ *для некоторого* $1 \le t \le 5$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из условий целочисленности для pG_α и Γ.

По лемме 1.5, примененной к Γ, получим $3st/\alpha \le 16(s-2)\cdot 5$ и верно неравенство (2).

Пусть $s \le 6$ и $\alpha > 1$. Если $s=5$, то $\alpha=2$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(6,5t/2)$ и $5t/2+4$ делит $35t(5t/2+1)$. Поэтому $t \in \{4,8,32\}$. Но в случае $t=4$ нарушается утверждение (1), а в случае $t=32$ по [6] частичная геометрия $pG_2(5,32)$ не существует.

Пусть $s=6$. Если $\alpha=2$, то Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_4(7,3t)$ и $3t+4$ делит $42t(3t+1)$. Поэтому $t \in \{1,8\}$. Но в случае $t=8$ нарушается утверждение (1). Если $\alpha=3$, то Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_4(7,2t)$ и $2t+4$ делит $28t(2t+1)$. Поэтому $t \in \{2,4,5,10,12,19,26,40\}$. Но в случаях $t \in \{5,12,19,26,40\}$ нарушается утверждение (1). Утверждение (3) доказано.

Если $t=\alpha$, то Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_{s-2}(s+1,s)$, $s-2$ делит 12 и $(s-2)(s+4$ делит $s(s+1)^2(s+2)$. Поэтому $s=8$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_t(8,t)$ для $1 \le t \le 5$.

Лемма 1.7. *Если* $6 < s \le 10$, $1 < \alpha \ne t$, *то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $s=7$, Γ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_5(8,140)$ *и геометрия* $\mathcal{S}$ *расширяет* $pG_4(7,80)$;

(2) $s=8$ *и* $\mathcal{S}$ *— одна из геометрий* $EpG_2(8,14)$, $EpG_3(8,3r)$ ($r \in \{2,4\}$), $EpG_4(8,t)$ ($t \in \{3,7,13\}$), $EpG_5(8,20)$;

(3) $s=10$ *и* $\mathcal{S}$ *— одна из геометрий* $EpG_3(10,12)$, $EpG_4(10,38)$ *или* $EpG_5(10,t)$ ($t \in \{4,16\}$).

Доказательство. Пусть $s=7$. Тогда $t=5r$ и α делит t. Поэтому $r=r'\alpha \le 26$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_5(8,35r')$ и $35r'+4$ делит $72\cdot 12$. Поэтому $r'=4$, геометрия $\mathcal{S}$ расширяет $pG_\alpha(7,20\alpha)$ и $19\alpha+8$ делит $56\cdot 60\cdot 47$. Отсюда $\alpha=4$ и $t=80$.

Пусть $s = 8$. Тогда $t \leq 20\alpha$ и $\alpha \in \{2, 3, 4, 5\}$. Если $\alpha = 2$, то $t+7$ делит $36t(t+1)$ и $t+1$ делит 45. Отсюда $t = 14$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 56)$. Если $\alpha = 3$, то $t = 3r \leq 60$, $r+2$ делит 240 и $2r+1$ делит 45. Отсюда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 8r)$ и $r \in \{2, 4\}$.

Если $\alpha = 4$, то $t+5$ делит $18t(t+1)$ и $t+2$ делит 90. Отсюда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 2t)$ и $t \in \{3, 7, 13\}$. Если $\alpha = 5$, то $t = 5r$, $5r+4$ делит $72r(5r+1)$, $2r+1$ делит 45, $r = 4$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 32)$.

Пусть $s = 9$. Тогда $t = 7r$, $r \leq 34$ и $1 \leq \alpha \leq 6$. Если α взаимно просто с s, то $r = \alpha r'$ и $63r' + 4$ делит 440, противоречие. Если $\alpha = 3$, то $r+1$ делит $30(7r+1)$ и $21r+4$ делит 440, противоречие. Если $\alpha = 6$, то Γ — псевдогеометрический граф для $pG_7(10, 21r/2)$, $r = 2r'$ и $21r' + 4$ делит $10 \cdot 11 \cdot 12$, поэтому $r' = 4$, противоречие с тем, что $pG_5(9, 56)$ не удовлетворяет условию целочисленности.

Пусть $s = 10$. Тогда $t \leq 64\alpha/3$ и $2 \leq \alpha \leq 7$. Если α делит t, то $t = r\alpha$, Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 10r)$, $5r+2$ делит $99r$ и r нечетно или делится на 4. Отсюда $r = 4$, $3\alpha + 11$ делит $440(4\alpha + 1)$, $\alpha = 3$ и геометрия $\mathcal{S}$ является расширением $pG_3(10, 12)$. Если $\alpha = 2$ и t нечетно, то $t+9$ делит $55t(t+1)$, $5t+4$ делит 99. Отсюда $t = 1$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 5)$, расширяющий $pG_2(10, 1)$. Противоречие с тем, что окрестности вершин в Γ являются 11×11-решетками и $\mu \leq 22$.

Если $\alpha = 4$ и $t = 2r$, r нечетно, то $2r+7$ делит $55r(2r+1)$, $2(5r+4)$ делит 99. Отсюда $r = 19$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 95)$, расширяющий $pG_4(10, 38)$. Если $\alpha = 5$ и t не делится на 5, то $t+6$ делит $22t(t+1)$, $t+2$ делит $99t$ и t делится на 4. Отсюда $t \in \{4, 16\}$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 2t)$, расширяющий $pG_5(10, t)$. Если $\alpha = 6$ и $t = 3r$, r нечетно, то $3r+5$ делит $55r(3r+1)$, $2(5r+4)$ делит $33(5r+1)$, противоречие.

Лемма 1.8. *Если $\bar{\mu} = 16$, то Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 8)$, а если $\bar{\mu} = 12$, то $\mathcal{S}$ является расширением двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2, t)$, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3, 2t)$ и дополнительный граф для блочного графа является псевдогеометрическим графом для $pG_{t+2}(2t+3, t^2+2t)$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\mu} = 16$. Тогда $3st = 4\alpha(s-2)$ и $s(4\alpha - 3t) = 8$. Отсюда либо $s = 4, \alpha = 1$ и $4 - 3t = 2$, либо $s = 8, 4\alpha - 3t = 1$ и $\alpha = t = 1$. Поэтому Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_6(9, 8)$.

Пусть $\bar{\mu} = 12$. Тогда $st = \alpha(s-2)$ и $\alpha = t+1$. Отсюда $2t = s-2$ и Γ является расширением двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2, t)$. Далее, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3, 2t)$. По [7] блочный граф геометрии $\mathcal{S}$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{t^2+t}((2t+3)t, t+1)$, поэтому дополнительный граф для блочного графа является псевдогеометрическим для $pG_{t+2}(2t+3, t^2+2t)$.

Ввиду лемм 1.6–1.8 можно предположить, что $\bar{\mu} \notin \{12, 16\}$, $s > 10$ и $t \neq \alpha$.

Лемма 1.9. *Выполняется неравенство $s \leq 74$.*

Доказательство. В дополнительном графе $\bar{\Gamma}$ имеем $\bar{m} = 4$, $\bar{n} = st/\alpha + 4$ и $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2))$. По теореме 4.7 из [4], примененной к графу $\bar{\Gamma}$ имеем $st/\alpha + 4 \leq 6(12st/(\alpha(s-2)) + 1) + 3$, поэтому $s(s-2) \leq 72s + 5\alpha(s-2)/t$ и $s < 72 + 144/(s-2) + 5\alpha/t$. Пусть $s > 74$. Тогда $s-2$ делит $24t$, $t \geq 4$ и $s \leq 80$.

Если $s = 75$, то $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 12 \cdot 75t/(73\alpha)$, поэтому $t = 73r < 5\alpha, r \leq 5$ и $75r = r'\alpha$. По лемме 1.6 число $73r' + 4$ делит $76 \cdot 77 \cdot 12$, противоречие.

Если $s = 76$, то $t = 37r < 5\alpha/2, r \leq 5$ и $76r = r'\alpha$. По лемме 1.6 число $37r' + 4$ делит $77 \cdot 78 \cdot 12$, противоречие.

Если $s = 77$, то $t = 25r < 5\alpha/3, r \leq 5$ и $77r = r'\alpha$. По лемме 1.6 число $25r' + 4$ делит $78 \cdot 79 \cdot 12$, противоречие.

Если $s = 78$, то $t = 19r$, $r \leq 5$ и $78r = r'\alpha$. По лемме 1.6 число $19r' + 4$ делит $79 \cdot 80 \cdot 12$, противоречие.

Если $s \geq 79$, то $\alpha = t+1$, $s < 72+144/77+5+1/t$ и $t \leq 7$, противоречие.

Лемма 1.10. *Выполняется неравенство $s \leq 70$.*

Доказательство. Если $s = 71$, то $t = 23r, r \leq 80\alpha/71$ и α делит t. Поэтому $r = r'\alpha$ и $1633r' + 4$ делит $72 \cdot 73 \cdot 4$, противоречие.

Если $s = 72$, то $t = 35r, r \leq 20\alpha/27$ и $72r = r'\alpha$. По лемме 1.6 число $35r' + 4$ делит $12 \cdot 73 \cdot 37$, противоречие.

Если $s = 73$, то $t = 71r, r \leq 26$ и α делит r. Поэтому $r = r'\alpha$ и $71r' + 4$ делит $74 \cdot 75 \cdot 12$, противоречие.

Если $s = 74$, то $\bar{\mu} = 37t/(3\alpha)$, $t = 3r$, $r \leq 640$ и α делит $37r$. Допустим, что $\alpha = 37$. Тогда $r \geq 12$ и $3r + 2$ делит $2 \cdot 25 \cdot 19$. Если 19 делит $3r + 2$, то $r = 12 + 19u$ и $3u + 2$ делит 50. Поэтому $u \in \{0, 1, 16\}$. В случае $u = 0$ получим $\bar{\mu} = 12$, а если $u > 0$, то нарушается условие целочисленности для $pG_{37}(74, 36 + 57u)$. Значит $3r + 2$ делит 50, $r = 16$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{37}(74, 48)$.

Итак, $t = 3r'\alpha$ и по лемме 1.6 число $111r'+2$ делит $25 \cdot 4$, противоречие. Лемма доказана.

До конца параграфа предполагается, что $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$, $10 < s \le 70$. Ввиду лемм 1.6–1.9 можно предположить, что $\bar{\mu} \notin \{12,16\}$ и $t \ne \alpha$.

Лемма 1.11. *Верно неравенство* $s \le 60$.

Доказательство. Пусть $s = 61$. Тогда $t = 59r$, $r \le 80\alpha/183$ и α делит r. Противоречие с тем, что $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/183$.

Пусть $s = 62$. Тогда $\bar{\mu} = 62t/(5\alpha)$, $t = 5r$ и $r \le 160\alpha/31$. Если $\alpha = 31$, то по лемме 1.6 число $5r+32$ делит $63\cdot 64\cdot 31$ и $5r+2$ делит $32\cdot 21\cdot 6$. Если 31 делит $5r+32$, то $r = 6+31u$, $5r+2 = 155u+32$ делит $32\cdot 21\cdot 6$, $u = 0$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие. Значит, α делит $2r$. Заметим, что наибольший общий делитель чисел $5r+32$ и $5r+2$ делит 30, и если $5r+2$ делится на 7, то $r = 8$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(62,40)$ число $\alpha(103-\alpha)$ делит $62\cdot 63\cdot 40\cdot 41$, противоречие. Если $5r+32$ делится на 7, то $r = 2+7u$ и $5r+2 = 35u+12$ делит $64\cdot 9$, поэтому $u = 0$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(62,10)$ число $\alpha(73-\alpha)$ делит $62\cdot 63\cdot 10\cdot 11$, противоречие. Итак, $5r+32$ делит $9\cdot 64$ и $5r+2$ делит $64\cdot 3$, противоречие.

Пусть $s = 63$. Тогда $t = 61r$, $r \le 80\alpha/189$ и α делит r. Противоречие с тем, что $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/189$.

Пусть $s = 64$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 6t\cdot 64/(31\alpha)$, поэтому $t = 31r$ и $r \le 5\alpha/6$. Далее, α делит $64r$, $64r = r'\alpha$ и $r' \le 160/3$. По лемме 1.6 число $31r'+4$ делит $65\cdot 33\cdot 12$. Если 13 делит $31r'+4$, то $r' = 7+13u \in \{20,46\}$. Но в случае $r' = 20$ имеем $31r'+4 = 13\cdot 48$, поэтому $r' = 46$, $r = 23, \alpha = 32$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{32}(64, 31\cdot 23)$. Если 11 делит $31r'+4$, то $r' = 2+11u \in \{2,24,46\}$. Но в случае $r' = 24$ имеем $31r'+4 = 187\cdot 4$, поэтому $r' = 2$, $32r = \alpha$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие. Значит, $31r'+4$ делит $15\cdot 12$, противоречие.

Пусть $s = 65$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 260t/(21\alpha)$, $t = 21r$ и $r \le 80\alpha/65$. Далее, α делит $65r$, поэтому $65r = r'\alpha$, $r' \le 80$, r' не взаимно просто с 65 и по лемме 1.6 число $21r'+4$ делит $4\cdot 22\cdot 67$. Если 67 делит $21r'+4$, то с учетом равенства $(67, 21r'+4) = (67, r'-3)$ получим $r' = 70$. Поэтому $13r = 14\alpha$ и $(r,\alpha) \in \{(13,14),(28,26),(42,39),(56,52)\}$. В любом случае нарушается условие целочисленности для $pG_\alpha(s,t)$.

Значит, $21r'+4$ делит $12\cdot 22$ и 11 делит $r'-4$. Поэтому $r' \in \{15,26,70\}$. В любом случае $21r'+4 > 12\cdot 22$, противоречие.

Пусть $s = 66$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 99t/(8\alpha)$, поэтому $t = 8r$ и $r \le 5\cdot 64\alpha/99$. Далее, α делит $(66t, 99r)$, поэтому $33r = r'\alpha$ и $r' \le 1280/3$, r' не взаимно просто с 33 и по лемме 1.6 число $1+2r'$ делит $67\cdot 51$. Если 67 делит $1+2r'$, то $r' = 33$, $\alpha = 2r$ и $r \le 31$. По условию целочисленности для $pG_{2r}(66,8r)$ число $67+6r$ делит $33\cdot 67(8r+1)$. Так как $(67+6r,33) = (11,6r+1)$ и $(67+6r,8r+1) = (67+6r,r-33)$ делит $265 = 5\cdot 53$, то

$r = 33$, противоречие.

Итак, $2r' + 1$ делит 51 и $r' = 8$. Поэтому $\alpha = 33, r = 4$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие.

Пусть $s = 67$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 12 \cdot 67t/(65\alpha)$, поэтому $t = 65r$, $r = r'\alpha$ и $r' \leq 80 \cdot 65/201$. По лемме 1.6 число $67 \cdot 65r' + 4$ делит $12 \cdot 68 \cdot 69$, противоречие.

Пусть $s = 68$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 136t/(11\alpha)$, поэтому $t = 11r$ и $r \leq 40\alpha/17$. Далее, α делит $68r$, $68r = r'\alpha$ и $r' \leq 160$. По лемме 1.6 число $11r' + 4$ делит $12 \cdot 23 \cdot 35$. Если 23 делит $11r' + 4$, то $r' = 8 + 23u \in \{8, 54, 100, 146\}$. В случае $r' = 8$ имеем $17r = 2\alpha$. Если $\alpha = 17$, то $r = 2$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(68, 22)$. Если $\alpha = 34$, то $r = 4$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 44)$. Если $\alpha = 51$, то $r = 6$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{51}(68, 66)$. В случае $r' = 54$ имеем $r = 27, \alpha = 34$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 297)$. В случае $r' = 100$ имеем $17r = 25\alpha$. Если $\alpha = 17$, то $r = 25$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(68, 275)$. Если $\alpha = 34$, то $r = 50$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 550)$. Если $\alpha = 51$, то $r = 75$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{51}(68, 825)$. В случае $r' = 146$ имеем $r = 73, \alpha = 34$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 803)$.

Значит, $11r' + 4$ делит $12 \cdot 35$. Если 7 делит $11r' + 4$, то $r' = 6$, противоречие с тем, что тогда $\bar{\mu} = 12$. Значит, $11r' + 4$ делит 60, противоречие.

Пусть $s = 69$. Тогда $t = 67r$, $69r = r'\alpha$ и $r' \leq 80/3$. По лемме 1.6 число $67r' + 4$ делит $12 \cdot 70 \cdot 71$. Если 71 делит $67r' + 4$, то $r' = 1$, противоречие. Значит, $67r' + 4$ делит $12 \cdot 70$, снова противоречие.

Пусть $s = 70$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 210t/(17\alpha)$, поэтому $t = 17r$ и $r \leq 32\alpha/21$. Далее, α делит $70r$, $70r = r'\alpha$ и $r' \leq 320/3$. По лемме 1.6 число $17r' + 4$ делит $12 \cdot 71 \cdot 18$. Если 71 делит $17r' + 4$, то $r' = 100$, $7r = 10\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{7u}(70, 170u)$, $u \leq 9$.

Значит, $17r' + 4$ делит $12 \cdot 18$ и $r' = 4$. Поэтому $r = 2, \alpha = 35$, противоречие с тем, что $\bar{\mu} = 12$.

Лемма 1.12. *Параметр s не больше* 50.

Доказательство. Пусть $s = 51$. Тогда $t = 49r$, $r \leq 80\alpha/153$ и α делит $51r$. Положим $51r = r'\alpha$. Тогда $st/\alpha = 49r'$, $r' \leq 80/3$ и по лемме 1.6 число $49r' + 4$ делит $12 \cdot 52 \cdot 53$. Если 53 делит $49r' + 4$, то $r' = 1$, противоречие. Значит, $49r' + 4$ делит $12 \cdot 52$, $r' = 4u$ и $49u + 1$ делит 156, противоречие.

Пусть $s = 52$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 312t/(25\alpha)$, поэтому $t = 25r$ и $r \leq 40\alpha/39$. Далее, α делит $52r$, поэтому $52r = r'\alpha$, $r' \leq 160/3$ и по лемме 1.6 число $25r' + 4$ делит $12 \cdot 53 \cdot 27$. Если 53 делит $25r' + 4$, то

53 делит $r' + 15$ и $r' = 38$. В этом случае $r = 19, \alpha = 26$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{26}(52, 25{\cdot}19)$. Значит, $25r'{+}4$ делит $12{\cdot}27$, поэтому 27 делит $r' - 2$, $r' = 2$, $r = 1, \alpha = 26$, противоречие с тем, что тогда $\bar{\mu} = 12$.

Пусть $s = 53$. Тогда $t = 17r$, $r \leq 80\alpha/53$ и α делит r. Так как $r = r'\alpha$ и $r' \leq 80/53$, то $r = \alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{51}(54, 53 \cdot 17)$.

Пусть $s = 54$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 162t/(13\alpha)$, поэтому $t = 13r$ и $r \leq 160\alpha/81$. Далее, α делит $54r$, поэтому $54r = r'\alpha$, $r' \leq 320/3$ и по лемме 1.6 число $13r'{+}4$ делит $12{\cdot}55{\cdot}56$. Если 11 делит $13r'{+}4$, то $r' = 20$, $r = 10, \alpha = 27$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{27}(54, 130)$. 60 56 Если 7 делит $13r' + 4$, то $r' = 4 + 7u \in \{4, 32\}$. В случае $r' = 4$ имеем $r = 2, \alpha = 27$ и $\bar{\mu} = 12$. В случае $r' = 32$ имеем $r = 16, \alpha = 27$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{27}(54, 208)$. Значит, $13r' + 4$ делит 480, $r' = 12$, $9r = 2\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{9u}(54, 26u)$, $u \leq 5$.

Пусть $s = 55$. Тогда $t = 53r$ и $r \leq 80\alpha/165$. Далее, α делит $55r$, поэтому $55r = r'\alpha$, $r' \leq 80/3$ и по лемме 1.6 $53r'{+}4$ делит $12{\cdot}56{\cdot}57$. Если 19 делит $53r'{+}4$, то $r' = 20$, $11r = 4\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11u}(55, 212u)$. Если 7 делит $53r'{+}4$, то снова $r' = 20$. Значит, $53r'{+}4$ делит $2^5 3^2$, противоречие.

Пусть $s = 56$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 112t/(9\alpha)$, поэтому $t = 9r$ и $r \leq 180\alpha/7$. Далее, α делит $56r$. Положим $56r = r'\alpha$. Тогда $r' \leq 8 \cdot 180$ и по лемме 1.6 число $9r' + 1$ делит $4 \cdot 19 \cdot 29$. Отсюда 29 делит $9r' + 1$, $r' = 16 + 29u$, $u \leq 49$ и $9r' + 1$ делится на 19. Поэтому $5u - 12$ делится на 19 и $u \in \{10, 29\}$. В любом случае $9r' + 1$ больше $4 \cdot 19 \cdot 29$, противоречие.

Пусть $s = 57$. Тогда $t = 55r$, $r = r'\alpha$ и $r \leq 80 \cdot 55\alpha/171$. По лемме 1.6 число $57 \cdot 55r' + 4$ делит $12 \cdot 58 \cdot 59$, противоречие.

Пусть $s = 58$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 87t/(7\alpha)$, поэтому $t = 7r$ и $r \leq 320\alpha/87$. Далее, α делит $58r$, $58r = r'\alpha$, $r' \leq 640/3$ и по лемме 1.6 число $7r' + 4$ делит $12 \cdot 59 \cdot 15$. Если 59 делит $7r' + 4$, то $r' = 50 + 59u \in \{50, 168\}$. В случае $r' = 50$ имеем $r = 25, \alpha = 29$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{29}(58, 175)$. В случае $r' = 168$ имеем $r = 84\alpha = 29$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{29}(58, 588)$. Значит, $7r' + 4$ делит $12 \cdot 15$ и $r' = 8$. В этом случае $r = 4, \alpha = 29$, противоречие с тем, что $\bar{\mu} = 12$.

Пусть $s = 59$. Тогда $t = 19r$, $r = r'\alpha$ и $r' \leq 80 \cdot 19/59$. По лемме 1.6 число $59 \cdot 19r' + 4$ делит $12 \cdot 20 \cdot 61$. Если 61 делит $59 \cdot 19r' + 4$, то $r' = 44$, противоречие. Значит, $59 \cdot 19r' + 4$ делит $12 \cdot 20$, снова противоречие.

Пусть $s = 60$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 360t/(29\alpha)$, поэтому $t = 29r$ и $r \leq 8\alpha/9$. Далее, α делит $60r$, $60r = r'\alpha$ и $r' \leq 160/3$. По лемме 1.6

число $29r' + 4$ делит $12 \cdot 61 \cdot 31$. Если 61 делит $29r' + 4$, то $r' = 23$, противоречие. Теперь 31 делит $29r' + 4$ и $r' \in \{2, 33\}$. В случае $r' = 2$ имеем $r = 1, \alpha = 30$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие. В случае $r' = 33$ имеем $r = 11, \alpha = 20$ или $r = 22, \alpha = 40$. В любом случае нарушается условие целочисленности для $pG_\alpha(s, t)$.

Лемма 1.13. *Если* $40 < s \le 50$*, то* $\mathcal{S}$ *— одна из геометрий* $EpG_{15}(50, 264)$ *или* $EpG_\alpha(50, 4\alpha)$*,* $\alpha \in \{3, 8, 23, 33\}$.

Доказательство. Пусть $s = 41$. Тогда $t = 13r$, $r \le 1040\alpha/41$ и α делит r. Положим $r = r'\alpha$. Тогда $r' \le 1040/41$ и по лемме 1.6 число $41 \cdot 13r' + 4$ делит $12 \cdot 14 \cdot 43$. Если 43 делит $41 \cdot 13r' + 4$, то 43 делит $13r' - 2$, противоречие. Значит, $49r' + 4$ делит $12 \cdot 52$, $r' = 4u$ и $49u + 1$ делит 156, противоречие.

Пусть $s = 42$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 63t/(5\alpha)$, поэтому $t = 5r$ и $r \le 320\alpha/63$. Далее, α делит $42r$, поэтому $42r = r'\alpha$, $r' \le 640/3$ и по лемме 1.6 число $5r' + 4$ делит $12 \cdot 43 \cdot 22$. Если 43 делит $5r' + 4$, то $r' = 68$, $r = 34, \alpha = 21$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{21}(42, 170)$.

Значит, $5r' + 4$ делит $12 \cdot 22$ и $r' \le 52$. Если 11 делит $5r' + 4$, то $r' \in \{8, 30, 52\}$. В случае $r' = 8$ имеем $r = 4, \alpha = 21$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие. В случае $r' = 30$ имеем $7r = 5\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{7u}(42, 25u)$ число $18u + 43$ делит $6 \cdot 43 \cdot 25(25u + 1)$, $u \le 5$, противоречие. В случае $r' = 52$ имеем $r = 26, \alpha = 21$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{21}(42, 130)$ число $18u + 43$ делит $\bar{\mu} = 12$, противоречие.

Значит, $5r' + 4$ делит 24, $r' = 4$, $r = 2, \alpha = 21$ и $t + 1 < \alpha$, противоречие.

Пусть $s = 43$. Тогда $t = 41r$, $r \le 80\alpha/129$ и α делит r. Так как $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/129$, то $r = \alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{41}(44, 41 \cdot 43)$.

Пусть $s = 44$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 88t/(7\alpha)$, поэтому $t = 7r$ и $r \le 280\alpha/11$. Далее, α делит $44r$, поэтому $44r = r'\alpha$, $r' \le 1120$ и по лемме 1.6 число $7r' + 4$ делит $12 \cdot 15 \cdot 23$. Если 23 делит $7r' + 4$, то $r' = 6 + 23u$, $7u + 2$ делит $12 \cdot 15$ и $u \le 48$. Если 5 делит $7u + 2$, то $u = 4 + 5w$, $7w + 6$ делит 36 и $w \le 8$. В этом случае $w = 8, u = 44, r' = 1018$, $r = 509, \alpha = 22$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{22}(44, 3563)$. Значит, $7u + 2$ делит 36, $u = 1, r' = 29$ и $\alpha = 44$, противоречие.

Итак, $7r' + 4$ делит $12 \cdot 15$. Если 5 делит $7r' + 4$, то $r' = 3 + 5u$, $7u + 5$ делит 36, $u = 1, r' = 8$, $11r = 2\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11t}(44, 14t)$. Значит, $7r' + 4$ делит 36, $r' = 2$, $\alpha = 22$ и $t + 1 < \alpha$, противоречие.

Пусть $s = 45$. Тогда $t = 43r$ и $r \le 16\alpha/27$. Далее, α делит $45r$, поэтому $45r = r'\alpha$, $r' \le 80/3$ и по лемме 1.6 $43r' + 4$ делит $12 \cdot 46 \cdot 47$. Если 47 делит $43r' + 4$, то $r' = 1$ и $45 = \alpha$, противоречие. Значит, $43r' + 4$

делит $12 \cdot 46$ и $r' \leq 12$. Если 23 делит $43r' + 4$, то $r' = 9$, $5r = \alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{5r}(45, 43r)$, $r \leq 8$ число $19r + 23$ делит $9 \cdot 23 \cdot 43(43r + 1)$, противоречие. Итак, $43r' + 4$ делит 24, противоречие.

Пусть $s = 46$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 138t/(11\alpha)$, поэтому $t = 11r$ и $r \leq 1320\alpha/23$. Далее, α делит $46r$, $46r = r'\alpha$, $r' \leq 2640$ и по лемме 1.6 число $11r' + 1$ делит $12 \cdot 47 \cdot 12$. Отсюда 47 делит $11r' + 1$, $r' = 17 + 47u$ и $11u + 4$ делит 144, противоречие.

Пусть $s = 47$. Тогда $t = 15r$, $r = r'\alpha$ и $r' \leq 1200/47$. По лемме 1.6 число $47 \cdot 15r' + 4$ делит $12 \cdot 16 \cdot 49$, поэтому $r' = 4u$, $u \leq 3$, противоречие.

Пусть $s = 48$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 288t/(23\alpha)$, поэтому $t = 23r$ и $r \leq 230\alpha/9$. Далее, α делит $48r$, $48r = r'\alpha$, $r' \leq 2680/3$ и по лемме 1.6 число $23r' + 4$ делит $12 \cdot 49 \cdot 25$. Если $23r' + 4$ не делится на 15, то $23r' + 4$ делит $12 \cdot 49$ или $12 \cdot 25$, противоречие. Значит, 15 делит $23r' + 4$ и $r' = 7 + 15u$. Отсюда $23u + 11$ делит $12 \cdot 35$, $23u + 11$ делится на 35, $u = 35w - 2$ и $23w - 1$ делит 12, противоречие.

Пусть $s = 49$. Тогда $t = 47r$, $49r = r'\alpha$ и $r' \leq 80/3$. По лемме 1.6 число $47r' + 4$ делит $12 \cdot 50 \cdot 51$. Если 17 делит $47r' + 4$, то $r' = 1 + 17u$, поэтому $47u + 3$ делит $36 \cdot 50$ и $47u + 3$ делится на 5. Отсюда $u = 1 + 5w$, $47w + 10$ делит 360, $u = 1$, $r' = 18$ и $\alpha = 49$, противоречие. Значит, $47r' + 4$ делит $36 \cdot 50$, $47r' + 4$ делится на 5, следовательно, $r' = 3 + 5u$, $47u + 29$ делит 360, противоречие.

Пусть $s = 50$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 25t/(2\alpha)$, поэтому $t = 2r$ и $r \leq 64\alpha/5$. Далее, α делит $50r$, $50r = r'\alpha$ и $r' \leq 640$. По лемме 1.6 число $r' + 2$ делит $6 \cdot 17 \cdot 13$. Если 17 делит $r' + 2$, а 13 не делит $r' + 2$, то $r' \in \{15, 32, 100\}$. В случае $r' = 15$ имеем $10r = 3\alpha$ и $t + 1 < \alpha$. В случае $r' = 32$ имеем $r = 16, \alpha = 25$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{25}(50, 32)$. В случае $r' = 100$ имеем $r = 2\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(50, 4\alpha)$ число $\alpha + 17$ делит $50 \cdot 68(4\alpha + 1)$. Заметим, что $(\alpha + 17, 4\alpha + 1)$ делит 67, $\alpha \leq 47$, поэтому $\alpha + 17$ делит $50 \cdot 68$. Если α не делится на 17, то $\alpha + 17$ делит 200, $\alpha \in \{3, 8, 23, 33\}$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_\alpha(50, 4\alpha)$.

Если 13 делит $r' + 2$, а 17 не делит $r' + 2$, то $r' = 24$, $r = 12, \alpha = 25$ и $\bar{\mu} = 12$.

Пусть 13 и 17 делят $2r' + 1$.Тогда $r' = 15 + 17u$, $u + 1 \in \{13, 26\}$. В случае $u = 12$ имеем $r' = 219$, $50r = 219\alpha$ и $\alpha = 50$, противоречие. В случае $u = 25$ имеем $r' = 440$, $5r = 44\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{5t}(50, 88t)$, $t \leq 9$ и число $83t + 51$ делит $10 \cdot 51 \cdot 88(88t + 1)$. Отсюда $t = 3$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{15}(50, 264)$.

Лемма 1.14. *Если $30 < s \leq 40$, то $\mathcal{S}$ — одна из геометрий $EpG_{11}(34, 44)$, $EpG_{28}(34, 112)$, $EpG_7(34, 28)$, $EpG_{17}(34, 52)$.*

Доказательство. Пусть $s=31$. Тогда $t=29r$, $r\le 80\alpha/93$ и α делит r. Поэтому $r=r'\alpha$, $r'\le 80/93$, противоречие.

Пусть $s=32$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=64t/(5\alpha)$, поэтому $t=5r$ и $r\le 5\alpha$. Далее, α делит $32r$, поэтому $32r=r'\alpha$, $r'\le 160$ и по лемме 1.6 число $5r'+4$ делит $12\cdot 11\cdot 17$. Если 17 делит $5r'+4$, то $r'=6+17u$, $u\le 9$ и $5u+2$ делит $12\cdot 11$. Если 11 делит $5u+2$, то $u=4$, $r'=74$, $r=37,\alpha=16$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{16}(32,185)$. Пусть 11 не делит $5u+2$. Тогда $5u+2$ делит 12 и $u\in\{0,2\}$. В случае $u=0$ имеем $r'=6$, $r=3,\alpha=16$ и $\bar\mu=12$. В случае $u=2$ получим $r'=40$, $4r=5\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{4e}(32,25e)$ число $21e+31$ делит $8\cdot 33\cdot 25(25e+1)$. Заметим, что $(25e+1,21e+31)=(4e-30,e+181)$ делит 2. Если 11 делит $21e+31$, то 11 делит $e+2$, противоречие. Если 5 делит $21e+31$, то $e=4$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{16}(32,100)$. Значит, $21+31e$ делит 48, противоречие.

Итак, $5r'+4$ делит $12\cdot 11$, $r'\le 25$, поэтому 11 делит $5r'+4$, $r'=8$, $r=4\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(32,20\alpha)$ число $19\alpha+33$ делит $32\cdot 33\cdot 20(20\alpha+1)$. Заметим, что $(19\alpha+33,20\alpha+1)=(\alpha-32,641)=1$. Если 11 делит $19\alpha+33$, то $\alpha=11u$ и $u=1,2$, противоречие. Если 5 делит $19\alpha+33$, то $\alpha=3+5w$, $w\le 5$, $19w+18$ делит $32\cdot 12$, противоречие. Значит, $19\alpha+33$ делит $32\cdot 12$, поэтому $\alpha=3e$, $19e+11$ делит 64, противоречие.

Пусть $s=33$. Тогда $t=31r$, $r\le 80\alpha/99$, $33r=r'\alpha$ и $r'\le 80/3$. По лемме 1.6 число $31r'+4$ делит $12\cdot 34\cdot 35$. Если 17 делит $31r'+4$, то $r'=7+17u$, $31u+3$ делит $24\cdot 35$, поэтому $u=0$, $r'=7,\alpha=33$, противоречие.

Значит, $31r'+4$ делит $24\cdot 35$. Если 7 делит $31r'+4$, то $r'=1+7u$, $31u+5$ делит 120, поэтому $u=0,r'=1,\alpha=33$, противоречие. Итак, $31r'+4$ делит 120, снова противоречие.

Пусть $s=34$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=51t/(4\alpha)$, поэтому $t=4r$ и $r\le 320\alpha/51$. Далее, α делит $34r$, $34r=r'\alpha$ и $r'\le 640/3$. По лемме 1.6 число $r'+1$ делит $3\cdot 35\cdot 9$. Если 7 делит $r'+1$, то $r'=7u-1$, u делит $27\cdot 5$. Для $u\in\{1,3,9,27\}$ получим $r'\in\{6,20,62,188\}$. В случае $r'=6$ имеем $r=3,\alpha=17$ и $t+1<\alpha$. В случае $r'=20$ имеем $r=10,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,40)$. В случае $r'=62$ имеем $r=31,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,124)$. В случае $r'=188$ имеем $r=94,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,376)$.

Для $u\in\{15,45,135\}$ получим $r'\in\{104,314,945\}$. В случае $r'=104$ имеем $r=52,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,208)$. В случае $r'=314$ имеем $r=157,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,628)$. В случае $r'=945$ имеем $\alpha=34$, противоречие. Пусть $u=5$. Тогда $r'=34$ и $r=\alpha$. По условию целочисленности для $pG_\alpha(34,4\alpha)$ число $3\alpha+35$ делит $68\cdot 70(4\alpha+1)$. Заметим, что $(3\alpha+35,4\alpha+1)=(\alpha-34,167)=1$. Если 17 делит $3\alpha+35$, то $\alpha=11+17u$, $u\le 1$ и $3u+4$ делит 280. В случае $u=0$ имеем $\alpha=11$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{11}(34,44)$. В случае $u=1$ имеем $\alpha=28$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{28}(34,112)$. Пусть $3\alpha+35$ делит 280. Если 7 делит $3\alpha+35$, то $\alpha=7u$, $u\le 4$ и $3u+5$ делит 40. Поэтому $u=1$, $\alpha=7$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_7(34,28)$. Если же 7 не делит $3\alpha+35$, то $3\alpha+35$ делит 40, противоречие.

Пусть $r'+1$ делит $15\cdot 9$. Если 5 делит $r'+1$, то $r'=5w-1$, w делит 27. Для $w\in\{3,9,27\}$ получим $r'\in\{29,44,134\}$. В случае $r'=29$ имеем $\alpha=34$, противоречие. В случае $r'=44$ имеем $r=22,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,88)$. В случае $r'=134$ имеем $r=67,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,268)$.

Пусть $r'+1$ делит 27. В случае $r'=8$ имеем $r=4,\alpha=17$ и $\bar\mu=12$. В случае $r'=26$ имеем $r=13,\alpha=17$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{17}(34,52)$.

Пусть $s=35$. Тогда $t=11r$ и $r\le 176\alpha/7$. Далее, α делит $35r$, поэтому $35r=r'\alpha$, $r'\le 880$ и по лемме 1.6 $11r'+4$ делит $12\cdot 12\cdot 37$. Если 37 делит $11r'+4$, то $r'=1+37u$, $u\le 23$, $11u+1$ делит $12\cdot 12$ и $u\in\{1,13\}$. В случае $u=1$ получим $r'=38$, $\alpha=35$, противоречие. В случае $u=13$ получим $r'=482$, $\alpha=35$, противоречие. Значит, $11r'+4$ делит $12\cdot 12$, $r'=4$ и $\alpha=35$.

Пусть $s=36$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=6\cdot 36t/(17\alpha)$, поэтому $t=17r$ и $r\le 40\alpha/27$. Далее, α делит $36r$, $36r=r'\alpha$, $r'\le 160/3$ и по лемме 1.6 число $17r'+1$ делит $12\cdot 37\cdot 19$. Отсюда 37 делит $17r'+1$, $r'=13+37u$, $17u+6$ делит $12\cdot 19$, $u=0$ и $\alpha=36$, противоречие.

Пусть $s=37$. Тогда $t=35r$, $r=r'\alpha$ и $r'\le 80/111$, противоречие.

Пусть $s=38$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=38t/(3\alpha)$, поэтому $t=3r$ и $r\le 160\alpha/19$. Далее, α делит $38r$, $38r=r'\alpha$, $r'\le 320$ и по лемме 1.6 число $3r'+4$ делит $12\cdot 13\cdot 10$. Если $3r'+4$ не делится на 13, то $3r'+4$ делит 40, $r'=12$, $r=6,\alpha=19$ и $\bar\mu=12$, противоречие. Значит, 13 делит $3r'+4$ и $r'=3+13u$. Отсюда $3u+1$ делит 40, $u\in\{1,3,13\}$ и $r'\in\{16,42,172\}$. В случае $r'=16$ получим $r=8,\alpha=19$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{19}(38,24)$. В случае $r'=42$ получим $r=21,\alpha=19$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{19}(38,63)$. В случае $r'=172$ получим $r=86,\alpha=19$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{19}(38,258)$.

Пусть $s=39$. Тогда $t=37r$, $39r=r'\alpha$ и $r'\le 80/3$. По лемме 1.6 число $37r'+4$ делит $12\cdot 40\cdot 41$. Если 41 делит $37r'+4$, то $r'=1,\alpha=39$, противоречие. Значит, $37r'+4$ делит $12\cdot 40$, $37r'+4$ делится на 5, следовательно, $r'=3+5u$, $37u+23$ делит 96, противоречие.

Пусть $s=40$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=240t/(19\alpha)$, поэтому $t=19r$

и $r \le 4\alpha/3$. Далее, α делит $40r$, $40r = r'\alpha$ и $r' \le 160/3$. По лемме 1.6 число $19r' + 4$ делит $12 \cdot 41 \cdot 21$. Если 41 делит $19r' + 4$, то $r' = 41u - 11$, $19u - 5$ делит $12 \cdot \cdot 21$, $u = 1, r' = 30$, $4r = 3\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{4e}(40, 57e)$ число $53e + 41$ делит $10 \cdot 41 \cdot 57(57e + 1)$. Заметим, что $(53e + 41, 57e + 1) = (e - 10, 571) = 1$, поэтому $53e + 41$ делит 570, противоречие.

Значит, $19r' + 4$ делит $12 \cdot 21$, $r' = 2$, $r = 1, \alpha = 20$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие.

Лемма 1.15. *Если $s \le 30$, то $s \le 20$.*

Доказательство. Пусть $s = 21$. Тогда $t = 19r$, $r \le 80\alpha/63$, α делит $21r$, поэтому $21r = r'\alpha$ и $r' \le 80/3$. По лемме 1.6 число $19r' + 4$ делит $12 \cdot 22 \cdot 23$. Если 23 делит $19r' + 4$, то $r' = 24$, $r = 8u, \alpha = 7u$ и по условию целочисленности для $pG_{7u}(21, 152u)$ число $145u + 22$ делит $66 \cdot 152(152u+1)$, противоречие. Если 11 делит $19r'+4$, то $r' = 5, r = 5, \alpha = 21$, противоречие. Значит, $19r' + 4$ делит 24, противоречие.

Пусть $s = 22$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 66t/(5\alpha)$, поэтому $t = 5r$ и $r \le 160\alpha/33$. Далее, α делит $22r$, поэтому $22r = r'\alpha$, $r' \le 320$ и по лемме 1.6 число $5r' + 4$ делит $12 \cdot 23 \cdot 6$. Если 23 делит $5r' + 4$, то $r' = 13 + 23u$, $u \le 14$ и $5u+3$ делит 72. В этом случае $u \in \{1, 3\}$ и $r' \in \{36, 82\}$. В случае $r' = 36$ имеем $r = 18, \alpha = 11$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11}(22, 90)$. В случае $r' = 82$ имеем $r = 41, \alpha = 11$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11}(22, 205)$.

Значит, $5r' + 4$ делит 72, $r' = 4$, $r = 2, \alpha = 11$ и $\bar{\mu} = 12$.

Пусть $s = 23$. Тогда $t = 7r$, $r \le 80\alpha/23$, $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/23$. По лемме 1.6 число $23 \cdot 7r' + 4$ делит $12 \cdot 8 \cdot 25$, противоречие.

Пусть $s = 24$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 144t/(11\alpha)$, поэтому $t = 11r$ и $r \le 20\alpha/9$. Далее, α делит $24r$, $24r = r'\alpha$ и $r' \le 160/3$. По лемме 1.6 число $11r' + 4$ делит $12 \cdot 25 \cdot 13$. Если 13 делит $11r' + 4$, то $r' = 13u + 2$, $11u + 2$ делит $12 \cdot 25$ и $u = 0$. В этом случае $r' = 2$, $r = 1, \alpha = 12$ и $\bar{\mu} = 12$. Значит, $11r' + 4$ делит $12 \cdot 25$, поэтому 5 делит $11r' + 4$, $r' = 5w + 1$, $11w + 3$ делит 60, $w = 0$ и $\alpha = 24$, противоречие.

Пусть $s = 25$. Тогда $t = 23r$ и $r \le 16\alpha/15$. Далее, α делит $25r$, поэтому $25r = r'\alpha$, $r' \le 80/3$ и по лемме 1.6 $23r' + 4$ делит $12 \cdot 26 \cdot 27$. Если 13 делит $23r' + 4$, то $r' = 13u + 10$, $u \le 1$ и $23u + 4$ делит $24 \cdot 27$. В случае $u = 0$ получим $r' = 13$, а в случае $u = 1$ получим $r' = 27$. В любом случае $\alpha = 25$, противоречие. Значит, $23r' + 4$ делит $24 \cdot 27$, 9 делит $23r' + 4$, $r' = 9w + 1$, $23w + 3$ делит 72, $w = 3, r' = 28$ и $\alpha = 25$, противоречие.

Пусть $s = 26$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 13t/(3\alpha)$, поэтому $t = 3r$ и $r \le 320\alpha/39$. Далее, α делит $26r$, $26r = r'\alpha$, $r' \le 640/3$ и по лемме 1.6 число $3r' + 1$ делит $4 \cdot 7$. Отсюда $r' \in \{2, 9\}$ и в случае $r' = 9$ имеем $\alpha = 26$, противоречие. Поэтому $r' = 2$, $r = 1, \alpha = 13$ и $t + 1 < \alpha$, противоречие.

Пусть $s = 27$. Тогда $t = 25r$, $27r = r'\alpha$ и $r' \le 80/3$. По лемме 1.6 число $25r' + 1$ делит $12 \cdot 28 \cdot 29$. Если 29 делит $25r' + 1$, то $r' = 12$, $r = 4, \alpha = 9$ и нарушается условие целочисленности для $pG_9(27, 100)$. Значит, $25r' + 1$ делит $12 \cdot 28$. Если 7 делит $25r' + 1$, то $r' = 7u + 5$, $25u + 18$ делит 48, противоречие. Итак, $25r' + 1$ делит 48, противоречие.

Пусть $s = 28$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 168t/(13\alpha)$, поэтому $t = 13r$ и $r \le 40\alpha/21$. Далее, α делит $28r$, $28r = r'\alpha$, $r' \le 160/3$ и по лемме 1.6 число $13r' + 4$ делит $12 \cdot 29 \cdot 15$. Если 29 делит $13r' + 4$, то $r' = 22$, $r = 11, \alpha = 14$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{14}(28, 143)$. Значит, $13r' + 4$ делит $12 \cdot 15$. Если 5 делит $13r' + 4$, то $r' = 5u + 2$, $13u + 6$ делит 36, $u = 0$, $r' = 2$, $r = 1, \alpha = 14$ и $\bar{\mu} = 12$. Поэтому $13r' + 4$ делит 36, противоречие.

Пусть $s = 29$. Тогда $t = 9r$, $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/29$. По лемме 1.6 число $9r' + 4$ делит $4 \cdot 10 \cdot 31$, противоречие.

Пусть $s = 30$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 90t/(7\alpha)$, поэтому $t = 7r$ и $r \le 32\alpha/9$. Далее, α делит $30r$, $30r = r'\alpha$ и $r' \le 320/3$. По лемме 1.6 число $7r' + 4$ делит $12 \cdot 31 \cdot 32$. Если 31 делит $7r' + 4$, то $r' = 31u - 5$, $u \le 3$ и $7u - 1$ делит $12 \cdot \cdot 32$. Поэтому $u = 1, r' = 26$, $r = 13, \alpha = 15$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{15}(30, 91)$. Значит, $7r' + 4$ делит $12 \cdot 32$. Если 3 делит $7r' + 4$, то $r' = 3u + 2$, $u \le 34$ и $7u + 6$ делит 128, противоречие. Поэтому $7r' + 4$ делит 128, поэтому $r' = 4$, $r = 2, \alpha = 15$ и $\bar{\mu} = 12$.

Лемма 1.16. *Если $10 < s \le 20$, то $\mathcal{S}$ — одна из геометрий $EpG_\alpha(11, 9\alpha)$, $\alpha \in \{3, 4, 6\}$, $EpG_\alpha(14, 4\alpha)$, $\alpha \in \{2, 3, 5, 9\}$, $EpG_7(14, 8)$ или $EpG_7(14, 13)$, $EpG_\alpha(17, 10\alpha)$, $\alpha \in \{2, 3, 8\}$, $EpG_9(18, 28)$, $EpG_\alpha(19, 17\alpha)$, $\alpha \in \{3, 10, 13\}$, $EpG_6(20, 45)$ или $EpG_{15}(20, 18)$.*

Доказательство. Пусть $s = 11$. Тогда $t = 3r$, $r \le 80\alpha/11$, $\alpha > 1$ и α делит r, поэтому $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/11$. По лемме 1.6 число $3r' + 4$ делит $4 \cdot 4 \cdot 13$. Если 13 делит $3r' + 4$, то $r' = 13u + 3$, $3u + 1$ делит 16, $u = 0$, $r = 3\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(11, 9\alpha)$ число $2\alpha + 3$ делит $11 \cdot 27(9\alpha + 1)$. Заметим, что $(2\alpha + 3, 9\alpha + 1) = (\alpha - 11, 5)$. Если 11 делит $2\alpha + 3$, то $\alpha = 4$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_4(11, 36)$. Если же 11 не делит $2\alpha + 3$, то $2\alpha + 3$ делит $27 \cdot 5$, $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_\alpha(11, 9\alpha)$, $\alpha \in \{3, 6\}$.

Пусть $s = 12$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 72t/(5\alpha)$, поэтому $t = 5r$ и $r \le 200\alpha/9$. Далее, α делит $12r$, поэтому $12r = r'\alpha$, $r' \le 800/3$ и по лемме 1.6 число $5r' + 4$ делит $12 \cdot 13 \cdot 7$. Если 13 делит $5r' + 4$, то $r' = 13u - 6$, $u \le 20$ и $5u - 2$ делит 84. В этом случае $u \in \{1, 6\}$ и $r' \in \{7, 72\}$. В случае $r' = 7$ имеем $\alpha = 12$, противоречие. В случае $r' = 72$ имеем $r = 6\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(12, 30\alpha)$ число $29\alpha + 13$ делит $12 \cdot 13 \cdot 30(30\alpha + 1)$. Заметим, что $(29\alpha + 13, 30\alpha + 1) = (\alpha - 12, 361) = 1$.

Если 5 делит $29\alpha+13$, то $\alpha = 3$ и 100 не делит $12\cdot 30$. Значит, что $29\alpha+13$ делит 36, противоречие. Если же 13 не делит $5r'+4$, то $5r'+4$ делит 84, $r' = 2$, $r = 1, \alpha = 6$ и $\bar{\mu} = 12$.

Пусть $s = 13$. Тогда $t = 11r$, $r \leq 80\alpha/39$, $r = r'\alpha$ и $r' \leq 80/39$. По лемме 1.6 число $13 \cdot 11r' + 4$ делит $12 \cdot 14 \cdot 15$, противоречие.

Пусть $s = 14$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 14t/\alpha$ и $t \leq 160\alpha/7$. Далее, α делит $14t$, $14t = r\alpha$ и $r \leq 320$. По лемме 1.6 число $r+4$ делит $12\cdot 5\cdot 4$. Если 5 делит $r+4$, то $r = 5u+1$, $u+1$ делит 48, $u \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 23, 47\}$ и $r \in \{6, 16, 26, 36, 56, 76, 116, 236\}$. Если $r \neq 56$, то $\alpha = 7$ и по условию целочисленности для $pG_7(14, r/2)$ геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_7(14, 8)$ или $EpG_7(14, 13)$.

Пусть $r = 56$. Тогда $t = 4\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(14, 4\alpha)$ число $\alpha+5$ делит $14\cdot 20\alpha(4\alpha+1)$. Заметим, что $(\alpha+5, 4\alpha+1) = 1$. Если 7 делит $\alpha+5$, то геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_\alpha(14, 4\alpha)$, $\alpha \in \{2, 9\}$. Если 5 делит $\alpha+5$, то геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_5(14, 20)$. Если же $\alpha+5$ взаимно просто с 35, то $\alpha+5$ делит 8, $\alpha = 3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_3(14, 12)$.

Пусть $s = 15$. Тогда $t = 13r$ и $r \leq 16\alpha/9$. Далее, α делит $15r$, поэтому $15r = r'\alpha$, $r' \leq 80/3$ и по лемме 1.6 $13r'+4$ делит $12 \cdot 16 \cdot 17$. Если 17 делит $13r'+4$, то $r' = 18$, противоречие. Значит, $13r'+4$ делит $12 \cdot 16$, противоречие.

Пусть $s = 16$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 96t/(7\alpha)$, поэтому $t = 7r$ и $r \leq 10\alpha/3$. Далее, α делит $16r$, $16r = r'\alpha$, $r' \leq 160/3$ и по лемме 1.6 число $7r'+1$ делит $12\cdot 17\cdot 9$. Если 17 делит $7r'+4$, то $r' = 17u-3$, $7u-1$ делит $12 \cdot 9$, $u = 1, r' = 14$, $r = 7, \alpha = 8$ и нарушается условие целочисленности для $pG_8(16, 49)$. Поэтому $7r'+1$ делит 108, $r' = 5$ и $\alpha = 16$, противоречие.

Пусть $s = 17$. Тогда $t = 5r$, $r = r'\alpha$ и $r' \leq 80/17$. По лемме 1.6 число $85r'+1$ делит $12 \cdot 6 \cdot 19$. Поэтому 19 делит $85r'+1$, $r' = 2$, $r = 2\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(17, 10\alpha)$ число $\alpha+2$ делит $17 \cdot 20(10\alpha+1)$. Заметим, что $(\alpha+2, 10\alpha+1)$ делит 19. Значит, $\alpha+2$ делит 20, геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_\alpha(17, 10\alpha)$ и $\alpha \in \{2, 3, 8\}$.

Пусть $s = 18$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 27t/(2\alpha)$, поэтому $t = 2r$ и $r \leq 320\alpha/27$. Далее, α делит $18r$, $18r = r'\alpha$, $r' \leq 640/3$ и по лемме 1.6 число $r'+2$ делит $6 \cdot 19 \cdot 5$. Если 19 делит $r'+2$, то $r' = 19u-2$, u делит 30, $u \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$ и $r' \in \{17, 36, 55, 93, 112, 188\}$. Заметим, что r' не взаимно просто с 18. В случае $r' = 36$ имеем $r = 2\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(18, 4\alpha)$ число $3\alpha+19$ делит $19\cdot 8(4\alpha+1)$. Заметим, что $(3\alpha+19, 4\alpha+1) = (\alpha-18, 73) = 1$ и $3\alpha+19$ делит 8, противоречие. В случае $r' = 93$ имеем $r = 31, \alpha = 6$ и нарушается условие целочисленности для $pG_6(18, 62)$.

Значит, 19 не делит $r'+2$ и $r'+2$ делит 30, поэтому $r' \in \{3, 4, 8, 28\}$. В случае $r' = 3$ имеем $r = 1, \alpha = 6$. В случае $r' = 4$ имеем $r = 2, \alpha = 9$.

В любом из этих случаев $t+1<\alpha$. В случае $r'=8$ имеем $r=4, \alpha=9$ и $\bar{\mu}=12$. В случае $r'=28$ имеем $r=14, \alpha=9$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_9(18,28)$.

Пусть $s=19$. Тогда $\alpha>1$, $t=17r$, $r=r'\alpha$, $r'\le 80/57$ и $r'=1$. По лемме 1.6 число $17r'+4=21$ делит $12{\cdot}20{\cdot}21$. По условию целочисленности для $pG_\alpha(19,17\alpha)$ число $4\alpha+5$ делит $19\cdot 5\cdot 17(17\alpha+1)$. Заметим, что $(4\alpha+5, 17\alpha+1)=(\alpha-19, 81)$. Если 19 делит $4\alpha+5$, то $\alpha=13$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_{13}(19,221)$. Если 17 делит $4\alpha+5$, то $\alpha=3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_3(19,51)$. Если же $4\alpha+5$ взаимно просто с $17\cdot 19$, то $4\alpha+5$ делит 45 и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_{10}(19,170)$.

Пусть $s=20$. Тогда $\bar{\mu}=12st/(\alpha(s-2))=40t/(3\alpha)$, поэтому $t=3r$ и $r\le 8\alpha$. Далее, α делит $20r$, $20r=r'\alpha$ и $r'\le 160$. По лемме 1.6 число $3r'+4$ делит $4\cdot 7\cdot 11$. Если 11 делит $3r'+4$, то $r'=11u+6$, $u\le 14$ и $3u+2$ делит 28. Поэтому $u\in\{0,4\}$ и $r'\in\{6,50\}$. В случае $r'=6$ имеем $r=3, \alpha=10$ и $\bar{\mu}=12$. В случае $r'=50$ имеем $r=5u, \alpha=2u$, $u\le 3$ и по условию целочисленности для $pG_{2u}(20,15u)$ число $13u+21$ делит $10\cdot 21\cdot 15(15u+1)$. Отсюда $u=3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_6(20,45)$.

Если 7 делит $3r'+4$, то $r'=7u+1$ и $3u+1$ делит 4. Поэтому $u=1, r'=8$, $r=2w, \alpha=5w$, $w\le 3$ и по условию целочисленности для $pG_{5w}(20,6w)$ число $w+21$ делит $4\cdot 21\cdot 6(6w+1)$. Отсюда $w=3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_{15}(20,18)$.

Если $3r'+4$ взаимно просто с $7\cdot 11$, то $3r'+4$ делит 4, противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема 1.1 доказаны.

§ 1.2. Вполне регулярные локально $GQ(4,t)$-графы

Пусть связный граф Γ является локально $\mathcal{F}$-графом, где $\mathcal{F}$ состоит из точечных графов обобщенных четырехугольников. По связности графа порядок (s,t) обобщенного четырехугольника не зависит от выбора точки и такой граф обозначается как $EGQ(s,t)$.

Локально $GQ(s,t)$-графы нередко возникают в связи с геометрическими структурами в конечных простых группах. Первые шаги в изучении локально $GQ(s,t)$-графов были сделаны при сильном предположении о флаг-транзитивности действия на графе его группы автоморфизмов.

Локально $GQ(s,t)$-графы для $s\le 3$ были классифицированы без дополнительных предположений. Но в случае $s=4$ с самого начала предполагалось, что граф является вполне регулярным, а окончательный результат получен только для дистанционно регулярных графов.

Теорема 1.2 [72]. *Пусть* Γ *— связный вполне регулярный локально* $GQ(4,1)$*-граф диаметра, большего 2, с параметрами* (v,k,λ,μ)*. Тогда* *диаметр Γ равен 3 и $\mu \in \{4, 8\}$.*

Теорема 1.3 [72]. *Пусть Γ — связный вполне регулярный локально $GQ(4,12)$-граф с параметрами (v, k, λ, μ). Тогда диаметр Γ равен 3 и $\mu \in \{56, 60, 64, 70, 80, 84\}$.*

Следствие 1.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный локально $GQ(4,t)$-граф с параметрами (v, k, λ, μ). Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $t = 1$, *либо* $\mu = 4$ *и* Γ — *граф Джонсона* $J(10,5)$ *или его стандартное частное, либо* $\mu = 8$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$;

(2) $t = 2$, Γ — *граф с параметрами* $(126, 45, 12, 18)$ *на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве типа "$-$" над* $GF(3)$ *или* Γ — *единственный локально* $GQ(4,2)$-*граф с массивом пересечений* $\{45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45\}$;

(3) $t = 6$, Γ *имеет параметры* $(726, 125, 28, 20)$ *или* Γ — *граф с массивом пересечений* $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$.

Подмножество Λ обобщенного четырехугольника называется *гиперовалом*, если любая прямая пересекает Λ по 0 или 2 точкам. То есть, гиперовал в $GQ(s,t)$ — это регулярный подграф без треугольников степени $t + 1$, имеющий четное число вершин. Известно (см. [10]), что μ-подграфы в локально $GQ(s,t)$ графах являются гиперовалами. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и положим $x_i(\Delta) = |X_i(\Delta)|$. Для подграфа Δ обобщенного четырехугольника прямую L назовем *секущей, касательной и внешней прямой*, если $L \cap \Delta$ содержит две, одну и ноль вершин соответственно; точку, смежную с ребром Δ, назовем *реберной*.

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. *Пусть Γ — локально $GQ(s,t)$-граф. Тогда максимальные клики из Γ состоят из $s + 2$ точек (такие клики мы будем называть блоками), каждая точка лежит в $(t+1)(st+1)$ блоках, любые две смежные точки лежат в $t + 1$ общих блоках, любые два блока пересекаются не более чем по двум точкам.*

Доказательство. Все утверждения следуют из определения локально $GQ(s,t)$-графа и свойств GQ.

Лемма 2.2. *Пусть Λ является гиперовалом в обобщенном четырехугольнике $GQ(s,t)$, $\mu = |\Lambda|$. Тогда μ четно, и выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mu_* \le \mu \le \mu^*$, *где* $\mu_* = max\{2(t+1), (s+1)(t+2-s)\}$, $\mu^* = 2(st+1)$;

(2) *если* $\mu = (s+1)(t+2-s)$ *($\mu = \mu^*$), то для любой точки* $a \notin \Lambda$ *точно* $(t+2-s)/2$ *прямых (все прямые) из* $a^{\perp}$ *пересекают* Λ *по двум точкам;*

(3) $\mu x_0 \leq (v-\mu)(v-x_0)(t+s)^2/(2s(t+1)+t+2-s)^2$.

Доказательство. Оценки для μ и четность μ следуют из лемм 3.9, 3.11 [42]. Если $\mu = (s+1)(t+2-s)$, то из доказательства леммы 3.11 [42] следует, что для $a \notin \Lambda$ число прямых из $a^{\perp}$, не пересекающих Λ, равно $(s+t)/2$.

Если $\mu = \mu^*$, то по лемме 3.9 (b) [42] каждая прямая пересекает Λ.

Так как между Λ и X_0 нет ребер, то по предложению 4.6.1 из [43] имеем $\mu x_0 \leq (v-\mu)(v-x_0)(\theta_2-\theta_1)^2/(2k-\theta_2-\theta_1)^2$, где $\theta_2 = -(t+1), \theta_1 = s-1$ — неглавные собственные значения графа Γ. Поэтому $\mu x_0 \leq (v-\mu)(v-x_0)(t+s)^2/(2s(t+1)+t+2-s)^2$.

Лемма 2.3. *Пусть* Γ *– сильно регулярный граф, имеющий параметры* (v,k,λ,μ), Δ *– индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1,\ldots,d_N$. *Тогда*
$\sum_{i=0}^{N} x_i = v - N$,
$\sum_{i=1}^{N} i x_i = kN - 2M$,
$\sum_{i=2}^{N} \binom{i}{2} x_i = \lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum \binom{d_i}{2}$.

Доказательство. Указанные равенства следуют из подсчета числа вершин в $\Gamma - \Delta$, числа ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и числа 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$.

Лемма 2.4. *Пусть* Γ *является связным вполне регулярным локально* $GQ(4,1)$*-графом. Тогда либо* $\mu = 4$ *и* Γ *— граф Джонсона* $J(10,5)$ *или его стандартное частное, либо* $\mu = 8$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{25,16,1;1,8,25\}$.

Доказательство. По прямоугольному соотношению $k(k-\lambda-1) = k_2\mu$ имеем $\mu \in \{4,8,10\}$. Если каждый μ-подграф является объединением 4-циклов, то по [44, теорема 1] Γ — граф Джонсона $J(10,5)$ или его стандартное частное.

Если $\mu = 10$, то Γ — сильно регулярный граф с параметрами (66,25,8,10) и собственными значениями 3, -5, причем кратность 3 равна $4\cdot 25\cdot 30/80$, противоречие.

Если $\mu = 8$, то Γ — либо сильно регулярный граф с параметрами (76,25,8,8), либо граф диаметра 3 с $b_2(u,y) \leq 1$ для любых вершин u,y со свойством $d(u,y) = 2$. В первом случае число $(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu) = 68$ не является квадратом, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{25,16,1;1,8,25\}$. Лемма доказана.

В леммах 2.5–2.8 предполагается, что Γ является точечным графом обобщенного четырехугольника $GQ(4,12)$, Λ — гиперовал из Γ на μ вершинах.

Положим $X_i = X_i(\Lambda)$, $x_i = |X_i|$. По лемме 2.2 имеем $50 \leq \mu \leq 98$. Если L — внешняя прямая для Λ, содержащая по точке из X_i, X_j, X_l, X_p, X_q, где $i \leq j \leq l \leq p \leq q$, то назовем L прямой типа (i,j,l,p,q). Если L — секущая прямая для Λ, содержащая по точке из X_i, X_j, X_l, где $i \leq j \leq l$, то назовем L прямой типа (i,j,l).

Лемма 2.5. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *коэффициенты x_i удовлетворяют системе уравнений*
$\sum_{i=0}^{12} x_{2i} = 225 - \mu$,
$\sum_{i=1}^{12} 2ix_{2i} = 36\mu$,
$\sum_{i=1}^{12} \binom{2i}{2} x_{2i} = 6\mu^2 - 126\mu$;
(2) *если секущая L имеет тип (i,j,r), то $i+j+r = \mu - 20$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 2.3.

Заметим, что L содержит две точки из Λ и каждая из этих точек смежна с 12 точками из $\Lambda - L$. Далее, каждая точка из $\Lambda - L$ смежна с единственной точкой из L, поэтому $(i-2)+(j-2)+(r-2) = (\mu-2)-24$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *если $\mu > 72$, то X_0 является кокликой;*
(2) *если $r = \mu - 72$, $z \in X_r$ и L — прямая, проходящая через z, то $X_0 \subset [z]$ и либо*
(i) *L является секущей для Λ и содержит две точки из X_{26}, либо*
(ii) *L — внешняя прямая для Λ, и если L пересекает X_0, то L содержит 3 точки из X_{24}.*

Доказательство. Пусть $\mu > 72$. Если X_0 содержит ребро, то на прямой, содержащей это ребро, имеются точки из X_i, X_j, X_l и $i+j+l = \mu$. Так как указанные точки лежат на внешней прямой, то каждое из чисел i,j,l не больше 24 и $\mu \leq 72$. Итак, X_0 является кокликой. Утверждение (1) доказано.

Пусть $r = \mu - 72$, $z \in X_r$ и L — прямая, проходящая через z. Если L является секущей для Λ, то $L - \{z\}$ содержит две точки из X_i, X_j и по лемме 2.5 имеем $i+j+r = \mu - 20$. Отсюда $i = j = 26$. Если L — внешняя прямая для Λ и L пересекает X_0, то $L - (X_0 \cup \{z\})$ содержит 3 точки из X_i, X_j, X_l и $i+j+l = 72$. Значит, $i = j = l = 24$.

Если $y \in X_0$, L — секущая, проходящая через z, то y смежна с единственной точкой прямой L. Так как указанная точка не попадает в $\Lambda \cup X_{26}$, то $y \in [z]$.

Лемма 2.7. *Если* $\mu = 96$*, то* X_0 *содержит единственную вершину* a*,* $[a] = X_{24}$ *и* $\Gamma - (a^{\perp} \cup \Lambda) = X_{26}$.

Доказательство. Пусть $\mu = 96$. Тогда число секущих равно 624 и число внешних прямых равно 13. Далее, $x_i = 0$ для $i < 24$. Отсюда X_0 содержит единственную вершину a, по лемме 2.6 имеем $[a] = X_{24}$ и $\Gamma - (a^{\perp} \cup \Lambda) = X_{26}$.

Лемма 2.8. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *если* $\mu = 56$*, то* $x_0 \leq 12$*;*
(2) *если* $\mu = 60$*, то* $x_0 \leq 12$*;*
(3) *если* $\mu = 64$*, то* $x_0 \leq 10$*;*
(4) *если* $\mu = 70$*, то* $x_0 \leq 9$*;*
(5) *если* $\mu = 80$*, то* $x_0 \leq 8$*;*
(6) *если* $\mu = 84$*, то* $x_0 \leq 7$.

Доказательство. Пусть $\mu = 56$. Тогда $x_0 \leq 64 \cdot 7 \cdot 27/(8 \cdot 123)$, поэтому $x_0 \leq 12$.

Пусть $\mu = 60$. Тогда $x_0 \leq 64 \cdot 5 \cdot 37/(4 \cdot 259)$, поэтому $x_0 \leq 12$.

Пусть $\mu = 64$. Тогда $x_0 \leq 64 \cdot 181/(64 \cdot 17)$, поэтому $x_0 \leq 10$.

Пусть $\mu = 70$. Тогда $x_0 \leq 64 \cdot 35 \cdot 5/(2 \cdot 583)$, поэтому $x_0 \leq 9$.

Пусть $\mu = 80$. Тогда $x_0 \leq 64 \cdot 5 \cdot 33/(16 \cdot 81)$, поэтому $x_0 \leq 8$.

Пусть $\mu = 84$. Тогда $x_0 \leq 64 \cdot 7 \cdot 23/(4 \cdot 85)$, поэтому $x_0 \leq 7$. Лемма доказана.

До конца параграфа предполагается, что Γ является связным вполне регулярным локально $GQ(4, 12)$-графом.

Лемма 2.9. *Диаметр* Γ *не больше* 3.

Доказательство. По лемме 2.2 имеем $\mu(u, w) \geq 50$ для любых вершин $u, w \in \Gamma$ с $d(u, w) = 2$.

Пусть диаметр Γ не меньше 4. Выберем геодезический 4-путь $uwxyz$ в Γ. Тогда обобщенный четырехугольник $[x]$ содержит гиперовалы $[u] \cap [x]$ и $[x] \cap [z]$, между которыми нет ребер. Далее, $|[u] \cap [x]| \geq 50$ и $|[x] \cap [z]| \geq 50$, поэтому ввиду леммы 2.2 имеем $50 \leq 64(245 - 50)/(13 \cdot 50 + 256)$, противоречие.

Лемма 2.10. *Если* $\mu(u, w) > 72$*,* $X_i = X_i([u] \cap [w]) \cap [w]$*, то выполняются следующие утверждения:*

(1) X_0 *является кокликой и любая вершина* a *из* X_0*, лежащая в* $X_0([u] \cap [y])$ *для некоторой вершины* $y \in [a] \cap [w]$*, либо попадает в* $\Gamma_3(u)$*, либо имеет* $\mu(u, a) \leq 72$*;*

(2) *если* $a \in [w] \cap \Gamma_3(u)$ *и прямая* L *из* $[a]$ *не содержится в* $\Gamma_2(u)$*, то* $\mu(u, x) \leq 72$ *для любой вершины* $x \in \Gamma_2(u) \cap L$.

Доказательство. Пусть $\mu > 72$. Если X_0 содержит ребро, то на прямой обобщенного четырехугольника $[w]$, содержащей это ребро, имеются точки из X_i, X_j, X_l и $i+j+l=\mu$. Так как указанные точки лежат на внешней прямой, то каждое из чисел i,j,l не больше 24 и $\mu \le 72$. Итак, X_0 является кокликой.

Допустим, что вершина a из X_0 лежит в $X_0([u]\cap[y])$ для некоторой вершины $y \in [a]\cap[w]$. Если $a \in \Gamma_2(u)$, то $\{w,y\}$ является ребром из $[a]\cap X_0([u]\cap[a])$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $a \in \Gamma_3(u)$ и прямая L из $[a]$ не содержится в $\Gamma_2(u)$. Ввиду утверждения (1), примененного к $[u]\cap[a]$, имеем $\mu(u,x) \le 72$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(u)\cap L$.

Лемма 2.11. *Если* Γ *является связным вполне регулярным локально* $GQ(4,12)$*-графом, то диаметр* Γ *равен* 3 *и* $\mu \in \{56,60,64,70,80,84\}$.

Доказательство. Так как $k(k-\lambda-1) = k_2\mu$, где $k_2 = |\Gamma_2(u)|$ для $u \in \Gamma$, то μ делит $192\cdot 245 = 2^6 3\cdot 5\cdot 7^2$. Отсюда $\mu = 56,60,64,70,80,84,96$ или 98.

Если диаметр Γ равен 2, то Γ является сильно регулярным графом, противоречие с теоремой из [42]. Ввиду леммы 2.9 диаметр Γ равен 3, поэтому $\mu \ne 98$.

Если $\mu = 96$, то каждый μ-подграф является аффинным овоидом в $GQ(4,12)$, противоречие с теоремой из [49]. Лемма доказана.

Пусть $u \in \Gamma$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$.

Лемма 2.12. Γ *не является дистанционно регулярным графом.*

Доказательство. Если $\mu = 84$, то $k_2 = 560$ и по лемме 2.2 граф $[x]\cap X_0([u]\cap[x])$ является подграфом из 7-коклики. Допустим, что $\{y,z\}$ — ребро из $\Gamma_3(u)$. Тогда подграф $[x]\cap[z]$ пересекает $\Gamma_3(u)$ по коклике, и вершина y смежна с вершиной из $[x]\cap[z]\cap\Gamma_2(u)$, противоречие. Итак, $\Gamma_3(u)$ является кокликой, поэтому $c_3 = 245$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \le 3$. Но тогда число $p^3_{33} > 0$ не целое, противоречие.

Если $\mu = 80$, то $k_2 = 588$ и по лемме 2.2 граф $[x]\cap X_0([u]\cap[x])$ является подграфом из 8-коклики. Допустим, что $\{y,z\}$ — ребро из $\Gamma_3(u)$. Тогда подграф $[x]\cap[z]$ пересекает $\Gamma_3(u)$ по коклике, и вершина y смежна с вершиной из $[x]\cap[z]\cap\Gamma_2(u)$, противоречие. Итак, $\Gamma_3(u)$ является кокликой, поэтому $c_3 = 245$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \le 3$. Но тогда число $p^3_{33} > 0$ не целое, противоречие.

Если $\mu = 70$, то $k_2 = 672 = 2^5 3\cdot 7$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \le 3$. Тогда $c_3 \le 224$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие.

Если $\mu = 64$, то $k_2 = 735 = 3\cdot 5\cdot 7^2$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \le 3$. Тогда $c_3 \le 210$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие.

Если $\mu = 60$, то $k_2 = 784 = 2^4 \cdot 7^2$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Тогда $c_3 \leq 224$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие.

Если $\mu = 56$, то $k_2 = 840 = 2^3 3 \cdot 5 \cdot 7$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Тогда $c_3 \leq 210$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 2.4, 2.12 и результатов [12-17] получаем следствие 1.1.

§ 1.3. Плотные сферические схемы, 4-изорегулярные графы и их автоморфизмы

В этом параграфе излагаются связи между плотными сферическими 4-схемами и 4-изорегулярными графами $Izo(r)$. Найдены параметры сильно регулярных локальных подграфов из $Izo(r)$ и возможные автоморфизмы графа $Izo(r)$ с простейшими подграфами неподвижных точек. Завершено описание автоморфизмов сильно регулярных локальных подграфов из $Izo(3)$.

Для подмножества вершин S графа Γ через $\Gamma(S)$ обозначим $\cap_{a\in S}([a]-S)$.

Граф Γ называется t-однородным, если для любого $i \leq t$ и для любых двух изоморфных i-вершинных подграфов Φ и Ψ найдется такой автоморфизм g графа Γ, что $\Phi^g = \Psi$. Граф Γ на v вершинах называется абсолютно однородным, если он является $(v-1)$-однородным. Гардинер [45] доказал, что каждый 5-однородный граф Γ является абсолютно однородным, и с точностью до перехода к дополнительному графу, Γ является полным многодольным графом $K_{m\times n}$, пятиугольником, или 3×3-решеткой.

Граф Γ называется t-изорегулярным, если для любого $i \leq t$ и любого i-вершинного подмножества S число $|\Gamma(S)|$ зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного S. Как и выше, определяется абсолютно изорегулярный граф, t-изорегулярный граф Γ называется точно t-изорегулярным, если он не является $(t+1)$-изорегулярным. Камерон [19, теорема 8.21] доказал, что каждый 5-изорегулярный граф Γ является абсолютно изорегулярным и принадлежит списку графов в заключении теоремы Гардинера, а каждый точно 4-изорегулярный граф, с точностью до перехода к дополнительному графу, является псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$. Через $Izo(r)$ обозначим псевдогеометрический граф для $pG_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$. При $r = 1$ получим точечный граф единственного обобщенного четырехугольника порядка $(2, 4)$, а при $r = 2$ — граф Маклафлина. А.Л. Гаврилюк и А.А. Махнев [21] доказали, что граф $Izo(r)$ не существует в случае $r = 3$. А.А. Махневым была выдвинута

Гипотеза 1.1. Для $r > 2$ граф $Izo(r)$ не существует.

Существование плотной сферической 5-схемы в S^{n-1} (см. [20]) равносильно существованию графа $Izo(r)$, где $n = (2r+1)^2-2$. В [20, следствие 4.7] доказано несуществование плотных 5-схем для бесконечного набора значений параметра r: $3, 4, 6, 10, 12, 22, 28, 30, 34, 42, 46, \ldots$.

Актуальной является проблема существования графа $Izo(5)$.

Пусть $\Gamma = Izo(r)$, a — вершина графа Γ, $\Sigma = [a]$, $\Delta = \Gamma_2(a)$, $b \in [a]$, $c \in \Gamma_2(a)$. Из условия 4-изорегулярности следует, что подграфы Σ, Δ, $\Sigma(b)$, $\Sigma_2(b)$, $\Delta(c)$, $\Delta_2(c)$ сильно регулярны. В предложениях 1.1–1.3 найдены параметры этих графов.

Предложение 1.1 [66]. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$. Тогда он имеет $v = 8r^4 + 16r^3 + 6r^2 - 2r - 1$ вершин и собственные значения $k = 4r^4+6r^3, r, -(2r^3+3r^2)$ кратностей $1, f = 8r^4 + 16r^3 + 2r^2 - 6r, g = 4r^2 + 4r - 2$ соответственно. Далее, для любой вершины a:*

(1) *подграф $\Sigma = [a]$ — псевдогеометрический граф для $pG_{r-1}(2r - 1, r^3 + r^2 - r - 1)$, имеет $v_1 = 4r^4 + 6r^3$ вершин и собственные значения $k_1 = 2r^4 + r^3 - 3r^2 + r, r_1 = r, s_1 = -(r^3 + r^2 - r)$ кратностей $1, f_1 = 4r^4 + 6r^3 - 4r^2 - 4r + 2, g_1 = 4r^2 + 4r - 3$ соответственно;*

(2) *подграф $\Delta = \Gamma_2(a)$ сильно регулярен, имеет $v_2 = 4r^4 + 10r^3 + 6r^2 - 2r - 2$ вершин и собственные значения $k_2 = 2r^4 + 3r^3, r_2 = r, s_2 = -(r^3 + 2r^2)$ кратностей $1, f_2 = 4r^4 + 10r^3 + 2r^2 - 6r, g_2 = 4r^2 + 4r - 3$ соответственно.*

Предложение 1.2 [66]. *Пусть Σ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$. Тогда он имеет $v = 4r^4+6r^3$ вершин и собственные значения $k = 2r^4+r^3-3r^2+r, r, -(r^3+r^2-r)$ кратностей $1, f = 4r^4 + 6r^3 - 4r^2 - 4r + 2, g = 4r^2 + 4r - 3$ соответственно. Далее, для любой вершины $b \in \Sigma$:*

(1) *подграф $\Sigma(b)$ — псевдогеометрический граф для $pG_{r-2}(2r - 2, (r^3 - 3r - 2)/2)$, имеет $v_1 = 2r^4 + r^3 - 3r^2 + r$ вершин и собственные значения $r^4 - r^3 - 3r^2 + 3r, r, -(r^3 - 3r)/2$ кратностей $1, f_1 = 2r^4 + r^3 - 7r^2 - 3r + 3, g_1 = 4r^2 + 4r - 4$ соответственно;*

(2) *подграф $\Sigma_2(b)$ сильно регулярен с параметрами $(2r^4+5r^3+3r^2-r-1, r^4+r^3-r^2, (r^4-r^3-3r^2+3r)/2, (r^4-r^2)/2)$ и собственными значениями $r^4+r^3-r^2, r, -(r^3+2r^2-r)/2$ кратностей $1, 2r^4+5r^3-r^2-5r+2, 4r^2+4r-4$ соответственно.*

Предложение 1.3 [66]. *Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(4r^4 + 10r^3 + 6r^2 - 2r - 2, 2r^4 + 3r^3, r^4 - 2r^2 + r, r^4 + r^3)$ и собственными значениями $k = 2r^4 + 3r^3, r, -(r^3 + 2r^2)$ кратностей*

$1, 4r^4 + 10r^3 + 2r^2 - 6r, 4r^2 + 4r - 3$ *соответственно. Если* $r \geq 2$, *то для любой вершины* $c \in \Delta$:

(1) *подграф* $\Delta(c)$ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(2r^4 + 3r^3, r^4 - 2r^2 + r, (r^4 - 2r^3 - 3r^2 + 6r)/2, (r^4 - r^3 - 2r^2 + 2r)/2)$ *и собственными значениями* $r^4 - 2r^2 + r, r, -(r^3 + r^2 - 2r)/2$ *кратностей* $1, 2r^4 + 3r^3 - 4r^2 - 4r + 3, 4r^2 + 4r - 4$ *соответственно;*

(2) *подграф* $\Delta_2(c)$ *сильно регулярен с параметрами* $(2r^4 + 7r^3 + 6r^2 - 2r - 3, r^4 + 2r^3, (r^4 - 3r^2 + 2r)/2, (r^4 + r^3)/2)$, *собственными значениями* $r^4 + 2r^3, r, -(r^3 + 3r^2)/2$ *кратностей* $1, 2r^4 + 7r^3 + 2r^2 - 6r, 4r^2 + 4r - 4$ *соответственно.*

Далее, с помощью метода Хигмена для автоморфизма g графа $Izo(r)$ найдена формула для значения характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2 + 4r - 2$:

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/((r+1)(2r+1)) + (2r^2 + 2r - 1)/(r+1).$$

Найдены возможные простые порядки автоморфизмов g графа $Izo(r)$ таких, что подграф $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ является пустым, кликой или кокликой.

Теорема 1.4 [66].

(1) *Если* Ω *— пустой граф, то*

(i) p *делит* $(2r+1)(4r^3 + 6r^2 - 1)$, *в частности,* $p \neq 2$,

(ii) *если* $p = 3$, *то* $r \equiv 1 \pmod 3$, $\alpha_1(g) = wr(2r+1)$ *и* $w+1$ *делится на* $r + 1$.

(2) *Если* Ω *является* n*-кликой, то* $n = 1$ *и либо* $p = 37$, $r = 37u + 17$, *либо* $p = 2$.

(3) *Если* Ω *является* m*-кокликой,* $m \geq 2$, *то* $3 \leq m \leq 4r^2 + 4r - 2$, p *делит* r *и* $m + 1$.

Сначала приведем вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, §2 из [46]).

Лемма 3.2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с собственными значениями $k, r > 0, s < -1$ кратностей $1, f, g$ соответственно и $l = v - k - 1$. Допустим, что для некоторой вершины a подграф $[a]$ сильно регулярен с матрицей смежности A_1, собственными значениями $k_1, r_1, s_1 < 0$ кратностей $1, f_1, g_1$ соответственно и $\Gamma_2(a)$ сильно регулярен с матрицей смежности A_2, собственными значениями $k, r_2, s_2 < 0$ кратностей $1, f_2, g_2$ соответственно. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $r_2 = r = r_1$, $s_1 + s_2 = r + s$, $g_1 = g_2 = g - 1 < f - 1$ *или* $s_2 = s = s_1$, $r_1 + r_2 = r + s$, $f_1 = f_2 = f - 1 < g - 1$;

(2) $r_2 = r$, $A_1 = O$, $s_2 = r + s$, $1 + g_2 = g = k < l = f$ *или* $s = s_1$, $A_2 = J - I$, $r_1 = r + s + 1$, $1 + f_1 = f = l < k = g$;

(3) $r_2 = r, s_1 = s$, $r_1 + s_2 = r + s$, $g_2 = f_1, k = g, l = f$;

(4) $s_2 = s, r_1 = r$, $r_2 + s_1 = r + s$, $f_2 = g_1, k = f, l = g$;

(5) $r_2 \neq r \neq r_1$, $s_2 \neq s \neq s_1$, $k = l = f = g$ *и* Γ *— пятиугольник.*

Доказательство. Лемма следует из теорем 6.2 и 6.4 [47].

Лемма 3.3. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$. Тогда он имеет $v = 8r^4 + 16r^3 + 6r^2 - 2r - 1$ вершин и собственные значения $k = 4r^4 + 6r^3, r, -(2r^3 + 3r^2)$ кратностей $1, f = 8r^4 + 16r^3 + 2r^2 - 6r, g = 4r^2 + 4r - 2$ соответственно. Далее, для любой вершины a*

(1) *подграф $\Sigma = [a]$ — псевдогеометрический граф для $pG_{r-1}(2r - 1, r^3 + r^2 - r - 1)$, имеет $v_1 = 4r^4 + 6r^3$ вершин и собственные значения $k_1 = 2r^4 + r^3 - 3r^2 + r, r_1 = r, s_1 = -(r^3 + r^2 - r)$ кратностей $1, f_1 = 4r^4 + 6r^3 - 4r^2 - 4r + 2, g_1 = 4r^2 + 4r - 3$ соответственно;*

(2) *подграф $\Delta = \Gamma_2(a)$ сильно регулярен, имеет $v_2 = 4r^4 + 10r^3 + 6r^2 - 2r - 2$ вершин и собственные значения $k_2 = 2r^4 + 3r^3, r_2 = r, s_2 = -(r^3 + 2r^2)$ кратностей $1, f_2 = 4r^4 + 10r^3 + 2r^2 - 6r, g_2 = 4r^2 + 4r - 3$ соответственно.*

Доказательство. Лемма следует из леммы 3.2.

Лемма 3.4. *Пусть Σ — псевдогеометрический граф для $pG_{r-1}(2r - 1, r^3 + r^2 - r - 1)$. Тогда он имеет $v = 4r^4 + 6r^3$ вершин и собственные значения $k = 2r^4 + r^3 - 3r^2 + r, r, -(r^3 + r^2 - r)$ кратностей $1, f = 4r^4 + 6r^3 - 4r^2 - 4r + 2, g = 4r^2 + 4r - 3$ соответственно. Далее, для любой вершины b*

(1) *подграф $\Sigma' = [b]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-2}(2r - 2, (r^3 - 3r - 2)/2)$, имеет $v_1 = 2r^4 + r^3 - 3r^2 + r$ вершин и собственные значения $r^4 - r^3 - 3r^2 + 3r, r, -(r^3 - 3r)/2$ кратностей $1, f_1 = 2r^4 + r^3 - 7r^2 - 3r + 3, g_1 = 4r^2 + 4r - 4$ соответственно;*

(2) *подграф* $\Delta' = \Gamma_2(b)$ *сильно регулярен с параметрами* $(2r^4+5r^3+3r^2-r-1, r^4+r^3-r^2, (r^4-r^3-3r^2+3r)/2, (r^4-r^2)/2)$ *и собственными значениями* $r^4+r^3-r^2, r, -(r^3+2r^2-r)/2$ *кратностей* $1, 2r^4+5r^3-r^2-5r+2, 4r^2+4r-4$ *соответственно.*

Доказательство. Лемма следует из леммы 3.2, примененной к псевдогеометрическому графу для $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$.

Лемма 3.5. *Пусть* Δ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(4r^4+10r^3+6r^2-2r-2, 2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, r^4+r^3)$ *и собственными значениями* $k = 2r^4+3r^3, r, -(r^3+2r^2)$ *кратностей* $1, 4r^4+10r^3+2r^2-6r, 4r^2+4r-3$ *соответственно. Если* $r \geq 2$, *то для любой вершины* a

(1) *подграф* $\Sigma'' = \Delta(a)$ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$ *и собственными значениями* $r^4-2r^2+r, r, -(r^3+r^2-2r)/2$ *кратностей* $1, 2r^4+3r^3-4r^2-4r+3, 4r^2+4r-4$ *соответственно;*

(2) *подграф* $\Delta'' = \Delta_2(a)$ *сильно регулярен с параметрами* $(2r^4+7r^3+6r^2-2r-3, r^4+2r^3, (r^4-3r^2+2r)/2, (r^4+r^3)/2)$, *собственными значениями* $r^4+2r^3, r, -(r^3+3r^2)/2$ *кратностей* $1, 2r^4+7r^3+2r^2-6r, 4r^2+4r-4$ *соответственно.*

Доказательство. Лемму 3.2 применим к сильно регулярному графу с параметрами $(4r^4+10r^3+6r^2-2r-2, 2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, r^4+r^3)$, $r \geq 2$ и собственными значениями $k = 2r^4+3r^3, r, -(r^3+2r^2)$ кратностей 1, $f = 4r^4+10r^3+2r^2-6r$, $g = 4r^2+4r-3$ соответственно. Тогда $g_1 = 4r^2+4r-4$, $r - s_1 = (v_1 r + k_1 - r)/g_1 = r^2(r+1)/2$. Поэтому $s_1 = -(r^3+r^2-2r)/2$, $\mu_1 = k_1 + rs_1 = (r^4-r^3-2r^2+2r)/2$ и $\lambda_1 = \mu_1 + r + s_1 = (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2$.

Далее, $g_2 = 4r^2+4r-4$, $r - s_2 = (v_2 r + k_2 - r)/g_2 = r(r^2+3r+2)/2$. Поэтому $s_2 = -(r^3+3r^2)/2$, $\mu_2 = k_2 + rs_2 = (r^4+r^3)/2$ и $\lambda_2 = \mu_2 + r + s_2 = (r^4-3r^2+2r)/2$.

Лемма 3.6. *Пусть* Γ — *псевдогеометрический граф для* $pG_r(2r, 2r^3+3r^2-1)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *каждый* μ-*подграф сильно регулярен с параметрами* $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$;

(2) *для вершин* $a \in \Gamma, b \in \Gamma_2(a)$ *подграф* $[b]$ *разбивается двумя сильно регулярными подграфами* $[a] \cap [b]$ *и* $[b] - [a]$ *с одинаковыми параметрами* $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$.

Доказательство. Пусть вершины a, b не смежны, $\Lambda = [a] \cap [b]$. Тогда $|\Lambda| = 2r^4+3r^3$. Так как степень вершины в μ-подграфе равна значению параметра μ в окрестности вершины, то $k_\Lambda = r^4-2r^2+r$. Так как значение параметра λ в μ-подграфе равно значению параметра μ в λ-подграфе, то $\lambda_\Lambda = (r^4 - 2r^3 - 3r^2 + 6r)/2$. Наконец, граф Λ сильно регулярен и из прямоугольного соотношения следует, что $\mu_\Lambda = (r^4 - r^3 - 2r^2 + 2r)/2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.4 опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа Γ. Для любого $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ верно равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Если Γ является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями, g — автоморфизм графа Γ простого порядка p и χ_i — характер представления группы G, полученного при проектировании на i-ое собственное подпространство, то из [48, лемма 2], примененной к циклической группе $\langle g \rangle$, следует, что

$\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p и $\chi(1) - \chi(g)$ делится на p.

Если p не делит ни v/Q_{i1}, ни v/Q_{i2}, то условие делимости $\chi(1) - \chi(g)$ на p выполняется тривиально.

Лемма 3.7. *Пусть Γ является псевдогеометрическим графом для частичной геометрии $pG_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2 + 4r - 2$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно*

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/((r+1)(2r+1)) + (2r^2 + 2r - 1)/(r+1).$$

Доказательство. По условию леммы Γ имеет параметры $v = 8r^4 + 16r^3 + 6r^2 - 2r - 1$, $k = 4r^4 + 6r^3$, $\lambda = 2r^4 + r^3 - 3r^2 + r$, $\mu = 2r^4 + 3r^3$ и собственные значения $k, r, -r^2(2r+3)$ кратностей $1, 8r^4 + 16r^3 + 2r^2 - 6r$, $4r^2 + 4r - 2$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4r^4 + 6r^3 & r & -2r^3 - 3r^2 \\ 4r^4 + 10r^3 + 9r^2 - 3r - 2 & -r - 1 & 2r^3 + 3r^2 - 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8r^4 + 16r^3 + 2r^2 - 6r & \frac{2r^2+r-1}{r} & -(2r^2 + r)/(r+1) \\ 4r^2 + 4r - 2 & -\frac{2r^2+2r-1}{r} & (2r^2 + 2r - 1)/(r+1) \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-2$ равно

$$\chi_2(g) = \frac{1}{(2r+1)^2}(2\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r + \alpha_2(g)/(r+1)).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g)/r - \alpha_1(g)$, получим

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/((r+1)(2r+1)) + (2r^2+2r-1)/(r+1)).$$

Лемма 3.8. *Пусть Σ является псевдогеометрическим графом для частичной геометрии $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Sigma)$ равно*

$$\varphi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r^2+r) + (2r^2+r-3)/(r+1).$$

Доказательство. По условию леммы Σ имеет собственные значения $2r^4+r^3-3r^2+r, r, -(r^3+r^2-r)$ кратностей 1, $r^4+6r^3-4r^2-4r+2$, $4r^2+4r-3$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+r^3-3r^2+r & r & -r^3-r^2+r \\ 2r^4+5r^3+3r^2-r-1 & -r-1 & r^3+r^2-r-1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4r^4+6r^3-4r^2-4r+2 & 2r+2 & -(2r^2+2r-2)/(r+1) \\ 4r^2+4r-3 & -2r-3 & (2r^2+r-3)/(r+1) \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$ равно

$$\varphi_2(g) = \frac{1}{4r^4+6r^3}((4r^2+4r-3)\alpha_0(g) - (2r+3)\alpha_1(g) + (2r^2+r-3)\alpha_2(g)/(r+1)).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r^2+r) + (2r^2+r-3)/(r+1))$.

Лемма 3.9. *Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(4r^4+10r^3+6r^2-2r-2, 2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, r^4+r^3)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ равно*

$$\psi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r+1)^2 + 2r - 1.$$

Доказательство. По условию леммы Δ имеет собственные значения $2r^4 + 3r^3, r, -(r^3 + 2r^2)$ кратностей 1, $4r^4 + 10r^3 + 2r^2 - 6r + 2$, $4r^2 + 4r - 3$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4 + 3r^3 & r & -r^3 - 2r^2 \\ 2r^4 + 7r^3 + 6r^2 - 2r - 3 & -r - 1 & r^3 + 2r^2 - 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4r^4 + 6r^3 - 4r^2 - 4r + 2 & (2r^2 + 2r - 2)/r & -2r \\ 4r^2 + 4r - 3 & -(2r^2 + 3r - 2)/r & 2r - 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2 + 4r - 3$ равно

$$\psi_2(g) = ((4r^2 + 4r - 3)\alpha_0(g) - (2r^2 + 3r - 2)\alpha_1(g)/r + (2r - 1)\alpha_2(g))/v.$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\psi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r + 1)^2 + 2r - 1.$$

Лемма 3.10. *Пусть Σ' — псевдогеометрический граф для $pG_{r-2}(2r-2, (r^3 - 3r - 2)/2$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2 + 4r - 4$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Sigma')$ равно $\varphi_2'(g) = 2(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r + r^3 - r^2 - 3r + 2)/(r^2 - 1)$.*

Доказательство. По условию леммы Σ' имеет собственные значения $r^4 - r^3 - 3r^2 + 3r, r, -(r^3 - 3r)/2$ кратностей 1, $2r^4 + r^3 - 7r^2 - 3r + 3$, $4r^2 + 4r - 4$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4 - r^3 - 3r^2 + 3r & r & -(r^3 - 3r)/2 \\ r^4 + 2r^3 - 2r - 1 & -r - 1 & (r^3 - 3r - 2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4 + r^3 - 7r^2 - 3r + 3 & \dfrac{2r^2 + r - 1}{r - 1} & -\dfrac{2r^3 - r^2 - 6r + 3}{r^2 - 1} \\ 4r^2 + 4r - 4 & -\dfrac{2r^2 + 2r - 2}{r - 1} & \dfrac{2r^3 - 2r^2 - 6r + 4}{r^2 - 1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$ равно

$$\varphi_2'(g) = \frac{2}{2r^2-r}(2\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/(r-1) + (r-2)\alpha_2(g)/(r^2-1)).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_2'(g) = 2(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r + r^3 - r^2 - 3r + 2)/(r^2-1)$.

Лемма 3.11. *Пусть Δ' является сильно регулярным графом с параметрами $(2r^4+5r^3+3r^2-r-1, r^4+r^3-r^2, (r^4-r^3-3r^2+3r)/2, (r^4-r^2)/2)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ равно $\psi_2'(g) = 2(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r+1)^2 + 2r - 2$.*

Доказательство. По условию леммы Δ' имеет собственные значения $r^4+r^3-r^2, r, -(r^3+2r^2-r)/2$ кратностей $1, 2r^4+5r^3-r^2-5r+2, 4r^2+4r-4$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4+r^3-r^2 & r & -(r^3+2r^2-r)/2 \\ r^4+4r^3+4r^2-r-2 & -r-1 & (r^3+2r^2-r-2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+5r^3-r^2-5r+2 & (2r^2+3r-2)/r & -(2r-1) \\ 4r^2+4r-4 & -(2r^2+4r-2)/r & 2r-2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$ равно $\psi_2'(g) = 2(2r^2+2r-2)\alpha_0(g) - (r^2+2r-1)\alpha_1(g)/r + (r-1)\alpha_2(g))/v$. Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\psi_2'(g) = 2(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r+1)^2 + 2r - 2.$$

Лемма 3.12. *Пусть Σ'' является сильно регулярным графом с параметрами $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Sigma'')$ равно $\varphi_2''(g) = 2(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r^2+r) + (2r^2-4)/(r+1)$.*

Доказательство. По условию леммы Σ'' имеет собственные значения $r^4-2r^2+r, r, -(r^3+r^2-2r)/2$ кратностей 1, $2r^4+3r^3-4r^2-4r+3$, $4r^2+4r-4$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4-2r^2+r & r & -(r^3+r^2-2r)/2 \\ r^4+3r^3+2r^2-r-1 & -r-1 & (r^3+r^2-2r-2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+3r^3-4r^2-4r+3 & 2r+3 & -(2r^2+r-3)/(r+1) \\ 4r^2+4r-4 & -2r-4 & (2r^2-4)/(r+1) \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$ равно

$$\varphi_2''(g) = \frac{1}{2r^4+3r^3}((4r^2+4r-4)\alpha_0(g)-(2r+4)\alpha_1(g)+(2r^2-4)\alpha_2(g)/(r+1)).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим

$$\varphi_2''(g) = 2(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r^2+r)+(2r^2-4)/(r+1).$$

Лемма 3.13. *Пусть Δ'' является сильно регулярным графом с параметрами $(2r^4+7r^3+6r^2-2r-3, r^4+2r^3, (r^4-3r^2+2r)/2, (r^4+r^3)/2)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Delta'')$ равно*

$$\psi_2''(g) = 2(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/((r+2)(r+1))+(2r^2+2r-2)/(r+2).$$

Доказательство. По условию леммы Δ'' имеет собственные значения $r^4+2r^3, r, -(r^3+3r^2)/2$ кратностей 1, $2r^4+7r^3+2r^2-6r$, $4r^2+4r-4$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4+2r^3 & r & -(r^3+3r^2)/2 \\ r^4+5r^3+6r^2-2r-4 & -r-1 & (r^3+3r^2-2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+7r^3+2r^2-6r & \dfrac{2r^3+7r^2+2r-6}{r^2+2r} & -\dfrac{2r^2+3r}{r+2} \\ 4r^2+4r-4 & -\dfrac{2r^3+8r^2+4r-6}{r^2+2r} & \dfrac{2r^2+2r-2}{r+2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$ равно

$$\psi_2''(g) = (2\alpha_0(g)-(r+3)\alpha_1(g)/(r^2+2r)+\alpha_2(g)/(r+2))/((r+1)(2r+3).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим

$$\psi_2''(g) = 2(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/((r+2)(r+1))+(2r^2+2r-2)/(r+2).$$

Лемма доказана.

До конца параграфа предполагается, что Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r,(2r-1)(r+1)^2)$, $r \geq 3$. Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 3.14. *Если Ω — пустой граф, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *p делит $(2r+1)(4r^3+6r^2-1)$, в частности, $p \neq 2$;*

(2) *если $p = 3$, то $r \equiv 1 \pmod 3$, $\alpha_1(g) = wr(2r+1)$ и $w+1$ делится на $r+1$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Тогда p делит число вершин графа Γ, равное $(2r+1)(4r^3+6r^2-1)$.

Если $p = 3$, то $r \equiv 1 \pmod 3$, и по целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = wr(2r+1)$, причем $w-(2r^2+2r-1)$ делится на $r+1$.

Лемма 3.15. *Если Ω является n-кликой, то $n = 1$ и либо $p = 37$, $r = 37u + 17$, либо $p = 2$.*

Доказательство. Неравенство $n \leq 2r+1$ следует из границы Хофмана для клик.

Пусть Ω — одновершинный подграф. Тогда ввиду леммы 3.4 p делит $4r^4+6r^3$ и $4r^4+10r^3+9r^2-3r-2$. Если p делит r, то $p = 2$. Если же p делит $2r+3$, то p делит $r-17$, поэтому $p = 37$ и $r = 37u+17$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой, $n \geq 2$. Тогда ввиду леммы 3.5 p делит $4r^4+10r^3+9r^2-3r-2$ и $2r^4+5r^3+3r^2-r-1$. Поэтому p делит $3r^2-r$, r^4+2r^3+r-2, r^3-2r+3 и r^2-6r+9. Отсюда p делит $(2r, r-3)$ и p делит 6. Значит, либо $p = 3$ и r делится на 3, либо $p = 2$ и r нечетно. Но в первом случае 3 не делит $2r^4+5r^3+3r^2-r-1$, противоречие.

Итак, $p = 2$ и число n нечетно. Для $a \in \Omega$ по лемме 3.4 подграф $\Sigma = [a]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$ и число $\lambda_\Sigma = 2r-2+(r-2)(r^3+r^2-r-1)$ нечетно, противоречие.

Лемма 3.16. *Если Ω является m-кокликой, $m \geq 2$, то $3 \leq m \leq 4r^2+4r-2$, p делит r и $m+1$.*

Доказательство. Пусть Ω является m-кокликой, $m \geq 2$. Тогда ввиду леммы 7.7 p делит $2r^4+3r^3$ и $2r^4+7r^3+6r^2-2r-3-(m-2)$. Из границы Цветковича для коклик получим $m \leq 4r^+4r-2$.

Пусть $m = 2$ и $\Omega = \{a, b\}$. Если p делит r, то $p = 3$. Допустим, что $[a] \cap [b]$ содержит треугольную $\langle g \rangle$-орбиту. Тогда 3 делит $(2r-2)+(r-2)(r^3+r^2-r-1)-2$, противоречие. Поэтому $\alpha_0(g) = \alpha_1(g) = 0$ в графе

$[a] \cap [b]$, противоречие с леммой 3.12. Значит, p не делит r и p делит $2r+3$. Противоречие с тем, что p не делит $|\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)| = r^4 + 2r^3$.

Пусть $m \geq 3$. Тогда ввиду леммы 3.4 число p делит $r^4 + r^3$, поэтому p делит r и $m + 1$.

Лемма 3.17. *Если Ω является объединением m изолированных клик, $m \geq 2$, то Ω — коклика.*

Доказательство. Пусть Ω является объединением m изолированных клик, $m \geq 2$. Тогда ввиду леммы 3.7 p делит $2r^4 + 3r^3$. Если a, b — смежные вершины из Ω, $\Sigma = [a]$, то g действует без неподвижных точек на $\Sigma - b^{\perp}$, поэтому p делит $2r^4 + 5r^3 + 3r^2 - r - 1$. Отсюда p не делит r, p делит $2r + 3$ и p делит $r + 1$, противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема 1.4 доказаны.

§ 1.4. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108)

А.А. Махнев [21] доказал, что псевдогеометрический граф для $pG_2(5, 32)$ не существует. Так как окрестность вершины в графе $Izo(3)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(5, 32)$, то и граф $Izo(3)$ не существует. Однако вопрос о существовании сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) (это параметры второй окрестности вершины в графе $Izo(3)$) остается открытым.

В этом параграфе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108).

Теорема 1.5 [67]. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(640, 243, 66, 108)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{240, 480\}$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) \in \{96, 192, 288, 384, 480, 592\}$;*

(2) *Ω является 1-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 99$;*

(3) *Ω является m-кокликой, $m \geq 2$, $p = 3$ и $(|\Omega|, \alpha_1(g)) \in \{(4, 204), (13, 87), (13, 519), (22, 402), (31, 285), (37, 351), (40, 168)\}$;*

(4) *$p = 3$, Ω является регулярным графом степени $3t$, $0 \leq t \leq 24$, $\alpha_1(g) = 54r + 9t + 135q + 6s$, $s \neq 0$ и $28 \leq |\Omega| = 1 + 3t + 3s \leq 100$;*

(5) *$p = 2$, Ω содержит вершину степени $2t + 1$, $\alpha_1(g) = 36r + 6t + 45q + 12s + 12$, q четно, $-2 \leq q \leq 6$, $s \neq 0$ и $16 \leq |\Omega| = 2t + 2 + 6s \leq 154$.*

Следствие 1.2. *Сильно регулярный граф с параметрами $(640, 243, 66, 108)$ не является реберно симметричным.*

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (640,243, 66,108), a — вершина графа Γ. Тогда Γ имеет собственные значения $k = 243, r = 3, s = -45$ и ввиду предложения 3.2 подграф $[a]$ является сильно регулярным графом с параметрами (243,66,9,21) и $\Gamma_2(a)$ является сильно регулярным графом с параметрами (396,135,30,54). Доказательство теоремы опирается на следующие два предложения.

Предложение 4.1 [22]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(243, 66, 9, 21)$, g — *автоморфизм простого порядка* p *графа* Γ, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g)$ *сравнимо с* 27 *по модулю* 54*;*

(2) Ω *является одновершинным графом,* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 66$*;*

(3) Ω *является* $3t$*-кокликой,* $3 \le t \le 14$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) - 9t$ *сравнимо с* 27 *по модулю* 54*;*

(4) Ω — *объединение трех клик порядка* 4, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 63$*;*

(5) $p = 5$ *и либо*
(*i*) Ω *является* $K_{4\times 2}$*-подграфом,* $\alpha_1(g) \in \{15, 105\}$, *либо*
(*ii*) $|\Omega| = 28$ *и* $\alpha_1(g) = 75$, *либо*
(*iii*) $|\Omega| = 33$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо*
(*iv*) $|\Omega| = 38$ *и* $\alpha_1(g) = 15$*;*

(6) $p = 3$, $|\Omega| = 3t$, $\alpha_1(g)/18 - (t+3)/2$ *делится на* 3 *и* $2 \le t \le 24$ *или* $t \in \{27, 33\}$*;*

(7) $p = 2$ *и либо*
(*i*) $\alpha_1(g) = 0$, $|\Omega|$ *делится на* 3 *и* $|\Omega| \le 93$, *либо*
(*ii*) $\alpha_1(g) \neq 0$, $|\Omega| \le 75$ *и* $3 - 3t + \alpha_1(g)$ *делится на* 36 *или* $|\Omega| = 107$ *и* $\alpha_1(g) = 24$.

Предложение 4.2 [23]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(396, 135, 30, 54)$, g — *автоморфизм простого порядка* p *графа* Γ, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф,* $p \in \{2, 3, 11\}$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, и либо* $p = 5$, $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) \in \{15, 165, 315\}$, *либо* $p = 13$, $n = 6$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо* $p = 2$, $n \in \{4, 6\}$ *и* $\alpha_1(g) - 3n - 12$ *делится на* 60*;*

(3) Ω *является* $3t$*-кокликой,* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 9t+90r+42$, $r \in \{0, 1, ..., 3\}$ *и* $t \le 14$*;*

(4) Ω — *объединение* $l \ge 2$ *изолированных клик порядков* $n_i \in \{2, 4\}$, $p = 2$ *и* $3|\Omega| - \alpha_1(g) + 12$ *делится на* 60*;*

(5) $p = 13$, *либо* $|\Omega| = 58$ *и* $\alpha_1(g) = 169$, *либо* $|\Omega| = 71$ *и* $\alpha_1(g) = 65$*;*

(6) $p = 7$ *и либо*
(*i*) $|\Omega| = 81$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо*

(ii) $|\Omega| \in \{102, 95, 88\}$ *и* $\alpha_1(g) \in \{42, 28, 14\}$ *соответственно, либо*
(iii) (3) $|\Omega| \in \{39, 32\}$ *и* $\alpha_1(g) \in \{231, 217\}$ *соответственно;*

(7) $p = 5$, $|\Omega| = 5r + 1$, $4 \le r \le 19$ *и* $\alpha_1(g)/5 - 2r - 1$ *делится на* 45*;*

(8) $p = 3$, $|\Omega| = 3t$, $27 + \alpha_1(g) - 6t$ *делится на* 135 *и* $2 \le t \le 27$*;*

(9) $p = 2$, $|\Omega| = 2t$, $t \ge 3$ *и либо* $\alpha_1(g) = 0$, $t = 45r + 18$, $0 \le r \le 2$, *либо* $\alpha_1(g) \ne 0$, $t \le 93$ *и число* $\alpha_1(g) - 18 - 4t$ *делится на* 45.

Лемма 4.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(640, 243, 66, 108)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Γ *содержит регулярный подграф* Δ *степени* d *на* w *вершинах, то* $-45 \le d - (243 - d)w/(640 - w) \le 3$, *причем в случае равенства каждая вершина из* $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $(243 - d)w/(640 - w)$ *вершинами из* Δ*;*

(2) *порядок коклики в* Γ *не больше* 44, *порядок клики в* Γ *не больше* 5, *и если для некоторой вершины* a *подграф* $\Gamma - a^\perp$ *содержит* 5*-клику* L, $X_i = X_i(L) - a^\perp$ *и* $x_i = |X_i|$, *то* $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 6$*;*

(3) *если* g *— автоморфизм* Γ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, *то* $|\Omega| \le 288$, *а значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности* 45, *равно* $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/3)/16 + 5$ *и* $45 - \chi_2(g)$ *делится на* p.

Доказательство. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(640, 243, 66, 108)$ и собственными значениями $3, -45$ кратностей $594, 45$.

Если Γ содержит регулярный подграф Δ степени d на w вершинах, то по лемме 3.1 имеем $-45 \le d - (243 - d)w/(640 - w) \le 3$, причем в случае равенства слева или справа каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $(243 - d)w/(640 - w)$ вершинами из Δ. Утверждение (1) доказано.

Ввиду границы Цветковича порядок коклики в Γ не больше 45. Ввиду границы Хофмана порядок клики L в Γ не больше 6. Но в [22] доказано, что сильно регулярный граф с параметрами (243,66,9,21) не содержит 5-клик.

Пусть для некоторой вершины a подграф $\Gamma - a^\perp$ содержит 5-клику L, $X_i = X_i(L) - a^\perp$ и $x_i = |X_i|$. По лемме 2.3, примененной к графу $\Gamma - a^\perp$, имеем $\sum x_i = 391$, $\sum i x_i = 655$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 270$, поэтому $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 6$. Утверждение (2) доказано.

По теореме 3.2 из [31] имеем $|\Omega| \le v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r) = 288$. По лемме 3.9 если Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(4r^4 + 10r^3 + 6r^2 - 2r - 2, 2r^4 + 3r^3, r^4 - 2r^2 + r, r^4 + r^3)$, тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2 +$

$4r-3$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r+1)^2 + 2r-1$. Подставляя $r=3$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/3)/16 + 5$.

Лемма 4.2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(640, 243, 66, 108)$, U — трехвершинный подграф из Γ, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для двух вершин u, w подграф $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ содержит 260 вершин, если u, w не смежны, 220 вершин, если u, w смежны;*

(2) *число $y_0 + y_3$ равно 232, если U является кокликой, равно 109, если U является кликой;*

(3) *число $y_0 + y_3$ равно 151, если U является 2-путем.*

Доказательство. Для двух несмежных вершин u, w граф Γ содержит 108 вершины из $[u] \cap [w]$, по 135 вершин из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и 260 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$. Для смежных вершин u, w граф Γ содержит 66 вершин из $[u] \cap [w]$, по 176 вершин из $[u] - w^\perp$, $[w] - u^\perp$ и 220 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(108 - y_3)$ вершин из Y_2, $3(27 + y_3)$ вершин из Y_1 и $232 - y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0 + y_3 = 232$. Аналогично доказывается, что $y_0 + y_3 = 109$, если U является кликой.

Если U является геодезическим 2-путем $u_1 u_2 u_3$, то Y_2 содержит $107 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_3]$, и по $66 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$, $[u_2] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $109 + y_3$ вершин из $[u_2]$, и по $69 + y_3$ вершин из $[u_1]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $151 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 151$. Лемма доказана.

До конца параграфа предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами (640,243,66,108). Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω содержит вершину a, то пусть $\alpha_i(g)'$ — число вершин из $[a]$, сдвигаемых на расстояние i элементом g, $\chi_2(g)'$ — значение характера, полученного при проектировании мономиального представления группы G_a, действующей на $[a]$, на подпространство размерности 44, $\Omega'' = \Omega - a^\perp$, $\alpha_i(g)''$ — число вершин из $\Gamma_2(a)$, сдвигаемых на расстояние i элементом g, $\chi_2(g)''$ — значение характера, полученного при проектировании мономиального представления группы G_a, действующей на $\Gamma_2(a)$, на подпространство размерности 44. Тогда $\alpha_1(g)' = 3|\Omega(a)| + 18r - 9$, $\alpha_1(g)'' = 2|\Omega''| + 18 + 45q$ и $\chi_2(g) = (-18r + |\Omega''| - 6 - 45q)/48 + 5$. В частности $|\Omega''|$ делится на 3.

Лемма 4.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 240, 480\}$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 96, 192, 288, 384, 480, 592\}$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то $n = 1$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 99$;*

(3) *если Ω является m-кокликой, $m \geq 2$, то $p = 3$ и* $(|\Omega|, \alpha_1(g)) \in \{(4,204),(13,87),(13,519),(22,402),(31,285),(37,351),(40,168)$*;*

(4) *если Ω — объединение $l \geq 2$ изолированных клик, то Ω является кокликой.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $640 = 2^7 \cdot 5$, то $p \in \{2,5\}$.

Если $p = 5$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)$ делится на 240, поэтому $\alpha_1(g) \in \{0,240,480\}$.

Если $p = 2$, то ввиду леммы 4.1 число $\alpha_1(g)$ делится на 96, поэтому $\alpha_1(g) \in \{0,96,192,288,384,480,592\}$. Утверждение (1) доказано.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $\Omega = \{a\}$, то p делит 243, поэтому $p = 3$ и g действует без неподвижных точек на $\Omega(a)$ и на $\Omega_2(a)$. В этом случае $\alpha_1(g)' = 27r - 9$, и $\alpha_1(g)'' = 135q + 54$, поэтому $\alpha_1(g) = 99$.

Если $n \geq 2$, то p делит 176, 220 и $68-n$, поэтому $p = 2$ или $p = 11$. Если $p = 11$, то $n = 2$, $\alpha_1(g)' = 18r - 6$, $\alpha_1(g)'' = 45q + 18$, поэтому $\alpha_1(g)/3 = 6r+15q+4$ делится на 11 и $6r+15q+2$ делится на 16, противоречие. Если $p = 2$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, $n = 4$ и для $a \in \Omega$ подграф $\Omega \cap [a]$ является 3-кликой. Противоречие с [22, лемма 2.1]. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является m-кокликой, $m \geq 2$. Тогда $m \leq 45$. Далее, p делит 108, 135 и $262-m$, поэтому $p = 3$, $m = 3t+1$ и g действует без неподвижных точек на $\Omega(a)$. В этом случае $\alpha_1(g)' = 27r-9$, $\alpha_1(g)'' = 6t+18+135q$, поэтому $(|\Omega|, \alpha_1(g)) \in \{(4,204),(13,87),(13,519),$
$(22,402),(31,285),(37,$
$351),(40,168)$. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением l изолированных клик порядков $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_l$, $l \geq 2$. Тогда p делит 108 и 176, поэтому $p = 2$, $n_i \in \{2,4\}$, противоречие с предложением 4.1. Лемма доказана.

В леммах 4.4–4.6 предполагается, что Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c.

Лемма 4.4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с* $\lambda = 66, \mu = 108$ *и* $|\Omega|$ *не больше* 288 *(не больше* 286*, если* $\alpha_1(g) \neq 0$*);*

(2) *если* $p > 2$ *и* $|\Omega| > 151$*, то* $\alpha_1(g) = 0$*;*

(3) *если* $\alpha_1(g) = 0$*, то* $\alpha_0(g)$ *делится на* 16*, и если еще* $p = 2$*, то* $\alpha_0(g)$ *делится на* 32*;*

(4) $[a]$ *не содержится в* Ω*.*

Доказательство. Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 66, 108)$. Тогда $4(k'-108)+42^2 = n^2$ для некоторого натурального числа n. Отсюда $n = 44, 46$ и $k' = 151, 196$ соответственно. В любом случае 108 не делит $k'(k'-67)$, противоречие. По лемме 4.1 имеем $|\Omega|$ не больше 288.

Пусть U — трехвершинный подграф из $u^{\langle g\rangle}$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Из леммы 4.2 следует, что $|\Omega| \leq 151$, если $u^{\langle g\rangle}$ содержит геодезический 2-путь. В случае $|\Omega| \geq 152$ подграф $u^{\langle g\rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кокликой. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\alpha_1(g) = 0$. Тогда по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_0(g)$ делится на 16. Если еще $p = 2$, то по лемме 4.3 число $\alpha_0(g)$ делится на 32. Утверждение (3) доказано.

Пусть для некоторой вершины $z \in \Omega$ имеем $[z] \subset \Omega$. Тогда для $u \in \Gamma - \Omega$ получим $|[u] \cap \Omega| = 108$, $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой, поэтому $\alpha_1(g) = 0$. Для $b \in \Omega - z^\perp$ подграф $[b]$ не пересекает $\Gamma - \Omega$, поэтому $[u] \cap [b]$ содержится в Ω и совпадает с $[z] \cap [u] = [u] \cap [b]$. Противоречие с тем, что любые две вершины из $[u] \cap (\Gamma - \Omega)$ смежны с u и со 108 вершинами из $[z] \cap [b]$.

Значит, $z^\perp = \Omega$, противоречие с тем, что $\alpha_0(g)$ делится на 16.

Лемма 4.5. *Если $p \geq 3$, то $|\Omega| \leq 235 - p$. Далее, $p \leq 5$.*

Доказательство. Пусть $p \geq 3$. Если $|\Omega| > 151$, то по лемме 4.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой. Поэтому для любой 3-коклики U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит Ω и $p-3$ вершин из $u^{\langle g\rangle} - U$. Значит, $|\Omega| \leq 232 - (p-3)$.

Пусть $a \in \Omega$. Так как g — автоморфизм графов $[a]$ и $\Gamma_2(a)$, то из предложений 4.1, 4.2 следует, что $p \leq 11$.

Пусть $p = 11$. Тогда по предложению 4.1 подграф $\Omega(a)$ является одновершинным, а граф $\Omega - a^\perp$ является пустым. Противоречие с тем, что Ω содержит 2-путь.

Пусть $p = 7$. Тогда $\Omega(a)$ — объединение трех изолированных 4-клик. Так как $\mu = 108$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (45,12,3,3) (Ω — точечный граф для $GQ(4,2)$). Отсюда $\alpha_1(g)' = 27 + 18r = 63$, $\alpha_1(g)'' = 45q - 8 = 217$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 9 = 289$ делится на 48, противоречие. Лемма доказана.

В лемме 4.6 предполагается, что $p = 5$. По предложению 4.1 верно одно из утверждений:

(i) $\Omega(a)$ является $K_{4\times 2}$-подграфом, $\alpha_1'(g) \in \{15, 105\}$;

(ii) $|\Omega(a)| = 28$ и $\alpha_1'(g) = 75$;

(iii) $|\Omega(a)| = 33$ и $\alpha_1'(g) = 0$;

(iv) $|\Omega(a)|=38$ и $\alpha_1'(g)=15$.

По предложению 4.2 либо Ω'' — одновершинный граф и $\alpha_1''(g)\in\{15, 165, 315\}$, либо $|\Omega''|=5s+1$, $4\le s\le 19$ и $\alpha_1(g)''/5=45q+2s+1$.

Лемма 4.6. *Число* p *не равно* 5.

Доказательство. Допустим, что $|\Omega(a)|=38$ и $\alpha_1'(g)=15$. Тогда $|\Omega|=5s+40$, $\alpha_1(g)=225q+10s+20$, $\chi_2(g)=(5s+100-225q)/48+5$ и $s+20-45q$ делится на 48. Если $q=1$, то $s=25$. Если же $q=0$, то $s=28$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $s\le 19$.

Допустим, что $|\Omega(a)|=33$ и $\alpha_1'(g)=0$. Тогда $|\Omega|=5s+35$, $\alpha_1(g)=225q+10s+5$, $\chi_2(g)=(5s+130-225q)/48+5$ и $s+26-45q$ делится на 48. Если $q=0$, то $s=22$, противоречие. Если же $q=1$, то $s=19$ и $\alpha_1(g)''=420$, снова противоречие.

Допустим, что $|\Omega(a)|=28$ и $\alpha_1'(g)=75$. Тогда $|\Omega|=5s+30$, $\alpha_1(g)=225q+10s+80$, $\chi_2(g)=(5s+10-225q)/48+5$ и $s+2-45q$ делится на 48, противоречие.

Допустим, что $|\Omega(a)|=8$ и $\alpha_1'(g)\in\{15,105\}$. Тогда $|\Omega|=5s+10$. Если $\alpha_1'(g)=15$, то $\alpha_1(g)=225q+10s+20$, $\chi_2(g)=(5s+10-225q)/48+5$ и $s+2-45q$ делится на 48, противоречие. Если же $\alpha_1'(g)=105$, то $\alpha_1(g)=225q+10s+110$, $\chi_2(g)=(5s-80-225q)/48+5$ и $s-16-45q$ делится на 48, снова противоречие. Лемма доказана.

В леммах 4.7–4.8 предполагается, что $p=3$. Ввиду предложения 4.1 и леммы 4.1 имеем

$|\Omega(a)|=3t$, $\alpha_1'(g)=54r+9t+27$ и $0\le t\le 24$ или $t=27$.

Ввиду предложения 4.2 верно одно из утверждений:

(a) Ω'' — пустой граф;

(b) $|\Omega''|=3s$, $\alpha_1''(g)=135q+6s-27$, $1\le s\le 27$.

По лемме 4.2 имеем $1+3t+3s\le 109$, если $\alpha_1(g)\ne 0$.

Лемма 4.7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω'' *не является пустым графом;*

(2) *верно неравенство* $|\Omega(a)|\ne 81$*;*

(3) $\alpha_1(g)''\ne 0$.

Доказательство. Для двух несмежных вершин $b,c\in\Omega(a)$ подграф $\Omega(b)\cap[c]$ содержит a, кратное 3 число вершин из $\Omega(a)$ и сравнимое с 2 по модулю 3 число вершин из Ω''. Поэтому Ω'' не является пустым графом. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что $|\Omega(a)|=81$. Тогда $\alpha_1'(g)=0$ и если $s>9$, то ввиду леммы 4.2 имеем $\alpha_1(g)=0$, противоречие с тем, что $\alpha_1''(g)=135q+6s-27$, $s=27$ и $|\Omega|=163$ не делится на 16. Значит, $s\le 9$. Далее, $\alpha_1''(g)=135q+6s-27$, поэтому $\chi_2(g)=(82-45q+s+9)/16+5$, $3q+s-5$ делится на 16 и $q = 1, s = 2$ или $q = 0, s = 5$. В любом случпае $\chi_2(g) - 45$ не делится на 3, противоречие.

Пусть $\alpha_1''(g) = 135q+6s-27 = 0$. Тогда $q = (9-2s)/45$, поэтому $s = 27$. Если $\alpha_1'(g) = 0$, то $t = 18$ и $\chi_2(g) = 136/16 + 5$, противоречие. Значит, $\alpha_1'(g) = 54r + 9t + 27 \neq 0$, $t \leq 9$ и $\chi_2(g) = (82 + 3t - (18r + 3t + 9)/16 + 5$, противоречие.

Лемма 4.8. *Ω является регулярным графом степени $3t$, $0 \leq t \leq 24$ и $28 \leq |\Omega| \leq 100$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1'(g) = 54r + 9t + 27$ и $1 \leq t \leq 24$. Тогда $6r + t + 3 \geq 0$ и $9r + 2t \leq 36$. Далее $\alpha_1''(g) = 135q + 6s - 27$, $1 \leq s \leq 27$ и $\alpha_1(g) = 54r + 9t + 135q + 6s$. Поэтому $\chi_2(g) = (1 + 3t + 3s - (18r + 3t + 45q + 2s))/16$, $3q - 2r + s + 1$ делится на 16 и s делится на 3.

Пусть $q = -1$. Тогда $s = 27$ сравнимо с $2r + 2$ по модулю 16, противоречие.

Пусть $q = 0$. Тогда $\alpha_1(g) = 54r+9t+6s$, $\chi_2(g) = (1+s-18r)/16$ и либо $2r = s+1$, либо $2r = s-15$. В первом случае $\alpha_1'(g) = 27s+9t+54$ и $s \geq 9$, противоречие. Во втором случае $\alpha_1'(g) = 9(3s+t-42)$ и $0 \leq 3s+t-42 \leq (81-t)/3$, поэтому $9s+4t \leq 207$. Если $s = 9$, то $15 \leq t \leq 24$, если $s = 15$, то $t \leq 18$, а если $s = 21$, то $t \leq 4$. В любом случае $46 \leq |\Omega| \leq 100$.

Пусть $q = 1$. Тогда $2r = s + 4$ или $2r = s - 12$. В первом случае $\alpha_1'(g) = 9(3s + t + 15)$ и $0 \leq 3s + t + 15 \leq (81 - t)/3$, поэтому $9s + 4t \leq 36$ и $s = 0$, противоречие. Во втором случае $\alpha_1'(g) = 9(3s + t - 33)$ и $0 \leq 3s + t - 33 \leq (81 - t)/3$, поэтому $9s + 4t \leq 180$. Если $s = 6$, то $15 \leq t \leq 24$, если $s = 12$, то $t \leq 18$, а если $s = 18$, то $t \leq 4$. В любом случае $37 \leq |\Omega| \leq 91$.

Пусть $q = 2$. Тогда $2r = s + 7$ или $2r = s - 9$. В первом случае $\alpha_1'(g) = 9(3s + t + 24)$ и $0 \leq 3s + t + 24 \leq (81 - t)/3$, поэтому $9s + 4t \leq 9$, противоречие. Во втором случае $\alpha_1'(g) = 9(3s+t-24)$ и $0 \leq 3s+t-24 \leq (81 - t)/3$, поэтому $9s + 4t \leq 153$. Если $s = 3$, то $9 \leq t \leq 24$, если $s = 9$, то $t \leq 18$, а если $s = 15$, то $t \leq 4$. В любом случае $28 \leq |\Omega| \leq 82$.

Покажем, что Ω — регулярный граф. Пусть b — вершина степени $t' = t - 3x$ в Ω. Тогда $s' = s + 3x$, $\alpha_1(g) = 54r' + 9t' + 135q' + 6s'$, поэтому $135(q - q') = 54(r' - r) + 18x$ и $x = 15(q - q')/2 - 3(r' - r)$. Если $q = q'$, то $r'-r = (s'-s)/2 = 3x/2$, поэтому $x = -9x/2 = 0$. Если же $q' = 0, q = 2$, то $x = 15+3(r-r')$, $2r = s-9$, $2r' = s'-15$ и $x = 15+3((s-9)/2-(s'-15)/2) = 24 - 9x/2$, противоречие с тем, что $11x = 48$. Лемма доказана.

В леммах 4.9–4.10 предполагается, что $p = 2$. Ввиду предложения 4.1 и леммы 4.1 имеем $|\Omega(a)| = 2t + 1$, $t \geq 2$, $\alpha_1'(g) = 36r + 6t - 6$ и либо

(*i*) $\alpha_1'(g) = 0$, $2t + 1$ делится на 3 и $t \leq 40$, либо

(*ii*) $\alpha_1'(g) \neq 0$, $t \leq 37$.

Ввиду предложения 4.2 верно одно из утверждений:

(iii) Ω'' — пустой граф;

(iv) $|\Omega''| = 6s$, $s \geq 2$ и либо $\alpha_1''(g) = 0$, $s = 15q + 6$, $0 \leq q \leq 1$, либо $\alpha_1''(g) = 45q + 12s + 18 \neq 0$, $s \leq 21$ и $-6 \leq q \leq 7$.

Лемма 4.9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω'' *не является пустым графом;*

(2) *если* $\alpha_1''(g) = 0$, *то* $s = 6$, $46 \leq |\Omega| = 2t + 38 \leq 112$ *и* $\alpha_1(g) \in \{6t - 78, 6t + 210\}$.

Доказательство. Для двух несмежных вершин $b, c \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b) \cap [c]$ содержит a, четное число вершин из $\Omega(a)$ и нечетное число вершин из Ω''. Поэтому Ω'' не является пустым графом. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\alpha_1''(g) = 0$. Тогда $s = 15q + 6$, $|\Omega| = 2t + 2 + 90q + 36$, $\alpha_1(g) = 36r + 6t - 6 \neq 0$, $\chi_2(g) = (2t + 90q + 38 - (12r + 2t - 2))/16 + 5$ и $6q + 12r - 8$ делится на 32. Поэтому $q = 0$, $r = 8l - 2$, $\alpha_1(g) = 288l + 6t - 78$ и $t \leq 37$.

Лемма 4.10. *Если* $\alpha_1''(g) \neq 0$, *то* $16 \leq |\Omega| \leq 154$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1''(g) = 45q + 12s + 18 \neq 0$. Тогда $|\Omega| = 2t + 2 + 6s$, $\alpha_1'(g) = 36r + 6t - 6$, $\chi_2(g) = (2t + 2 + 6s - (12r + 2t + 15q + 4s + 4))/16 + 5$ и $2s - 12r - 15q - 2$ делится на 32. В случае $q = -2$ имеем $6r = s + 16l - 2$ и $\alpha_1(g) = 96l + 6t + 18s - 90$. Если $s = 8$, то $l = 0, r = 1$; если $s = 10$, то $l = 1, r = 4, t \leq 13$. Если $s = 12$, то $l = 2, r = 7$, противоречие; если $s = 14$, то $l = 0, r = 2, t \leq 22$. Если $s = 16$, то $l = 1, r = 5, t \leq 7$; если $s = 18$, то $l = 2, r = 8$, противоречие. Если $s = 20$, то $l = 0, r = 3, t \leq 16$. В любом случае $54 \leq |\Omega| \leq 154$.

В случае $q = 0$ имеем $6r = s + 16l - 1$ и $\alpha_1(g) = 96l + 6t + 18s + 6$. Если $s = 1$, то $l = 0, r = 0$; если $s = 3$, то $l = 1, r = 3, t \leq 16$. Если $s = 5$, то $l = 2, r = 6, t = 4$; если $s = 7$, то $l = 0, r = 1, t \leq 25$. Если $s = 9$, то $l = 1, r = 4, t \leq 13$; если $s = 11$, то $l = 2, r = 7$, противоречие. Если $s = 13$, то $l = 0, r = 2, t \leq 22$; если $s = 15$, то $l = 1, r = 5, t \leq 7$. Если $s = 17$, то $l = 2, r = 8$, противоречие, если $s = 19$, то $l = 0, r = 3, t \leq 16$. Если $s = 21$, то $l = 1, r = 6, t = 4$. В любом случае $16 \leq |\Omega| \leq 148$.

В случае $q = 2$ имеем $6r = s + 16l$ и $\alpha_1(g) = 96l + 6t + 18s + 102$. Если $s = 2$, то $l = 1, r = 3, t \leq 16$; если $s = 4$, то $l = 2, r = 6, t = 4$. Если $s = 6$, то $l = 0, r = 1, t \leq 25$; если $s = 8$, то $l = 1, r = 4, t \leq 13$. Если $s = 10$, то $l = 2, r = 7$, противоречие, если $s = 12$, то $l = 0, r = 2, t \leq 22$. Если $s = 14$, то $l = 1, r = 5, t \leq 7$; если $s = 16$, то $l = 2, r = 8$, противоречие. Если $s = 18$, то $l = 0, r = 3, t \leq 16$; если $s = 20$, то $l = 1, r = 6, t = 4$. В любом случае $22 \leq |\Omega| \leq 142$.

В случае $q = 4$ имеем $6r = s + 16l + 1$ и $\alpha_1(g) = 96l + 6t + 18s + 198$. Если $s = 1$, то $l = 1, r = 3, t \leq 16$; если $s = 3$, то $l = 2, r = 6, t = 4$. Если $s = 5$, то $l = 0, r = 1, t \leq 25$; если $s = 7$, то $l = 1, r = 4, t \leq 13$. Если $s = 9$, то $l = 2, r = 7$, противоречие; если $s = 11$, то $l = 0, r = 2, t \leq 22$. В любом случае $16 \leq |\Omega| \leq 112$.

В случае $q = 6$ имеем $6r = s + 16l + 2$ и $\alpha_1(g) = 96l + 6t + 18s + 294$. Если $s = 2$, то $l = 2, r = 6, t = 4$; если $s = 4$, то $l = 0, r = 1, t \leq 25$. Если $s = 6$, то $l = 1, r = 3, t \leq 16$. В любом случае $22 \leq |\Omega| \leq 142$.

Покажем, что Ω — регулярный граф. Пусть b — вершина степени $2t' + 1$ в Ω. Тогда $s' = s + x$, $t' = t - 3x$, $\alpha_1(g) = 36r' + 6t' + 45q' + 12s' + 12$, поэтому $45(q - q') = 36(r' - r) - 6x$ и $x = -15(q - q')/2 + 6(r' - r)$. Если $q = q'$, то $r' - r = (s' - s)/6 = x/6$, поэтому $x = -9x/2 = 0$. Если же $q' = 0, q = 2$, то $x = 15 + 3(r - r')$, $2r = s - 9$, $2r' = s' - 15$ и $x = 15 + 3((s - 9)/2 - (s' - 15)/2) = 24 - 9x/2$, противоречие с тем, что $11x = 48$.

Лемма, а вместе с ней и теорема 1.5 доказаны.

Докажем следствие 1.2. Предположим, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами (640,243,66,108) и группа G автоморфизмов графа Γ действует транзитивно на множестве упорядоченных ребер графа Γ. Тогда G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Зафиксируем смежные вершины a, b из Γ и пусть $H = G_a$ — стабилизатор вершины a. Тогда $|G| = 2^\beta 3^\gamma 5$, $|G : H| = 2^7 5$ и $|H : H_b| = 3^5$. Зафиксируем силовскую 3-подгруппу P из H.

Лемма 4.11. *Цоколь группы G — простая неабелева группа, изоморфная $PSp_4(3)$.*

Доказательство. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Так как v не делится на 3, то N не является 3-группой.

Если $|N| = 5$, то P централизует N и поточечно фиксирует $|a^N|$, поэтому a^N является кокликой. Пусть g — элемент порядка 5 из N. По теореме $\alpha_1(g) \in \{240, 480\}$, противоречие.

Если N является 2-группой, то $|a^N|$ делит 2^7. Из действия P на a^N следует, что подгруппа порядка 3^4 из H фиксирует a^N поточечно, противоречие.

Значит, N — простая неабелева группа, совпадающая с цоколем группы G и являющаяся $\{2, 3, 5\}$-группой. Так как простая $\{2, 3, 5\}$-группа изоморфна A_5, A_6 или $PSp_4(3)$, то группа N изоморфна $PSp_4(3)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 1.2. Ввиду леммы 4.11 число $|G|$ делит $2^7 3^4 5$, противоречие.

Глава 2

Локально псевдоциклические графы, их автоморфизмы и небольшие реберно симметричные сильно регулярные графы

Граф назовем псевдоциклическим, если он регулярен степени 2. В главе 2 перечислены массивы пересечений локально псевдоциклических дистанционно регулярных графов с числом вершин, не большим 4096. Для примитивных графов с числом вершин, не большим 1000, найдены автоморфизмы. Доказано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, нет.

§ 2.1. Дистанционно регулярные графы с $\lambda = 2$

В.П. Буриченко и А.А. Махнев [24] нашли массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с $\mu > 1$ и числом вершин не большим 1000. Отметим, что в [24] пропущены массивы $\{9, 6, 3; 1, 2, 3\}$ графа Хемминга $H(3, 4)$ с $v = 64$, $\{12, 9, 6, 3; 1, 2, 3, 4\}$ графа Хемминга $H(4, 4)$ с $v = 256$ и массив $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, зато имеется лишний массив $\{13, 10, 7; 1, 2, 7\}$ (граф с таким массивом пересечений не существует).

Предложение 2.1 [24]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на* $v \leq 1000$ *вершинах. Если* $\lambda = 2$ *и* $\mu > 1$*, то либо* Γ *имеет массив пересечений графа Хэмминга* $H(n, 3)$*,* $n = 3, 4$*, либо верно одно из утверждений:*

(1) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{19,16,8;1,2,8\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{35,32,8;1,2,28\}$, $\{51,48,8;1,4,36\}$;

(2) Γ — *антиподальный граф с* $\mu=2$ *и массивом пересечений* $\{2r+1,2r-2,1;1,2,2r+1\}$, $r\in\{3,4,...,21\}-\{10,16\}$ *и* $v=2r(r+1)$;

(3) Γ — *антиподальный граф с* $\mu\geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15,12,1;1,4,15\}$, $\{18,15,1;1,5,18\}$, $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,4,35\}$, $\{45,42,1;1,6,45\}$, $\{42,39,1;1,3,42\}$, $\{75,72,1;1,12,75\}$.

Заметим, что В.П. Буриченко и А.А. Махнев не рассматривали случай $\mu=1$. А.А. Махнев поставил задачу нахождения массивов пересечений антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda=2$, $\mu=1$ и числом вершин, не большим 1000. В параграфе 2.1 решена более общая задача. Найдены массивы пересечений антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda\leq 2$ и $\mu=1$ (в § 2.4 найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42,39,1;1,1,42\}$).

Теорема 2.1 [70]. *Пусть* Γ *является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с* $\lambda\leq 2$ *и* $\mu=1$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\lambda=0$ *и* $k\in\{2,6,56\}$;

(2) $\lambda=1$ *и* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{2^e,2^e-2,1;1,1,2^e\}$;

(3) $\lambda=2$, Γ *имеет массив пересечений* $\{18,15,9;1,1,10\}$, $\{33,30,8;1,1,30\}$, $\{39,36,4;1,1,36\}$ *или* $\{42,39,1;1,1,42\}$.

Существование графа в пункте (1) теоремы равносильно существованию сильно регулярного графа с параметрами $((k+1)^2+1,k+1,0,1)$ (графа Мура).

А.А. Махнев и М.С. Нирова нашли массивы пересечений графов с $\lambda=2$, $\mu=1$, имеющих не более 4096 вершин.

Теорема 2.2 [74]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с* $\lambda=2$, $\mu=1$, *имеющий не более* 4096 *вершин. Тогда* Γ *имеет один из следующих массивов пересечений:*

(1) $\{21,18;1,1\}$ $(v=400)$;

(2) $\{6,3,3,3;1,1,1,2\}$ (Γ — *обобщенный восьмиугольник порядка* $(3,1)$, $v=160$), $\{6,3,3;1,1,2\}$ (Γ — *обобщенный шестиугольник порядка* $(3,1)$, $v=52$), $\{12,9,9;1,1,4\}$ (Γ — *обобщенный шестиугольник порядка* $(3,3)$, $v=364$), $\{6,3,3,3,3,3;1,1,1,1,1,2\}$ (Γ — *обобщенный двенадцатиугольник порядка* $(3,1)$, $v=1456$);

(3) $\{18,15,9;1,1,10\}$, $\{33,30,8;1,1,30\}$, $\{39,36,4;1,1,36\}$, $\{42,39,1;1,1,42\}$ *или* $\{21,18,12,4;1,1,6,21\}$ ($v = 1+21+378+756+144 = 1300$, $q^4_{3,4} = 0$).

Завершает классификацию дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и не более 4096 вершинами

Следствие 2.1 [74]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *с* $\lambda = 2$, *имеющий не более* 4096 *вершин. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) Γ *— примитивный граф с массивом пересечений* $\{6,3,3;1,1,2\}$, $\{9,6,3;1,2,3\}$, $\{12,9,9;1,1,4\}$, $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{18,15,9;1,1,10\}$, $\{19,16,8;1,2,8\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{30,27,24;1,2,10\}$, $\{33,30,8;1,1,30\}$, $\{33,30,15;1,2,15\}$, $\{35,32,8;1,2,28\}$, $\{35,32,28;1,4,8\}$, $\{39,36,4;1,1,36\}$, $\{39,36,20;1,2,20\}$, $\{39,36,22;1,2,18\}$, $\{39,36,27;1,4,13\}$, $\{42,39,24;1,2,12\}$, $\{48,45,9;1,1,40\}$, $\{51,48,8;1,4,36\}$, $\{51,48,24;1,2,24\}$, $\{55,52,34;1,2,22\}$, $\{58,55,8;1,2,44\}$, $\{60,57,16;1,4,30\}$, $\{60,57,32;1,4,18\}$, $\{63,60,10;1,2,54\}$, $\{63,60,49;1,4,15\}$, $\{68,65,32;1,4,40\}$, $\{75,72,8;1,2,60\}$, $\{75,72,42;1,4,50\}$, $\{75,72,31;1,8,45\}$, $\{80,77,61;1,7,20\}$, $\{90,87,60;1,15,18\}$, $\{99,96,12;1,4,88\}$, $\{99,96,20;1,4,72\}$, $\{99,96,6;1,6,88\}$, $\{120,117,5;1,5,108\}$, $\{143,140,34;1,7,110\}$, $\{147,144,39;1,12,117\}$, $\{224,221,32;1,16,208\}$;

(2) Γ *— антиподальный граф с* $\mu = 1$ *и массивом пересечений* $\{42,39,1;1,1,42\}$;

(3) Γ *— антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r+1,2r-2,1;1,2,2r+1\}$, $r \in \{3,4,...,44\} - \{10,16,28,34,38\}$ *и* $v = 2r(r+1)$;

(4) Γ *— антиподальный граф с* $\mu \geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15,12,1;1,4,15\}$, $\{18,15,1;1,5,18\}$, $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,4,35\}$, $\{45,42,1;1,6,45\}$, $\{42,39,1;1,3,42\}$, $\{63,60,1;1,4,63\}$, $\{75,72,1;1,12,75\}$, $\{99,96,1;1,4,99\}$, $\{108,105,1;1,5,108\}$, $\{147,144,1;1,16,147\}$, $\{171,168,1;1,12,171\}$, $\{243,240,1;1,20,243\}$;

(5) Γ *— примитивный граф с массивом пересечений* $\{6,3,3,3;1,1,1,2\}$, $\{12,9,6,3;1,2,3,4\}$, $\{21,18,12,4;1,1,6,21\}$, $\{15,12,9,6,3;1,2,3,4,5\}$, $\{6,3,3,3,3,3;1,1,1,1,1,2\}$, $\{18,15,12,9,6,3;1,2,3,4,5,6\}$.

Докажем теорему 2.1. Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\lambda \leq 2$, $\mu = 1$.

Лемма 1.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $\lambda = 0$, *то* $r = k = s^2 + s$ *и* $s \in \{1,2,7\}$;

(2) *если* $\lambda = 1$, *то существование графа* Γ *равносильно существованию дезарговой проективной плоскости порядка* k *и* $k = 2^e$;

(3) *если* $\lambda = 2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{42,39,1;1,1,42\}$.

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то $r = k$, граф Γ имеет собственные значения $\theta_1 = s$ и $\theta_3 = -(s+1)$ кратностей $(s^2+s+1)(s^2+s-1)(s+1)/(2s+1)$ и $(s^2+s+1)(s^2+s-1)s/(2s+1)$ соответственно. Так как $(s^2+s+1, 2s+1) = (s+2, 2s+1)$ делит 3 и $(s^2+s-1, 2s+1) = (s-2, 2s+1)$ делит 5, то $2s+1$ делит 15 и $s \in \{1, 2, 7\}$.

Если $\lambda = 1$, то существование графа Γ равносильно существованию дезарговой проективной плоскости порядка k (см. [2,§1.17]). Поэтому $k = 2^e$.

Если $\lambda = 2$, то $b_1 = k - 3 = r - 1$,

граф Γ имеет собственные значения

$r = k - 2$, граф Γ имеет собственные значения $\theta_1 = s + 1$ и $\theta_3 = -s$ кратностей $(s^2+s+1)(s^2+s-3)s/(2s+1)$ и $(s^2+s+1)(s^2+s-3)(s+1)/(2s+1)$ соответственно. Так как $(s^2+s+1, 2s+1) = (s+2, 2s+1)$ делит 3 и $(s^2+s-3, 2s+1) = (s-6, 2s+1)$ делит 13, то $2s+1$ делит 39 и $s \in \{6, 19\}$. В случае $s = 19$ имеем противоречие с тем, что $[a]$ является объединением $t = 19 \cdot 20/3$ изолированных 3-клик. Лемма доказана.

Из леммы 1.1 следует теорема 2.1.

Докажем теорему 2.2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d с $\lambda = 2$, $\mu = 1$, имеющий не более 4096 вершин. Пусть a — вершина графа Γ и $k_i = |\Gamma_i(a)|$. Тогда $[a]$ является объединением $t+1$ изолированных 3-клик, $k = 3(t+1)$ и $t \leq 20$. В противном случае $v > 1+66+66{\cdot}63$, противоречие.

Лемма 1.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если диаметр* Γ *равен* 2*, то* Γ *имеет параметры* $(400, 21, 2, 1)$*;*

(2) *если* Γ *— обобщенный* $2n$*-угольник, то* Γ *имеет массив пересечений из заключения теоремы.*

Доказательство. Если диаметр Γ равен 2, то ввиду [49] Γ имеет параметры $(400, 21, 2, 1)$. Пусть диаметр Γ больше 2.

Пусть Γ — регулярный почти n-угольник. Тогда $s = 3$ и по [2, теорема 6.4.1] имеем $b_i = k - 3c_i$ для $i = 0, 1, ..., d-1$, $k \geq 3c_d$ и $n = 2d$, если $k = 3c_d$, $n = 2d + 1$ в противном случае. Если Δ — точечный граф обобщенного многоугольника порядка (s, t), то $k_i = s^i t^{i-1}(t+1)/c_i$. В случае $n = 6$ число его вершин равно $(s+1)(s^2t^2 + st + 1)$. Поэтому $v = 4(9t^2 + 3t + 1)$ и $t \leq 10$. Если $t > 1$, то по [2, теорема 6.5.1] число st является квадратом, поэтому $t = 3$. Если $n = 8$ и $t > 1$, то по [2, теорема 6.5.1] число $2st$ является квадратом, поэтому $t \geq 6$ и $v > 4096$, противоречие. Если $n = 12$, то $t = 1$ и $v = 1 + 6 + 18 + ... = 1456$.

Лемма 1.3. *Пусть* Γ *не является обобщеным* $2n$*-угольником. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если диаметр* Γ *равен* 3*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{18,15,9;$ $1,1,10\}$*,* $\{33,30,8;1,1,30\}$*,* $\{39,36,4;1,1,36\}$*,* $\{42,39,1;1,1,42\}$*;*

(2) *если диаметр* Γ *больше* 4*, то* $k\le 46$*.*

Доказательство. Пусть диаметр Γ равен 3. Ввиду теоремы 2.1 можно считать, что Γ — примитивный граф. Напомним, что окрестность любой вершины является объединением изолированных 3клик, поэтому k делится на 3. Далее, $4096 > 1+k+k(k-3)$, поэтому $k\le 63$.

Если $k=63$, то Γ имеет массив пересечений $\{63,60,b_2;1,1,c_3\}$, $b_2\le 4$, c_3 делит $3^3 140 b_2$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Аналогично рассматриваются случаи $57\le k\le 30$. При этом возникают лишь массивы пересечений $\{33,30,8;1,1,30\}$, $\{39,36,4;1,1,36\}$.

Если $k=27$, то Γ имеет массив пересечений $\{27,24,b_2;1,1,c_3\}$, c_3 делит $3^4 8 b_2$. Возникают интересные массивы пересечений $\{27,24,8;1,1,16\}$, $v=1000$ с целыми собственными значениями 7, 2, -5, но 2 и -5 имеют дробные кратности и $\{27,24,4;1,1,24\}$, $v=784$ с целыми собственными значениями 6, -1, -5, но 6 и -5 имеют дробные кратности. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $k=24$, то Γ имеет массив пересечений $\{24,21,b_2;1,1,c_3\}$, c_3 делит $3^2 56 b_2$. Возникают интересные массивы пересечений $\{24,21,11;1,1,$ $18\}$, $v=837$ с целыми собственными значениями 6, -3, -7, но 6 и -7 имеют дробные кратности и $\{24,21,7;1,1,18\}$, $v=725$ с целыми собственными значениями 6, -1, -5, но 6 и -5 имеют дробные кратности. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $k=21$, то Γ имеет массив пересечений $\{21,18,b_2;1,1,c_3\}$, c_3 делит $3^3 14 b_2$. Возникает интересный массив пересечений $\{21,18,10;1,1,12\}$, $v=715$ с целыми собственными значениями 6, -1, -5, но -1 и -5 имеют дробные кратности. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $k=18$, то Γ имеет массив пересечений $\{18,15,b_2;1,1,c_3\}$, c_3 делит $3^3 10 b_2$. Возникают интересные массивы пересечений $\{18,15,13;1,1,6\}$, $v=874$ с целыми собственными значениями 6, -1, -5, имеющими дробные кратности, $\{18,15,5;1,1,18\}$, $v=364$ с целыми собственными значениями 5, -3, -6, но 5 и -6 имеют дробные кратности и $\{18,15,9;1,1,10\}$ со спектром $18^1, (1+\sqrt{105})/2^{171}, -1^{189}, (1-\sqrt{105})/2^{171}$. Других допустимых массивов пересечений нет.

Если $k=15$, то Γ имеет массив пересечений $\{15,12,b_2;1,1,c_3\}$, c_3 делит $3^2 20 b_2$. Возникают интересные массивы пересечений $\{15,12,8;1,1,10\}$, $v=340$ с целыми собственными значениями 5, -2, -5, но 5 и -2 имеют дробные кратности и $\{15,12,6;1,1,10\}$, $v=304$ с целыми собственными значениями 5, -1, -4, но 5 и -4 имеют дробные кратности. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $k = 12$, то Γ имеет массив пересечений $\{12, 9, b_2; 1, 1, c_3\}$, c_3 делит $3^3 4b_2$. Возникают интересные массивы пересечений $\{12, 9, 3; 1, 1, 6\}$, $v = 175$ с целыми собственными значениями 5, 2, -3, но 5 и -3 имеют дробные кратности и $\{12, 9, 1; 1, 1, 12\}$, $v = 130$ с целыми собственными значениями 4, -1, -3, но 4 и -3 имеют дробные кратности. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $k = 9$, то Γ имеет массив пересечений $\{9, 6, b_2; 1, 1, c_3\}$, c_3 делит $3^3 2b_2$. Возникает интересный массив пересечений $\{9, 6, 4; 1, 1, 6\}$, $v = 100$ с целыми собственными значениями 4, -1, -3, но 4 и -3 имеют дробные кратности. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $k = 6$, то Γ имеет массив пересечений $\{6, 3, b_2; 1, 1, c_3\}$, c_3 делит $3^2 2b_2$. Возникает интересный массив пересечений $\{6, 3, 1; 1, 1, 6\}$, $v = 28$ с целыми собственными значениями 3, -1, -2, но 3 и -2 имеют дробные кратности. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Утверждение (1) доказано.

Пусть диаметр Γ больше 4. Тогда $b_i \geq c_{5-i}$ и $k_3 \geq k_2$. Отсюда $4096 \geq v \geq 2(1+k+k(k-3))$ и, с учетом делимости k на 3, имеем $k \leq 46$. Лемма доказана.

Пусть диаметр Γ больше 3 и Γ не является обобщеным $2n$-угольником. Просматривая допустимые массивы пересечений с $\lambda = 2$ из [2], получим лишь массив $\{21, 18, 12, 4; 1, 1, 6, 21\}$. Теорема 2.2 доказана.

Докажем следствие 2.1. Если Γ не является графом диаметра 3, то просматривая допустимые массивы пересечений с $\lambda = 2$ и $v \leq 4096$ из [2], получим лишь массивы из заключения следствия.

Лемма 1.4. *Если* Γ *— антиподальный граф диаметра* 3 *с* $\lambda = \mu = 2$ *и* $v \leq 4096$*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \in \{3, 4, ..., 44\} - \{10, 16, 28, 34, 38\}$.

Доказательство. По условию Γ имеет массив пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$ и $v = r(2r+2)$ вершин. Если $r \geq 45$, то $v \geq 4 \cdot 45 \cdot 23$, противоречие с тем, что $v \leq 4096$. Ввиду [2, предложение 1.10.5] если r четно, то $k = 2r+1$ является суммой квадратов двух целых чисел, поэтому $r \in \{3, 4, ..., 44\} - \{10, 16, 28, 34, 38\}$.

Лемма 1.5. *Если* Γ *— антиподальный граф диаметра* 3 *с* $\lambda = 2 < \mu$ *и* $v \leq 4096$*, то* Γ *имеет массив пересечений из заключения следствия.*

Доказательство. Предположим, что Γ — антиподальный граф диаметра 3 с $\lambda = 2 < \mu$. Тогда Γ имеет спектр $k^1, n^f, -1^k, -m^g$, где $n, -m$ – целые числа, являющиеся корнями уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$,

$f = m(r-1)(k+1)/(m+n)$, $g = n(r-1)(k+1)/(m+n)$ и $r = (k+\mu-3)/\mu$. Если $r = 2$, то Γ — граф Тэйлора и $\mu = k-3$. В этом случае $k = 6$, $n = 2$, $m = 3$, противоречие с тем, что $f = 3 \cdot 7/5$. Значит, $r > 2$ и из условия $q^3_{33} \geq 0$ следует, что $m \leq n^2$.

Завершим доказательство леммы с помощью компьютерных вычислений. Так как $r \geq 3$, то $k \leq v/3 - 1$. Далее, $\mu \geq 3$, $m = n + \mu - 2 \geq n + 1$ и $m \leq n^2$. Наконец, $k = mn \geq n(n+1)$.

Организация вычислений предложена Буриченко В.П. Положим v_{max} $= 4096$ и вычислим $k_{max} = [v_{max}/3] - 1$. Затем находим n_{max} — максимальное число n такое, что $n(n+1) \leq k_{max}$.

Далее перебираем все $n = 1, 2, ..., n_{max}$, а для каждого n перебираем все $m = n+1, ..., n^2$ с условием $mn \leq k_{max}$. Сначала вычисляем $\mu = m - n + 2$ и проверяем делится ли $(m-1)(n+1)$ на μ. Если нет, то соответствующую пару отбрасываем. Если да, то полагаем $r = (m-1)(n+1)/\mu$, $k = mn$ и $v = r(k+1)$. Затем проверяем, делится ли $(r-1)m(m^2-1)$ на $m+n$, и также верно ли неравенство $v \leq v_{max}$. Если нет, то пару (n, m) отбрасываем. Если да, то печатаем массив пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ в список ответов. Завершаем внутрений цикл уменьшением k_{max} на 1 (до тех пор, пока $k^2_{max} > v_{max}$). Завершаем внешний цикл уменьшением v_{max} на 1 (до тех пор, пока $v_{max} \geq 15$).

В итоге получим массивы из пункта (3) заключения следствия 2.1. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Если Γ — примитивный граф диаметра 3 с $\lambda = 2$ и $v \leq 4096$, то Γ имеет массив пересечений из заключения следствия.*

Доказательство. Так как Γ не является графом Тэйлора, то $2(k+2) < v$. Графы с $v \leq 1024$ находим в списке из [2]. Пусть $1024 < v \leq 4096$.

Докажем лемму с помощью компьютерных вычислений. Положим $k = v/2 - 3 = 2045$.

Далее перебираем все делители $c_2 = 1, 2, ..., k-4$ числа $k(k-3)$ и полагаем $k_2 = k(k-3)/c_2$. Для каждого c_2 перебираем все $b_2 = 1, 2, ..., k-3$. Для данной пары (c_2, b_2) перебираем $c_3 = c_2, ..., k$ (исключая случай $b_2 = 1, c_3 = k$) и полагаем $k_3 = k_2 b_2/c_3$. Если $1 + k + k_2 + k_3 > 4096$, то соответствующую тройку c_2, b_2, c_3 отбрасываем. В противном случае рассматриваем массив пересечений $\{k, k-3, b_2; 1, c_2, c_3\}$. Если массив не является допустимым, то тройку c_2, b_2, c_3 отбрасываем. В противном случае печатаем массив пересечений в список ответов. Завершаем цикл уменьшением k на 1 (до тех пор, пока $k > 17$). Если $k = 17$, то $k_2 \leq 119$ и $k_3 \leq 119 \cdot 14/2 = 833$, противоречие с тем, что $v > 1024$.

В итоге получим массивы из пункта (1) заключения следствия 2.1. Лемма и следствие 2.1 доказаны.

§ 2.2. Автоморфизмы примитивных дистанционно регулярных графов с не более 1000 вершинами

В настоящее время найдены автоморфизмы всех дистанционно регулярных графов с массивами пересечений из заключения предложения 2.1.

Примитивные графы имеют массивы пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ или $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$. В статьях [27-30] изучены автоморфизмы дистанционно регулярных графов с 4 первыми массивами пересечений. В диссертации изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$. Тем самым завершается описание автоморфизмов примитивных дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не большим 1000. Ни один из этих графов не является реберно симметричным.

Граф с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ имеет $v = 1 + 51 + 612+136 = 800$ вершин и спектр $51^1, 11^{102}, 3^{425}, -9^{272}$, причем $\bar{\Gamma}_2$ — сильно регулярный граф с параметрами (800,187,42,44) и неглавными собственными значениями $11, -13$.

Теорема 2.3 [73]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 17\}$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω *— пустой граф и либо*

(*i*) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 400 + 100l - 60s$, $\alpha_2(g) = 120s$ *и* $\alpha_3(g) = 400 - 100l - 60s$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $\alpha_1(g) = 400 + 40r - 24t$, $\alpha_2(g) = 48t$ *и* $\alpha_3(g) = 400 - 40r - 24t$;

(2) $p = 17$, $|\Omega| = 1$, $\alpha_2(g) = 204$ *и либо* $\alpha_1(g) = 595, \alpha_3(g) = 0$, *либо* $\alpha_1(g) = 255$ *и* $\alpha_3(g) = 340$;

(3) $p = 3$, *либо*

(*i*) $2 \leq |\Omega| \leq 14$ *и* Ω *состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии* 3, *либо*

(*ii*) $14 \leq |\Omega| \leq 62$, *либо*

(*iii*) $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 120r+40-5\alpha_0(g)$, $\alpha_2(g) = 760+4\alpha_0(g)-120r$ *и* $65 \leq |\Omega| \leq 98$;

(4) $p = 2$, $|\Omega|$ *четно и либо*

(*i*) $\alpha_1(g) = \alpha_(g) = 0$ *и* $\Omega \in \{32, 80\}$, *либо*

(*ii*) $4 \leq |\Omega| \leq 62$, *либо*

(*iii*) $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 80r - 5\alpha_0(g) \neq 0$, $\alpha_2(g) = 20\alpha_0(g) + 800 - 80r$ *и* $64 \leq |\Omega| \leq 106$.

Следствие 2.2. *Граф с массивом пересечений* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ *не является реберно симметричным.*

Приведем сначала результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 2.1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$. *Тогда для чисел пересечения графа* Γ *верны равенства*

(1) $p^1_{11} = 2$, $p^1_{12} = 48$, $p^1_{13} = 0$, $p^1_{22} = 468$, $p^1_{23} = 96$, $p^1_{33} = 40$;
(2) $p^2_{11} = 4$, $p^2_{12} = 39$, $p^2_{13} = 8$, $p^2_{22} = 468$, $p^2_{23} = 104$, $p^2_{33} = 24$;
(3) $p^3_{11} = 0$, $p^3_{12} = 36$, $p^3_{13} = 15$, $p^3_{22} = 468$, $p^3_{23} = 108$, $p^3_{33} = 12$.

Доказательство. Из [2, лемма 4.1.7] следуют равенства
$p^1_{ii-1} = c_i k_i/k$, $p^1_{ii} = a_i k_i/k$, $p^1_{ii+1} = b_i k_i/k$,
$p^i_{i-22} = c_{i-1}c_i/\mu$, $p^{i-1}_{i+12} = b_{i-1}b_i/\mu$, $p^2_{i-1i+1} = k_i c_i b_i/(kb_1)$,
$p^{i-1}_{i2} = b_{i-1}(a_i + a_{i-1} - a_1)/\mu$, $p^{i+1}_{i2} = c_{i+1}(a_i + a_{i+1} - a_1)/\mu$.
Аналогично, $p^1_{11} = a_1 k_1/k$, $p^1_{22} = a_2 k_2/k$ и $p^1_{33} = a_3 k_3/k$.
Далее, $p^3_{12} = c_2 c_3/\mu$, $p^2_{13} = k_2 c_2 b_2/(kb_1)$, $p^3_{22} = p^3_{21}(a_2 + a_3 - a_1)/\mu$ и $p^2_{23} = b_2(a_3 + a_2 - a_1)/\mu$.
Снова по лемме 4.1.7 из [2] получим $p^2_{22} = (p^2_{11}b_1 + p^2_{12}(a_2 - a_1) + p^2_{13}c_3 - p^2_{02}b_0)/\mu$, $p^3_{23} = (p^3_{12}b_2 + p^3_{13}(a_3 - a_1) - p^3_{03}b_0)/\mu$ и $p^3_{33} = (p^3_{22}b_2 + p^3_{23}(a_3 - a_2) - p^3_{13}b_1)/c_3$.
Отсюда следуют указанные равенства. Лемма доказана.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [50]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$, где p^l_{ij} — числа пересечений графа Γ.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1, поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в евклидовом простанстве $\mathbf{R}^v$. Фактически, w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(n, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [50]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2.2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* d, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g \in G$, χ_i *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* m_i, *отвечающее собственному значению* θ_i. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если все собственные значения* $\theta_0, ..., \theta_d$ *целые, то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$;

(2) *если собственное значение* θ_i *целое и* $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_i(g) - m_i$ *делится на* p;

(3) *если собственное значение* θ_i *целое и* $|g| = p^2$, p *— простое число, то* $\chi_i(g^p) - m_i$ *делится на* p^2.

Доказательство. Первые два утверждения следуют из [48, лемма 2], а последнее из [51] с помощью [48, лемма 1].

Лемма 2.3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 102, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности*

425, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l*, взаимно простого с* $|g|$*,*

$$\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/40 + 2,$$

$$\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_2(g)/3)/8 + 25.$$

Если $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_1(g) - 102$ *и* $\chi_2(g) - 425$ *делятся на* p*.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 102 & 22 & 2 & -18 \\ 425 & 25 & -25/3 & 25 \\ 272 & -48 & 16/3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (51\alpha_0(g) + 11\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 9\alpha_3(g))/400$. Подставляя $\alpha_2(g) = 800 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/40$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (17\alpha_0(g)+\alpha_1(g)-\alpha_2(g)/3+\alpha_3(g))/32$. Подставляя $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 800-\alpha_0(g)-\alpha_2(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g)-\alpha_2(g)/3)/8+25$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2.2. Лемма доказана.

Пусть до конца параграфа Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По [2, предложение 1.3.2] порядок клики L из Γ_2 не больше 52, причем в случае равенства любая вершина из $\Gamma_2 - L$ смежна ровно с 39 вершинами из L. Порядок коклики в Γ_2 не превосходит 120.

Кроме того, для произвольной вершины u из Γ подграф $\Gamma_3(u)$ — регулярный граф степени 12 на 136 вершинах.

Лемма 2.4. *Если* Ω *— пустой граф, то* $\alpha_3(g) = 24r$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 5$*,* $\alpha_1(g) = 400+100l-60s$*,* $\alpha_2(g) = 120s$ *и* $\alpha_3(g) = 400-100l-60s$*;*

(2) $p = 2$*,* $\alpha_1(g) = 400+40r-24t$*,* $\alpha_2(g) = 48t$ *и* $\alpha_3(g) = 400-40r-24t$*.*

Доказательство. Так как $800 = 2^5 5^2$, то $p = 2$ или 5.

Пусть $p = 5$. Тогда из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_2(g) = 120s$.Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/40 + 2$ сравнимо с 2 по модулю 5.

Отсюда $\alpha_1(g)-\alpha_3(g)=200l$ и $\alpha_1(g)+\alpha_3(g)=800-120s$, поэтому $\alpha_1(g)=400+100l-60s$ и $\alpha_3(g)=400-100l-60s$.

Пусть $p=2$. Тогда $\chi_2(g)-425=-\alpha_2(g)/24-400$ делится на 2, поэтому $\alpha_2(g)=48t$. Далее, $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)-\alpha_3(g))/40+2$ четно. Отсюда $\alpha_1(g)-\alpha_3(g)=80r$, $\alpha_1(g)+\alpha_3(g)=800-48t$, поэтому $\alpha_1(g)=400+40r-24t$, $\alpha_3(g)=400-40r-24t$. Лемма доказана.

В леммах 2.5–2.7 предполагается, что Ω содержит вершину a.

Лемма 2.5. *Если $p>3$, то $p=17$, $|\Omega|=1$, $\alpha_2(g)=204$ и либо $\alpha_1(g)=595,\alpha_3(g)=0$, либо $\alpha_1(g)=255,\alpha_3(g)=340$.*

Доказательство. Пусть $p>3$. Допустим, что Ω содержит $[a]$, тогда вершина $u\in\Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i]\cap[a_j]$ для некоторых вершин a_i,a_j из $[a]$, поэтому $u\in\Omega$. Отсюда $\Gamma_2(a)\subset\Omega$ и $\Gamma=\Omega$, противоречие. Кроме того, в окрестности каждой вершины из $\Gamma-\Omega$ имеется не более одной вершины из Ω. Поэтому число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ не меньше $p\cdot|\Omega|$ и не больше $|\Gamma-\Omega|$. Отсюда $|\Omega|\le 800/(p+1)$.

Пусть $p=47$. Тогда Ω — объединение изолированных октаэдров, противоречие с тем, что числа 800-6 и 800-12 не делятся на 47.

Если $p=43$, то $|\Omega(a)|=8$ и $|\Omega|\ge 1+8+8\cdot 5/4=19$, противоречие с тем, что $|\Omega|\le 18$. Если $p=41$, то $|\Omega(a)|=10$ и $|\Omega|\ge 1+10+10\cdot 7/4=37/25$, поэтому $18\le|\Omega|\le 19$, противоречие. Если $p=37$, то $|\Omega(a)|=14$ и $|\Omega|\ge 1+14+14\cdot 11/4=107/2$, противоречие с тем, что $|\Omega|\le 400/19$. Если $p=31$, то $|\Omega(a)|=20$ и $|\Omega|\ge 1+20+20\cdot 17/4=106$, противоречие с тем, что $|\Omega|\le 25$, противоречие. Если $p=29$, то $|\Omega(a)|=22$ и $|\Omega|\ge 1+22+22\cdot 19/4=255/2$, противоречие с тем, что $|\Omega|\le 80/3$.

Если $p=23$, то $|\Omega|\le 100/3$, поэтому Ω — вполне регулярный граф с параметрами (18,5,2,4), противоречие с тем, что 4 не делит $5\cdot 2$. Если $p=19$, то $|\Omega|\le 40$, поэтому Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v',13,2,4)$, противоречие с тем, что 4 не делит $13\cdot 10$.

Пусть $p=17$. Тогда $|\Omega|\equiv 1 \pmod{17}$, $|\Omega(a)|\equiv 0 \pmod{17}$ и $|\Omega|\le 44$. Если $|\Omega(a)|=17$, то Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v',17,2,4)$, противоречие с тем, что 4 не делит $17\cdot 14$. Значит, расстояние между двумя любыми вершинами из Ω равно 3. Так как $p^3_{33}=12$, то $|\Omega|=1$. Теперь $\chi_2(g)=(4-\alpha_2(g)/3)/8+25$, $\alpha_2(g)=204$, $\chi_1(g)=(5+\alpha_1(g)-\alpha_3(g))/40+2$, $\alpha_1(g)-\alpha_3(g)=85t$, $17t+1$ делится на 8 и $t\in\{-1,7\}$. Поэтому либо $\alpha_1(g)=595,\alpha_3(g)=0$, либо $\alpha_1(g)=255,\alpha_3(g)=340$.

Пусть $p=13$. Тогда $|\Omega|\equiv 7 \pmod{13}$, $|\Omega(a)|\equiv 12 \pmod{13}$ и $|\Omega|\in\{20,33,46\}$. Противоречие с тем, что $|\Omega|=1+12+12\cdot 9/4=40$.

Пусть $p=11$. Тогда $|\Omega|\equiv 8 \pmod{11}$, $|\Omega(a)|\equiv 7 \pmod{11}$ и $|\Omega|\in\{19,30,41,52,63\}$. Так как $|\Omega|<1+18+18\cdot 15/4$, то связная компонента Σ графа Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v',7,2,4)$. Если диаметр Σ равен 2, то Σ — сильно регулярный граф с собственными значениями $1, -3$, противоречие с тем, что кратность 1 равна $2{\cdot}7{\cdot}10/(4{\cdot}4)$. Если же диаметр Σ больше 2, то Σ — граф Тэйлора, противоречие с тем, что окрестность вершины в графе Тэйлора является кокликой или сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть $p = 7$. Тогда $|\Omega| \equiv 2 \pmod 7$, $|\Omega(a)| \equiv 2 \pmod 7$ и $|\Omega| \le 100$. Так как $|\Omega| < 1 + 23 + 23 \cdot 20/4$, то степень любой вершины в Ω равна 9 или 16. Если связная компонента графа Ω имеет степень 9, то получим противоречие с тем, что 4 не делит $9{\cdot}6$. Теперь связная компонента графа Ω имеет не менее $1 + 16 + 16 \cdot 13/4 = 69$ вершин, поэтому Ω — связный регулярный граф степени 16 и $|\Omega| \in \{72, 79, 86, 93, 100\}$. Противоречие с тем, что $|\Gamma - \Omega| \ge 72 \cdot 35$.

Пусть $p = 5$. Тогда $|\Omega|$ делится на 5, $|\Omega(a)| \equiv 1 \pmod 5$ и $|\Omega| \le 133$. Так как $|\Omega| < 1{+}26{+}26{\cdot}23/4$, то степень любой вершины в Ω равна 6, 11, 16 или 21. Если связная компонента графа Ω имеет степень 6 или 21, то получим противоречие с тем, что 4 не делит $6 \cdot 3$ или $21 \cdot 18$. Если связная компонента Δ графа Ω имеет степень 16, то $|\Delta| \ge 1 + 16 + 16 \cdot 13/4 = 69$. Противоречие с тем, что $|\Gamma{-}\Delta| \ge 69{\cdot}35 = 2414$. Если связная компонента Δ графа Ω имеет степень 11, то $|\Delta| \ge 1{+}11{+}11{\cdot}8/4 = 34$. Противоречие с тем, что $|\Gamma - \Delta| \ge 34 \cdot 40 = 1360$.

Лемма 2.6. *Если $p = 3$, то либо*

(1) $2 \le |\Omega| \le 14$ *и Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3, либо*

(2) $14 \le |\Omega| \le 62$*, либо*

(3) $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 120r + 40 - 5\alpha_0(g)$, $\alpha_2(g) = 760 + 4\alpha_0(g) - 120r$ *и* $65 \le |\Omega| \le 98$.

Доказательство. Пусть $p = 3$, $u \in \Gamma - \Omega$. Если $d(u, u^g) = 1$, то $[u]$ содержит не более одной вершины из Ω. Так как $p^1_{33} = 40$, то $|\Gamma_3(u){-}\Omega| \ge 96$, $|\Gamma - \Omega| \ge 1 + 50 + 2 \cdot 48/4 + 48 \cdot 44/4 + 96 = 699$ и $|\Omega| \le 101$.

Если $d(u, u^g) = 2$, то $[u]$ содержит 1 или 4 вершины из Ω. Так как $p^1_{33} = 24$, то $|\Gamma_3(u) - \Omega| \ge 112$, $|\Gamma - \Omega| \ge 1 + 47 + 47 \cdot 44/4 + 112 = 677$ и $|\Omega| \le 122$.

Если $d(u, u^g) = 3$, то $[u]$ не пересекает Ω. Так как $p^3_{33} = 12$, то $|\Gamma_3(u) - \Omega| \ge 125$, $|\Gamma - \Omega| \ge 1 + 51 + 51 \cdot 44/4 + 125 = 738$ и $|\Omega| \le 62$.

Пусть $|\Omega| > 101$. Тогда $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$, $\alpha_0(g)/8$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_0(g) = 104, \alpha_2(g) = 696$. Далее, $(4\alpha_0(g){-}\alpha_2(g)/3)/8$ сравнимо с 1 по модулю 3, противоречие.

Пусть $\alpha_3(g) = 0$. Тогда $(5\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю3, $\alpha_1(g) = 120r + 40 - 5\alpha_0(g)$, $(4\alpha_0(g) + \alpha_2(g)/3)/8$ сравнимо с 1 по модулю3 и $\alpha_2(g) = 72s + 24 - 12\alpha_0(g)$. Так как $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 800$, то $2\alpha_0(g) + 92 - 9s = 15r$ и $\alpha_1(g) = 776 - 72s + 11\alpha_0(g)$.

Через A_i обозначим множество вершин u из $\Gamma - \Omega$ таких, что $d(u, u^g) = i$. В случае $\alpha_0(g) = 101$ вершина u из A_1 смежна с единственной вершиной из Ω и с 48 вершинами из A_2, а вершина из $A_2 \cap [u]$ смежна с 4 вершинами из Ω. Далее, Ω содержит единственную вершину a из $[u]$, 40 вершин из $\Gamma_2(u)$ и 60 вершин из $\Gamma_3(u)$. Теперь число ребер между $\Omega \cap \Gamma_2(u)$ и $A_2 \cap [u]$ равно $48 \cdot 4 = 4x + 3(60 - x)$, поэтому $x = 12$. Противоречие с тем, что $[a]$ содержит u, u^g, u^{g^2} и 48 вершина из Ω.

Если Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3, то с учетом равенства $p^3_{33} = 12$ имеем $2 \leq |\Omega| \leq 14$. Допустим, что Ω содержит две вершины, расстояние между которыми меньше 3.

Если $\alpha_0(g) = 8$, то можно считать, что степень вершины a в Ω равна 6 и $\Omega(a)$ — шестиугольник или объединение двух треугольников. В случае шестиугольника для вершин b, c на расстоянии 2 в шестиугольнике подграф $[b] \cap [c]$ содержит 2 вершины из $\Omega - a^\perp$, противоречие. В случае, когда $\Omega(a)$ — объединение двух треугольников для вершины e из $\Omega - a^\perp$ подграф $[e] \cap \Omega(a)$ содержит вершину, степень которой в Ω равна 4, противоречие.

Если $\alpha_0(g) = 11$, то можно считать, что степень вершины a в Ω равна 6 и $\Omega(a)$ — шестиугольник или объединение двух треугольников. В случае шестиугольника для вершин b, c на расстоянии 2 в шестиугольнике подграф $[b] \cap [c]$ содержит 2 вершины из $\Omega - a^\perp$, а ребро шестиугольника попадает в окрестность единственной вершины из $\Omega - a^\perp$, противоречие с тем, что число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ не больше 16. Значит, $\Omega(a)$ — объединение двух треугольников. В этом случае каждая вершина из $\Omega(a)$ смежна с 0 или 3 вершинами из $\Omega - a^\perp$, противоречие с тем, что число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $x + 4(4 - x)$.

Лемма 2.7. *Если $p = 2$, то степень любой вершины в графе Ω меньше 51 и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ *и* $\Omega \in \{32, 80\}$*;*

(2) $4 \leq |\Omega| \leq 62$*;*

(3) $\alpha_3(g) = 0$*,* $\alpha_1(g) = 80r - 5\alpha_0(g) \neq 0$*,* $\alpha_2(g) = 20\alpha_0(g) + 800 - 80r$ *и* $64 \leq |\Omega| \leq 106$*.*

Доказательство. Пусть $p = 2$, $u \in \Gamma - \Omega$. Тогда число $|\Omega|$ четно, степени вершин в Ω нечетны, и для любых двух вершин $a, e \in \Omega$ число $\Omega(a) \cap [e]$ четно.

Пусть $a \in \Omega$ и $[a] \subset \Omega$. Тогда каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ смежна точно с 4 вершинами из Ω. Если $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ содержит вершину b, то степень b в графе $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ равна 39, противоречие. Значит, Ω не пересекает $\Gamma_2(a)$

и $\alpha_2(g) \geq 612$. Если $d(u,u^g) = 3$, то степень a в графе $\Gamma_3(u)$ равна 15, поэтому $|[a] \cap \Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(u^g)| = 15$, противоречие с тем, что $p^3_{33} = 12$. Значит, $\alpha_3(g) = 0$. Теперь отсюда $\chi_2(g) = 51 - \alpha_2(g)/24$ и $\alpha_2(g) = 48r$. Далее, $\chi_1(g) = (260+\alpha_1(g))/40+2$, поэтому $\alpha_1(g) = 80s-260 = 800-48r$. Отсюда $r = 15$ и $\alpha_1(g) = 80s - 260 = 80$, противоречие.

Если $d(u,u^g) = 1$, то $[u]$ содержит не более двух вершины из Ω. Так как $p^1_{33} = 40$, то $|\Gamma_3(u)-\Omega| \geq 96$, $|\Gamma-\Omega| \geq 1+49+48/4+48\cdot 44/4+96 = 686$ и $|\Omega| \leq 114$.

Если $d(u,u^g) = 2$, то $[u]$ содержит не более 4 вершин из Ω. Так как $p^1_{33} = 24$, то $|\Gamma_3(u) - \Omega| \geq 112$, $|\Gamma - \Omega| \geq 1 + 47 + 47 \cdot 44/4 + 112 = 677$ и $|\Omega| \leq 122$.

Если $d(u,u^g) = 3$, то $[u]$ не пересекает Ω. Так как $p^3_{33} = 12$, то $|\Gamma_3(u) - \Omega| \geq 125$, $|\Gamma - \Omega| \geq 1 + 51 + 51 \cdot 44/4 + 125 = 738$ и $|\Omega| \leq 62$.

Пусть $a,b \in \Omega$. Так как $p^2_{12} = 39$, то в случае $d(a,b) = 2$ подграф $[a]\cap\Gamma_2(b)$ содержит вершину из Ω. Так как $p^3_{13} = 15$, то в случае $d(a,b) = 3$ подграф $[a] \cap \Gamma_3(b)$ содержит вершину из Ω.

Если $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$, то $\alpha_0(g)/8$ четно. Поэтому $\alpha_0(g) = 16t$, $\alpha_2(g) = 800 - 16t$. Далее, $\alpha_2(g)$ делится на 3, поэтому $t \in \{2,5\}$.

Пусть $\alpha_3(g) = 0$. Тогда $(5\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/40$ четно, $\alpha_1(g) = 80r-5\alpha_0(g)$, $(4\alpha_0(g)+\alpha_2(g)/3)/8$ четно и $\alpha_2(g) = 48s-12\alpha_0(g)$. Так как $\alpha_0(g)+\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = 800$, то $\alpha_0(g) + 50 - 3s = 5r$.

Через A_i обозначим множество вершин u из $\Gamma-\Omega$ таких, что $d(u,u^g) = i$. Допустим, что $\alpha_0(g) \geq 64$ и выберем вершину u из A_1. Если u не смежна с вершинами из Ω, то $|\Gamma_2(u)\cap\Omega|$ не меньше $|\Omega|-40$. В этом случае число ребер между $\Omega \cap \Gamma_2(u)$ и $[u] - \Omega$ не больше $50 \cdot 4$ и равно $4(|\Omega| - 40)$, поэтому $|\Omega| \leq 90$.

Если u смежна с двумя вершинами a,b из Ω, то $|\Gamma_2(u)\cap\Omega|$ не меньше $|\Omega|-42$. В этом случае число ребер между $\Omega\cap\Gamma_2(u)$ и $[u]-\Omega$ не больше $48 \cdot 4$ и равно $4x + 3(|\Omega| - 42 - x)$, если вершины a,b смежны, равно $2\cdot 2+4x+3(|\Omega|-44-x)$, если вершины a,b не смежны. В любом случае $|\Omega| \leq 106$. Лемма, а вместе с ней и теорема 2.3 доказаны.

До конца параграфа предполагается, что группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ. Пусть $\{a,b\}$ — ребро графа Γ. Тогда $[a]$ — объединение изолированных n-угольников, $n \in \{3,17,51\}$, $|G : G_a| = 800$, $|G_a : G_{a,b}| = 51$, $|G_{\{a,b\}} : G_{a,b}| = 2$. Кроме того, G_a является подгруппой подстановочного сплетения диэдральной группы порядка $2n$ с помощью симметрической группы степени $51/n$. Заметим, что в силу теоремы $G_{a,b}$ является $\{2,3\}$-подгруппой в G и $|G| = 2^{s+5}\cdot 3^{t+1}\cdot 5^2\cdot 17$. Положим $\bar{G} = G/O_2(G)$.

Лемма 2.8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* g *— элемент порядка* 17 *из* G*, то* $C_G(g) = \langle g \rangle$*;*

(2) *цоколь* T *группы* G *— простая группа, изоморфная* $L_2(16)$ *или* $Sp_4(4)$.

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 17 из G, f — элемент из $C_G(g)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(f)$.

Если $|f| = 5$, то f фиксирует единственную вершину из $\mathrm{Fix}(g)$, противоречие с тем, что Ω — пустой граф.

Если $|f| = 3$, то ввиду теоремы $|\Omega| \in \{35, 86\}$. В случае $|\Omega| = 86$ число $\alpha_1(g) = 120r - 390$ не делится на 17, противоречие. В случае $|\Omega| = 35$ имеем $\chi_2(g) = (420 - \alpha_2(g))/24 + 25$, поэтому $\alpha_2(g) = 51r$ сравнимо с 4 по модулю 8 и $\alpha_2(g) = 204$, противоречие с тем, что $\chi_2(g) - 425$ делятся на 3.

Если $|f| = 2$, то ввиду теоремы $|\Omega| \in \{18, 52, 86\}$. В случае $|\Omega| = 86$ число $\alpha_1(g) = 80r - 430$ не делится на 17, противоречие. В случае $|\Omega| = 18$ имеем $\chi_2(g) = 34 - \alpha_2(g)/24$, поэтому $\alpha_2(g) = 17 \cdot 24 = 408$. Далее, $\chi_1(g) = (90 + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/40 + 2$, поэтому $\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = 170s$ и $17s - 9$ делится на 16, противоречие. В случае $|\Omega| = 52$ имеем $\chi_2(g) = 51 - \alpha_2(g)/24$, поэтому $\alpha_2(g) = 17 \cdot 48 = 816$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Теперь по теореме Грюнберга-Кегеля (см. [52, лемма 1.1]) фактор-группа $G/F(G)$ является почти простой группой. Если $|F(G)|$ делится на 5, то получим противоречие с действием группы порядка 17 на группе порядка 25. Пусть $Q = O_2(G)$ — неединичная группа. Так как G_a — транзитивная группа степени 51 на $[a]$, то Q_a — нормальная подгруппа из G_a, фиксирующая вершину из $[a]$. Поэтому каждая инволюция из Q_a фиксирует $[a]$ поточечно и $Q_a = 1$. Таким образом, $|Q| \leq 32$, противоречие с действием группы порядка 17 на Q.

Итак, цоколь T группы G — простая $\{2, 3, 5, 17\}$-группа. Из [53, таблица 1] следует, что группа T изоморфна $L_2(16)$ или $Sp_4(4)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 2.2. Если группа T изоморфна $L_2(16)$, то $|G|$ не делится на 25, а если T изоморфна $Sp_4(4)$, то в G нет максимальных подгрупп индекса, делящего 800. Следствие 2.2 доказано.

§ 2.3. Автоморфизмы антиподальных дистанционно регулярных графов с не более 1000 вершинами

Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф с $\lambda = 2$ и не более 1000 вершинами. Ввиду следствия 2.1 Γ — граф с $\mu = 1$ и массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$ или $\mu = 2$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \in \{3, 4, ..., 44\} - \{10, 16, 28, 34, 38\}$ и $v = 2r(r+1)$. Последний случай рассмотрен в [28].

Теорема 2.4 [70]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω *— пустой граф и либо*

(*i*) $p = 43$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 430r$ *и* $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, *либо*

(*ii*) $p = 5$, $\alpha_3(g) = 200s + 120$, $\alpha_1(g) = 50t + 40$ *и* $5t + 20s \leq 155$, *либо*

(*iii*) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 80s + 40$, $\alpha_1(g) = 80l$ *и* $l + s \leq 21$;

(2) Ω *лежит в антиподальном классе графа* Γ *и либо*

(*i*) $p = 7$, $|\Omega| = 26$ *и* $|\alpha_2(g)| \geq 42 \cdot 26$, *либо*

(*ii*) $p = 3$, $|\Omega| \in \{1, 4, ..., 40\}$ *и* $|\alpha_1(g)| \leq 42|\Omega|$, *либо*

(*iii*) $p = 2$, $|\Omega| \in \{2, 4, ..., 38\}$ *и* $|\alpha_2(g)| \geq 42|\Omega|$;

(3) $p = 13$ *и* Ω *является* 4*-кликой;*

(4) $p = 2$ *и* Ω *— шестиугольник или вторая окрестность вершины в графе Хофмана-Синглтона.*

Следствие 2.3. *Группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$ действует интранзитивно на множестве вершин.*

В леммах 3.1–3.6 предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$ и спектром $42^1, 7^{774}, -1^{42}, -6^{903}$, g — автоморфизм графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 3.1. *Пусть χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 774, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 42. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_1(g) = \frac{46\alpha_0(g) + 7\alpha_1(g) - 3\alpha_3(g)}{91} - \frac{43}{13},$$

$$\chi_2(g) = \frac{\alpha_0(g) + \alpha_3(g)}{14} - 1 = -\frac{\alpha_1(g) + \alpha_2(g)}{14} + 42.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 774$ и $\chi_2(g) - 42$ делятся на p.

Доказательство. Имеем

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 42 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 39 & 40 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 301 & 43 & -43/13 & -301/13 \\ 42 & -1 & -1 & 42 \\ 258 & -43 & 43/13 & -258/13 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 1/13\alpha_2(g) - 7/13\alpha_3(g))/14$. Подставляя $\alpha_2(g) = 602 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (46\alpha_0(g) + 7\alpha_1(g) - 3\alpha_3(g))/91 - 43/13$.

Далее, $\chi_2(g) = (42\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 42\alpha_3(g))/602$. Учитывая равенство $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 602$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 1 = -(\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/1 + 42$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2.2.

Замечание 3.1. Если g фиксирует антиподальный класс K и $a \in \Omega$, то K пересекает Ω, а если Ω пересекает антиподальные классы K, L, то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично, $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Лемма 3.2. *Если Ω — пустой граф, то $\alpha_3(g) = 14s$ и выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 43$, $\alpha_1(g) = 43$ *и* $\alpha_2(g) = 559$;

(2) $p = 7$, $\alpha_3(g) = 98s + 14$, $\alpha_1(g) = 91l + 42s + 49$ *и* $13l + 20s \leq 77$;

(3) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s + 14$, $\alpha_1(g) = 26l + 12s + 62$ *и* $13l + 20s \leq 263$.

Доказательство. Так как $602 = 2 \cdot 7 \cdot 43$, то $p = 2, 7$ или 43. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_3(g) = 14s$.

Пусть $p = 43$. Тогда $\alpha_3(g)$ делится на 43 и $\alpha_3(g)$ равно 602 или 0. В первом случае получим, что $\chi_1(g) = -43 \cdot 6/13$, противоречие. Во втором случае $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 43)/13$, поэтому либо $(\alpha_1(g), \alpha_2(g)) = (43, 559)$, либо $\alpha_1(g) = 602$. Но в случае $\alpha_1(g) = 602$ каждая $\langle g \rangle$-орбита является 43-кликой, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\chi_2(g) - 42 = \alpha_3(g)/14 - 43$ делится на 7, поэтому $\alpha_3(g) = 98s + 14$. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - (42s + 6) - 43)/13$ делится на 7. Отсюда $\alpha_1(g) = 91l + 42s + 49$. Так как число антиподальных классов вершин, сдвигаемых g, равно $43 - (7s + 1)$, то $91l + 42s + 49 \leq 14(42 - 7s)$, поэтому $13l + 20s \leq 77$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 3/7\alpha_3(g) - 43)/13$ нечетно. Далее, число $\chi_2(g) - 42 = \alpha_3(g)/14 - 43$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 28s + 14$ и $\alpha_1(g) = 26l + 3\alpha_3(g)/7 + 56 = 26l + 12s + 62$. Так как число антиподальных классов вершин, сдвигаемых g, равно $43 - (2s + 1)$, то $26l + 12s + 62 \leq 14(42 - 2s)$, поэтому $13l + 20s \leq 263$. Лемма доказана.

В леммах 3.3–3.7 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $a, b \in \Omega$ и $p > 3$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$. Кроме того, при $p > 2$ имеем, $\lambda_\Omega = 2$.

Лемма 3.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p \neq 2, 3, 7$ *или* 13*, то* Ω *содержит по вершине из* $[a]$*, из* $\Gamma_2(a)$ *и из* $\Gamma_3(a)$*;*

(2) *если* $p > 13$*, то* $\Gamma_3(a) \subset \Omega$*;*

(3) *любая вершина из* Ω *смежна с некоторой вершиной из* $\Gamma - \Omega$.

Доказательство. Если $p \neq 2, 3, 7$ или 13, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g-допустимым и в случае $p > 13$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Пусть $p > 2$. Допустим, что Ω содержит $[a]$, тогда любая вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для некоторых вершин a_i, a_j из $[a]$. Отсюда $u \in \Omega$, поскольку иначе $|[a_i] \cap [a_j]| \geq p + 1 > 3$. Тогда получим, что и $\Gamma_3(a) \subset \Omega$, и значит, $\Gamma \subset \Omega$, противоречие. Пусть $p = 2$. Тогда в $\Gamma_3(a)$ есть вершина b из Ω и $[b] \in \Omega$. Иначе, если $[b]$ содержит вершину x из $\Gamma - \Omega$, то $[b]$ содержит вершину x^g, и $[x] \cap [x^g] = \{a_1, a_2, a_3, b\}$ для вершин $\{a_1, a_2, a_3\} \in [a]$, противоречие. Теперь для вершины $y \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$ получим $|[y] \cap [y^g] \cap \Omega| \geq 6$, противоречие.

Лемма 3.4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *число* p *не больше* 13*;*

(2) *если* $p = 13$*, то* Ω *является* 4*-кликой,* $\alpha_3(g) = 52$*,* $\alpha_1(g) = 169l + 41$ *и* $l \in \{0, 1, 2\}$.

Доказательство. Пусть $p > 13$. Тогда $|\Omega| = 14r$, где r — число антиподальных классов, попадающих в Ω, Ω — регулярный граф степени $r - 1$ и p делит $43 - r$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $14r(43 - r)$, но не больше $2(602 - 14r)$, поэтому $7r^2 - 315r + 602 \geq 0$. Отсюда r равно 1, 2 или 43, причем в последнем случае получим $\Gamma \subset \Omega$, противоречие. Если $r = 1$, то $p = 2, 3$ или 7 — противоречие. Если $r = 2$, то $p = 41$, противоречие с тем, что $\lambda = 2$.

Пусть $p = 13$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 4 по модулю 13. Заметим, что любой антиподальный класс пересекает Ω по 0, 1 или 14 вершинам.

Пусть Γ содержит t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда $|\Omega| = st$, $\alpha_3(g) = (14 - s)t$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 602 - 14t$ и $\chi_1(g) = (7st + \alpha_1(g) - 6t - 43)/13$. По лемме 3.1 число $301 - \chi_1(g)$ делится на 13, поэтому $\alpha_1(g) = 6t - 7st + 45 + 169l$.

Пусть $s = 14$. Поскольку для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $[u]$ содержит не более одной вершины из Ω, то $|\Gamma - \Omega| \geq 13|\Omega|$, $|\Omega| \leq 43$ и $t \in \{1, 2, 3\}$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \equiv 4(mod 13)$.

Пусть $s = 1$. Тогда Ω является t-кликой. Так как порядок клики в Γ не больше 6, то $|\Omega| = 4$, $\alpha_3(g) = 52$, $\alpha_1(g) = 169l + 41$ и $l \in \{0, 1, 2\}$.

Лемма 3.5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $p \neq 11, 5$;

(2) *если* $p = 7$, *то* Ω *лежит в антиподальном классе* Γ *и либо*

(*i*) $|\Omega| = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 91l$ *и* $\alpha_3(g) = 7$, *либо*

(*ii*) $|\Omega| = 14$, $\alpha_1(g) = 91l + 49$ *и* $\alpha_3(g) = 0$.

Доказательство. Пусть $p \in \{5, 7, 11\}$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t-1$. Если $p \neq 7$, то $\alpha_3(g) = t(14 - s)$, поэтому $\chi_2(g) = t-1$ и по лемме 3.1 число $43 - t$ делится на p.

Рассмотрим множество вершин U, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω. Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(43 - t)/(602 - 14t) = st/14$ вершинами из Ω, поэтому $st \leq 14$.

Пусть $p = 11$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 8 по модулю 11 и любой антиподальный класс пересекает Ω по 0, 3 или 14 вершинам. Если $s = 14$, то любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 1$, $|\Omega| = 14$, противоречие. Если $s = 3$, то $t = 8$ и $|\Omega| = 24$, противоречие.

Пусть $p = 5$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 2 по модулю 5, любой антиподальный класс пересекает Ω по 0, 4, 9 или 14 вершинам. Отсюда $t = 3, s = 4$ и $|\Omega|$ — регулярный граф степени 2, противоречие с тем, что $\lambda_\Omega = 2$.

Пусть $p = 7$. Тогда $|\Omega|$ делится на 7, любой антиподальный класс пересекает Ω по 0, 7 или 14 вершинам. Далее, $\alpha_3(g) = t(14 - s)$, поэтому $\chi_2(g) = t - 1$ делится на 7 и $\chi_1(g) = (7st + \alpha_1(g) - 6t - 43)/13$.

Если $s = 14$, то $t = 1$, Ω — антиподальный класс Γ и $\alpha_1(g) = 91l + 49$.

Пусть $s = 7$. Тогда $t = 1$, Ω лежит в антиподальном классе Γ и $\alpha_1(g) = 91l$.

Лемма 3.6. *Если* $p = 3$, *то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *лежит в антиподальном классе* Γ, $|\Omega| = s$, $\alpha_3(g) = 14 - s$ *и* $\alpha_1(g) = 39l + 6s - 3$, $s \in \{2, 5, 8, 11, 14\}$;

(2) Ω *является объединением* s *изолированных* 4-*клик*, $\alpha_3(g) = 4(14 - s)$ *и* $\alpha_1(g) = 39l - 15s + 15$, $s \in \{2, 5, 8\}$.

Доказательство. Пусть $p = 3$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, $\alpha_3(g) = t(14 - s)$ и $\chi_2(g) = t - 1$. По лемме 6.2 число $43 - t$ делится на 3. Заметим, что любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с тремя вершинами из Ω.

Рассмотрим множество вершин U, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω. Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(43 - t)/(602 - 14t) = st/14$ вершинами из Ω, поэтому $st \leq 42$. Далее, $|\Omega|$ сравнимо с 2 по модулю 3, степень вершины в Ω делится на 3 и любой антиподальный класс пересекает Ω по 0, 2, 5, 8, 11 или 14 вершинам.

Пусть $t = 1$. Тогда Ω лежит в антиподальном классе Γ, $|\Omega| = s$, $s \in \{2, 5, 8, 11, 14\}$ и $\alpha_1(g) = 39l + 6s - 3$.

Пусть теперь $t \geq 4$, тогда $s \leq 8$.

Пусть $t = 4$. Тогда Ω — регулярный граф степени 3 на $4s$ вершинах и $\lambda_\Omega = 2$. Отсюда Ω — объединение s изолированных 4-клик и $\alpha_1(g) = 39l - 15s + 15$.

Пусть $t = 7$. Тогда Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(7s, 6, 2, 3)$, поэтому связная компонента Δ графа Ω — граф Тэйлора. Противоречие с тем, что окрестность вершины в графе Тэйлора является кокликой или сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть теперь $t > 7$. Тогда $s = 2$, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и $|\Omega| = 2t$. Поэтому Ω содержится в $a^\perp \cup b^\perp$ для любых антиподальных вершин $a, b \in \Omega$. Противоречие с тем, что тогда степень вершины в Ω не больше 6.

Лемма 3.7. *Если $p = 2$, то Γ содержит t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам, $\alpha_3(g) = t(14 - s)$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$t = 1$, $s = 10$ и $\alpha_1(g) = 168$;*

(2) *$t = 3$, Ω — шестиугольник и $\alpha_1(g) = 26l + 6$;*

(3) *$t = 5$, Ω является графом $K_{5,5}$ с удаленным максимальным паросочетанием и $\alpha_1(g) = 26l - 2$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, число $|\Omega|$ четно, любой антиподальный класс пересекает Ω по 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 или 14 вершинам и t нечетно. Пусть K — антиподальный класс, содержащий вершину a. Тогда $K \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$.

Заметим, что $\mu_\Omega \in \{1, 3\}$, $\lambda_\Omega \in \{0, 2\}$. Как и выше доказывается, что $st \leq 42$. Далее, $\alpha_3(g) = t(14 - s)$, поэтому $\chi_2(g) = t - 1$ четно и $\chi_1(g) = (7st + \alpha_1(g) - 6t - 43)/13$ нечетно.

Пусть $t = 1$. Тогда Ω лежит в антиподальном классе графа Γ, $|\Omega| = s$ и $s \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. С другой стороны, если $d(u, u^g) = 2$, то $[u]$ пересекает Ω. Обратно, если $a \in \Omega$ и $u \in [a]$, то $d(u, u^g) = 2$, иначе $[u] \cap [u^g]$ содержит 2 вершины из Ω, противоречие. Значит, $\alpha_2(g) = 42s$, $\alpha_1(g) = 14(42 - 3s)$ и $\chi_1(g) = (582 - 43 - 35s)/13$. Отсюда $6 + 2s$ делится на 13 и $s = 10$.

Пусть $t = 3$. Тогда Ω — объединение изолированных циклов. Отсюда $s = 2$, Ω — шестиугольник и $\alpha_1(g) = 26l + 6$.

Пусть $t = 5$. Тогда $s \leq 8$ и $\Omega(a)$ — коклика, четырехугольник или объединение изолированной вершины и треугольника. В случае $s \geq 6$ для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит по вершине из $[a_i]$ для $i \in \{2, ..., s\}$, противоречие с тем, что степень b в Ω больше 4. Если $s=4$, то $\Omega(a)$ — коклика, Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4,3,1;1,1,4\}$, противоречие с тем, что для собственных значений $n,-m$ этого графа верны равенства $k=mn=4$, $\mu=(m-1)(n+1)/r$ и $\lambda=\mu+n-m$. Если $s=2$, то $\Omega(a)$ не является объединением изолированной вершины и треугольника. Так как Ω не является локально четырехугольным графом, то $\Omega(a)$ — коклика для некоторой вершины $a\in\Omega$ и $\Omega(a^*)$ — также коклика для антипода a^* вершины a в Ω. Поэтому Ω является графом $K_{5,5}$ с удаленным максимальным паросочетанием и $\alpha_1(g)=26l-2$.

Пусть $t\geq 7$. Если $s=2$, то Ω — регулярный граф степени $t-1$ и $|\Omega|=2t$. Поэтому Ω содержится в $a^\perp\cup a_2^\perp$. Тогда степень вершины в Ω не больше 6, $t=7$ и Ω — граф Тэйлора на 14 вершинах, противоречие.

Если $st=42$, то каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна точно с 3 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=0$, противоречие. Поэтому $t=7,s=4$ и $\alpha_1(g)=26l+6$. Далее, $K\cap\Omega=\{a,a_1,a_2,a_3\}$ и для $b\in\Omega(a)$ либо

а) $\Omega(b)$ содержит 2 вершины из $[a]$ и $1+1+1$ вершин из $[a_1]\cup[a_2]\cup[a_3]$, либо

б) $\Omega(b)$ содержит 0 вершин из $[a]$ и $1+1+3$ вершин из $[a_1]\cup[a_2]\cup[a_3]$.

Пусть M_i — множество вершин степени $2i$ в $\Omega(a)$, $m_i=|M_i|$, N_j — множество вершин b из $\Omega_2(a)$ с $|\Omega(a)\cap[b]|=1+2j$, $n_j=|N_j|$. Тогда $m_0+m_1=6$, $n_0+n_1=18$ и $5m_0+3m_1=n_0+3n_1$, поэтому $m_1+n_1=6$.

Если $\Omega(a)$ — объединение двух изолированных треугольников, то $m_1=6,n_1=0$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{6,3,1;1,1,6\}$, противоречие с тем, что Ω имеет собственные значения $3,-2$ и кратность 3 равна $3\cdot 3\cdot 7/5$.

Пусть $\Omega(a)$ — объединение треугольника $\{b_1,b_2,b_3\}$ и 3-коклики $\{c_1,c_2,c_3\}$. Тогда $m_1=n_1=3$. Если $\Omega_2(a)\cap([c_1]\cup[c_2]\cup[c_3])$ не содержит вершин из $[b_1]\cup[b_2]\cup[b_3]$, то любая вершина из N_1 смежна с c_1,c_2,c_3, противоречие с тем, что $[c_1]\cap[c_2]$ содержит a и три вершины из N_1.

Положим $\Omega(b_1)-a^\perp=\{e_1,e_2,e_3\}$ и допустим, что вершины c_1,e_1 смежны. Тогда можно считать, что c_1 смежна с e_2 и либо $c_2\in[e_1]\cap[e_2]$, либо $c_2\in[e_1],c_3\in[e_2]$. В первом случае число ребер между $\{c_1,c_2,c_3\}$ и $\Omega_2(a)-([b_1]\cup[b_2]\cup[b_3])$ равно 11, противоречие с тем, что некоторая вершина из $\Omega_2(a)-([b_1]\cup[b_2]\cup[b_3])$ смежна по крайней мере с 2 вершинами из $\{c_1,c_2,c_3\}$. В последнем случае число ребер между $\{c_1,c_2,c_3\}$ и $\Omega_2(a)-([b_1]\cup[b_2]\cup[b_3])$ равно 9 и каждая вершина из $\Omega_2(a)-([b_1]\cup[b_2]\cup[b_3])$ смежна с единственной вершиной из $\{c_1,c_2,c_3\}$. Теперь $N_1=\{e_1,e_2,e_3\}$, противоречие с тем, что $[c_1]\cap[c_2]$ содержит вершину из $\Omega-\{a,e_1\}$.

Если $\Omega(a)$ — объединение четырехугольника и 2-коклики, объединение пятиугольника и изолированной вершины или шестиугольник, то n_1

равно 2, 1 или 0 соответственно. Во всех трех случаях получим противоречие с тем, что каждое ребро из $\Omega(a)$ лежит в окрестности вершины из $\Omega_2(a)$.

Теперь для любой вершины из Ω ее окрестность в Ω является 6-кокликой, $m_1 = 6$ и $n_1 = 0$, противоречие с тем, что некоторая вершина из $\Omega(a)$ смежна с 3 вершинами из $\Omega(a_i)$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$. Лемма доказана.

До конца параграфа предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1,$
$3, 42\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ.

Лемма 3.8. *Пусть K — антиподальный класс графа Γ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $|G_K|$ *делит* 3 *и если g — элемент порядка* 3 *из* G_K*, то* $\alpha_1(g) =$ 588 *и окрестность каждой вершины из K является объединением* 14 *треугольников;*

(2) G *не содержит элементов порядка* 14*;*

(3) G *содержит нормальных подгрупп порядка* 43.

Доказательство. Заметим, что G действует транзитивно на множестве антиподальных классов графа Γ. Если g — элемент порядка 3 из G_K, то ввиду теоремы 2.4 $\alpha_1(g) = 39l + 81$ делится на 14, поэтому $l = 13$, $\alpha_1(g) = 588$ и окрестность каждой вершины из K является объединением 14 треугольников. Если g — элемент порядка 7 из G_K, то ввиду теоремы 2.4 $\alpha_1(g) = 91l + 49$ делится на 98, поэтому $l - 7$ делится на 14, противоречие. Поэтому $|G_K|$ делит 3. Утверждение (1) доказано.

Пусть G содержит подгруппу $\langle f \rangle$ порядка 14, $g = f^2$, $h = f^7$. Ввиду теоремы 2.4 и утверждения (1) леммы можно считать, что $\mathrm{Fix}(g)$ содержит 7 вершин из K. Из действия h на $\mathrm{Fix}(g)$ следует, что h фиксирует вершину из $\mathrm{Fix}(g)$. Из действия h на $K - \mathrm{Fix}(g)$ следует, что h фиксирует $K - \mathrm{Fix}(g)$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Так как транзитивная группа подстановок простой степени p либо дважды транзитивна, либо содержит нормальную подгруппу порядка p, то либо G действует дважды транзитивно на множестве антиподальных классов графа Γ, либо G содержит нормальную подгруппу порядка 43.

В аффинном случае из [50, таблица 7.3] следует, что $43 = q^1$ и $SL_1(q) \lhd H$. В почти простом случае из [50, таблица 7.4] следует, что $43 = (q^d - 1)/(q - 1)$. Простой перебор показывает, что указанное равенство невозможно. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 2.3. Ввиду утверждения (3) леммы 3.8 группа G содержит подгруппу индекса не большего 3, являющуюся расширением подгруппы порядка 43 с помощью циклической подгруппы порядка 14. Противоречие с утверждением (2) леммы 3.8. Следствие 2.3 доказано.

§ 2.4. Сильно регулярные графы с числом вершин, не большим 100

Хорошо известно, что имеются 30 наборов параметров неизвестных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100. Из результатов Бехбахани и Лама [31] следует, что только 11 из них могут быть реберно симметричными.

Предложение 2.2. *Пусть* Γ *— неизвестный реберно симметричный сильно регулярный граф с числом вершин, не большим* 100*, и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) Γ *имеет параметры* $(85, 30, 11, 10)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 17\}$*;*
(2) Γ *имеет параметры* $(85, 54, 33, 36)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 17\}$*;*
(3) Γ *имеет параметры* $(88, 27, 6, 9)$ *и* $\{2, 3, 11\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11\}$*;*
(4) Γ *имеет параметры* $(88, 60, 41, 40)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$*;*
(5) Γ *имеет параметры* $(96, 45, 24, 18)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$*;*
(6) Γ *имеет параметры* $(96, 50, 22, 30)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$*;*
(7) Γ *имеет параметры* $(96, 60, 38, 36)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$*;*
(8) Γ *имеет параметры* $(99, 42, 21, 15)$ *и* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$*;*
(9) Γ *имеет параметры* $(99, 56, 28, 36)$ *и* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$*;*
(10) Γ *имеет параметры* $(100, 33, 8, 12)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$*;*
(11) Γ *имеет параметры* $(100, 66, 44, 42)$ *и* $\pi(G) = \{2, 3, 5, 11\}$.

Лам поставил следующую проблему.

Проблема Лама *Существуют ли неизвестные реберно симметричные сильно регулярные графы с числом вершин, не большим* 100*?*

А.А. Махневым и М.С. Нировой предложена программа класификации реберно симметичных сильно регулярных графов с параметрами из заключения предложения 4.2 и сделаны первый и последний шаги на пути реализации этой программы.

Теорема 2.5 [69]. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(85, 30, 11, 10)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ *— пустой граф и либо* $p = 5$*,* $\alpha_1(g) \in \{25, 70\}$*, либо* $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 34$*;*

(2) Δ *является* β*-кликой, и либо*

(i) $p = 2$ *и* $\beta = 3$, $\alpha_1(g) \in \{4, 22, 40, 58, 76\}$ *или* $\beta = 5$, $\alpha_1(g) \in \{14, 32, 50, 68\}$ *или* $\beta = 7$, $\alpha_1(g) \in \{6, 24, 42, 58, 76\}$, *либо*

(ii) $p = 3$ *и* $\beta = 1$, $\alpha_1(g) \in \{12, 39, 66\}$ *или* $\beta = 4$, $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$ *или* $\beta = 7$, $\alpha_1(g) \in \{15, 42, 69\}$;

(3) $p = 5$, Δ *является* γ*-кокликой и* $\gamma = 5$, $\alpha_1(g) \in \{5, 50\}$ *или* $\gamma = 10$, $\alpha_1(g) \in \{30, 75\}$;

(4) $p = 3$, $|\Delta| = 3t + 1$, $2 \le t \le 7$ *и* $(12t - 30 + \alpha_1(g))/9$ *сравнимо с* 1 *по модулю* 3;

(5) $p = 2$, $|\Delta| = 2s + 1$, $2 \le s \le 13$ *и* $8s - 30 + \alpha_1(g)$ *делится на* 18.

Следствие 2.4. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(85, 30, 11, 10)$ *не является вершинно симметричным.*

В работах [32-35] доказано несуществование реберно симметричных сильно регулярных графов с параметрами $(88, 27, 6, 9)$, $(88, 60, 41, 40)$, $(96, 45, 24, 18)$, $(96, 50, 22, 30)$, $(96, 60, 38, 36)$, $(99, 42, 21, 15)$ и $(99, 56, 28, 36)$. Завершает вышеуказанную программу

Теорема 2.6 [71]. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(100, 33,$
$8, 12)$, g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ *— пустой граф,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20t$ *или* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 0, 50, 100$;

(2) Δ *является* 4*-кликой,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) - 12$ *делится на* 20, *или* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) - 12$ *делится на* 30;

(3) Δ *является* γ*-кокликой, либо*

(i) $\gamma = 1$, $p = 3$ *и и* $\alpha_1(g) = 3, 33, 63, 93$ *или* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 33$, *либо*

(ii) $p = 3$, $\gamma = 4, 7, ..., 16$ *и* $\alpha_1(g) - 3\gamma$ *делится на* 30;

(4) Δ *является объединением* $n \ge 2$ *изолированных* m_i*-клик,* $p = 2$, $m_i \in \{2, 4\}$ *и* $|\Delta| \le 20$;

(5) Δ *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(i) $p = 3$, $|\Delta| = 3t + 1$, $3 \le t \le 8$, *либо*

(ii) $p = 2$, $|\Delta| = 2s$, $3 \le s \le 25$.

Следствие 2.5. *Сильно регулярные графы с параметрами* $(100, 33, 8, 12)$ *и* $(100, 66, 44, 42)$ *не являются реберно симметричными.*

Из следствий 2.4–2.5 и результатов [32-35] получаем решение проблемы Лама.

Следствие 2.6. *Сильно регулярные графы с параметрами из заключения предложения* 2.2 *не являются реберно симметричными.*

Лемма 4.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(85, 30, 11, 10)$ *и неглавными собственными значениями* $5, -4$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

(1) $d - 5 \leq w(30-d)/(85-w) \leq d+4$, *причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из* $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(30-d)/(85-w)$ *вершинами из* Δ;

(2) *максимальный порядок клики в* Γ *не больше* 8;

(3) *максимальный порядок коклики в* Γ *не больше* 10, *и каждая вершина вне* 10*-коклики* C *смежна точно с* 4 *вершинами из* C.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 3.1 главы 1. Второе и третье утверждения леммы следуют из первого.

Лемма 4.2. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(85, 30, 11, 10)$, U *— трехвершинный подграф из* Γ, Y_i *— множество вершин из* $\Gamma - U$, *смежных точно с* i *вершинами из* U, $y_i = |Y_i|$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для двух вершин* u, w *подграф* $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ *содержит* 33 *вершины, если* u, w *не смежны,* 37 *вершин, если* u, w *смежны;*

(2) *число* $y_0 + y_3$ *равно* 22, *если* U *является кокликой, равно* 28, *если* U *является кликой;*

(3) *число* $y_0 + y_3$ *равно* 27, *если* U *является* 2*-путем, равно* 25, *если* U *— объединение изолированной вершины и ребра.*

Доказательство. Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(10-y_3)$ вершин из Y_2, $3(10+y_3)$ вершин из Y_1 и $22-y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0+y_3 = 22$. Аналогично доказывается, что $y_0+y_3 = 28$, если U является кликой; $y_0+y_3 = 27$, если U является геодезическим 2-путем; $y_0+y_3 = 25$, если U объединение изолированной вершины и ребра. Лемма доказана.

В леммах 4.3–4.6 будем предполагать, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(85, 30, 11, 10)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g \in G$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 4.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g)) - 34)/9$;

(2) $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l, *взаимно простого с* $|g|$;

(3) *если* $|g| = p$ *– простое число, то* $34 - \chi_1(g)$ *делится на* p.

Доказательство. Так как Γ имеет собственные значения 30, 5, -4 кратностей 1, 34, 50, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 5 & -4 \\ 54 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 34 & 17/3 & -34/9 \\ 50 & -20/3 & 25/9 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 34 равно

$$\chi_1(g) = (2\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 2\alpha_2(g))/9)/5.$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/9$.

Два последних утверждения леммы следует из леммы 2.2.

Лемма 4.4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Δ — пустой граф, то $p = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{25, 70\}$ или $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 34$;*

(2) *если Δ является β-кликой, то либо*

(*i*) *$p = 2$ и $\beta = 3$, $\alpha_1(g) \in \{4, 22, 40, 58, 76\}$ или $\beta = 5$, $\alpha_1(g) \in \{14, 32, 50, 68\}$ или $\beta = 7$, $\alpha_1(g) \in \{6, 24, 42, 58, 76\}$, либо*

(*ii*) *$p = 3$ и $\beta = 1$, $\alpha_1(g) \in \{12, 39, 66\}$ или $\beta = 4$, $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$ или $\beta = 7$, $\alpha_1(g) \in \{15, 42, 69\}$;*

(3) *если Δ является γ-кокликой, $\gamma > 1$, то либо*

(*i*) *$p = 2$ и $\gamma = 3$, $\alpha_1(g) \in \{4, 22, 40, 58, 76\}$ или $\gamma = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{14, 32, 50, 68\}$ или $\gamma = 7$ и $\alpha_1(g) \in \{6, 24, 42, 60, 78\}$ или $\gamma = 9$ и $\alpha_1(g) \in \{16, 34, 52, 70\}$, либо*

(*ii*) *$p = 5$ и $\gamma = 5$, $\alpha_1(g) \in \{5, 50\}$ или $\gamma = 10$ и $\alpha_1(g) \in \{30, 75\}$;*

(4) *если Δ является объединением n изолированных клик порядков $m_1 \geq ... \geq m_n$ и $m_1 \geq 2$, то $p = 2$, числа m_i нечетны и n нечетно.*

Доказательство. Напомним, что $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/9$. Если Δ — пустой граф, то p делит 85, поэтому $p = 5$ или 17. В случае $p = 17$ на множестве вершин графа Γ имеется пять $\langle g\rangle$-орбит и $\alpha_1(g)$ сравнимо с 7 по модулю 9. Отсюда $\alpha_1(g) = 34$. В случае $p = 5$ на множестве вершин графа Γ имеется семнадцать $\langle g\rangle$-орбит и $\alpha_1(g) = 25$ или 70. Утверждение (1) доказано.

Пусть Δ является β-кликой. Если $\beta = 1$, то $p = 3$ и $\alpha_1(g) - 30$ делится на 9. Если же $\beta \geq 2$, то p делит $11 - (\beta - 2)$ и 18, поэтому либо β нечетно, $p = 2$ и $\alpha_1(g) + 4\beta - 34$ делится на 9, либо β сравнимо с 1 по модулю 3, $p = 3$ и $4\beta + \alpha_1(g) - 34)/9$ сравнимо с 1 по модулю 3.

Пусть Δ является γ-кокликой, $\gamma \geq 2$. Тогда p делит 10 и $35 - \gamma$, поэтому либо γ нечетно, $p = 2$ и $\alpha_1(g) + 4\gamma - 34$ делится на 9, либо γ делится на 5, $p = 5$ и $4\gamma + \alpha_1(g) - 34$ делится на 9.

Пусть Δ является объединением n изолированных клик порядков $m_1 \geq ... \geq m_n$ и $m_1 \geq 2$. Тогда p делит 10 и 18, поэтому $p = 2$, числа m_i нечетны и n нечетно. Лемма доказана.

Ввиду леммы 4.4 можно считать, что Δ — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой. Если $p \geq 3$, то фиксируем геодезический

2-путь b, a, c из Δ. По [31, теорема 3.2] имеем $|\Delta| \leq 37$. Если $p \geq 3$, то ввиду леммы 4.2 имеем $|\Delta| \leq 28$.

Лемма 4.5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 11, 10)$*;*

(2) $p \leq 3$.

Доказательство. Пусть Σ — сильно регулярный подграф из Γ с параметрами $(v', k', 11, 10)$. Тогда $k'(k'-12)$ делится на 10 и $4(k'-10)+1 = n^2$ для некоторого натурального числа n. Отсюда $k' = 22, n = 7$ и кратность собственного значения 4 равна $2 \cdot 22 \cdot 25/(7 \cdot 10)$, противоречие.

Если $p \geq 11$, то либо Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 11, 10)$, либо $p = 11$ и для некоторых смежных вершин $a, b \in \Delta$ получим $|\Delta(a) \cap [b]| = 0$. Отсюда $|\Delta(a)| = |\Delta(b)| = 19$, противоречие с тем, что $|\Delta| \geq 38$.

Пусть $p = 7$. Тогда $|\Delta| \in \{8, 15, 22\}$ и степени вершин в Δ равны 9 или 16. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ имеем $|\Delta(a) \cap [e]| \in \{4, 11\}$, если a, e смежны, $|\Delta(a) \cap [e]| \in \{3, 10\}$, если a, e не смежны. В случае $|\Delta| = 15$ степень каждой вершины в Δ равны 9, противоречие. Значит, $|\Delta| = 22$.

Если степень вершины b в Δ равна 9, то для вершины $e \in \Delta - b^{\perp}$ степени 16 в $\in \Delta$ получим $|\Delta \cap b^{\perp} \cup e^{\perp}| \geq 10 + 14$, противоречие. Отсюда число вершин степени 16 в Δ равно 0 или 2. В последнем случае окрестность вершины степени 16 в Δ содержит 12 вершины из $\Delta - b^{\perp}$, противоречие. Итак, Δ — сильно регулярный граф с параметрами (22,9,4,3), собственными значениями 4, -2 и кратность собственного значения 4 равна $cdot22 \cdot 25/(3 \cdot 5)$, противоречие.

Пусть $p = 5$. Тогда $|\Delta| \in \{10, 15, 20, 25\}$ и степени вершин в Δ равны 0, 5, 10, 15 или 20. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ имеем $|\Delta(a) \cap [e]| \in \{1, 6, 11\}$, если a, e смежны, $|\Delta(a) \cap [e]| \in \{0, 5, 10\}$, если a, e не смежны.

Если степень вершины e в Δ равна 5, то $\Delta(e)$ — регулярный граф степени 1 на 5 вершинах, противоречие. Если степень вершины e в Δ равна $|\Delta| - 5$, то любая вершина из $\Delta(e)$ смежна с 3 вершинами из $\Delta - e^{\perp}$, и $\Delta - e^{\perp}$ является 4-кокликой. Если $|\Delta| = 15$, то Δ — сильно регулярный граф с параметрами (15,10,6,5), противоречие с тем, что $10 \cdot 3 \neq 4 \cdot 5$.

Если $|\Delta| = 20$, то Δ — регулярный граф степени 10. Иначе, для вершины e степени 15 в Δ число ребер между $\Delta(e)$ и $\Delta - e^{\perp}$ равно $15 \cdot 3$ и делится на 10, противоречие.

Пусть вершины e, a из Δ смежны и $|\Delta(a) \cap [e]| = 1$. Тогда для $b \in \Delta(a) \cap [e]$ подграф $\Delta(b)$ содержит 0 или 5 вершин из $[a] - e^{\perp}$ и из $[e] - a^{\perp}$, противоречие с тем, что степень e в Δ либо не больше 8, либо не меньше 12. Итак, Δ — сильно регулярный граф с параметрами (20,10,6,5), противоречие с тем, что $10 \cdot 3 \neq 9 \cdot 5$.

Если $|\Delta| = 25$, $u \in \Gamma - \Delta$, то ввиду леммы 10.2 подграф $u^{\langle g \rangle}$ является пятиугольником или 5-кликой. Далее, $\chi_1(g) = (66 + \alpha_1(g))/9$, поэтому $\alpha_1(g) = 60$ и любая $\langle g \rangle$-орбита длины 5 является кликой. Пусть U — трехвершинный подграф из $u^{\langle g \rangle}$. Тогда $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 2 вершины из $u^{\langle g \rangle}$, 25 вершин из Δ и вершину из $\Gamma - (\Delta \cup u^{\langle g \rangle})$. Значит, u смежна либо точно с 4 вершинами из одной $\langle g \rangle$-орбиты и не более чем с 2 вершинами любой другой $\langle g \rangle$-орбиты на $\Gamma - (\Delta \cup u^{\langle g \rangle})$, либо точно с 3 вершинами из двух $\langle g \rangle$-орбит и не более чем с 2 вершинами любой другой $\langle g \rangle$-орбиты на $\Gamma - (\Delta \cup u^{\langle g \rangle})$.

Для вершины e степени 20 в Δ число ребер между $\Delta(e)$ и $\Delta - e^\perp$ равно $20 \cdot 3$ но не больше $4 \cdot 10$, противоречие. Так как число вершин степени 15 в Δ четно, то число вершин степени 10 в Δ нечетно. Теперь число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$, деленное на 5, не меньше $24 \cdot 3 + 4 = 76$, поэтому можно считать, что u смежна с 7 вершинами из Δ. Противоречие с тем, что $[u] \cap [u^g]$ содержит 7 вершин из Δ, 3 вершины из $u^{\langle g \rangle}$ и не менее 2 вершин из $\Gamma - (\Delta \cup u^{\langle g \rangle})$.

Лемма 4.6. *Если $p = 3$, то $|\Delta| = 3t+1$, $2 \leq t \leq 7$ и $(12t - 30 + \alpha_1(g))/9$ сравнимо с 1 по модулю 3.*

Доказательство. Пусть $p = 3$. Тогда $|\Delta| \leq 28$ и степени вершин в Δ делятся на 3. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ имеем $|\Delta(a) \cap [e]| \in \{2, 5, 8, 11\}$, если a, e смежны, $|\Delta(a) \cap [e]| \in \{1, 4, 7, 10\}$, если a, e не смежны.

Если $|\Delta| = 7$, то $\Delta = a^\perp$ и $\Delta - \{a\}$ — объединение двух изолированных треугольников. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 6)/9$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) \in \{15, 42, 69\}$.

Если $|\Delta| = 28$, то ввиду леммы 4.2 любая $\langle g \rangle$-орбита длины 3 является кликой, поэтому $\alpha_1(g) = 57$ и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) + 78)/9 = 15$ не сравнимо с 1 по модулю 3, противоречие с леммой 4.3.

Пусть $|\Delta| = 25$, то ввиду леммы 4.2 любая $\langle g \rangle$-орбита длины 3 является кликой, поэтому $\alpha_1(g) = 60$ и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) + 66)/9 = 14$ не сравнимо с 1 по модулю 3, противоречие с леммой 4.3.

Пусть $|\Delta| = 22$, $u \in \Gamma - \Delta$ и $U = u^{\langle g \rangle}$. Тогда либо U является кокликой и $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 22 вершины из Δ, либо U является кликой и $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 22 вершины из Δ и 6 вершин из $\Gamma - \Delta$.

Лемма 4.7. *Если $p = 2$, то $|\Delta| = 2s + 1$, $2 \leq s \leq 13$ и $8s - 30 + \alpha_1(g)$ делится на 18.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда $|\Delta| \le 27$ и степени вершин в Δ делятся на 2. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ число $|\Delta(a) \cap [e]|$ нечетно, если a, e смежны, четно, если a, e не смежны.

Если $|\Delta| = 5$, то Δ содержится в $a^\perp$ и $\Delta(a)$ — объединение двух изолированных ребер или 3-лапа. В первом случае имеем противоречие с тем, что число μ_Δ четно.

Наконец, $\chi_1(g) = (8s - 30 + \alpha_1(g))/9$. Лемма доказана.

Из лемм 4.4–4.7 следует теорема 2.5.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (85,30,11, 10) и G — группа автоморфизмов графа Γ.

Лемма 4.8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если g — элемент порядка 17 из G, то $C_G(g) = \langle g \rangle$;*

(2) *G не содержит регулярных подгрупп;*

(3) *$|G|$ не делится на 125;*

(4) *если группа G транзитивна на множестве вершин графа Γ, то цоколь N группы G является простой неабелевой группой, изоморфной $L_2(16)$ или $Sp(4,4)$.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 17 из G. Если h элемент простого порядка p из $C_G(g) - \langle g \rangle$, то g действует на $\mathrm{Fix}(h)$ и ввиду теоремы 2.5 либо подграф $\mathrm{Fix}(h)$ является пустым и $p = 5$, либо $p = 2$.

В первом случае по лемме 4.4 имеем $\alpha_1(h) = 25$ или 70 и g действует на множестве $\langle h \rangle$-орбит, в которых элемент смежен с его образом под действием h, противоречие.

Во втором случае $|\mathrm{Fix}(h)| = 17$ и $\chi_1(g) = (34 + \alpha_1(h))/9$. Поэтому $\alpha_1(h) = 17r$ и $r+2$ делится на 9, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть G содержит регулярную подгруппу U. Тогда $|U| = 85$ и U является циклической группой. Противоречие с утверждением (1). Утверждение (2) доказано.

Пусть P силовская 5-подгруппа из G и P делится на 125. Для вершины a графа Γ имеем $|P : P_a|$ делит 5. Для $b \in [a]$ имеем $|P_a : P_{\{a,b\}}|$ делит 5, и ввиду леммы 4.4 имеем $P_{\{a,b\}} = 1$. Утверждение (3) доказано.

Пусть группа G транзитивна на множестве вершин графа Γ, N — минимальная нормальная подгруппа из G и $a \in \Gamma$. Ввиду утверждений (1,3) группа N проста и 17 делит $|N|$. Так как $\pi(N) \subseteq \{2, 3, 5, 17\}$, то ввиду [53, таблица 1] группа N изоморфна $L_2(16)$ или $Sp(4, 4)$.

Завершим доказательство следствия 2.4. В группе $\mathrm{Aut}(L(2, 16))$ с точностью до сопряженности есть только одна подгруппа H индекса 85. Подгруппе H соответствует подстановочное представление ранга 4 с подстепенями 1, 4, 16, 64. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что имеются лишь следующие связные графы, на которых группа действует соответствующим образом:

- полный многодольный с долями порядка 5;

- $GQ(4,4)$ (граф ранга 3);

- дистанционно регулярное 5-накрытие клики с массивом пересечений $\{16,12,1;1,3,16\}$.

Гуппа $PSp(4,4)$ имеет подстановочное представление ранга 3 степени 85 с подстепенями 1, 20, 64. Соответствующий граф ранга 3 - это $GQ(4,4)$. Следствие 2.4 доказано.

Приступим к доказательству теоремы 2.6.

Лемма 4.9. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(100,33,8,12)$ *и неглавными собственными значениями* $3,-7$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

(1) $d-3 \le w(33-d)/(100-w) \le d+7$, *причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из* $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $w(33-d)/(100-w)$ *вершинами из* Δ*;*

(2) *максимальный порядок клики в* Γ *не больше* 5*;*

(3) *максимальный порядок коклики в* Γ *не больше* 17

(4) *если* L *является* 5*-кликой из* Γ, x_i *— число вершин из* $\Gamma-L$, *смежных точно с* i *вершинами из* L, *то* $x_1=45$ *и* $x_2=50$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 3.1 главы 1. Второе и третье утверждение леммы следуют из первого.

Пусть L является 5-кликой из Γ, x_i — число вершин из $\Gamma-L$, смежных точно с i вершинами из L. Тогда $\sum x_i=95$, $\sum ix_i=145$ и $\sum\binom{i}{2}x_i=50$, поэтому $x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i=0$. Отсюда $x_1=45$ и $x_2=50$.

Лемма 4.10. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(100,33,8,12)$, U *— трехвершинный подграф из* Γ, Y_i *— множество вершин из* $\Gamma-U$, *смежных точно с* i *вершинами из* U, $y_i=|Y_i|$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для двух вершин* u,w *подграф* $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(w)$ *содержит* 42 *вершины, если* u,w *смежны,* 44 *вершины, если* u,w *не смежны;*

(2) *число* y_0+y_3 *равно* 25, *если* U *является кликой, равно* 34, *если* U *является кокликой;*

(3) *число* y_0+y_3 *равно* 29, *если* U *является* 2*-путем, равно* 32, *если* U *— объединение изолированной вершины и ребра.*

Доказательство. Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(12-y_3)$ вершин из Y_2, $3(y_3+9)$ вершин из Y_1 и $34-y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0+y_3=34$. Аналогично доказывается, что $y_0+y_3=25$, если U является кликой; $y_0+y_3=29$, если U является геодезическим 2-путем; $y_0+y_3=32$, если U объединение изолированной вершины и ребра. Лемма доказана.

Из леммы 4.10 следует, что для автоморфизма g простого порядка p графа Γ либо $p=2$ и $|\mathrm{Fix}(g)|\le 50$ или $\alpha_1(g)=0$ и $|\mathrm{Fix}(g)|\le 56$, либо $p>2$ и $|\mathrm{Fix}(g)|\le 29$ или $\alpha_1(g)=0$ и $|\mathrm{Fix}(g)|\le 34$.

До конца работы будем предполагать, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(100,33,8,12)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g\in G$ и $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 4.11. *Пусть $g\in G$. Тогда выполняются следующие утверждения:*
(1) $\chi_2(g)=(3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/10+3$*;*
(2) $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого l, взаимно простого с $|g|$;*
(3) *если $|g|=p$ – простое число, то $33-\chi_2(g)$ делится на p.*

Доказательство. Так как Γ имеет собственные значения 42, 9, -3 кратностей 1, 21, 77 то

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\33&3&-7\\66&-4&6\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\66&6&-4\\33&-7&3\end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 33 равно

$$\chi_2(g)=(33\alpha_0(g)-7\alpha_1(g)+3\alpha_2(g))/100.$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g)=100-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g)=(3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/10+3$.

Два последних утверждения леммы следуют из леммы 2.2.

В леммах 4.12–4.15 предполагается, что $|g|=p$ — простое число. Ввиду предложения 2.2 имеем $p\in\{2,3,5,11\}$.

Лемма 4.12. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *если Δ — пустой граф, то $p=2$ и $\alpha_1(g)=20t$ или $p=5$ и $\alpha_1(g)=0,50,100$;*
(2) *если Δ является β-кликой, $\beta\ge 2$, то либо $p=2$, $\beta=4$ и $\alpha_1(g)-12$ делится на 20, либо $p=3$, $\beta=4$ и $\alpha_1(g)-12$ делится на 30;*
(3) *если Δ является γ-кокликой, то либо*
(*i*) $\gamma=1$, $p=3$ *и и* $\alpha_1(g)=3,33,63,93$ *или* $p=11$ *и* $\alpha_1(g)=33$, *либо*
(*ii*) $p=3$, $\gamma=4,7,...,16$ *и* $\alpha_1(g)-3\gamma$ *делится на* 30*;*
(4) *если Δ является объединением $n\ge 2$ изолированных m_i-клик, $m_1\ge...\ge m_n$ и $m_1\ge 2$, то $p=2$, $m_i\in\{2,4\}$ и $|\Delta|\le 20$.*

Доказательство. Напомним, что $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/10 + 3$. Если Δ — пустой граф, то p делит 100, поэтому $p = 2$ или 5. В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) - 33$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 20t$. В случае $p = 5$ ввиду леммы 4.11 имеем $\alpha_1(g) \in \{0, 50, 100\}$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Δ является β-кликой, $\beta \geq 2$. Тогда p делит $8 - (\beta - 2)$, 24 и 42, поэтому либо $p = 2$, $\beta = 4$ и $\alpha_1(g) - 12$ делится на 20, либо $p = 3$, $\beta = 4$ и $\alpha_1(g) - 12$ делится на 30. Если $\beta \in \{3, 11\}$, то $\alpha_1(g) = 24r$, если $\beta \in \{5, 13\}$, то $\alpha_1(g) = 24s + 18$, если $\beta \in \{7, 15\}$, то $\alpha_1(g) = 24t + 12$, и если $\beta = 9$, то $\alpha_1(g) = 24u + 6$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Δ является γ-кокликой. Если $\gamma = 1$, то либо $p = 3$, $3 - \alpha_1(g)$ делится на 30 и $\alpha_1(g) = 3, 33, 63, 93$, либо $p = 11$, $3 - 11w$ делится на 10 и $\alpha_1(g) = 33$.

Если же $\gamma \geq 2$, то p делит 12, 21 и $46 - \gamma$, поэтому $p = 3$ и γ сравнимо с 1 по модулю 3. Поэтому $\gamma = 4, 7, ..., 16$ и $\alpha_1(g) - 3\gamma$ делится на 30.

Пусть Δ — объединение n изолированных клик $L_1, ..., L_n$ порядков $m_1 \geq ... \geq m_n$ и $m_1 \geq 2$. Тогда p делит 12, 20 и $10 - m_i$, поэтому $p = 2$ и $m_i \in \{2, 4\}$. Пусть $m_1 = 4$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - L_1$, смежных точно с i вершинами из L_1 и $y_i = |Y_i|$. Если $u \in Y_4$, то $\{u\} \cup L_1$ является 5-кликой, причем u^g смежна по крайней мере с 4 вершинами из $\{u\} \cup L_1$, противоречие. Далее, $\sum y_i = 96$, $\sum iy_i = 120$ и $\sum \binom{i}{2} y_i = 36$, поэтому $y_0 + y_3 = 12$, $y_1 + y_2 = 84$ и $y_2 + 3y_3 = 36$. Отсюда $|\Delta| \leq 16$.

Если же $m_1 = 2$, то Δ — регулярный граф степени 1 на w вершинах и по лемме 4.9 имеем $-2 \leq 32w/(100 - w) \leq 8$. Поэтому $w \leq 20$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 4.12 можно считать, что Δ содержит геодезический 2-путь b, a, c.

Лемма 4.13. *Верно неравенство $p \leq 3$.*

Доказательство. Если некоторая $\langle g \rangle$-орбита содержит 3-клику, то ввиду леммы 4.10 имеем $|\Delta| \leq 25$.

Пусть $p = 11$. Тогда $|\Delta| \in \{12, 23, 34\}$, степени вершин в Δ делятся на 11, $\lambda_\Delta = 8$ и для двух несмежных вершин $b, c \in \Delta$ имеем $|\Delta(a) \cap [b]| \in \{1, 12\}$. В случае $|\Delta| = 34$ ввиду леммы 4.10 имеем $\alpha_2(g) = 0$, противоречие с тем, что число $102 - \alpha_1(g)$ делится на 10. Итак, Δ — регулярный граф степени 11 на 23 вершинах, противоречие.

Пусть $p = 5$. Тогда $|\Delta| = 5t$, $t \leq 6$ и степень любой вершины в Δ сравнима с 3 по модулю 5. Если $a \in \Delta$, то $|\Delta(a) \cap [b]|$ сравним с 3 по модулю 5 для $b \in \Delta(a)$, $|\Delta(a) \cap [b]|$ сравним с 2 по модулю 5 для $b \in \Delta - a^\perp$. Поэтому Δ не содержит вершин степени 3 и степени $|\Delta| - 2$.

В случае $|\Delta| = 15$ степень любой вершины в Δ равна 8 и Δ — сильно регулярный граф с параметрами (15,8,3,1), противоречие.

В случае $|\Delta| = 20$ степень любой вершины в Δ равна 8 или 13. Если Δ содержит вершину e степени 8, то число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta - a^\perp$ равно 11, но не меньше $8 \cdot 4$, противоречие. Значит, Δ — регулярный граф степени 13 и $\mu_\Delta = 12$, поэтому число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta - a^\perp$ равно $72 = 9x + 4(13 - x)$. Отсюда $x = 4$, противоречие с тем, что $|\Delta - a^\perp| = 6$.

В случае $|\Delta| \geq 30$ ввиду леммы 10.10 каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 5 является кокликой. Поэтому $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_2(g) = 3|\Delta|/10 + 3$ и $|\Delta|$ делится на 50, противоречие.

Итак, $|\Delta| = 25$, и степень любой вершины в Δ равна 8, 13 или 18. Далее, $\chi_2(g) = (75 - \alpha_1(g))/10 + 3$, поэтому $\alpha_1(g) = 25$. Значит, на $\Gamma - \Delta$ имеются 5 кокликовых $\langle g \rangle$-орбит, 5 пятиугольных $\langle g \rangle$-орбит, в которых вершина смежна с ее образом под действием g, и 5 пятиугольных $\langle g \rangle$-орбиты, в которых вершина смежна с ее образом под действием g^2.

Если Δ содержит вершину e степени 8, то число ребер между $\Delta(e)$ и $\Delta - e^\perp$ равно 16, но не меньше $8 \cdot 4$, противоречие. Значит, Δ содержит четное число вершин степени 13 и нечетное число вершин степени 18.

Если e — вершина степени 18 в Δ, то каждая вершина из $\Delta(e)$ смежна с 4 вершинами из $\Delta - e^\perp$. С другой стороны, число ребер между $\Delta - e^\perp$ и $\Delta(e)$ равно $6 \cdot 12$, поэтому $\Delta - e^\perp$ состоит из вершин степени 13 в Δ. Отсюда Δ содержит единственную вершину степени 18 в Δ. Если $a \in \Delta - e^\perp$, то число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta - a^\perp$ равно $11 \cdot 12$, но не больше $13 \cdot 9$, противоречие.

Лемма 4.14. *Если $p = 3$, то $|\Delta| = 3t + 1$, $3 \leq t \leq 8$.*

Доказательство. Пусть $p = 3$. Тогда $|\Delta| \leq 34$ и степени вершин в Δ делятся на 3. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ число $|\Delta(a) \cap [e]|$ делится на 3, если a, e не смежны, сравнимо с 2 по модулю 3, если a, e смежны.

Если $|\Delta| > 25$, то ввиду леммы 4.10 имеем $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_2(g) = 3\alpha_0(g)/10 + 3$ и $|\Delta| = 30$, противоречие.

Если $|\Delta| = 7$, то Δ содержит вершину a степени 6. В случае, когда $\Delta(a)$ является регулярным графом степени 2, получим противоречие с тем, что $|\Delta(b) \cap [c]|$ не делится на 3 для любых двух несмежных вершин $b, c \in \Delta(a)$. Значит, Δ содержит точно 3 вершины a, d, e степени 6 и $\Delta - \{a, d, e\}$ является 4-кокликой, противоречие с тем, что $|\Delta(a) \cap [e]| = 5$.

Лемма 4.15. *Если $p = 2$, то $|\Delta| = 2s$, $3 \leq s \leq 25$ и $e^\perp$ не содержится в Δ для любой вершины $e \in \Delta$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда $|\Delta| = 2s \leq 56$ и степени вершин в Δ нечетны. Далее, для любых двух вершин $a, e \in \Delta$ число $|\Delta(a) \cap [e]|$

четно.

Пусть $|\Delta| = 6$. Тогда Δ содержит вершины степени 3 и 5. Если Δ — регулярный граф степени 3, то Δ является 3-призмой или полным двудольным графом $K_{3,3}$. В любом случае имеем противоречие. Если Δ содержит 3 вершины a, d, e степени 5, то $\Delta - \{a, d, e\}$ является 3-кокликой, противоречие. Значит, — Δ содержит точно 2 вершины a, d степени 5 и $\Delta - \{a, d\}$ является объединением трех изолированных ребер.

Если $|\Delta| > 50$, то ввиду леммы 4.10 $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_2(g) = 3\alpha_0(g)/10 + 3$ и $\alpha_0(g)$ делится на 20, противоречие.

Допустим, что $e^{\perp}$ содержится в Δ для некоторой вершины $e \in \Delta$. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma - \Delta$ подграф $[u] \cap \Delta$ содержит 12 вершин из $[e]$, поэтому $\Delta = e^{\perp}$ и $\alpha_1(g) = 0$. Отсюда $\chi_2(g) = 102/10 + 3$, противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 4.12–4.15 следует теорема 2.6.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (100,33,8, 12) и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Зафиксируем вершину a графа Γ и положим $H = G_a$. Тогда $|G : H| = 100$ и ввиду теоремы 2.6 $|G|$ делит $2^{\beta} \cdot 3^{\gamma} \cdot 5^2 \cdot 11$.

Лемма 4.16. *Пусть g — элемент порядка 11 из G. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если h элемент простого порядка $p \leq 5$ из $C_G(g)$, то $p = 2$, $|\mathrm{Fix}(h)| = 34$ и $\alpha_1(h) = 22$;*

(2) *G не содержит подгрупп порядка 44;*

(3) *$N_G(\langle g\rangle)$ — расширение $\langle g\rangle$ с помощью подгруппы $\langle s\rangle$ порядка 2, s инвертирует g.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 11 из G, $\mathrm{Fix}(g) = \{a\}$. Если h элемент простого порядка $p \leq 5$ из $C_G(g)$, то g действует без неподвижных точек на $\mathrm{Fix}(h) - \{a\}$ и ввиду теоремы 2.6 либо $p = 3$ и $|\mathrm{Fix}(h)| = 34$, либо $p = 2$ и $|\mathrm{Fix}(h)| \in \{12, 34\}$. В первом случае имеем противоречие с тем, что $\alpha_1(h)$ не делится на 11. Во втором случае если $|\mathrm{Fix}(h)| = 12$, то $\chi_2(h) = (36 - \alpha_1(h))/10 + 3$ и $\alpha_1(h) = 66$. Противоречие с тем, что число $\chi_2(g) - 33$ нечетно. Если $|\mathrm{Fix}(h)| = 34$, то $\chi_2(h) = (102 - \alpha_1(h))/10 + 3$ и $\alpha_1(h) = 22$. Утверждение (1) доказано.

Пусть G содержит подгруппу U порядка 44, g — элемент порядка 11 из U и $\mathrm{Fix}(g) = \{a\}$. Если h — инволюция из U, W — силовская 2-подгруппа из U, то по утверждению (1) имеем $\alpha_1(h) = 22$. Противоречие с действием W на множестве вершин из Γ, смежных с их образами под действием h. Утверждение (2) доказано.

Заметим, что $|N_G(\langle g\rangle)|$ не делится на 5, иначе элемент порядка 5 из $N_G(\langle g\rangle)$ фиксирует единственную вершину из $\mathrm{Fix}(g)$, противоречие с теоремой 2.6. Если $N_G(\langle g\rangle) = C_G(\langle g\rangle)$, то по теореме Бернсайда G — расширение нормальной $11'$-подгруппы N с помощью $\langle s\rangle$. Противоречие с действием $\langle g\rangle$ на силовской 5-подгруппе из N. Теперь $N_G(\langle g\rangle) \neq C_G(\langle g\rangle)$ и ввиду утверждения (2) $N_G(\langle g\rangle)$ — расширение $\langle g\rangle$ с помощью подгруппы $\langle s\rangle$ порядка 2, s инвертирует g. Лемма доказана.

Лемма 4.17. *Порядок группы G не делится на* 11.

Доказательство. Пусть $|G|$ делится на 11.Так как $|\Gamma| = 100$, то $O_3(G) = 1$. Ввиду леммы 4.16 имеем $O_5(G) = 1$.

Пусть $Q = O_2(G) \neq 1$. Тогда подгруппа Q_a нормальна в H и длины Q_a-орбит на $[a]$ равны 1. Поэтому $[a] \subset \mathrm{Fix}(Q_a)$ и ввиду теоремы 2.6 имеем $Q_a = 1$. В этом случае $|Q| = 2, 4$. Тогда элемент порядка 11 из G централизует Q, противоречие с леммой 4.16.

Пусть T — цоколь группы G. Если T не является простой группой, то T — прямое произведение двух простых неабелевых групп, причем порядок одной из них делится на 11, противоречие. Значит, T — простая неабелева группа. Из таблицы 1 [53] следует, что либо $|T|$ не делится на 25, либо $|T|$ делится на 7, противоречие. Лемма доказана.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (100,66,44,
42) и группа автоморфизмов G графа Γ действует транзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа Γ. Зафиксируем ребро $\{a, b\}$ графа Γ и положим $H = G_a$, $M = H_b$. Тогда $|G : H| = 100$, $|H : M| = 66$ и и ввиду теоремы 2.6 имеем $|G| = 2^\beta \cdot 3^\gamma \cdot 5^2 \cdot 11$.

Теперь G действует транзитивно на множестве вершин дополнительного графа $\bar{\Gamma}$ с параметрами (100,33,8,12) и 11 делит $|G|$. Противоречие с леммой 4.17. Следствие 2.5 доказано.

Глава 3

Автоморфизмы AT4(6,5,4)-графа и второй окрестности его вершины, дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых графы Γ_3 сильно регулярны

В главе 3 найдены автоморфимы AT4(4,6,5)-графа и второй окрестности его вершины. Там же доказано, что для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с собственным значением $\theta_2 = -1$ граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогемерическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. С помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивами пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$. Изучены дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3 с графом Γ_3, являющимся псевдогеометрическим для обобщенного четырехугольника.

§ 3.1. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. Тогда выполняется фундаментальная граница [36]:

$$(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d},\ b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальная границе, называется плотным. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-. Фундаментальная граница может быть записана в виде $k(a_1 + b^+b^-) \leq (a_1-b^+)(a_1-b^-)$. Хорошо известно, что плотный граф диаметра 3 является графом Тэйлора. В этом случае окрестность любой вершины является сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4, $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа $\bar{\Gamma}$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{k, k-a_1-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k-a_1-1, k\}$. Далее, Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q^4_{11} = 0$.

Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, и индексом антиподальности r, то все параметры Γ выражаются через p, q, r. В этом случае назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p, q, r)$-графом).

Приведем список известных $AT4$-графов.

1. Граф Конвея-Смита ($AT4(1, 2, 3)$-граф), $k = 10$, $c_2 = 2$.

2. Граф Джонсона $J(8, 4)$ ($AT4(2, 2, 2)$-граф), $k = 16$, $c_2 = 4$.

3. Половинный 8-куб ($AT4(4, 2, 2)$-граф), $k = 28$, $c_2 = 6$.

4. Граф $3.O_6^-(3)$ ($AT4(3, 3, 3)$-граф), $k = 45$, $c_2 = 6$.

5. Граф Сойчера первый ($AT4(2, 4, 3)$-граф), $k = 56$, $c_2 = 8$.

6. Граф $3.O_7(3)$ ($AT4(9, 3, 3)$-граф), $k = 117$, $c_2 = 12$.

7. Граф Мейкснера первый ($AT4(8, 4, 2)$-граф), $k = 176$, $c_2 = 24$.

8. Граф Мейкснера второй ($AT4(8, 4, 4)$-граф), $k = 176$, $c_2 = 12$.

9. Граф Сойчера второй ($AT4(20, 4, 3)$-граф), $k = 416$, $c_2 = 32$.

10. Граф Фишера $3.Fi_{24}^-$ ($AT4(351, 9, 3)$-граф), $k = 31671$, $c_2 = 1080$.

Приведем список неизвестных $AT4$-графов с небольшими параметрами.

1. $AT4(4,4,2)$-граф, $k=96$, $c_2=16$.

2. $AT4(3,5,2)$-граф, $k=115$, $c_2=20$.

3. $AT4(3,5,4)$-граф, $k=115$, $c_2=10$.

4. $AT4(9,3,2)$-граф, $k=117$, $c_2=18$.

5. $AT4(8,4,3)$-граф, $k=176$, $c_2=16$.

6. $AT4(4,6,2)$-граф, $k=204$, $c_2=30$.

7. $AT4(4,6,5)$-граф, $k=204$, $c_2=12$.

8. $AT4(21,3,2)$-граф, $k=261$, $c_2=36$.

9. $AT4(6,6,2)$-граф, $k=288$, $c_2=36$.

10. $AT4(6,6,3)$-граф, $k=288$, $c_2=24$.

11. $AT4(5,7,6)$-граф, $k=329$, $c_2=14$.

Юришич [57] выдвинул следующее предположение.

Гипотеза 3.1. *Для $AT4(p,q,r)$-графа параметры (p,q,r) принимают только следующие значения:*
(1) (qs,q,r), $r\in\{2,q-1\}$;
(2) $(q-2,q,r)$, $r\in\{2,q-1\}$;
(3) $(1,2,3)$ *(граф Конвея-Смита)*, $(20,4,3)$ *(второй граф Сойчера)*, $(351,9,3)$ *(граф Фишера).*

По [52, теорема 1] $AT4(q-2,q,2)$-графы не существуют (существенный вклад в выяснение справедливости гипотезы 3.1).

В случае $p=q-2$ возникает интересная возможность [57, теорема 5.5].

Предложение 3.1. *Пусть Γ является $AT4(p,q,r)$-графом, u — вершина графа Γ и $\Delta=[u]$. Если $q=p+2$, то выполняются следующие утверждения:*
(1) *число $2p(p+1)(p+2)/r$ четно, $r<p+2$, r — делит $2(p+1)$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{(p+1)(p+2)^2,(p+3)(p+1)^2,(r-1)2(p+1)(p+2)/r,1;1,2(p+1)(p+2)/r,(p+3)(p+1)^2,(p+1)(p+2)^2\}$;*
(2) *антиподальное частное $\bar\Gamma$ является графом с параметрами $((p+1)^2(p+4)^2/2,(p+2)(p^2+4p+2),p(p+3),2(p+1)(p+2))$ и неглавными собственными значениями $p,-(p^2+4p+4)$;*
(3) *вторая окрестность вершины в графе $\bar\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами $((p+1)(p+3)(p^2+4p+2),p(p+2)^2,p^2+p-2,2p(p+1))$ и неглавными собственными значениями $p,-(p^2+2p+2)$, имеющий*

дистанционно регулярное r-накрытие с массивом пересечений $\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}$.

По предложению 3.1 вторая окрестность вершины в AT4(4,6,5)-графе является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Теорема 3.1 [75]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *содержит по* s *вершин в* t *антиподальных классах. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) g *индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного* $\bar{\Gamma}$, $p = 5$ *и* $\alpha_4(g) = v$;

(2) Ω *— пустой граф,* $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000m$, $\alpha_1(g) = 200n + 800 - 200m$, $\alpha_3(g) = -200n + 3200 - 800m$ *или* $p = 2$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 400m$, $\alpha_1(g) = 80n + 800 - 80m$, $\alpha_3(g) = 3200 - 80n - 320m$;

(3) Ω *— антиподальный класс,* $p = 17$, $\alpha_1(g) = 340 + 680e$, $\alpha_2(g) = 2975$, $\alpha_3(g) = 680(1 - e)$;

(4) Ω *— объединение двух антиподальных классов, содержащее ребро,* $p = 7$, $\alpha_2(g) = 350l$, $\alpha_1(g) = 280m + 910 - 70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$, $l = 1, 5, 9$;

(5) $|\Omega| = 25$, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000l - 125$, $\alpha_1(g) = 200n + 700$, $\alpha_3(g) = 3400 - 1000l - 200n$;

(6) Ω *— коклика, либо* $p = 3$, $|\Omega| = 5(3m + 2) - \alpha_4(g)$, $m \leq 39$, $\alpha_4(g) = 60m + 120n - 120e - 720 + 6l$, $\alpha_1(g) = 6l$, $\alpha_2(g) = 600n - 75m + 150$ *и* $\alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n - 6l$, *либо* $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $\alpha_4(g) = (20l - 400 + 40(n - e) - 2m)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ *и* $\alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n - 4m$;

(7) $|\Omega| = 25m - \alpha_4(g)$, $p = 5$, $m \leq 5$, $\alpha_4(g) = 25t$, $\alpha_1(g) = -100m + 800 + 200(e - n) + 25t$, $\alpha_2(g) = 1000n - 125m$ *и* $\alpha_3(g) = 3200 - 800n - 200e + 200m - 25t$;

(8) $|\Omega| = 40(3m + 1) - \alpha_4(g)$, $p = 3$, $m \leq 5$, $\alpha_4(g) = 24t$, $\alpha_1(g) = -480m + 600 + 120(e - n) + 144t$, $\alpha_2(g) = 600(n - m)$ *и* $\alpha_3(g) = 3360 - 480n + 960m - 120e - 144t$;

(9) $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $p = 2$, $l \leq 120$, $\alpha_4(g) = (20l + 2m - 400 + 40n - 200e)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ *и* $\alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l - 4m$.

Следствие 3.1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ *не является реберно симметричным.*

Для доказательства теоремы 3.1 полезны следующие результаты.

Теорема 3.2 [75]. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 34$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30l - 6$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20m + 4$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $n = 1$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 70r + 28$, либо $n = 4$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 50s$, $s \leq 2$;*

(3) *Ω является l-кокликой, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t - 6l + 4$ и $l = 8, 10, ..., 34$;*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь и либо*

(*i*) *$p = 3$, Ω – октаэдр и $\alpha_1(g) = 30t + 18$, либо*

(*ii*) *$p = 2$, степени вершин в Ω равны $2, 4, ..., 26$ и $|\Omega| = 4, 6, ..., 34$.*

Следствие 3.2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Тогда $S(G) = O_2(G)$, цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(16)$ и либо группа G изоморфна $\mathrm{Aut}(L_2(16))$, либо $|\bar{G} : \bar{T}| = 2$, $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 2$ и $\bar{T}$ действует неприводимо на $O_2(G)$, либо $\bar{G} = \bar{T}|$ и $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 4$.*

Теорема 3.3 [75]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(800, 204, 28, 60)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200l$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 80m$*;

(2) *Ω является n-кликой, либо $n = 1$, $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 204$, либо $n = 5$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200s + 20$, либо $n = 2$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 280t + 168$*;

(3) *Ω является l-кокликой, либо $p = 3$, $l = 3m + 2$, $m \leq 39$, $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80t + 4l$ и $l = 8, 10, \ldots, 120$*;

(4) *Ω является объединением m изолированных 5-клик, $2 \leq m \leq 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$*;

(5) *Ω содержит геодезический 2-путь и либо*

(*i*) *$p = 3$, Ω является объединением $3m + 1$ полных многодольных графов $K_{4\times 2}$ и $\alpha_1(g) = 96m + 120t + 72$, либо*

(*ii*) *$p = 2$, $|\Omega| = 2l \leq 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, \ldots, 26$, степени вершин в Ω равны $0, 2, \ldots, 34$ и $\alpha_1(g) = 80t + 8l$.*

Следствие 3.3. *Если сильно регулярный граф Γ с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ является вершинно симметричным, то $|\mathrm{Aut}(\Gamma)|$ не делится на 17. В частности, граф Γ не является реберно симметричным.*

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ является $AT4(4, 6, 5)$-графом. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ и неглавные собственные значения $4, -36$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

В этом параграфе исследуются автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(800, 204, 28, 60)$, а также автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

Докажем теорему 3.2. В леммах 1.1–1.4 будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и спектром $28^1, 4^{119}, -6^{84}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 1.1. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 119, Тогда $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/10$ и $\chi_1(g) - 119$ делится на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 119 & 17 & -17/5 \\ 84 & -18 & 12/5 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 119 равно $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_2(g)/5)/12$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/10$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 2.2 главы 2.

Лемма 1.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 34$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30l - 6$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20m + 4$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 70r+28$, либо $n = 4$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 50s$, $s \leq 2$;*

(3) *если Ω является l-кокликой, то $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t - 6l + 4$ и $l = 8, 10, ...34$;*

(4) *если $[a] \subset \Omega$, то $p = 3, 5, 7$ и $\alpha_1(g) = 0$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $204 = 12 \cdot 17$, то $p = 2, 3, 17$.

Пусть $p = 17$. Тогда $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 34)/10$ и $\alpha_1(g) = 34$. Пусть $p = 3$. Тогда $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 34)/10$ и $\alpha_1(g) = 30l - 6$. Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 34)/10$ нечетно и $\alpha_1(g) = 20m + 4$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 28 и 175, поэтому $p = 7$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 28)/10$ и $\alpha_1(g) = 70r + 28$. Если Ω содержит смежные вершины u, w, то p делит $|[u] - w^\perp| = 25$, $p = 5$ и $n = 4$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 10)/10$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 50s$, $s \leq 2$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l \geq 2$. Тогда p делит 4 и $152 - l$, поэтому $p = 2$, число $\chi_1(g) = (6l + \alpha_1(g) - 34)/10$ нечетно и $\alpha_1(g) = 20t - 6l + 4$. Так как вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, то $l = 8, 10, ...34$.

Пусть Ω содержит смежные вершины и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 4 и 25, противоречие.

Пусть $[a] \subset \Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 4 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_0(g) = 29$ и $\alpha_1(g) = 0$. Теперь $\chi_1(g) = 14$ и $\chi_1(g) - 119$ делится на p, поэтому $p = 3, 5, 7$.

Лемма 1.3. *Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 3$, Ω – октаэдр и $\alpha_1(g) = 30t + 18$;*

(2) *$p = 2$, степени вершин в Ω равны $2, 4, ..., 26$ и $|\Omega| = 4, 6, ..., 34$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Если $p > 3$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 4)$. В этом случае $k' = u^2 + 3$, Ω имеет собственные значения $u - 1$, $-(u + 1)$ и кратность $u - 1$ равна $u(u^2 + 3)(u^2 + u + 4)/(8u)$. Поэтому либо $u = 1$ и Ω — октаэдр, либо $u = 3$ и Ω имеет параметры (40,12,2,4). Но в последнем случае число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно 640, противоречие. В первом случае число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно 144, p делит 24 и 54, поэтому $p = 2, 3$, противоречие с тем, что $p > 3$.

Если $p = 3$, то $\lambda_\Omega = 2$, $\mu_\Omega = 1, 4$, степени вершин в Ω равны $4, ..., 28$ и $|\Omega| = 6, ..., 33$. Пусть a — вершина степени 4 в Ω. Тогда $\Omega(a)$ — четырехугольник и Ω — октаэдр. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) + 2)/10$ и $\alpha_1(g) = 30t + 18$. Если $\mu_\Omega = 4$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 4)$. Как показано выше, Ω — октаэдр.

Пусть Ω не содержит вершин степени 4. Если Ω содержит вершину a степени k', то $|\Omega| \geq 1 + k' + 4k'/4$ и $k' \leq 16$, причем в случае $k' = 16$ любая вершина из $\Omega(a)$ имеет степень 7 в Ω, а вершина из $\Omega - a^\perp$ смежна с 4 вершинами из $\Omega(a)$. Далее, $\chi_1(g) = (164 + \alpha_1(g))/10$ и $\alpha_1(g) = 30l + 6$. Заметим, что $\Omega - a^\perp$ содержит не более двух вершин степени 10, поэтому число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 3, не меньше $4 + 2 \cdot 6 + 30 \cdot 7$, противоречие с тем, что указанное число ребер не больше $2 \cdot 1 + 55 \cdot 4$.

Итак, степени вершин в Ω равны $7, 10, 13$. Пусть Ω содержит вершину a степени 7. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше 28. Заметим, что вершина из $\Omega_2(a)$ смежна либо с единственной вершиной из $\Omega(a)$ и с 3-кокликовой $\langle g\rangle$-орбитой на $[a] - \Omega$, либо с 4 вершинами из $\Omega(a)$.

Пусть $|\Omega(a)| = 7$. Допустим, что $\Omega(a)$ содержит изолированный 4-цикл $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. и треугольник $\{e_1, e_2, e_3\}$. В этом случае вершина c из $\Omega_2(a)$, смежная с 4 вершинами из $\Omega(a)$, смежна по крайней мере с тремя вершинами четырехугольника, и поэтому единственна. Отсюда $[c] \cap \Omega(a)$ – четырехугольник и $\{a, c\} \cup ([c] \cap \Omega(a))$ – октаэдр. Заметим, что каждая вершина из $\Omega(c) - [a]$ смежна с единственной вершиной треугольника $\{e_1, e_2, e_3\} = \Omega(a) - [c]$. Если $|\Omega(c)| = 7$, $\{d_1, d_2, d_3\} = \Omega(c) - [a]$, то $\{e_1, e_2, e_3, d_1, d_2, d_3\}$ является 3-призмой и можно считать, что d_i смежна с e_i. В этом случае $\Omega(e_1)$ содержит e_2, d_1 и две новых вершины из $[d_2]$, e_3, d_1 и две новых вершины из $[d_3]$, а также две новых вершины из $[d_1]$. Теперь $|\Omega(e_1)| \geq 10$ и $|\Omega_2(a)| \geq 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, противоречие с тем, что некоторая вершина из $[a] - \Omega$ смежна с 4 вершинами из $\Omega_2(a)$.

Итак, $\Omega(a)$ является 7-циклом $\{f_1, f_2, ..., f_7\}$, $\Omega(a)$ содержит 7 пар смежных вершин, смежных с единственной вершиной из $\Omega - a^{\perp}$, 7 пар вершин, смежных с двумя вершинами из $\Omega - a^{\perp}$ и 7 пар вершин, смежных с нулем или тремя вершинами из $\Omega - a^{\perp}$. Покажем, что вершина c из $\Omega_2(a)$ не смежна с 2 изолированными ребрами в $\Omega(a)$. Пусть $[a] \cap [c]$ содержит ребра $\{f_1, f_2\}$, $\{f_5, f_6\}$. Тогда $[f_i] \cap [f_j]$ содержит 2 вершины из $\Omega - \{a, c\}$ для $(i, j) = (1, 5), (2, 5), (2, 6)$. Поэтому $\Omega_2(a)$ содержит 7 вершин, смежных с четверками вершин из $\Omega(a)$, противоречие с тем, что c смежна с двумя ребрами из $\Omega(a)$.

Покажем, что вершина c из $\Omega_2(a)$ не смежна с 3-путем. Пусть $[a] \cap [c]$ содержит путь f_1, f_2, f_3, f_4. Тогда $\Omega_2(a)$ содержит 4 вершины, смежные с парами f_1, f_3, f_2, f_4 и с парой f_1, f_4 (эти вершины попарно различны, иначе некоторое ребро этого 3-пути смежна с 3 вершинами). Каждой из этих вершин отвечает единственное ребро 7-цикла, не лежащее в 3-пути. При этом полученные ребра должны быть изолированы в μ-подграфе с вершиной a. Для $d \in \Omega(f_1) \cap [f_4] - \{a, c\}$ подграф $\Omega(d) \cap [a]$ содержит ребро, инцидентное f_1 или f_4, скажем $\{f_1, f_7\}$. Противоречие с тем, что четвертая вершина из $\Omega(d) \cap [a]$ не может быть изолирована от f_1, f_4, f_7.

Покажем, что вершина c из $\Omega_2(a)$ не смежна с 2-путем. Пусть $[a] \cap [c]$ содержит путь f_1, f_2, f_3 и вершину f_5. Тогда $\Omega_2(a) \cap [f_5]$ содержит по 2 вершины, смежные с f_1, f_2 и одну вершину, смежную с f_3, причем совпасть могут только вершины, смежные с f_1 и f_3 (всего получилось не менее 4 вершин). В $\Omega_2(a)$ может попасть вершина, смежная с f_1, f_7, f_3, f_5.

Вершина из $\Omega_2(a) \cap [f_5]$, смежная с ребром $\{f_3, f_4\}$, смежна с 2-путем f_3, f_4, f_5. Аналогично, для вершины, смежной с $\{f_6, f_7\}$. Итак, либо некоторая вершина из $\Omega_2(a) \cap [f_5]$ смежна с f_3, f_4 (и нет вершин, смежных с ребром $\{f_6, f_7\}$), либо нет вершин, смежных с ребром $\{f_3, f_4\}$ и вершина из $\Omega_2(a) \cap [f_5]$, смежная с f_6, f_7, смежна с 2-путем из $\Omega(a)$. В любом случае имеется не более 3 вершин в графе $\Omega_2(a) \cap [f_5]$, противоречие.

Итак, каждая вершина из $\Omega_2(a)$, смежная с 4 вершинами из $\Omega(a)$, ссмежна с ребром и двумя изолированными вершинами. Противоречие с тем, что имеются 3 вершины в $\Omega_2(a)$, смежные с f_1, f_3 – это вершины, смежные с ребрами $\{f_1, f_7\}$, $\{f_3, f_4\}$ и $\{f_5, f_6\}$, противоречие.

Если Ω содержит вершину a степени 13, то $|\Omega| \geq 1 + 13 + 13 \cdot 7/4$, противоречие. Значит, Ω – регулярный граф степени 10. Противоречие с тем, что по лемме 3.1 имеем $|\Omega| \geq 51$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 2$, $\mu_\Omega = 2, 4$, степени вершин в Ω равны $2, 4, ..., 26$ и $|\Omega| = 4, 6, ..., 34$. Лемма и теорема 3.2 доказаны.

В лемме 1.4 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами (204,28,2,4), группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По теореме 3.2 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$, $|G : G_a| = 4 \cdot 3 \cdot 17$ и $|G|$ не делится на 49.

Лемма 1.4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка $p < 17$ из $C_G(f)$, то $p = 2$ и либо Ω — пустой граф и $\alpha_1(g) = 204$, либо $|\Omega| = 34$ и $\alpha_1(g) = 0$, в любом случае $|C_G(f)|$ не делится на 4;*

(2) *$S(G) = O_2(G)$;*

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(16)$.*

Доказательство. По теореме 3.2 граф $\mathrm{Fix}(f)$ является пустым и $\alpha_1(f) = 34$. Далее, либо Ω — пустой граф, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30l - 6$ или $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20m + 4$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 34$ и $\alpha_1(g) = 20t - 200$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ и $5m + 1$ делится на 17, поэтому $\alpha_1(g) = 204$. Если же $|\Omega| = 34$, то $t - 10$ делится на 17 и $\alpha_1(g) = 0$.

Допустим, что $C_G(f)$ содержит подгруппу V порядка 4. Если h — элемент порядка 4 из V, то из действия h на $W = \{u \mid d(u, u^f) = 1\}$ следует, что $g = h^2$ фиксирует вершину из W. Далее, $\chi_1(g) = 17 + \alpha_1(g)/10$ и число $\chi_1(g) - 119$ делится на 4, поэтому $\alpha_1(g) = 40l$ и $\alpha_2(g)$ не делится на 4, противоречие.

Пусть $Q = O_p(G) \neq 1$. Если $p = 3$, то $|Q : Q_a| = 3$ и Q_a фиксирует вершину b из $[a]$. Ввиду теоремы 1 найдется октаэдр Δ такой, что $\Delta = \mathrm{Fix}(y)$ для любого элемента y порядка 3 из Q_a. Так как 198 не делится на 27, то $|Q_a|$ делит 9, противоречие с действием элемента порядка 17 на Q. Значит, $S(G) = O_2(G)$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. По [5, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 204, то $\bar{T} \cong L_2(16)$, $\bar{T}_a \cong E_{16} : Z_5$ — подгруппа индекса 51 из $\bar{T}$. Лемма и следствие 3.2 доказаны.

Докажем теорему 3.3. В леммах 1.5–1.8 будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ и спектром $204^1, 4^{714}, -36^{85}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 1.5. *Пусть χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 85. Тогда $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\chi_2(g) - 85$ делится на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 714 & 14 & -6 \\ 85 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 85 равно $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/160$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/40 + 5$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 2.2 главы 2.

Лемма 1.6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200l$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 40m$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 204$, либо $n = 5$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200s + 20$, либо $n = 2$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 280t + 168$;*

(3) *если Ω является l-кокликой, то либо $p = 3$, $l = 3m + 2$, $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80t + 4l$ и $l = 8, 10, ..., 92$;*

(4) *если Ω содержит смежные вершины и не содержит геодезических 2-путей, то Ω является объединением m изолированных 5-клик, $m \leq 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$;*

(5) $[a]$*не содержится в Ω для любой вершины $a \in \Gamma$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $800 = 32 \cdot 25$, то $p = 2, 5$.

Пусть $p = 5$. Тогда $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/40$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 200l$. Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/40 + 5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 80m$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n=1$, то p делит 204 и 595, поэтому $p=17$, $\chi_2(g)=(4-\alpha_1(g))/40+5$ и $\alpha_1(g)=204$. Если Ω содержит смежные вершины u,w, то p делит $|[u]-w^{\perp}|=175$, 420 и $30-n$, поэтому $p=5$ и $n=5$ или $p=7$ и $n=2$. В случае $p=5$ число $\chi_2(g)=(20-\alpha_1(g))/40+5$ делится на 5 и $\alpha_1(g)=200s+20$. В случае $p=7$ имеем $\chi_2(g)=(8-\alpha_1(g))/40+5$ и $\alpha_1(g)=280t+168$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l\geq 2$. Тогда p делит 60, 144 и $452-l$, поэтому либо $p=3$, $l=3m+2$, $\chi_2(g)=(12m+8-\alpha_1(g))/40+5$ и $\alpha_1(g)=120t+12m+48$, либо $p=2$, число $\chi_2(g)=(4l-\alpha_1(g))/40+5$ нечетно и $\alpha_1(g)=80t+4l$. Так как вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, то $l=8,10,...,92$.

Пусть Ω содержит смежные вершины и и не содержит геодезических 2-путей. Тогда p делит 60 и 175, поэтому $p=5$, Ω является объединением m изолированных 5-клик. Ввиду леммы 1 имеем $m\leq 5$. Далее, $\chi_2(g)=(20m-\alpha_1(g))/40+5$ делится на 5 и $\alpha_1(g)=200s+20m$.

Пусть $[a]\subset\Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с 60 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_0(g)=145$ и $\alpha_1(g)=0$. Теперь $\chi_2(g)=580/40+5$, противоречие. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.6 можно считать, что Ω содержит геодезический 2-путь и по теореме 3.2 имеем $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,17\}$.

Лемма 1.7. *Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p=3$, Ω является бъединением $3m+1$ полных многодольных графов $K_{4\times 2}$, $m\leq 5$ и $\alpha_1(g)=96m+120t+72$;

(2) $p=2$, $|\Omega|\leq 240$, $\lambda_\Omega=0,2,...,26$, и степени вершин в Ω равны $0,2,...,34$.

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c. Если $p=17$, то по теореме 3.2 граф Ω является одновершинным, противоречие с предположением.

Если $p=5,7$, то по теореме 3.2 граф Ω является объединением изолированных клик, противоречие с предположением.

Если $p=3$, то по теореме 3.2 граф Ω является объединением $3m+1$ изолированных подграфов $K_{4\times 2}$, $m\leq 5$. Далее, $\chi_2(g)=(32(3m+1)-\alpha_1(g))/40+5$ и $\alpha_1(g)=96m+120t+72$.

Если $p=2$, то $|\Omega|=2l\leq 240$, $\lambda_\Omega=0,2,...,26$, и степени вершин в Ω равны $0,2,...,34$. Далее, число $\chi_2(g)=(8l-\alpha_1(g))/40+5$ нечетно и $\alpha_1(g)=80t+8l$. Лемма и теорема 3.3 доказаны.

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (800,204, 28,60), группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, $|G|$ делится на 17, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|G : G_a| = 800$ и по теореме 3.3 $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,17\}$.

Лемма 1.8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ порядка $p < 17$, то либо Ω является l-коклкой, $p = 3$, $l = 35, 86$ или $p = 2$, $l = 18, 52, 86$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 52, 86, 120, 154, 188, 222$ и $|\Omega(a)| = 34$;*

(2) *$S(G) = O_2(G)$;*

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморен $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$ или $Sp_8(2)$.*

Доказательство. Пусть f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ порядка $p < 17$. Тогда $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ — одновершинный граф. Из действия f на Ω следует, что $|\Omega| - 1$ делится на 17. Ввиду теормы 3.3 либо Ω является l-коклкой, $p = 3$, $l = 35, 86$ или $p = 2$, $l = 18, 52, 86$, либо Ω содержит геодезический 2-путь, $p = 2$, $|\Omega| = 52, 86, 120, 154, 188, 222$ и $|\Omega(a)| = 34$.

Так как $v = 800$, то $S(G)$ является $\{2,5\}$-группой. Пусть P — силовская 5-подгруппа из $S(G)$. Тогда $|P : P_a|$ делит 25. По лемме 3.8 имеем $S(G_a) = O_2(G_a)$, поэтому $|P_a| = 1$. Из действия элемента порядка 17 группы G на P следует, что $|P| = 1$.

Ввиду таблицы 1 из [53] цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморен $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$. Лемма доказана.

Так как $\bar{T}$ не содержит собственных подгрупп индекса, делящего 800, то имеем противоречие, доказывающее следствие 3.3

В леммах 1.9–1.12 предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ и спектром $204^1, 34^{480}, 4^{714}, -6^{2720}, -36^{85}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах.

Лемма 1.9. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 210 и χ_4 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 85. Тогда $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/200$, $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/200 - 15$. Дале, $\chi_1(g) - 210$ и $\chi_4(g) - 85$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 480 & 80 & 0 & -20 & -120 \\ 714 & 14 & -6 & 14 & 714 \\ 2720 & -80 & 0 & 20 & -680 \\ 85 & -15 & 5 & -15 & 85 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/200$.

Аналогично, $\chi_4(g) = (17\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 3\alpha_3(g) + 17\alpha_4(g))/800$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/200 - 15$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 2.2 главы 2.

Лемма 1.10. *Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то $p = 5$ и $\alpha_4(g) = v$. Более того порядок подгруппы из G, индуцирующей тривиальные автоморфизмы $\bar{\Gamma}$, делит 5.*

Доказательство. По условию $\alpha_i(g)$ не равно 0 быть может только для $i = 0, 4$. Если $u = u^g$, то $[u]$ состоит из неподвижных относительно g вершин. Поэтому g оставляет неподвижной каждую вершину из Γ, противоречие. Значит, $\alpha_4(g) = v$. Так как $r = 5$, то порядок подгруппы из G, индуцирующей тривиальные автоморфизмы $\bar{\Gamma}$, делит 5.

Лемма 1.11. *Если g индуцирует нетривиальный автоморфизм $\bar{\Gamma}$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 200(4 + m - l)$, $\alpha_2(g) = 1000l$, $\alpha_3(g) = 200(16 - 4l - m)$ *или* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80(4 + m - l)$, $\alpha_2(g) = 400l$, $\alpha_3(g) = 80(46 - m - 4l)$;

(2) Ω *— антиподальный класс,* $p = 17$, $\alpha_1(g) = 340 + 680n$, $\alpha_2(g) = 2975$, $\alpha_3(g) = 680(1 - n)$;

(3) Ω *— объединение двух антиподальных классов,* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 910 + 280n - 70l$, $\alpha_2(g) = 350l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$, $l = 1, 5, 9$;

(4) $p = 5$, $t = 5, s = 5$, $\alpha_1(g) = 700 + 200(m - l)$, $\alpha_2(g) = 1000l - 125$ *и* $\alpha_3(g) = 200(17 - m - 4l)$.

Доказательство. По теореме 3.3

либо $\bar{\Omega}$ — пустой граф, $p = 2, 5$,

либо $\bar{\Omega}$ является n-кликой, $n = 1$, $p = 17$ и $\bar{\alpha}_1(g) = 204$ или $n = 5$, $p = 5$ и $\bar{\alpha}_1(g) = 200s + 20$, или $n = 2$, $p = 7$ и $\bar{\alpha}_1(g) = 280t + 168$,

либо $\bar{\Omega}$ является l-кокликой, $p = 3$, $l = 3m+2$, $\bar{\alpha}_1(g) = 120t+12m+48$ или $p = 2$, $\bar{\alpha}_1(g) = 80t + 4l$ и $l = 8, 10, ..., 92$,

либо $\bar{\Omega}$ является объединением m изолированных 5-клик, $2 \leq m \leq 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$;

либо $\bar{\Omega}$ содержит геодезический 2-путь и

(i) $p = 3$, $\bar{\Omega}$ является объединением $3m + 1$ полных многодольных графов $K_{4\times 2}$ и $\alpha_1(g) = 96m + 120t + 72$ или

(ii) $p = 2$, $|\bar{\Omega}| = 2l \leq 240$, $\lambda(\bar{\Omega}) = 0, 2, ..., 26$, степени вершин в $\bar{\Omega}$ равны $0, 2, ..., 34$ и $\alpha_1(g) = 80t + 8l$.

Если $\bar{\Omega}$ — пустой граф, то и Ω — пустой граф, $\chi_1(g) = (4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$ и $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/200 - 15$. В случае $p = 5$ имеем $\alpha_2(g) = 1000l$, $4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = 1000m$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 1000(4 - l)$, поэтому $\alpha_1(g) = 200(4 - l + m)$, $\alpha_3(g) = 200(16 - 4l - m)$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_2(g) = 400l$, $4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = 400m$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 400(10-l)$, поэтому $\alpha_1(g) = 80(4-l+m)$, $\alpha_3(g) = 80(46-4l-m)$.

Если $p = 17$, $t = 1, s = 5$, то $\chi_1(g) = (120 + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$, $\chi_4(g) = (25 + \alpha_2(g))/200 - 15$, поэтому $\alpha_2(g) = 25 \cdot 17l$ и $17l + 1$ делится на 8. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 595$, поэтому $l = 7$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 85 \cdot 12 = 1020$ и $4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = 200m - 120$ делится на 17. Отсюда $m = 17n+4$, $\alpha_1(g) = 680n+340$, $\alpha_3(g) = 680(1-n)$.

Если $p = 7$, $t = 2, s = 5$, то $\chi_1(g) = (240 + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$, $\chi_4(g) = (50 + \alpha_2(g))/200 - 15$, поэтому $\alpha_2(g) = 50 \cdot 7l$ и $7l + 1$ делится на 4. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/7 = 630 - 280t = 70l$ и $l = 9 - 4t = 1, 5, 9$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 70(57 - 5l)$ и $4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = 40(5m - 1)$ делится на 7. Отсюда $m = 7n + 3$, $\alpha_1(g) = 280n + 910 - 70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$.

Если $p = 5$, $t = 5, s = 5$, то $\chi_1(g) = (600 + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$ и $\chi_4(g) = (125+\alpha_2(g))/200-15$ делятся на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 1000l-125$. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 775-200s = 200l-25$ и $s+l = 4$. Теперь $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 4100-1000l$ и $4\alpha_1(g)-\alpha_3(g) = 1000m-600$. Отсюда $\alpha_1(g) = 700 + 200(m - l)$, $\alpha_3(g) = 200(17 - m - 4l)$.

Если $\bar{\Omega}$ — коклика, то $t = 1$, противоречие.

Если $p = 3$, $\bar{\Omega}$ — объединение $3m+1$ изолированных $K_{4\times 2}$-подграфов, то $t = 7, s = 2, 5$, ? состоит из неподвижных относительно g вершин. Поэтому g оставляет неподвижной каждую вершину из Γ, противоречие с тем, что st не делится на 8.

Если $p = 2$, $|\bar{\Omega}| = 2l \leq 240$ и степени вершин в $\bar{\Omega}$ равны $0, 2, ..., 34$, то числа t, s нечетны, противоречие с тем, что st должно быть четным. Лемма и теорема 3.1 доказаны.

Докажем следствие 3.1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ. По теореме 3.3 порядок группы автоморфизмов, индуцированных G на множестве антиподальных классов графа Γ, не делится на 17, противоречие.

§ 3.2. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$

Перечислим автоморфизмы дистанционно регулярного графам с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Теорема 3.4 [76]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 85$ *и* $\alpha_3(g) = 680$, *либо* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$, *и* $\alpha_3(g) = 20 \cdot 7(16 - 6s) - 420t$, *либо* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ *и* $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$, l *делится на* 6;

(2) Ω *— непустой граф и* $p \leq 13$.

Следствие 3.4. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то* G *разрешима.*

Для доказательства теоремы 3.4 полезен следующий результат.

Теорема 3.5 [76]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(595, 144, 18, 40)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$ *и* $\alpha_2(g) = 425$, *либо* $p = 7$ *и* $\alpha_2(g) = 210l + 35$, *либо* $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l + 125$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 3$ *и* $\alpha_2(g) = 90r$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_2(g) = 60r + 30$, *либо* $n = 5$, $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 50s + 20$;

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $p = 2$, $\alpha_2(g) = 60m - 5l + 25$ *и* $l = 5, 7, ..., 91$;

(4) Ω *является объединением* m *изолированных* 5*-клик,* $p = 5$, $m \leq 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l - 25m + 125$;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \leq 29$.

Докажем теорему 3.5. В леммах 2.1–2.4 предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(595, 144, 18, 40)$ и спектром $144^1, 4^{510}, -26^{84}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, порядок коклики в Γ не больше 91.

Лемма 2.1. *Пусть* χ_2 *— характер, полученный при проектировании* $\psi(G)$ *на подпространство размерности* 84. *Тогда* $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) - 455)/30$ *и* $\chi_2(g) - 84$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 510 & 85/6 & -17/3 \\ 84 & -91/6 & 14/3 \end{pmatrix}$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 84 равно
$\chi_2(g) = (12\alpha_0(g) - 13\alpha_1(g)/6 + 2\alpha_2(g)/3)/85$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g)$, получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) - 455)/30$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 2.2 главы 2.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 17$ *и* $\alpha_2(g) = 425$*, либо* $p = 7$ *и* $\alpha_2(g) = 210l + 35$*, либо* $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l + 125$*;*

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n = 1$*,* $p = 3$ *и* $\alpha_2(g) = 90r$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_2(g) = 60r + 30p = 7$*, либо* $n = 5$*,* $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150s - 50$*;*

(3) *если* Ω *является* l*-кокликой, то* $p = 2$*,* $l = 2m + 1$*,* $\alpha_2(g) = 60t + 10m - 460$ *и* $m = 3, 4, ..., 45$*;*

(4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением изолированных клик, то* $p = 5$*,* Ω *является объединением* m *изолированных* 5*-клик,* $m \leq 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l - 25m + 125$*;*

(5) *если* $[a] \subset \Omega$*, то* $p = 2, 3, 5$ *и* $\alpha_1(g) = 0$*.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $595 = 35 \cdot 17$, то $p = 5, 7, 17$.

Пусть $p = 17$. Тогда $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 455)/30$ и $\alpha_2(g) = 425$. Пусть $p = 7$. Тогда $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 455)/30$ и $\alpha_2(g) = 210l + 35$. Пусть $p = 5$. Тогда число $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 455)/10$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_2(g) = 150m - 25$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 144 и 450, поэтому либо $p = 3$, $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 450)/30$ и $\alpha_2(g) = 90r$, либо $p = 2$, $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 450)/30$ и $\alpha_2(g) = 60r + 30$. Если Ω содержит смежные вершины u, w, то p делит $|[u] - w^\perp| = 125$, $p = 5$ и $n = 5$. Далее, число $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 430)/30$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_2(g) = 150s - 50$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l \geq 2$. Тогда p делит 40, 104 и $347 - l$, поэтому $p = 2$, $l = 2m + 1$, число $\chi_2(g) = (5l + \alpha_2(g) - 455)/30$ четно и $\alpha_2(g) = 60t + 10m - 450$. Так как вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, то $m = 3, 4, ..., 45$.

Пусть Ω содержит смежные вершины и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 18 и 125, противоречие.

Пусть $[a] \subset \Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 40 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_0(g) = 145$ и $\alpha_1(g) = 0$. Теперь $\chi_2(g) = (725 + 450 - 455)/30 = 24$ и $\chi_2(g) - 84$ делится на p, поэтому $p = 2, 3, 5$.

Лемма 2.3. *Пусть* Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c*. Тогда* $p \leq 29$*.*

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c.

Если $p > 37$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18, 40)$, $k' < 144$. В этом случае $n^2 = 4u^2 = 22^2 + 4(k' - 40)$, поэтому $k' = u^2 - 81$, $u < 15$, Ω имеет собственные значения $u - 11$, $-(u+11)$ и кратность $u - 11$ равна $(u + 10)(u^2 - 81)(u^2 + u - 70)/(80u)$. Если 8 делит k', то $u = 11, 13$, а если 8 делит $k' - 19$, то $u = 10, 14$. Отсюда $u = 14$, Ω имеет параметры (392,115,18,40). Но в этом случае число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $392 \cdot 29$, противоречие.

Если $p = 37$, то $\lambda_\Omega = 18$, $\mu_\Omega = 3, 40$, степени вершин в Ω равны $33, 70, 107$ и $|\Omega| = 77, 114, 151$. Пусть a — вершина степени 33 в Ω. Тогда $|\Omega| \geq 1 + 33 + 33 \cdot 14/3$, противоречие. Пусть a — вершина степени 70 в Ω. Тогда $|\Omega| \geq 1 + 70 + 70 \cdot 51/40$, противоречие.

Если $p = 31$, то $\lambda_\Omega = 18$, $\mu_\Omega = 9, 40$, степени вершин в Ω равны $20, 51, 82, 113$ и $|\Omega| = 37, 68, 99, 130, 161$. Пусть a — вершина степени 20 в Ω. Тогда $\Omega(a)$ — полный многодольный граф $K_{10\times 2}$, противоречие с тем, что Γ не содержит 7-клик.

Пусть a — вершина степени 82 в Ω. Тогда $|\Omega| \geq 1 + 82 + 32 \cdot 82/40$, поэтому Ω не содержит вершин степени 113 и $|\Omega| = 161$. Если $|\Omega| = 161$, β — число вершин степени 82 в Ω, то $\chi_2(g) = (350+\alpha_2(g))/30$, $\alpha_1(g) = 124$ и $\alpha_2(g) = 310$. В этом случае число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$, деленное на 31 не меньше $2\beta + 3(161 - \beta) = 483 - \beta$, но не больше $4 \cdot 18 + 10 \cdot 40 = 472$, поэтому $\beta \geq 11$. Пусть z — другая вершина степени 82 в Ω. Если $|\Omega(a) \cap [z]| = 9$, то $|\Omega - (a^\perp \cup z^\perp)| = 4$ и степень вершины из $\Omega(a) \cap [z]$ в графе Ω не больше $19+19+4$, противоречие. Если вершины a, z смежны, то $|\Omega - (a^\perp \cup z^\perp)| = 15$. Для вершины b степени γ в графе $\Omega(a) \cap [z]$ подграф $\Omega(b)$ содержит по $17-\gamma$ вершин из $\Omega(a) - z^bot$, $\Omega(z) - a^bot$ и $15+\gamma$ вершин из $\Omega - (a^\perp \cup z^\perp)$. Поэтому $\Omega(a) \cap [z]$ является кокликой, состоящей из вершин степени 51 в Ω и вершина e из $\Omega - (a^\perp \cup z^\perp)$ смежна с 18 вершинами из $\Omega(a) \cap [z]$, с 22 вершинами из $\Omega(a) - z^bot$ и из $\Omega(z) - a^bot$ и с 20 вершинами из $\Omega - (a^\perp \cup z^\perp)$, противоречие. Итак, подграф Δ на множестве вершин степени 82 в Ω является β-кокликой и $|\Omega(a) \cap [z]| = 40$ для любых двух вершин $a, z \in \Delta$. Теперь число вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных с вершинами из Δ не меньше $62 \cdot 11$, противоречие.

Итак, Ω — регулярный граф степени 51. По лемме 1.1 имеем $47 \cdot 17 \leq 4|\Omega|$, противоречие. Лемма и теорема 3.5 доказаны.

Докажем теорему 3.4. В леммах 2.4–2.7 предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ и спектром $144^1, 24^{476}, 4^{510}, -6^{1904}, -26^{84}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Ввиду [31, теорема 3.2] имеем $|\Omega| \leq 850$. Заметим, что $v = 1+144+2250+576+4 = 2975 = 25 \cdot 7 \cdot 17$

и максимальный порядок клики в Γ не больше 6. Для вешины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Лемма 2.4. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 476, χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 510, χ_4 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 84. Тогда $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/300$, $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 25\alpha_4(g))/150 + 85/6$, $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/150 - 91/6$, причем числа $\chi_1(g) - 476$, $\chi_2(g) - 510$ и $\chi_4(g) - 84$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 476 & 238/3 & 0 & -119/6 & -119 \\ 510 & 85/6 & -17/3 & 85/6 & 510 \\ 1904 & -238/3 & 0 & 119/6 & -476 \\ 84 & -91/6 & 14/3 & -91/6 & 84 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/300$. Далее, $\chi_2(g) = (180\alpha_0(g)$
$+ 5\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) + 5\alpha_3(g) + 180\alpha_4(g))/1050$. Подставив $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2975 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 25\alpha_4(g))/150 + 85/6$.

Аналогично, $\chi_4(g) = (72\alpha_0(g) - 13\alpha_1(g) + 4\alpha_2(g) - 13\alpha_3(g) + 72\alpha_4(g))/(150 \cdot 17)$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2975 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 25\alpha_4(g))/150 + 85/6$. получим $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/150 - 91/6$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 2.1 главы 2.

Лемма 2.5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 85$ и $\alpha_3(g) = 680$, либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$, и $\alpha_3(g) = 20 \cdot 7(16 - 6s) - 420t$, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ и $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$, l делится на 6;*

(2) *имеем $p \leq 17$, и если $p = 17$, то Ω — пустой граф.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $2975 = 25 \cdot 7 \cdot 17$, то $p \in \{5, 7, 17\}$.

Пусть $p = 17$. Тогда $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 85/6$ и $\alpha_2(g) = 25 \cdot 85$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 850$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 170)/60$ и $\alpha_1(g) = 170$.

Пусть $p = 7$. Тогда $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 85/6$, $\alpha_2(g) = 25\cdot 7w_2$ и число $\chi_2(g) = (-7w_2+85)/6$ сравнимо с -1 по модулю 7. Отсюда $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 25 \cdot 7(16 - 6s)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 5 \cdot 7(16 - 6s))/60$ и $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$.

Пусть $p = 5$. Тогда $\alpha_4(g) = 5w_4$, число $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + (5w_4 + 85)/6$ делится на 5, $\alpha_2(g) = 125w_2$ и $\chi_2(g) = 5(-w_2 + w_4 + 17)/6$. Отсюда $\alpha_2(g) = 125(6s+w_4+17)$, число $\chi_4(g) = (5(6s+w_4+17)+w_4-91)/6 = 5s+w_4-1$ сравнимо с 4 по модулю 5. Итак, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s+5l+17)$ и ввиду утверждения (1) леммы 7 число $5l + 17$ сравнимо с -1 по модулю 6. Отсюда l делится на 6, $30s + 26l + 85 \le 119$.

Далее, $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 25(34-30s-26l)$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g)-170+150s-160l)/60$ сравнимо с 1 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 230-150s+160l+300t$ и $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$.

Пусть число p больше 17. Тогда Ω является вполне регулярным графом с $\lambda_\Omega = 18$, $\mu_\Omega = 8$ и 8 делит $k_\Omega(k_\Omega - 19)$.

Если $p = 29$, то $k_\Omega = 28, 57, 86, 115$, поэтому $k_\Omega = 115$, $115\cdot 96/8 = 1380$ и $2250 - 1380 = 870$. Наконец, $460 \cdot 96/1380 = 32$, Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{115, 96, 32, 1; 1, 8, 96, 115\}$ и $|\Omega| = 1 + 115 + 1380 + 460 + 4 = 1960$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \le 850$.

Если $p = 23$, то $k_\Omega = 29, 52, 75, 98, 121$, поэтому $k_\Omega = 75$, $75\cdot 56/8 = 525$ и $2250 - 525 = 1725$ не делится на 23.

Если $p = 19$, то $k_\Omega = 30, 49, 68, 87, 106, 125$, противоречие.

Пусть $p = 17$ и Ω — непустой граф. Тогда $\lambda_\Omega \in \{1, 18\}$, $\mu_\Omega = 8$ и степени вершин в Ω равны $23, 42, 59, 76, 93, 110, 127$ (ввиду теоремы 3.5 эта степень не равна 144). Если $a \in \Omega$, $b \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$, то $\Omega(b)$ содержит по 8 соседей вершин из $F(a)$ (всего 40 вершин) и не менее двух вершин из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ ($a_2 = 104$). Так как 2250 сравнимо с 6 по модулю 17, $|\Omega_2(a)|$ делится на 5 и $|\Omega_2(a)| \ge 21 \cdot 23/4$, то $|\Omega_2(a)| \ge 125$.

Если степень a в Ω равна 127, то $[a]$ содержит единственную $\langle g\rangle$-орбиту длины 17 и для вершины $u \in [a]-\Omega$ подграф $[a]\cap[u]$ содержит не менее 4 вершин из Ω. Отсюда $|\Omega_2(a)| \ge (4\cdot 40+123\cdot 23)/8$ и $|\Omega_2(a)| \ge 425$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \ge 425 + 5 \cdot 128$.

Если степень a в Ω равна 110, то $|\Omega_2(a)| \ge 110 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \ge 380$. Отсюда $|\Omega| \ge 555 + 380$, противоречие.

Если степень a в Ω равна 93, то $|\Omega_2(a)| \ge 93 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \ge 295$. Отсюда $|\Omega| \ge 765 = 17\cdot 45$ и $|\Gamma-\Omega| \le 17\cdot 130$, поэтому некоторая верщина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 22 вершинами из Ω, противоречие.

Если степень a в Ω равна 76, то $|\Omega_2(a)| \ge 76 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \ge 295$. Отсюда $|\Omega| \ge 680 = 17\cdot 40$ и $|\Gamma-\Omega| \le 17\cdot 135$, поэтому некоторая верщина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 21 вершинами из Ω, противоречие.

Если степень a в Ω равна 59, то $|\Omega_2(a)| \ge 59 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \ge 210$.

Отсюда $|\Omega| \geq 210 + 300 = 17 \cdot 30$ и $|\Gamma - \Omega| \leq 17 \cdot 145$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 18 вершинами из Ω, противоречие.

Если степень a в Ω равна 42, то $|\Omega_2(a)| \geq 42 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \geq 125$. Отсюда $|\Omega| \geq 125 + 215 = 17 \cdot 20$ и $|\Gamma - \Omega| \leq 17 \cdot 155$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 14 вершинами из Ω, противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 2.5 следует теорема 3.4.

Лемма 2.6. *Пусть f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка $p < 17$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| = 17t > 0$ и либо $p \leq 3$, либо $p = 5$, $t = 10$, $\alpha_4(g) = 680$, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 125 \cdot 17$.*

Доказательство. По лемме 2.5 подграф $\mathrm{Fix}(f)$ пуст.

Если Ω — пустой граф, то либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$, и $\alpha_3(g) = 20 \cdot 7(16 - 6s) - 420t$, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ и $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$, l делится на 6.

В случае $p = 7$ число $6s + 1$ делится на 17, противоречие. Пусть $p = 5$. Если $l = 0$, то s делится на 17, поэтому $s = 0$, $\alpha_2(g) = 125 \cdot 17$, $\alpha_1(g) = 230+300t$ и $23+30t$ делится на 17, поэтому $t = 10$, $\alpha_1(g) = 17 \cdot 190$, противоречие. Если $l = 6 \cdot 17$, то $\alpha_4(g) = 150 \cdot 17$, $\alpha_2(g) = 125(6s+31 \cdot 17) \leq 25 \cdot 17$, противоречие.

Пусть Ω — непустой граф. Тогда $|\Omega| = 17t$, $t \leq 50$ и $175 - t$ делится на p.

Если $p = 13$, то $\alpha_4(g) = 0$, $t = 6, 19, 32, 45$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 17(t + 5)/6$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 13s$ и $t + s + 5$ делится на 6. Аналогично, $\chi_4(g) = (85t+\alpha_2(g))/150-91/6$ и t делится на 5. Поэтому $t = 45$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 13s \leq 130 \cdot 17$ и $s = 4$. Отсюда $\alpha_2(g) = 25 \cdot 52$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 17 \cdot 130 - 25 \cdot 52$, число $\chi_1(g) = (315 + \alpha_1(g)/10)/6$ сравнимо с -5 по модулю 13. Теперь $\alpha_1(g) = 390(2l + 1)$, $\chi_1(g) = (118 + 26l)/2 = 59 + 13l$, противоречие.

Если $p = 11$, то $\alpha_4(g) = 0$, $t = 10, 21, 32, 43$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 17(t + 5)/6$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 11s$ и $t - s + 5$ делится на 6. Аналогично, $\chi_4(g) = (85t + \alpha_2(g))/150 - 91/6$ и t делится на 5. Поэтому $t = 10$, $s = 6l - 3$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 11s \leq 165 \cdot 17$ и $s = 3, 9$.

В случае $s = 3$ имеем $\alpha_2(g) = 25 \cdot 33$, $\chi_4(g) = (34 + 33 - 91)/6$, противоречие. В случае $s = 9$ имеем $\alpha_2(g) = 25 \cdot 99$, $\chi_4(g) = (34 + 99 - 91)/6$, противоречие.

Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, $t = 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49$, число $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150+17(t+5)/6$ сравнимо с -1 по модулю 7, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7s$ и $t+s+5$ делится на 6. Аналогично, число $\chi_4(g) = (85t+\alpha_2(g))/150-91/6$ делится на 7 и t делится на 5. Поэтому $t = 35$, $s = 6l + 2$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7s \leq 140 \cdot 17$ и $s = 2, 8$. Противоречие с тем, что $\alpha_2(g)$ не делится на 17.

Пусть $p = 5$ и $\alpha_4(g) = 85z$, $t = 5, 10, ..., 85(10 - z)$, число $\chi_2(g) = \alpha_2(g))/150 + 17(t+5z+5)/6$ делится на 5, $\alpha_2(g) = 125s$, $s = 0, 17$ и $t+s-z-1$ делится на 6. Аналогично, число $\chi_4(g) = (5s+17(t/5+z)-91)/6$ сравнимо с 4 по модулю 5, поэтому $5s + 17(t/5 + z) - 85 = 30l$ и $t + 5z = 25, 50$.

Если $s = 0$, то $t-z-1$ делится на 6, поэтому $t = 25-5z$, $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 25 \cdot 17$, число $\chi_1(g) = 17(23+l-6z)/12$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $l = 1$. Отсюда $\chi_1(g) = 34 - 17z/2 = -5m + 1$, $17z/2 = 33 + 5m$, $m = 17n + 7$ и $z = 10n + 8$, противоречие.

Если $s = 17$, то $t-z-2$ делится на 6, поэтому $t = 50-5z$, $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 0$, число $\chi_1(g) = 17(23 + l - 6z)/12$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $l = 1$. Отсюда $\chi_1(g) = 34 - 17z/2 = -5m + 1$, $17z/2 = 33 + 5m$, $m = 17n + 7$ и $z = 8$. Лемма доказана.

Пусть до конца параграфа Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$, неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, f — элемент порядка 17 из G и F — антиподальный класс, содержащий вершину a. По теореме 3.1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$, $|G : G_a| = 25 \cdot 7 \cdot 17$ и $|G : G_{\{F\}}| = 35 \cdot 17$.

Лемма 2.7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $S(G) = O_{5,7}(G)$*;*

(2) *цоколь* $\bar{T}$ *группы* $\bar{G} = G/S(G)$ *изоморфен* $\Omega_8^-(2)$*,* $\bar{T}_{\{F\}} \cong E_{64} : U_4(2)$ *— подгруппа индекса* 119 *из* $\bar{T}$*,* $S(G)$ *является* 5*-группой,* $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 5$ *и* $\Omega_8^-(2)$ *действует неприводимо на* $S(G)$*.*

Доказательство. Так как $v = 25 \cdot 7 \cdot 17$, то $S(G) = O_{5,7,17}(G)$. Если G — неразрешимая группа, то ввиду леммы 2.6 имеем $S(G) = O_{5,7}(G)$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [53, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, He, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $U_4(4)$, $Sp_8(2)$, $\Omega_{10}^-(2)$, $L_2(13^2)$, $PSp_4(13)$, $L_3(16)$, $Sp_6(4)$, $F_4(2)$, A_{17}, A_{18}.

Если 7 не делит $|\bar{T}|$, то $\bar{T} \cong L_2(16), L_2(17), Sp_4(4), U_4(4)$, группа $\bar{T}$ действует неприводимо на некоторой элементарной абелевой 7-группе V и $C_V(f) = 1$.

Пусть 7 делит $|\bar{T}|$. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего $595 = 35 \cdot 17$, то либо $\bar{T} \cong \Omega_8^-(2)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong E_{64} : U_4(2)$ — подгруппа индекса 119 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong A_{17}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_{16}$ — подгруппа индекса 17 из $\bar{T}$. В первом случае $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 5$, $V = S(G)$ является элементарной абелевой 5-группой и $\Omega_8^-(2)$ действует неприводимо на V. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 3.4. Для группы $\Omega_8^-(2)$ имеются неприводимые модули порядков $5^{34}, 5^{51}, 5^{84}$. Заметим, что $r = 5$ и $U_4(2)$ не вкладывается в S_5. При этом единственная нетривиальная нормальная подгруппа из $\bar{T}_{\{F\}} = E_{64} : U_4(2)$ — подгруппа порядка 64. То есть, $\bar{T}_{\{F\}}$ совпадает с $\bar{T}_a$ для $a \in F$. Таким образом, граф можно разбить на $\bar{T}$-орбиты длины 119. На каждой $\bar{T}$ действует как группа ранга 3 с подстепенями 1, 54, 64. Соответствующие графы ранга 3 — сильно регулярные графы с параметрами (119,54,21,27) или (119,64,36,32). В искомом графе $\mu = 8, \lambda = 18$, поэтому $\bar{T}$-орбиты не могут быть ни графами ранга 3, ни кликами, а только кокликами.

Подгруппа $E_{64} : U_4(2)$ вкладывается в $\Omega_8^-(2)$ однозначно с точностью до сопряженности, поэтому каждая $\bar{T}$-орбита разбивается на три $\bar{T}_{\{F\}}$-орбиты с длинами 1, 54, 64. Окрестность $[a]$ является объединением орбит группы $\bar{T}_{\{F\}} = \bar{T}_a$. Исключая $\bar{T}_a$-орбиты, лежащие в $a^{\bar{T}}$, замечаем, что для построения $[a]$ подходят 24 орбиты длины 1, 54 и 64. Число $k = 144$ единственным образом раскладывается в сумму длин орбит: $k = 16 \cdot 1 + 2 \cdot 64$. Значит, найдётся $\bar{T}$-орбита X, в которой a имеет не менее 64 соседей. Но тогда любая вершина из $a^{\bar{T}}$ имеет в X не менее 64 соседей, и для любых двух вершин из $a^{\bar{T}}$ число общих соседей не меньше, чем $64 + 64 - |X| = 9$. Противоречие с тем, что $\mu = 8$. Следствие 3.4 доказано.

§ 3.3. Дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3. В следующей теореме найдены параметры сильно регулярного графа Γ_3.

Теорема 3.6 [78,80]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_3 сильно регулярен. Тогда $\theta_2 = -1$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_2 = a_3 + 1$, $b_1 = rc_2$ и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, r)$;

(2) если Γ — антиподальный граф и граф Γ_2 сильно регулярен, то либо Γ — граф Тэйлора без треугольников, либо граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $GQ(r-1, c_2+1)$.

Замечание 3.1. Пусть псевдогеометрический граф для $GQ(s,t)$ имеет разбиение множества вершин множеством $\mathcal{S}$ клик порядка $s+1$ (спред). Превратив $\mathcal{S}$ в множество коклик, по [2, предложение 12.5.2] получим дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{st, s(t-1), 1; 1, t-1, st\}$.

Обобщенные четырехугольники имеют спред для порядков $(s,1),(1,t)$, $(q,q),(q,q^2),(q-1,q+1)$ для q, являющихся степенями простых чисел, $(q+1,q-1)$ для q, являющихся степенями 2.

Следствие 3.5. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44,35,3;1,5,42\}$ *не существует.*

Несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44,35,3;1,5,42\}$ независимо получено в [37].

Докажем теорему 3.6. Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 3.1.
Пусть Γ *— псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(s,t)$, $s>\alpha$ *и* α *делит* st. *Тогда граф* $\bar\Gamma$ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{\bar\alpha}(\bar s,\bar t)$, *где* $\bar\alpha=t(s-\alpha)/\alpha$, $\bar s=st/\alpha$ *и* $\bar t=s-\alpha$.

Доказательство. Граф $\Delta=\bar\Gamma$ имеет неглавные собственные значения $t,-(s-\alpha+1)$. Поэтому Δ может быть псевдогеометрическим для $pG_\beta(t+\beta,s-\alpha)$. Теперь степень вершины в графе Δ равна $(t+\beta)(s-\alpha+1)=k(k-\lambda-1)/\mu=s(st-\alpha t+t)/\alpha$ и $\beta=st/\alpha-t$. Наконец, число вершин в $pG_\alpha(s,t)$ равно числу вершин в $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha,s-\alpha)$.

Лемма 3.2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с* $\theta_2=-1$, u *— вершина графа* Γ *и* $k_i=|\Gamma_i(u)|$. *Тогда верны следующие утверждения:*

(1) $b_2-1=a_3$, $k+1=c_3+b_2$, *граф* Γ_3 *сильно регулярен и* Γ *— антиподальный граф тогда и только тогда, когда* Γ_3 *— объединение изолированных клик;*

(2) *собственные значения графа* $\Delta=\bar\Gamma_3$ *равны* $(\theta^2+(c_2-a_1)\theta-k)/c_2$, *когда* θ *пробегает множество собственных значений графа* Γ *и* $\theta_2(\Delta)=-(b_1+c_2)/c_2$, *в частности,* c_2 *делит* b_1;

(3) $\theta_1(\Delta)=a_3$ *и* Δ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$.

Доказательство. По [54, предложение 3.3] имеем $\theta_2=-1$ тогда и только тогда, когда граф Γ_3 сильно регулярен. Кроме того, верны равенства $b_2-1=a_3$ и $k+1=c_3+b_2$.

Положим $\Delta=\bar\Gamma_3$. По замечанию после предложения 4.2.18 [2] собственные значения графа Δ равны $(\theta^2+(c_2-a_1)\theta-k)/c_2$, когда θ пробегает множество собственных значений графа Γ. При $\theta=-1$ получим $\theta_2(\Delta)=-(b_1+c_2)/c_2$ и c_2 делит b_1.

Заметим, что $k(\Delta)=k+k_2=k(1+b_1/c_2)$ делится на $\theta_2(\Delta)$, поэтому Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(k,b_1/c_2)$.

Из доказательства предложения 3.2 [54] имеем $-\theta_1\theta_3 = k + a_3c_2$ и $\theta_1 + \theta_3 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 - k = a_1 + a_2 + b_2 - k = a_1 - c_2$. Поэтому $\theta_1(\Delta) = (\theta_3^2 + (c_2 - a_1)\theta_3 - k)/c_2 = (-\theta_1\theta_3 - k)/c_2 = a_3$ и $\alpha = k - a_3 = c_3$. Лемма доказана.

Из леммы 3.2 следует теорема 3.6.

Докажем следствие 3.5. Пусть дистанционно регулярный граф Γ имеет массив пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$. По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{42}(44, 7)$ и Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами (375,22,5,1), поэтому окрестность вершины в Γ_3 — объединение изолированных 6-клик, противоречие.

§ 3.4. Дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3 с графом Γ_i, являющимся псевдогеометрическим для обобщенного четырехугольника

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в графе Тэйлора, содержащем треугольник, окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k = 2\mu$. Обратно, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами (v, k, λ, μ) и $k = 2\mu$ отвечает граф Тэйлора с массивом пересечений $\{v, v-k-1, 1; 1, v-k-1, v\}$, в котором окрестность некоторой вершины изоморфна Δ. В этом случае прямая и обратная задачи имеют единственное решение.

Прямая и обратная задачи решены для $i = 3$ в теореме 3.6. Обратная задача решена для $i = 2$ в [65].

В этом параграфе продолжено решение обратной задачи в случаях, когда графы Γ_3 или $\bar{\Gamma}_2$ являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника.

Теорема 3.7 [82]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_3 сильно регулярен. Тогда графы Γ_2 и $\bar{\Gamma}_3$ не являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника.*

Пусть дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности. Юришич и Видали доказали, что [6, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$.

Теорема 3.8 [82]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3. Если Γ_3 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(l,t)$, то $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{(l-1)t}(lt, l-1)$ и Γ имеет массив пересечений $\{lt, c_2(l-1), t+1; 1, c_2, (l-1)t\}$ (массив Юришича-Видали первого типа для $a = t, p = l-1, c = c_2$).*

Обратная задача решена для $i = 2$ в [65, теорема 1].

Предложение 3.2. *Пусть для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(v, \kappa, \lambda, \mu)$, собственными значениями $\kappa, r, -s$ и $x = b_2+c_2$. Тогда можно представить массив пересечений Γ в виде:*

(1) *$b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(r(s-1)) - s$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(r^2 s(s-1))$, $c_2 = x(\mu x - rs(s-1))/(r^2 s(s-1))$, $c_3 = \mu x/(r(s-1))$, и для $u = \sqrt{(\mu x - s(s-1)(x(r+2s) - r(s-1)))^2 - 4s^3 x(-r+x)(r+s)(s-1)^2}$ Γ имеет спектр: значение $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x - u)/(2rs(s-1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1) - u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, значение $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x + u)/(2rs(s-1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1) + u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, значение $-\mu x/(rs(s-1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(s-1)/(\mu(r+s))$;*

(2) *$b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(s(r+1)) + r$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(rs^2(r+1))$, $c_2 = x(\mu x + rs(r+1))/(rs^2(r+1))$, $c_3 = \mu x/(s(r+1))$, и для $u = \sqrt{(\mu x + r(r+1)(x(2r+s) + s(r+1)))^2 - 4r^3 x(r+1)^2(r+s)(s+x))}$ граф Γ имеет спектр: значение $(rs(r+1)(-r+x-1) + \mu x - u)/(2rs(r+1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1) + u(x(\mu(2r+s+1) + rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$, значение $(rs(r+1)(-r+x-1) + \mu x + u)/(2rs(r+1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1) - u(x(\mu(2r+s+1) + rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$, значение $\mu x/(rs(r+1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(r+1)/(\mu(r+s))$ или*

(3) $\{\kappa, \kappa-1, 1; 1, \kappa-1, \kappa\}$.

Теорема 3.9 [82]. *Пусть $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(s,r)$. Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr, s-1)$ с собственными значениями $\kappa = s^2 r, r, -s$ и для $\mu = s(s-1)r$, $x = b_2 + c_2$ выполняется одно из утверждений:*

(1) Γ *имеет массив типа* (1) *и является антиподальным графом с массивом пересечений $\{sr, s(r-1), 1; 1, r-1, sr\}$;*

(2) $b_0 = sx$, $b_1 = r(r+1+xs-x)/(r+1)$, $b_2 = x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2 = x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3 = (s-1)rx/(r+1)$, $(r+1)$ *делит* $(s-1)x$, s *делит* $x(r+1-x)$.

Докажем теорему 3.7. Если $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(s,t)$, то по теореме 3.6 граф Γ имеет массив пересечений $\{s, tc_2, b_2; 1, c_2, 1\}$, противоречие.

Лемма 4.1. *Если* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k, b_1, b_2; 1, c_2, c_3\}$, *для которого граф* Γ_2 *сильно регулярен, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1 a_2$, $p^1_{22} = a_2 k_2/k = b_1 a_2/c_2$;

(2) $p^2_{22} = (c_2 b_1 + a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - k)/c_2$, $p^3_{22} = c_3(a_3 + a_2 - a_1)/c_2$.

Доказательство. По [2, предложение 4.2.17] имеем $c_3(a_3+a_2-a_1) = b_1 a_2$. Остальные равенства следуют из [2, лемма 4.1.7].

Если Γ_2 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(r+1, s-1)$, (то есть, имеет неглавные собственные значения $r, -s$, и параметр μ, равный s), то по [65, следствие 1] граф Γ имеет массив пересечений $\{y(r+1)^2, r(y+1), ry(r+1)(s-y-1)/s; 1, ry(r+1)(y+1)/s, ry\}$ для некоторого целого y (это массив типа (2) при $x = yr(r+1)$).

Имеем $c_2 \le c_3$, поэтому $(r+1)(y+1) \le s$. Аналогично, $b_2 \le b_1$, поэтому $y(r+1)(s-y-1) \le s(y+1)$ и $s(yr-1) \le y(y+1)(r+1)$. Итак, $(r+1)(y+1) \le s \le y(y+1)(r+1)/(yr-1)$, $yr-1 \le y$, поэтому $r = 1$, $s \in \{2,3,5\}$, Γ имеет массив пересечений $\{4y, y+1, 2y(s-y-1)/s; 1, 2y(y+1)/s, 2y\}$ и $s \ne 2$. В случае $s = 3$ имеем $y = 1$ и массив $\{4, 2, 2/3; 1, 4/3, 2\}$, противоречие. В случае $s = 5$ имеем массив $\{4y, y+1, 2y(4-y)/5; 1, 2y(y+1)/5, 2y\}$, противоречие. Теорема 3.7 доказана.

Докажем теорему 3.8. Если Γ_3 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(l,t)$, то $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{(l-1)t}(lt, l-1)$ и по теореме 3.6 граф Γ имеет массив пересечений $\{lt, (l-1)c_2, t+1; 1, c_2, (l-1)t\}$. Теорема 3.8 доказана.

Докажем теорему 3.9. В леммах 4.2–4.4 предполагается, что граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $GQ(s,r)$ и Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с массивом пересечений типа (1). Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr, s-1)$ с собственными значениями $\kappa = s^2 r, r, -s$, $\mu = s(s-1)r$ и $x = b_2 + c_2$.

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_0 = sx$, $b_1 = sx - s$, $b_2 = x(r+1-x)/r$, $c_2 = x(x-1)/r$ *и* $c_3 = sx$, *в случае* $x = r$ *получим* $b_2 = 1$ *и* Γ *— антиподальный граф;*

(2) $a_1 = s - 1 = \lambda(\bar\Gamma_2)$, *поэтому для любой вершины* $w \in \Gamma$ *подграф* $\bar\Gamma_2(w)$ *является объединением двух связных компонент* $\Gamma(w)$ *и* $\Gamma_3(w)$*;*

(3) $c_2 + 2b_2 + p^2_{33} = r + 1$, *в частности,* $b_2 \le r + 1 - x$.

Доказательство. В формулы $b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(r(s-1)) - s$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(r^2 s(s-1))$, $c_2 = x(\mu x - rs(s-1))/(r^2 s(s-1))$ и $c_3 = \mu x/(r(s-1))$ подставим значение $\mu = s(s-1)r$.

Тогда $b_0 = sx$, $b_1 = sx - s$, $b_2 = x(r+1-x)/r$, $c_2 = x(x-1)/r$ и $c_3 = sx$. Далее, $k_2 = s^2 r$ и $k_3 = s(r+1-x)$. В случае $x = r$ получим $b_2 = 1$ и Γ — антиподальный граф.

Далее, $a_1 = s-1 = \lambda(\bar\Gamma_2)$, поэтому для любой вершины $w \in \Gamma$ подграф $\bar\Gamma_2(w)$ является объединением двух связных компонент $\Gamma(w)$ и $\Gamma_3(w)$.

Для вершины $u \in \Gamma_2(w)$ подграф $\bar\Gamma_2(u) \cap \bar\Gamma_2(w)$ содержит c_2 вершин из $[u] \cap [w]$ по b_2 вершин из $[u] \cap \Gamma_3(w)$, $\Gamma_3(u) \cap [w]$ и p^2_{33} вершин из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(w)$, поэтому $c_2 + 2b_2 + p^2_{33} = r + 1$.

Лемма 4.3. *Для массива типа* (1) *и для* $u = s(s-1)\sqrt{(2s + r(s-1))^2 + 4sx(r-x)(r+s)}$ *граф* Γ *имеет спектр: значение* $(r(s-1) - \sqrt{(2s + r(s-1))^2 + 4sx(r-x)(r+s)})/(2r)$ *кратности* $(\mu + rs)(\mu + rs - r)(u^2(r+1) - u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, *значение* $(r(s-1) + \sqrt{(2s + r(s-1))^2 + 4sx(r-x)(r+s)})/(2r)$ *кратности* $(\mu + rs)(\mu + rs - r)(u^2(r+1) + u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, *и значение* $-\mu x/(rs(s-1)) = -x$ *кратности* $s^2(rs+1)/(r+s)$.

Доказательство. Собственные значения найдены как собственные значения матрицы L_1 [2, стр. 129]. Кратности посчитаны по формуле из [2, теорема 4.1.4].

Лемма 4.4.

Выполняются следующие утверждения:

(1) $(r+s)$ *делит* $(s(s+1)r(r+1), s^2(rs+1))$, *причем* $(s+1, rs+1) = (s+1, r-1)$, $(r+1, rs+1) = (r+1, s-1)$*;*

(2) $\theta_1 + \theta_2 = a_1 + a_2 - k + x = s - 1$, $\theta_1\theta_2 = -sx(r+1-x)/r$ *и* $(\theta_1 + 1)(\theta_2 + 1) = -s(x(r+1-x)/r - 1)$*;*

(3) *число* u *целое;*

(4) $s(x-1) = (s-1)r$.

Доказательство. Ввиду леммы 2.1 число $(r+s)$ делит $(s(s+1)r(r+1), s^2(rs+1))$, причем $(s+1, rs+1) = (s+1, r-1)$, $(r+1, rs+1) = (r+1, s-1)$.

Ввиду леммы 4.2 имеем $\theta_1+\theta_2=a_1+a_2-k+x=s-1$, $\theta_1\theta_2=-sx(r+1-x)/r$ и $(\theta_1+1)(\theta_2+1)=-s(x(r+1-x)/r-1)$.

Если число u нецелое, то приравняв к нулю коэффициент при u в кратностях собственных значений из леммы 4.3, получим $x(2r+2s)=(r+1)(s-1)$ и $r+s$ делит $(r+1)(s-1)-(rs+1)=s-r-2$. Отсюда $s=r+2$, $x=(r+1)/2$, r делит $x(x-1)$, поэтому $r=x=1$, противоречие.

Ввиду леммы 4.3 и утверждения (2) леммы имеем $(r(s-1)-\sqrt{(2s+r(s-1))^2+4sx(r-x)(r+s)})(r(s-1)+\sqrt{(2s+r(s-1))^2+4sx(r-x)(r+s)})/(4r^2)=-sx(r+1-x)/r$. Отсюда $(r^2(s-1)^2-(2s+r(s-1))^2-4sx(r-x)(r+s))/(4r)=-(s^2+s(s-1)r+sx(r-x)(r+s))/r=-sx(r+1-x)$ и $s(x-1)=(s-1)r$.

Завершим доказательство теоремы 3.9 в случае массивов типа (1). По лемме 4.4 имеем $r=sr'$ и $x-1=(s-1)r'$. Далее, $r=sr'$ делит $x(x-1)=((s-1)r'+1)(s-1)r'$ и s делит $r'-1$, противоречие с тем, что $r\le s^2$.

В леммах 4.5–4.6 предполагается, что граф $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим для $GQ(s,r)$ и Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с массивом пересечений типа (2). Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr,s-1)$ с собственными значениями $\kappa=s^2r,r,-s$, $\mu=s(s-1)r$ и $x=b_2+c_2$.

Лемма 4.5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_0=sx$, $b_1=(s-1)rx/(r+1)+r=r(r+1+xs-x)/(r+1)$, $b_2=x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2=x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3=(s-1)rx/(r+1)$, $(r+1)$ *делит* $(s-1)x$, s *делит* $x(r+1-x)$*;*

(2) $k_2=s^2r$, $k_3=s(r+1-x)$, $a_1=x(s+r)/(r+1)-r-1$, $a_3=x(s-(s-1)r/(r+1))=x(s+r)/(r+1)$, *в частности,* $x\le r+1-b_2$ *и* $x(s+r)\ge(r+1)^2$.

Доказательство. В формулы $b_0=(\mu+rs)x/(rs)$, $b_1=\mu x/(s(r+1))+r$, $b_2=x(rs(r+1)(s-1)-\mu x)/(rs^2(r+1))$, $c_2=x(\mu x+rs(r+1))/(rs^2(r+1))$, $c_3=\mu x/(s(r+1))$, подставим значение $\mu=s(s-1)r$.

Тогда $b_0=sx$, $b_1=(s-1)rx/(r+1)+r$, $b_2=x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2=x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3=(s-1)rx/(r+1)$. Отсюда $(r+1)$ делит $(s-1)x$, s делит $x(r+1-x)$.

Далее, $k_2=s^2r$, $k_3=s(r+1-x)$, $a_1=x(s+r)/(r+1)-r-1$, $a_3=x(s-(s-1)r/(r+1))=x(s+r)/(r+1)$. В частности, $x<r+1$, $x(s+r)\ge(r+1)^2$.

Лемма 4.6. *Для массива типа* (2) *положим* $u=\sqrt{(\mu x+r(r+1)(x(2r+s)+s(r+1)))^2-4r^3x(r+1)^2(r+s)(s+x))}$. *Тогда выполняются утверждения:*

(1) Γ *имеет следующие собственные значения: значение* $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x-u)/(2rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1)+u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$*; значение* $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x+u)/(2rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1)-u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$*; значение* $x(s-1)/(r+1)$ *кратности* $s(s+1)r(r+1)/(r+s)$*;*

(2) *число* u *целое.*

Доказательство. Собственные значения найдены как собственные значения матрицы L_1 [2, стр. 129]. Кратности посчитаны по формуле из [2, теорема 4.1.4].

Если число u нецелое, то избавиться от иррациональности в кратности можно только при $x(3r+s+2)=(r+1)^2$. В этом случае $x(r+s)=(r+1)(r+1-2x)$, противоречие с тем, что по лемме 4.5 число $x(r+s)$ не меньше $(r+1)^2$. Лемма доказана.

Из лемм 4.5–4.6 следует теорема 3.9 в случае массивов типа (2).

Глава 4

Дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны

В главе 4 изучены общие свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Перечислены массивы пересечений графов в случае, когда Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \le 11$. Найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$.

§ 4.1. Общие свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны

Приведем список допустимых массивов пересечений примитивных графов Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 из [2, стр. 425-431].

1. $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$, граф не существует по [55].

2. $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$, граф не существует по [56].

3. $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, Γ_3 – граф с параметрами (300,26,4,2), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (300,65,10,15).

4. $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$, Γ_3 – граф с параметрами (540,55,10,5), $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(11, 8)$.

5. $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, граф не существует по [7].

6. $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$, граф не существует по следствию 3.5.

7. $\{44,36,5;1,9,40\}$, Γ_3 – граф с параметрами (243,22,1,2), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (243,66,9,21).

8. $\{48,35,9;1,7,40\}$, Γ_3 – граф с параметрами (259,42,5,7), $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(6,12)$.

9. $\{49,36,5;1,4,45\}$, Γ_3 – граф с параметрами (540,49,8,4), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (540,98,16,18).

10. $\{49,36,8;1,6,42\}$, Γ_3 – граф с параметрами (400,56,6,8), $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(7,14)$.

11. $\{54,40,7;1,5,48\}$, Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(9,6)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(9,12)$.

12. $\{55,36,11;1,4,45\}$, Γ_3 – псевдогеометрический граф для $pG_2(11,10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (672,176,40,48).

13. $\{56,36,9;1,3,48\}$, Γ_3 – псевдогеометрический граф для $pG_2(14,8)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (855,182,37,39).

14. $\{63,48,10;1,8,54\}$, Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(7,9)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(7,18)$.

15. $\{65,44,11;1,4,55\}$, Γ_3 – псевдогеометрический граф для $pG_2(13,10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (924,208,42,48).

16. $\{69,56,10;1,14,60\}$, Q-полиномиальный граф, Γ_3 – граф с параметрами (392,46,0,6), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (392,115,18,40).

17. $\{74,54,15;1,9,60\}$, Q-полиномиальный граф, Γ_3 – граф с параметрами (630,111,12,21), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (630,185,40,60).

18. $\{74,55,9;1,5,66\}$, Γ_3 – граф с параметрами (1000,111,14,12), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (1000,185,30,35).

19. $\{74,63,5;1,9,70\}$, Γ_3 – граф с параметрами (630,37,4,2), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (630,111,12,21).

20. $\{77,60,13;1,12,65\}$, Q-полиномиальный граф, Γ_3 – граф с параметрами (540,77,4,12), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (540,154,28,50).

21. $\{80,63,11;1,9,70\}$, Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(8,10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдо $pG_2(8,20)$.

22. $\{87,66,16;1,11,72\}$, Q-полиномиальный граф, Γ_3 – граф с параметрами (726,116,10,20), $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(8,20)$.

23. $\{90,78,7;1,13,84\}$, Γ_3 – граф с параметрами (676,45,2,3), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (676,135,14,30).

24. $\{99,80,12;1,10,88\}$, Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(9,11)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(9,22)$.

25. $\{119,96,18;1,16,102\}$, граф не существует по [56].

26. $\{119,100,15;1,20,105\}$, Q-полиномиальный граф, Γ_3 – граф с параметрами (800,85,0,10), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (800,204,28,60).

Теорема 4.1 [80]. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_1 = rc_2$, $b_2 = a_3+1$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$, $c_3 = r(c_2+1)$, $a_1 = a_3+r-1$, $k_2 = kr$, $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$, $p^1_{33} = a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu(\Gamma_3)$ *и Γ имеет массив пересечений* $\{r(c_2+1)+a_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$;

(2) *если* $a_3 = \alpha(c_2+1)$, *то* $k = (r+\alpha)(c_2+1)$, Γ_3 *— псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(r+\alpha, \alpha(c_2+1))$ *и* $k_3 = (r+\alpha)(\alpha(c_2+1)+1)$;

(3) *если* $\alpha = 1$, *то Γ_3 является псевдогеометрическим графом для* $GQ(r+1, c_2+1)$, *граф Γ имеет массив пересечений* $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2+1)\}$, *собственные значения* $\theta_1 = c_2+r+1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -c_2-1$ *и $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для* $pG_2(r+1, 2c_2+2)$.

Докажем теорему 4.1.

Лемма 1.1 *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_1 = rc_2$, $b_2 = a_3+1$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$, $c_3 = r(c_2+1)$, $a_1 = a_3+r-1$, $k_2 = kr$, $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$ *и* $p^1_{33} = a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu(\Gamma_3)$;

(2) *если* $a_3 = \alpha(c_2+1)$, *то* $k = (r+\alpha)(c_2+1)$, Γ_3 *— псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(r+\alpha, \alpha(c_2+1))$ *и* $k_3 = (r+\alpha)(\alpha(c_2+1)+1)$;

(3) *если* $\alpha = 1$, *то Γ_3 является псевдогеометрическим графом для* $GQ(r+1, c_2+1)$, *граф Γ имеет массив пересечений* $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2+1)\}$, *собственные значения* $\theta_1 = c_2+r+1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -c_2-1$ *и $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для* $pG_2(r+1, 2c_2+2)$.

Доказательство. По теореме 3.6 имеем $b_2 = a_3+1$ и $b_1 = rc_2$, $r \geq 2$. По [2, предложение 4.2.17] получим $c_3(a_3+a_2-a_1) = b_1a_2$. Отсюда $c_3(r-1) = r(c_3-c_2-1)$, поэтому $c_3 = r(c_2+1)$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$ и $a_1 = a_3+r-1$. Таким образом, Γ имеет массив пересечений $\{a_3+c_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$.

Теперь $k_2 = kr$, $k_3 = (a_3+c_3)(a_3+1)/(c_2+1)$, и с учетом равенства $kp^1_{33} = k_3a_3$ имеем $p^1_{33}(c_2+1) = a_3(a_3+1)$. Утверждение (1) доказано.

Если c_2+1 делит a_3, $a_3 = \alpha(c_2+1)$, то $k = (r+\alpha)(c_2+1)$, Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha+r, \alpha(c_2+1))$ и $k_3 = (\alpha+r)(\alpha(c_2+1)+1)$.

В случае $\alpha = 1$ граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(r+1, c_2+1)$, граф Γ имеет массив пересечений $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2+1)\}$, по [56] собственные значения графа Γ равны $\theta_1 = c_2+r+1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -c_2-1$ и $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(r+1, 2c_2+2)$. Лемма доказана.

Из леммы 1.1 следует теорема 4.1.

§ 4.2. Дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2, Γ_3 сильно регулярны и Γ_3 не содержит треугольников

В списке массивов пересечений в § 4.1 под номерами 16 и 26 имеются массивы, которым отвечает сильно регулярный граф Γ_3 без треугольников. В следующей теореме найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2, Γ_3 сильно регулярны, Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \leq 11$.

Теорема 4.2 [80]. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Если Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \leq 11$, то Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$, $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ или $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r = 4, 6, 10, 16, 19, 24, 28, 40, 46, 52, 58, 60, 70, 79$.*

Докажем теорему 4.2. Пусть Δ является сильно регулярным графом без треугольников, изоморфным графу Γ_3 для дистанционно регулярного графа Γ. Тогда либо Δ — полный двудольный граф, либо Δ — граф Мура, либо $1 < \mu(\Delta) < k$. Положим $\mu(\Delta) = \mu'$, $k(\Delta) = k_3$.

Лемма 2.1 *Если граф Δ является полным двудольным или графом Мура, то Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$.*

Доказательство. Если Δ — полный двудольный граф, то $\bar{\Delta}$ — объединение двух изолированных клик, противоречие.

Пусть Δ — граф Мура. Ясно, что пятиугольник не возникает.

Если Δ — граф Петерсена, то $\bar{\Delta}$ — граф с параметрами (10,6,3, 4) и неглавными собственными значениями $1, -2$, поэтому $\bar{\Delta}$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(3, 1)$. Для графа Γ имеем $c_3 = 2$, $k = 3$ и $b_1 = c_2$, поэтому Γ — граф Тэйлора, противоречие.

Если Δ — граф Хофмана-Синглтона, то $\bar{\Delta}$ — псевдогеометрический граф для $pG_{12}(14, 2)$ с параметрами (50,42,35,36) и неглавными собственными значениями $2, -3$. Для графа Γ имеем $c_3 = 12$, $k = 14$, $b_1 = 2c_2$ и $k_2 = 28$. Далее, $k_3 = 7$, $b_2 = 3$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$.

Если Δ — граф с параметрами (3250,57,0,1), то $\bar{\Delta}$ имеет $\bar{\mu} = 3136$ и неглавные собственными значениями $7, -8$, поэтому $\bar{\Delta}$ — псевдогеометрический граф для $pG_{392}(399, 7)$. Для графа Γ получим $c_3 = 392$, $k = 399$ и $b_1 = 7c_2$. Далее, $k_2 = 2793$, $b_2 = 8$ и Γ имеет массив пересечений $\{399, 7c_2, 8; 1, c_2, 392\}$, противоречие с тем, что указанный массив пересечений не является допустимым.

Лемма 2.2 *Если* $1 < \mu(\Delta) < k(\Delta)$, *то выполняются следующие утверждения:*

(1) Δ *имеет неглавные собственные значения* r, $-(\mu' + r)$, $k_3 = (r + 1)\mu' + r^2$, *причем* μ' *делит* $r^2(r-1)$ *и* $\mu + 2r$ *делит* $r(r+1)(r+2)(r+3)$;

(2) $\bar{\Gamma}_3$ — *псевдогеометрический граф для* $pG_{c_3}(k, r)$, $p^3_{33} = 0$, *и* $k = k_3(\mu' + r - 1)/\mu'$;

(3) *если* Γ_2 *является сильно регулярным графом, то* $\mu' = a_3 + 1 - r$, $k_3 = a_3(r+1)+1$, $k = (a_3(r+1)+1)a_3/(a_3+1-r)$, $c_2+1 = (a_3+1)a_3/(a_3+1-r)$, *параметры графа* $\bar{\Gamma}_2$ *равны* $k(\bar{\Gamma}_2) = (a_3(r+1)+1)(1+a_3/(a_3+1-r))$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = 2a_3$, $\mu(\bar{\Gamma}_2) = c_2 - r + 3(a_3+1)$;

(4) $\bar{\Gamma}_2$ *имеет неглавные собственные значения* $r-1$, $-(a_3+c_2+2)$.

Доказательство. Пусть Δ — граф без треугольников с $1 < \mu(\Delta) < k$. Тогда Δ имеет неглавные собственные значения r, $-(\mu' + r)$ и $k_3 = (r + 1)\mu' + r^2$, причем μ' делит $r^2(r^2-1)$, $\mu + 2r$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$.

Теперь $\bar{\Delta}$ имеет неглавные собственные значения $\mu' + r - 1$, $-(r+1)$ и $\mu(\bar{\Delta}) = v(\Delta) - 2k_3 = 1 - k_3 + k_3(k_3-1)/\mu'$ делится на $r+1$. Отсюда $\mu(\bar{\Delta})$ сравнимо с $r^2(r^2-1)/\mu'$ по модулю $r+1$ и μ' делит $r^2(r-1)$.

Пусть $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{c_3}(k, t)$. Тогда $p^3_{33} = 0$, $r = t$ и $k_3(k_3-1)/\mu' = k(r+1) = ((r+1)\mu' + r^2)((r+1)\mu' + r^2 - 1)/\mu'$, поэтому $k = k_3(\mu' + r - 1)/\mu'$.

Если Γ_2 является сильно регулярным графом, то по лемме 1.4 имеем $\mu' = a_3(a_3+1)/(c_2+1)$ и $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$. Отсюда $k = a_3k_3/(a_3+1-r) = k_3(c_2+1)/(a_3+1)$, $\mu' = a_3+1-r$ и $k_3 = (r+1)(a_3+1-r)+r^2 = a_3(r+1)+1$. Далее, $k = (a_3(r+1)+1)a_3/(a_3+1-r)$ и $c_2+1 = (a_3+1)a_3/(a_3+1-r)$.

Параметры сильно регулярного графа $\bar{\Gamma}_2$ равны $k(\bar{\Gamma}_2) = k + k_3 = (a_3(r+1)+1)(1+a_3/(a_3+1-r))$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = p^1_{11}+p^1_{33} = 2a_3$, $\mu(\bar{\Gamma}_2) = p^2_{11}+p^2_{33}+2p^2_{13} = c_2+2b_2+(k_3-b_2-p^2_{23})$, где $p^2_{23} = b_2(a_3+a_2-a_1)/c_2 = (r-1)(a_3+1)$. Отсюда $\mu(\bar{\Gamma}_2) = c_2 - r + 3(a_3+1)$.

Заметим, что $\lambda(\bar{\Gamma}_2) - \mu(\bar{\Gamma}_2) = (r-1) - (a_3+c_2+2)$, $k(\bar{\Gamma}_2) - \mu(\bar{\Gamma}_2) = (a_3r + a_3 + 1)(2a_3 + 1 - r)/(a_3 + 1 - r) - c_2 + r - 3(a_3+1)$. Так как $(r-1)(a_3+c_2+2) = a_3r+a_3+1+a_3(a_3r+a_3+1)/(a_3+1-r)-c_2+r-3(a_3+1)$ и $r(c_2+1) = a_3(a_3r+a_3+1)/(a_3+1-r)-a_3 = k-a_3$, то $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$, $-(a_3+c_2+2)$.

Лемма 2.3 *Пусть* Γ_2 *является сильно регулярным графом. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *число* μ' *не равно* 2 *и не равно* 4*;*

(2) *если* $\mu' = 6$*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$, $\{5269, 5208, 34; 1, 186, 5236\}$, $\{13845, 13760, 46; 1, 344, 13800\}$, $\{20383, 20286, 52; 1, 441, 20332\}$, $\{28709, 28600, 58; 1, 550, 28652\}$, $\{39039, 38918, 64; 1, 671, 38976\}$, $\{42965, 42840, 66; 1, 714, 42900\}$, $\{66575, 66430, 76; 1, 949, 66500\}$, $\{94094, 93931, 85; 1, 1189, 94010\}$.

Доказательство. По уловию целочисленности для $pG_{c_3}(k, r)$ число $c_3(a_3 + r + 1)$ делит $k(k + 1)r(r + 1)$.

Пусть $\mu' = 2$. Тогда $k_3 = (r+1)^2+1$, $r+1$ не делится на 4, $a_3 = r+1$, и из равенства $a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu'$ получим $c_2+1 = (r+1)(r+2)/2$, $c_2 = r(r+3)/2$ и $k = ((r+1)^2+1)(r+1)/2$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{((r + 1)^2 + 1)(r + 1)/2, r^2(r + 3)/2, r + 2; 1, r(r + 3)/2, r(r + 1)(r + 2)/2\}$

Далее, $k(\bar{\Gamma}_2) = ((r + 1)^2 + 1)(r + 3)/2$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = 2(r + 1)$ и $\mu(\bar{\Gamma}_2) = r(r + 1)/2 + 3(r + 2) = (r + 3)(r + 4)/2$.

По лемме 2.2 неглавные собственные значения графа $\bar{\Gamma}_2$ равны $r - 1$ и $-(r + 2)(r + 3)/2$, причем кратность $r - 1$ равна $(r + 1)(r^2 + 2r + 2)(r + 3)(r^2+3r+4)/(2(r^2+7r+4))$. Заметим, что $(r^2+7r+4, r+1) = (r+1, 6r+4)$ делит 2, $(r^2+7r+4, r+3) = (r+3, 4r+4)$ делит 8, $(r^2+7r+4, r^2+2r+2) = (5r + 2, r^2 + 2r + 2) = 2(5r + 2, 4r + 5)$ делит 34, $(r^2 + 7r + 4, r^2 + 3r + 4) = (4r, r^2 + 3r + 4) = 4(r, 3r + 4)$ делит 16. Отсюда $r^2 + 7r + 4$ делит $2^8 \cdot 17$ и $r = 3, 5, 20$. В любом случае нарушается условие целочисленности кратностей собственных значений графа Γ.

Пусть $\mu' = 4$. Тогда $k_3 = (r + 2)^2$, $a_3 = r + 3$, и из равенства $a_3(a_3 + 1)/(c_2 + 1) = \mu'$ получим $c_2 + 1 = (r + 3)(r + 4)/4$, $c_2 = (r^2 + 7r + 8)/4$ и $k = (r + 2)^2(r + 3)/4$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{(r + 2)^2(r + 3)/4, r(r^2 + 7r + 8)/4, r + 4; 1, (r^2 + 7r + 8)/4, r(r + 3)(r + 4)/4\}$. Далее, $k(\bar{\Gamma}_2) = (r + 2)^2(r + 7)/4$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = 2(r + 3)$ и $\mu(\bar{\Gamma}_2) = (r + 7)(r + 8)/4$.

По лемме 2.2 неглавные собственные значения графа $\bar{\Gamma}_2$ равны $r - 1$ и $-(r + 7)(r + 4)/4$. Кратность $r - 1$ равна $(r + 2)^2(r + 7)^2(r^2 + 5r + 8)/(4(r^2 + 15r + 24))$, причем $(r^2 + 15r + 24, r + 2) = (13r + 24, r + 2)$ делит 2, $(r^2+15r+24, r+7) = (8r+24, r+7)$ делит 32, $(r^2+15r+24, r^2+5r+8) = 2(5r+8, r^2+5r+8)$ делит 16. Далее, кратность собственного значения θ_2 графа Γ равна $r(r+2)^2(r^2+3r+4)/(r^2+15r+24)$, (r^2+5r+8, r) делит 8, $(r^2 + 15r + 24, r^2 + 3r + 4) = (12r + 20, r^2 + 3r + 4) = 4(3r + 5, r + 3)$ делит 16. Отсюда $r^2 + 15r + 24$ делит 2^9. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть $\mu' = 6$. Тогда $k_3 = (r+3)^2-3$, $r-1$ не делится на 4, $a_3 = r+5$, 6 делит $(r+5)(r+6)$ и из равенства $a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu'$ получим $c_2+1 = (r+5)(r+6)/6$, $c_2 = (r+3)(r+8)/6$ и $k = (r+5)((r+3)^2-3)/6$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$.

Далее, $k(\bar{\Gamma}_2) = (r^2+6r+6)(r+11)/6$, $\lambda(\bar{\Gamma}_2) = 2(r+5)$ и $\mu(\bar{\Gamma}_2) = (r+11)(r+12)/6$. По лемме 2.2 неглавные собственные значения графа $\bar{\Gamma}_2$ равны $r-1$ и $-(r+6)(r+11)/6$. Кратность $r-1$ равна $(r+5)(r^2+6r+6)(r+11)(r+4)/(6(r+20))$, причем $(r+20, r+5)$ делит 15, $(r+20, r+11)$ делит 9, $(r+20, r^2+6r+6) = 2(r+20, 7r-3)$ делит 286, $(r+20, r+4)$ делит 16. Отсюда $r+20$ делит $32 \cdot 27 \cdot 55 \cdot 13$. Далее, кратность собственного значения θ_2 графа Γ равна $r(r+2)(r^2+6r+6)/(r+20)$, причем $(r+20, r)$ делит 20, $(r+20, r+2)$ делит 18. Отсюда $r+20$ делит $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ и Γ имеет один из следующих массивов пересечений: $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$, $\{5269, 5208, 34; 1, 186, 5236\}$, $\{13845, 13760, 46; 1, 344, 13800\}$, $\{20383, 20286, 52; 1, 441, 20332\}$, $\{28709, 28600, 58; 1, 550, 28652\}$, $\{39039, 38918, 64; 1, 671, 38976\}$, $\{42965, 42840, 66; 1, 714, 42900\}$, $\{66575, 66430, 76; 1, 949, 66500\}$, $\{94094, 93931, 85; 1, 1189, 94010\}$.

Лемма 2.4 *Пусть Γ_2 является сильно регулярным графом. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $\mu' = r$, то Γ имеет массив пересечений $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$;*

(2) *если $6 \neq \mu' \leq 11$, то Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.*

Доказательство. По уловию целочисленности для $pG_{c_3}(k, r)$ число $c_3(a_3+r+1)$ делит $k(k+1)r(r+1)$.

Пусть $\mu' = r$. Тогда $a_3 = 2r-1$, $k_3 = 2r^2+r$, $k = (2r+1)(2r-1)$ и $c_2+1 = 4r-2$. По уловию целочисленности для $pG_{c_3}(k, r)$ число $3(4r-3)$ делит $4r^2(4r^2-1)(r+1)$. Так как $(4r-3, r)$ делит 3, $(4r-3, 2r-1) = 1$, $(4r-3, 2r+1)$ делит 5, $(4r-3, r+1)$ делит 7, то $4r-3$ делит 105. Если $4r-3 = 7$, то $r = 5/2$, если $4r-3 = 35$, то $r = 19/2$, а если $4r-3 = 15$, то $r = 9/2$, противоречие.

Далее, $k(\bar{\Gamma}_2) = (2r+1)(3r-1)$ и $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(6r-2)$, причем кратность $r-1$ равна $(2r-1)(2r+1)(3r-1)(2r+3)/(7r-3)$. Так как $(7r-3, 2r-1) = 1$, $(7r-3, 2r+1)$ делит 13, $(7r-3, 3r-1)$ делит 2, $(7r-3, 2r+3)$ делит 27, то $7r-3$ делит $26 \cdot 27$.

Если $4r-3 = 5$, то $7r-3 = 11$ не делит $26 \cdot 27$, а если $4r-3 = 105$, то $7r-3 = 186$ не делит $26 \cdot 27$, противоречие. Если $4r-3 = 21$, то

$r=6$, Γ имеет массив пересечений $\{143,126,12;1,21,132\}$, Γ_3 имеет параметры (1080,78,0,6) и $\bar\Gamma_2$ имеет параметры (1080,221,22,51) и неглавные собственные значения $5,-34$.

Пусть $\mu'=3$. Тогда $k_3=r^2+3r+3$, причем 3 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+3$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+3$ делит 9 и $r=3$, противоречие с утверждением (1).

Пусть $\mu'=5$. Тогда $k_3=r^2+5r+5$, причем 5 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+5$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+5$ делит 15 и $r=5$, противоречие с утверждением (1).

Пусть $\mu'=7$. Тогда $k_3=r^2+7r+7$, причем 7 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+7$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+7$ делит $3\cdot 5\cdot 7$ и $r=7,14,49$. В случае $r=7$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $a_3=r+6$, $k=(r+6)(r^2+7r+7)/7$, $c_2+1=(r+6)(r+7)/7$ и $c_2=(r^2+13r+35)/7$. Имеем $k(\bar\Gamma_2)=(r^2+7r+7)(r+13)/7$, $\bar\Gamma_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(r+7)(r+13)/7$, причем кратность $r-1$ равна $(r+6)(r^2+7r+7)(r+13)(r^2+8r+14)/(7(r^2+27r+84))$. При $r=14$ кратность равна $20\cdot 27\cdot 301\cdot 322/(14\cdot 7\cdot 47)$, а при $r=49$ число $49\cdot 61$не делит $(r+6)(r^2+7r+7)(r+13)(r^2+8r+14)$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть $\mu'=8$. Тогда $k_3=r^2+8r+8$, причем 8 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+8$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $r+4$ делит 24. Далее, $a_3=r+7$, $k=(r+7)(r^2+8r+8)/8$, $c_2+1=(r+7)(r+8)/8$, $c_2=(r^2+15r+48)/8$ и $r=8$, противоречие с утверждением (1).

Пусть $\mu'=9$. Тогда $k_3=r^2+9r+9$, причем 9 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+9$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+9$ делит $27\cdot 5\cdot 7$. В случае $r=9$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $k=(r^2+9r+9)(r+8)/9$, $a_3=r+8$, $c_3=r(c_2+1)=r(r+8)(r+9)/9$, $c_2+1=(r+8)(r+9)/9$ и $c_2=(r^2+17r+63)/9$. Если r не делится на 3, то $2r+9=35$, $r=13$ и $c_2+1=21\cdot 22/9$, противоречие. Если же r делится на 3, то $r+9$ делится на 9 и r делится на 9. Далее, $k(\bar\Gamma_2)=(r^2+9r+9)(r+17)/9$, $\bar\Gamma_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(r+9)(r+17)/9$, причем кратность $r-1$ равна $(r+8)(r^2+9r+9)((r^2+9r+9)(r+17)/9+(r+9)(r+17)/9)/(r^2+35r+144)$. Заметим, что $(r+8,r^2+35r+144)=(r+8,3r+16)$ делит 8, $(r^2+35r+144,r^2+9r+9)=(r^2+9r+9,26r+135)$, $(r+17,r^2+35r+144)=(r+17,2r+16)$ делит 2, $(r^2+35r+144,r^2+10r+18)=(25r+126,r^2+10r+18)$.

Если $2r+9=45$, то $r=18$, $r^2+35r+144=9\cdot 122$, $r^2+9r+9=9\cdot 55$ и $r^2+10r+18=9\cdot 58$, противоречие.

Если $2r+9=63$, то $r=27$, $r^2+35r+144=9\cdot 202$, $r^2+9r+9=9\cdot 109$ и $r^2+10r+18=9\cdot 113$, противоречие.

Если $2r+9=315$, то $r=153=9\cdot 17$, $r^2+35r+144=9\cdot 4\cdot 11\cdot 73$, $r^2+9r+9=9(4\cdot 727)$ и $r^2+10r+18=9(2753)$, противоречие.

Если $2r+9=135$, то $r=63$, $r^2+35r+144=243\cdot 26$, $r^2+9r+9=9\cdot 505$ и $r^2+10r+18=9\cdot 513$, противоречие.

Если $2r+9=189$, то $r=90$, $r^2+35r+144=54\cdot 211$, $r^2+9r+9=9\cdot 991$ и $r^2+10r+18=9\cdot 1002$, противоречие.

Если $2r+9=945$, то $r=468=9\cdot 52$, $r^2+35r+144=9\cdot 26172=81\cdot 4\cdot 727$, $r^2+9r+9=9(50+350+29+1)=9(5\cdot 4561)$ и $r^2+10r+18=9(4\cdot 837)$, противоречие.

Пусть $\mu'=10$. Тогда $k_3=r^2+10r+10$, причем 10 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+10$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $r+5$ делит $5\cdot 24$. В случае $r=10$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $k=(r^2+10r+10)(r+9)/10$, $a_3=r+9$, $c_3=r(c_2+1)=r(r+9)(r+10)/10$, $c_2+1=(r+9)(r+10)/10$ и $c_2=(r^2+19r+80)/10$. Если r не делится на 5, то $r+5$ делит 24, $r=1$ и Γ имеет массив пересечений $\{21,10,11;1,10,11\}$, противоречие. Значит, r делится на 5. Имеем $k(\bar{\Gamma}_2)=(r^2+10r+10)(r+19)/10$, $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(r+19)(r+10)/10$, причем кратность $r-1$ равна $(r^2+10r+10)((r^2+10r+10)(r+19)/10+(r+19)(r+10)/10)/(r+21)$. Заметим, что $(r+21,r^2+10r+10)=(r+21,11r-10)$ делит 241, $(r+21,r+19)$ делит 2 и $(r+21,r^2+11r+20)=(r+21,10r-20)$.

Если $r+5=10$, то $r=5$ и $r+21=26$ не делит $241\cdot 60$. Если $r+5=20$, то $r=15$ и $r+21=36$ не делит $241\cdot 260$. Если $r+5=40$, то $r=35$ и $r+21=56$ не делит $241\cdot 66$. Если $r+5=60$, то $r=55$ и $r+21=76$ не делит $241\cdot 106$. Если $r+5=120$, то $r=115$ и $r+21=136=8\cdot 17$ не делит $241\cdot 268$.

Если $r+5=30$, то $r=25$ и $r+21=46$ делит $241\cdot 46$. Итак Γ имеет массив пересечений $\{3009,2950,35;1,118,2975\}$, противоречие с тем, что кратность некоторого собственного значения графа не является целым числом.

Пусть $\mu'=11$. Тогда $k_3=r^2+11r+11$, причем 11 делит $r^2(r^2-1)$, $2r+11$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$. Поэтому $2r+11$ делит $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11$. В случае $r=11$ получим противоречие с утверждением (1). Далее, $a_3=r+10$, $k=(r+10)(r^2+11r+11)/11$, $c_2+1=(r+10)(r+11)/11$, $k(\bar{\Gamma}_2)=(r^2+11r+11)(r+11)/11$ и $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$, $-(r+11)(r+21)/11$. Если r не делится на 11, то $2r+11$ делит $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11$ и $r-1$ делится на 11. Отсюда $r=12$.

Имеем $k(\bar{\Gamma}_2)=(r^2+11r+11)(r+21)/11$, $\bar{\Gamma}_2$ имеет неглавные собственные значения $r-1$ и $-(r+11)(r+21)/11$, причем кратность $r-1$ равна $(r+10)(r^2+11r+11)((r^2+11r+11)(r+21)/11+(r+11)(r+21)/11)/(r^2+43r+220)$. Заметим, что $(r^2+43r+220,r+10)=(r+10,33r+220)$ делит 110, $(r^2+43r+220,r^2+11r+11)=(32r+209,r^2+11r+11)$, $(r^2+43r+220,r+21)=(r+21,22r+220)$ делит $22\cdot 11$ и $(r^2+43r+220,r^2+12r+22)=(31r+198,r^2+12r+22)$.

При $r = 12$ имеем $r^2 + 43r + 220 = 880$ и 8 не делит $22 \cdot 110$. Значит, r делится на 11.

Если $2r + 11 = 55$, то $r = 22$, $r^2 + 43r + 220 = 22 \cdot 75$ и 25 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Если $2r + 11 = 77$, то $r = 33$, $r^2 + 43r + 220 = 11 \cdot 162$ и 81 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Если $2r + 11 = 99$, то $r = 44$, $r^2 + 43r + 220 = 44 \cdot 92$ и 23 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Если $2r + 11 = 165$, то $r = 77$, $r^2 + 43r + 220 = 11 \cdot 8 \cdot 83$ и 8 не делит $4(31r + 198)(32r + 209)$.

Если $2r+11 = 231$, то $r = 110$, $r^2+43r+220 = 110 \cdot 5 \cdot 31$ и 31 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Если $2r + 11 = 1155$, то $r = 572$, $r^2 + 43r + 220 = 22 \cdot 1700$ и 17 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Если $2r + 11 = 495$, то $r = 242$, $r^2 + 43r + 220 = 220 \cdot 343$ и 49 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Если $2r + 11 = 693$, то $r = 341$, $r^2 + 43r + 220 = 44 \cdot 11 \cdot 271$ и 271 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$.

Если $2r + 11 = 3465$, то $r = 1727 = 11 \cdot 157$, $r^2 + 43r + 220 = 110 \cdot 27791$ и 277911 не делит $(31r + 198)(32r + 209)$. Лемма доказана.

Из лемм 2.3–2.4 следует теорема 4.2.

§ 4.3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$

Если в заключении теоремы 4.2 имеем $r = 4$, то получим граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, автоморфизмы которого найдены в [77]. Такой граф имеет спектр $69^1, 13^{69}, -1^{276}, -15^{46}$ и $1+69+276+46 = 392$ вершины.

Теорема 4.3 [77]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 23\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, либо $p = 7$, $\alpha_3(g) = 98s$, $\alpha_2(g) = 198t$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ и $\alpha_2(g) = 56t$;

(2) $|\Omega| = 1$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$ и $\alpha_3(g) = 46$;

(3) $|\Omega| = 21s + 14$, $p = 3$, $s = 0, 1, 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 84t$.

Следствие 4.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. Если группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, то либо $|G| = 8 \cdot 49$ и Γ является графом Кэли, либо $G = Z(G) \times L$, $Z(G) \cong Z_7$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ и L_a — силовская 3-подгруппа из L, либо G содержит подгруппу индекса 2, изоморфную $Z_7 \times L_2(7)$, $|L_a| = 6$ и $G/S(G) \cong PGL_2(7)$.*

Доказательство теоремы 4.3 опирается на следующие результаты.

Теорема 4.4 [77]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(392, 46, 0, 6)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 98s$*, либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 28t$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$*,* $p = 23$ *и* $\alpha_1(g) = 46$*, либо* $n = 2$*,* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 70l - 20$*;*

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $4 \le m \le 56$*,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 28l - 10m$*;*

(4) Ω *является объединением* l *изолированных ребер,* $l = 7, 28$*,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 0$*;*

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \le 5$*.*

Теорема 4.5 [77]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(392, 115, 18, 40)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 0, 196$*, либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 56t$*;*

(2) $|\Omega| = 1$*,* $p = 23$ *и* $\alpha_1(g) = 115$*;*

(3) Ω *является полным двудольным графом* $K_{m,n}$*,* $p = 3$*, числа* m, n *сравнимы с* 1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_1(g) = 84l + 3(m + n)$*;*

(4) *если* f *— элемент порядка* 7 *из* G*, то* $|C_G(f)|$ *не делится на* 9*.*

Заметим, что окрестность любой вершины в графе с параметрами $(392, 115, 18, 40)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, а вторая окрестность вершины сильно регулярна с параметрами $(276, 75, 10, 24)$. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(115, 18, 1, 3)$ и $(276, 75, 10, 24)$ найдены в [58] и [59] соответственно.

Предложение 4.1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(115, 18, 1, 3)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* G*,* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 23\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 15, 55$*, либо* $p = 23$ *и* $\alpha_1(g) = 23$*;*

(2) Ω *является* l*-кокликой,* $1 \le l \le 13$*,* $p = 3$*,* l *сравнимо с* 1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_1(g) = 24s + 23 - 5l \ne 0$*;*

(3) $\Omega = a^{\perp}$ *для некоторой вершины* $a \in \Omega$ *и* $p = 2$*.*

Предложение 4.2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(276, 75, 10, 24)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* G*,* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф, либо* $p = 23$, $\alpha_1(g) = 92$, *либо* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 60s + 12$, *либо* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 40s + 12$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 100t + 75$, *либо* $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 40t + 24$;

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $3 \leq l \leq 48$, l *делится на* 3, $p = 3$, *и* $\alpha_1(g) = 60t + 3l + 12$;

(4) Ω *содержит ребро и является объединением* m *изолированных клик,* $m \geq 2$, $p = 2$, *и порядок максимальной клики в* Ω *равен* 2 *или* 4;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p = 7$ *и* $|\Omega| \in \{38, 45, 52, 59\}$, *либо*

(*ii*) $p = 5$, $|\Omega| = 5r + 1$, $4 \leq r \leq 17$, *либо*

(*iii*) $p = 3$, $|\Omega| = 3s$, $3 \leq s \leq 27$, *либо*

(*iv*) $p = 2$, $|\Omega| = 2t$, $4 \leq t \leq 46$.

Докажем теорему 4.4. В леммах 3.1–3.3 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(392, 46, 0, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $46^1, 4^{276}, -10^{115}$. Следующая лемма использует метод Хигмена.

Лемма 3.1. *Если* φ_1 — *характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* 276, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\varphi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/14 - 4$ *и* $\varphi_1(g) - 276$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 276 & 24 & -4 \\ 115 & -25 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi_1(g) = (69\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/98$. Подставляя $\alpha_2(g) = 392 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/14 - 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2.2 главы 2.

Лемма 3.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω — *пустой граф, то либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 98s$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 28t$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n = 1$, $p = 23$ *и* $\alpha_1(g) = 46$, *либо* $n = 2$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 70l - 20$;

(3) *если* Ω *является* m*-кокликой,* $m \geq 2$, *то* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 28l - 10m$;

(4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением изолированных клик, то* $p = 3$, Ω *является объединением* l *изолированных ребер,* $l = 7, 28$ *и* $\alpha_1(g) = 0$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $392 = 8 \cdot 49$, то $p = 2, 7$.

Если $p = 7$, то число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 4$ сравнимо с -4 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 98s$.

Если $p = 2$, то число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28t$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 46 и 345, поэтому $p = 23$. Теперь $\varphi_1(g) = (10 + \alpha_1(g))/14 - 4$ и $\alpha_1(g) = 46$.

Если $n = 2$, a, b — две вершины из Ω, то Γ содержит по 45 вершин из $[a] - \{b\}$, $[b] - \{a\}$ и 300 вершин вне $[a] \cup [b]$, поэтому p делит 45 и 345, $p = 3, 5$. В случае $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 0$ и $\varphi_1(g) = 20/14 - 4$, противоречие. В случае $p = 5$ имеем $\varphi_1(g) = (20 + \alpha_1(g))/14 - 4$ и $\alpha_1(g) = 70l - 20$.

Пусть Ω является m-кокликой, $m \geq 2$. Если a, b — две вершины из Ω, то Γ содержит 6 вершин из $[a] \cap [b]$, по 40 вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и 304 вершины вне $a^\perp \cup b^\perp$, поэтому p делит 6, 40 и $306 - m$. Отсюда $p = 2$. Далее, число $\varphi_1(g) = (10m + \alpha_1(g))/14 - 4$ четно и $\alpha_1(g) = 28l - 10m$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Если a, b — две смежные вершины из Ω, то p делит 6 и 45, поэтому $p = 3$, Ω является объединением изолированных ребер, $\alpha_1(g) = 0$ и число $\varphi_1(g) = 10\alpha_0(g)/14 - 4$ делится на 3. Отсюда $10\alpha_0(g) = 42s + 14$, $s = 5t + 3$ и $\alpha_0(g) = 21t + 14$, $t = 0, 2$.

Лемма 3.3. *Если Ω содержит геодезический 2-путь, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $p \leq 5$, *в случае* $p = 5$ *имеем* $|\Omega| \in \{7, 12, ..., 52\}$ *и степень вершины в* Ω *равна* $6, 11, 16, 21$*;*

(2) *если* $p = 3$, *то* $\alpha_1(g) = 0$ *и* $\alpha_0(g) \in \{14, 35, 56\}$*;*

(3) *если* $p = 2$, *то* $|\Omega| \in \{4, 6, ..., 56\}$ *и степень вершины в* Ω *равна* $2, 4, ..., 36$.

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Если $p > 5$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 0, 6)$, Ω имеет неглавные собственные значения r, $-(6 + r)$ и $k' = 6(r + 1) + r^2$, причем 6 делит $r^2(r^2 - 1)$. Если $r = 1$, то Ω имеет параметры $(40, 13, 0, 6)$, противоречие, а если $r = 2$, то Ω имеет параметры $(100, 22, 0, 6)$. В этом случае число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $100 \cdot 24$, противоречие с тем, что вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из Ω.

Пусть $p = 5$. Тогда $\mu_\Omega \in \{1, 6\}$, $|\Omega| \in \{7, 12, ..., 52\}$ и степень вершины в Ω равна $6, 11, 16, 21$.

Пусть $p = 3$. Тогда $\mu_\Omega \in \{3, 6\}$, $|\Omega| \in \{8, 11, ..., 56\}$ и степень вершины в Ω равна $3, 6, ..., 21$. Далее, $\alpha_1(g) = 0$, число $\varphi_1(g) = 5\alpha_0(g)/7 - 4$ делится на 3, $5\alpha_0(g) = 7(3s + 1)$ и $s = 5t + 3$. Отсюда $\alpha_0(g) \in \{14, 35, 56\}$.

Пусть $p=2$. Тогда $\mu_\Omega \in \{2,4,6\}$, $|\Omega| \in \{4,6,...,56\}$ и степень вершины в Ω равна $2,4,...,36$. Лемма доказана.

Из лемм 3.2–3.3 следует теорема 4.4.

Докажем теорему 4.5. В леммах 3.4–3.6 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(392,115,18,40)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $115^1, 3^{345}, -25^{46}$. Так как окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (115,18,1,3), то окрестность любой вершины в μ-подграфе является 3-кокликой и порядок клики в Γ не больше 4. Далее, порядок коклики в Γ не больше $392\cdot 5/28=70$. Следующая лемма использует метод Хигмена.

Лемма 3.4. *Если ψ_2 — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 46, то $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\psi_2(g)=(3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/28+4$ и $\psi_2(g)-46$ делится на p.*

Доказательство. Имеем
$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 345 & 9 & -5 \\ 46 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\psi_2(g)=(23\alpha_0(g)-5\alpha_1(g)+2\alpha_2(g))/196$. Подставляя $\alpha_2(g)=392-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\psi_2(g)=(3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/28+4$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2.1 главы 2.

Лемма 3.5. *Если Ω — пустой граф, то либо $p=7$ и $\alpha_1(g)=0,196$, либо $p=2$ и $\alpha_1(g)=56t$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $392=8\cdot 49$, то $p=2,7$.

Если $p=7$, то число $\psi_2(g)=\alpha_1(g)/28+4$ сравнимо с 4 по модулю 7 и $\alpha_1(g)=196s$. Если $\alpha_1(g)=392$, то каждая $\langle g\rangle$-орбита на множестве вершин является 7-кликой, противоречие.

Если $p=2$, то число $\psi_2(g)=\alpha_1(g)/28+4$ четно, поэтому $\alpha_1(g)=56t$.

Лемма 3.6. *Если Ω — непустой граф, то либо*

(1) $|\Omega|=1$, $p=23$ *и* $\alpha_1(g)=115$, *либо*

(2) Ω *является полным двудольным графом* $K_{m,n}$, $p=3$, *числа* m,n *сравнимы с* 1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_1(g)=84l+3(m+n)$;

(3) *если* f *— элемент порядка* 7, *то* $|C_G(f)|$ *не делится на* 9.

Доказательство. Пусть Ω содержит вершину a, $\alpha'_i(g) = |\{u \in [a] - \Omega \mid d(u, u^g) = i\}|$. По предложению 4.1 выполняется одно из утверждений:

(1) $\Omega(a)$ — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha'_1(g) = 15, 55$, либо $p = 23$ и $\alpha'_1(g) = 23$;

(2) $\Omega(a)$ является l-кокликой, $1 \le l \le 13$, $p = 3$, l сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha'_1(g) = 24s + 23 - 5l \neq 0$;

(3) $\Omega(a) = b^\perp$ для некоторой вершины $b \in \Omega(a)$ и $p = 2$.

В случае (1) Ω является m-кокликой, и если $p = 23$, то $m = 1$, $\psi_2(g) = (115 - \alpha_1(g))/28$, поэтому $\alpha_1(g) = 115$. Если $p = 5$, то получим противоречие с предложением 4.2.

В случае (2) покажем, что $\Omega - a^\perp$ является кокликой. Если b, c — две смежные вершины из $\Omega - a^\perp$, то $[b] \cap [c]$ содержит 40 вершин, 16 из которых попадают в $[a]$. Противоречие с тем, что для вершины $e \in [b] \cap [c] \cap \Omega(a)$ подграф $\Omega(e)$ содержит ребро.

Покажем, что Ω — полный двудольный граф $K_{m,n}$. Пусть $b \in \Omega(a)$. Если c — несмежная с b вершина из $\Omega - a^\perp$, то $\Omega(c)$ не пересекает $[b]$, противоречие с тем, что $|[b] \cap [c]| = 40$.

Наконец, число $\psi_2(g) = (3(m+n) - \alpha_1(g))/28 + 4$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 84l + 3(m+n)$.

В случае (3) получим противоречие с тем, что окрестность любой вершины в μ-подграфе является 3-кокликой.

Пусть f — элемент порядка 7 и $|C_G(f)|$ делится на 9. Если $C_G(f)$ содержит элемент порядка 9, то $\alpha_2(f) - 14$ не делится на 9, противоречие. Пусть $U = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ — элементарная абелева подгруппа порядка 9 из $C_G(f)$, где $\langle g_i \rangle$ — различные подгруппы порядка 3 из U. Тогда $|\mathrm{Fix}(U)| = 14$ и снова $\alpha_2(f) - 14$ не делится на 9, противоречие.Лемма доказана.

Из лемм 3.5–3.6 следует теорема 4.5.

Докажем теорему 4.3. В леммах 3.7–3.10 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ имеет спектр $\{69^1, 13^{69}, -1^{276}, -15^{46}$ и $v = 1 + 69 + 276 + 46 = 392$. Порядок клики в Γ не больше $1 + 69/15$ и порядок коклики в Γ не больше $392 \cdot 5/28 = 70$.

Лемма 3.7. *Пусть χ_2 — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 276, χ_3 — характер проекции на подпространство размерности 46. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_2(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 4$, $\chi_3(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/28 - 10$ и $\chi_2(g) - 276$, $\chi_3(g) - 46$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 69 & 13 & -1 & -15 \\ 276 & -4 & -4 & 24 \\ 46 & -10 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (69\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_3(g))/98$. Подставляя $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = 392-\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (10\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/14-4$.

Далее, $\chi_3(g) = (23\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g) - 5\alpha_3(g))/196$. Учитывая равенство $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 392 - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_3(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/28 - 10$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2.2 главы 2.

Лемма 3.8. *Выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 7$, $\alpha_3(g) = 98s$, $\alpha_2(g) = 196t$, *либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ *и* $\alpha_2(g) = 56t$*;*

(2) $|\Omega| = 1$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$ *и* $\alpha_3(g) = 46$*;*

(3) $|\Omega| = 21s + 14$, $p = 3$, $s = 0, 1, 2$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 84t$.

Доказательство. Если Ω — пустой граф, то $p = 2, 7$. В случае $p = 7$, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14-4$ сравнимо с 3 по модулю 7, поэтому $\alpha_3(g) = 98s$, число $\chi_3(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ сравнимо с 4 по модулю 7 и $\alpha_2(g) = 196t$.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14-4$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 28s$, число $\chi_3(g) = \alpha_2(g)/28$ четно и $\alpha_2(g) = 56t$.

Если Ω — непустой граф, то из теорем 4.4, 4.5 следует, что либо $|\Omega| = 1$ и $p = 23$, либо $p = 3$. В случае $p = 23$ получим $\alpha_3(g) = 46$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$, $\chi_2(g) = (10 + 46)/14 - 4 = 0$ и $\chi_3(g) = (4 + 276)/28 - 10$, противоречие.

В случае $p = 3$ получим $\alpha_3(g) = 0$, число $\chi_2(g) = 10\alpha_0(g)/14 - 4$ делится на 3, поэтому $5\alpha_0(g) = 7(15s + 10)$ и $\alpha_0(g) = 21s + 14$, $s = 0, 1, 2$. Далее, число $\chi_3(g) = (4(21s+14)+\alpha_2(g))/28-10$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $6s - 8 + \alpha_2(g)/28 = 3t' + 1$. Отсюда $\alpha_2(g) = 84t$. Лемма доказана.

Из леммы 3.8 следует теорема 4.3.

Лемма 3.9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* f *— элемент порядка* 23 *из* G, *то* $C_G(f) = \langle f \rangle$*;*

(2) *если* f *— элемент порядка* 7 *из* G, g *— элемент простого порядка* $p < 7$ *из* $C_G(f)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, *то либо*

(*i*) Ω *— пустой граф,* $p = 2$, *если* $|C_G(g)|$ *делится на* 49, *то* $\alpha_2(g) = 0, 392$ *и* $\alpha_3(g)$ *делится на* 196, *а если* $|C_G(f)|$ *делится на* 8, *то* $\alpha_1(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 392$ *или* $\alpha_3(g) = 392$*;*

(*ii*) Ω *— непустой граф,* $p = 3$ *и* $|C_G(f)|$ *не делится на* 9.

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 23 из G, g — элемент простого порядка $p < 23$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По теореме 4.3 имеем $\mathrm{Fix}(f)| = \{a\}$, $p = 23$, $\alpha_1(f) = 69$, $\alpha_2(f) = 276$ и $\alpha_3(f) = 46$.

По теореме 4.3 имеем $|\Omega| = 21s + 14$, $p = 3$, $s = 0, 1, 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 84t$. Противоречие с тем, что $|\Omega| - 1$ делится на 23.

Пусть f — элемент порядка 7 из G, g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ и $\alpha_2(g) = 56t$. Если $|C_G(g)|$ делится на 49, то $\alpha_2(g) = 0, 392$ и $\alpha_3(g)$ делится на 196. Если $|C_G(f)|$ делится на 8, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 392$ или $\alpha_3(g) = 392$.

Если Ω — непустой граф, то $p = 3$ и по теореме 4.3 число $|C_G(f)|$ не делится на 9. Лемма доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда $|G : G_a| = 392$.

Лемма 3.10. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $S(G)$ *является* $\{2, 7\}$*-группой;*

(2) *если* G *— разрешимая группа, то* Γ *является графом Кэли;*

(3) *если* G *— неразрешимая группа, то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(7)$, $L_2(8)$.

Доказательство. Так как $v = 8 \cdot 49$, то $S(G)$ является $\{2, 7\}$-группой.

Если группа G разрешима, то Γ является графом Кэли $Cay(G, S)$, $\alpha_1(g) = 392$ для любого элемента $g \in S$, $\alpha_1(g) = 0$ для $g \notin S$.

Пусть группа G неразрешима. Если $|G|$ делится на 23, то по [53, таблица 1] число $|G|$ делится на 11, противоречие.

Если $|G|$ не делится на 23, то по [53, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$ или $U_3(3)$. В любом случае $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ не делится на 49, поэтому $S(G)$ содержит элемент f порядка 7 и по лемме 3.9 $|C_G(f)|$ не делится на 9. Отсюда $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 4.1. Ввиду леммы 3.10 имеем $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 56$, то либо группа G равна $Z_7 \times L$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ и L_a — силовская 3-подгруппа из L, либо G содержит подгруппу индекса 2, изоморфную $Z_7 \times L_2(7)$ и $G/S(G) \cong PGL_2(7)$. Следствие 4.1 доказано.

Глава 5

Максимальные 1-коды в дистанционно регулярных графах диаметра 3, графы с собственным значением $\theta = -1$ и графы Шилла с $b_2 = c_2$

Юришич и Видали [56] доказали, что дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий локально регулярный максимальный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае граф имеет собственное значение $\theta = -1$ и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$. Во втором случае получаем граф Шилла с $b_2 = c_2$. Обратно, граф Шилла с $b_2 = c_2$ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $p = b - 1$. В этой главе изучаются дистанционно регулярные графы с $\theta = -1$ и графы Шилла с $b_2 = c_2$.

§ 5.1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$, локально решетчатый сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$ и его автоморфизмы

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ имеет собственное значение $\theta = -1$ и 176 вершин. Существование этого графа неизвестно. Граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_2(7, 6)$.

Теорема 5.1 дает частичный ответ на вопрос о существовании дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$. В предложении 5.1 найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(176,49,12,14)$, с помощью которого возможно построение вышеуказанного дистанционно регулярного графа, а в следствии 5.1 найдены простые композиционные факторы группы автоморфизмов вершинно симметричного сильно регулярного графа с параметрами $(176,49,12,14)$.

Теорема 5.1 [79]. *Если существует сильно регулярный граф с параметрами* $(176,49,12,14)$*, в котором окрестности вершин являются* 7×7*-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7,6,6;1,1,2\}$.

Предложение 5.1 [79]. it Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176,49,12,14)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(G)$. Тогда $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p=11$ и $\alpha_1(g)=44$ или $p=2$ и $\alpha_1(g)=24l+8$;

(2) Ω является β-кликой, либо

(i) $p=7$, $\beta=1$ и $\alpha_1(g)=49,133$, либо

(ii) $p=2$, $\beta=2,4,6,8$ и $\alpha_1(g)=24l+8+5\beta$, либо

(iii) $p=3$, $\beta=2,5,8$ и $\alpha_1(g)=36l-4+5\beta$;

(3) Ω является γ-кокликой, $\gamma=8,15,22$, $p=7$ и $\alpha_1(g)=84l-40+5\gamma$;

(4) Ω содержит ребро и является объединением (по крайней мере двух) изолированных клик, $p=2$ и порядок любой максимальной клики из Ω равен $2,4$ или 6;

(5) Ω содержит геодезический 2-путь и $p\le 11$.

Следствие 5.1. it Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176,49,12,14)$, группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин и $\bar{T}$ – цоколь группы $\bar{G}=G/O_2(G)$. Тогда либо $\bar{T}\cong M_{11}$, $|\bar{T}:\bar{T}_a|=11,22$, либо $\bar{T}\cong M_{22}$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $L_3(4)$ и имеет индекс 22 в $\bar{T}$.

Существование сильно регулярного графа с параметрами (176,49,12, 14), в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, остается неизвестным.

Приведем список примеров небольших дистанционно регулярных графов с собственным значением $\theta_2=-1$.

Пример 1.1. Пусть Γ — нечетный граф с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$. Тогда $v=1+4+12+18=35$ и Γ имеет спектр $4^1,2^{14},-1^{14},-3^6$. Далее, $\Delta=\bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(4,3)$. Поэтому Δ

– стандартное частное графа Джонсона $J(8,4)$, в котором окрестности вершин изоморфны 4×4-решетке. Заметим, что графы Γ и Δ имеют одно и то же множество вершин.

Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и рассмотрим решетку $\Delta(u)$. Пусть $\Gamma(u)$ – столбец решетки, превращенный в коклику. Тогда для $w \in \Delta(u)$ пусть $w^\perp - \{u\}$ – строка решетки, проходящая через w ($\Gamma(w)$ также превращаем в коклику). Для $y \in \Gamma(w) - \{u\}$ пусть $y^\perp - \{w\}$ – проходящая через y прямая решетки $\Delta(w)$, пересекающая $u^\perp \cap \Delta(w)$. Наконец, для $z \in \Gamma(y) - \{w\}$ пусть $z^\perp - \{y\}$ – проходящая через z прямая решетки $\Delta(y)$, пересекающая $w^\perp \cap \Delta(y)$. Снова превращаем $\Gamma(y)$ и $\Gamma(z)$ в коклики. В итоге получается граф с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$.

Аналогично, позднее будем пытаться построить граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$.

Пример 1.2. Пусть Γ – граф Сильвестра с массивом пересечений $\{5,4,2;1,1,4\}$. Тогда $v = 1+5+20+10 = 36$ и Γ имеет спектр $5^1, 2^{16}, -1^{10}, -3^9$. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_4(5,4)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (36,10,4,2) и неглавными собственными значениями $4, -2$. Отсюда граф Σ изоморфен 6×6-решетке и $\Sigma(u)$ — объединение двух изолированных 5-клик.

Пример 1.3. Пусть Γ – обобщенный шестиугольник порядка $(2,2)$ с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$. Тогда $v = 1+6+24+32 = 63$ и Γ имеет спектр $6^1, 3^{21}, -1^{27}, -3^{14}$. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_3(6,4)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (63,32,16,16) и неглавными собственными значениями $4, -4$.

Пример 1.4. Пусть Γ – свернутый 7-куб с массивом пересечений $\{7,6,5;1,2,3\}$. Тогда $v = 1+7+21+35 = 64$ и Γ имеет спектр $7^1, 3^{21}, -1^{35}, -5^7$. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_3(7,3)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (64,35,18,20) и неглавными собственными значениями $3, -5$.

Пример 1.5. Пусть Γ – унитарный граф на неизотропных точках с массивом пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$. Тогда $v = 1+12+120+75 = 208$ и Γ имеет спектр $12^1, 4^{78}, -1^{64}, -4^{65}$. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_8(12,10)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (208,75,30,25) и неглавными собственными значениями $10, -5$.

Пример 1.6. Пусть Γ – дуально полярный граф с массивом пересечений $\{14,12,8;1,3,7\}$. Тогда $v = 1+14+56+64 = 135$ и Γ имеет спектр $14^1, 5^{35}, -1^{84}, -7^{15}$. Далее, граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_7(14,4)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $4, -8$ и является сильно регулярным с параметрами $(135,64,28,32)$.

В [60] с помощью полярности симметричной блок-схемы Г. Хигмена построен сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$ и группой автоморфизмов, изоморфной S_8, имеющей орбиты длин 8 и 168 на множестве вершин графа. К сожалению, этот граф не изоморфен $\bar{\Gamma}_3$ для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$.

В [41] изучаются сильно φ-однородные треугольные расширения сетей типа (n, m) (частичных геометрий $pG_{m-1}(n-1, m-1)$). Точечный граф такого расширения является псевдогеометрическим графом для $pG_\varphi(n, n-1)$, поэтому φ делит $n(n^2-1)$ и $\varphi(2n-\varphi)$ делит $n^2(n^2-1)$. Заметим, что эти условия выполнены, если $\varphi = n-1, n$ или $n+1$ (эти случаи исследованы в [41]).

Пусть $\varphi = n-e$ с $e > 1$. Тогда $n-e$ делит $e(e^2-1)$ и n^2-e^2 делит $e^2(e^2-1)$, причем $n \leq e^2$. Для максимально возможного значения $n = e^2$ все условия делимости выполнены. Если $e = q$ — степень простого числа, то параметры точечного графа расширенной сети $(1+q^2+q(q+1)(q^2+1), q^4, (q^2-1)(q^2-q), q^2(q^2-q))$ совпадают с параметрами дополнения для графа прямых в $PG(3, q)$ (см. [61, глава 3]).

Кроме $n = e^2$ существуют спорадические возможности для $e > 3$. Например:

(1) $e = 4$ дает $n = 6$ или 8 и в треугольном случае возможны расширенные сети типов (6,2) и (8,4) (псевдогеометрический граф для $pG_4(8, 7)$ является локально $pG_3(7, 3)$-графом).

(2) $e = 5$ дает $n = 7$ (псевдогеометрический граф для $pG_2(7, 6)$ является локально $GQ(6, 1)$-графом), 10 или 15.

(3) $e = 6$ дает $n = 8$, 9 или 36.

Докажем теорему 5.1. Допустим, что сильно регулярный локально 7×7-граф Δ с параметрами $(176, 49, 12, 14)$ существует. Мы построим дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$, для которого граф Γ_3 равен Δ.

Зафиксируем вершину $u \in \Delta$ и пусть $\Gamma(u)$ – первый столбец решетки $\Delta(u)$, превращенный в коклику. Далее, для $w \in \Gamma(u)$ пусть $w^\perp - \{u\}$ – соответствующая строка решетки $\Delta(u)$, превращенная в коклику. Для $y \in \Gamma(w) - \{u\}$ пусть $y^\perp - \{w\}$ – соответствующая максимальная клика решетки $\Delta(w)$, пересекающая $w^\perp$ по вершине y, превращенная в коклику. Наконец, для $z \in \Gamma(y) - \{w\}$ пусть $z^\perp - \{y\}$ – соответствующая максимальная клика решетки $\Delta(w)$, пересекающая $y^\perp$ по вершине z, превращенная в коклику.

По построению окрестность любой вершины в Γ является 7-кокликой и параметр $c_2 = 1$. Отсюда $k_2 = 42$. Снова по построению имеем $b_2 = 6$

и с учетом равенства $v = 176$ получим $c_3 = 2$. Итак, Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$, для которого граф Γ_3 равен Δ. Теорема 5.1 доказана.

Докажем предложение 5.1. В леммах 5.1–5.5 предполагается, что Γ – сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$. Тогда Γ имеет спектр $49^1, 5^{98}, -7^{77}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По лемме 2.2? имеем $|\Omega| \leq 176 \cdot 14/44 = 56$.

Лемма 1.1. *Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то*

(1) *$d - 5 \leq w(49 - d)/(176 - w) \leq d + 7$, причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $w(49 - d)/(176 - w)$ вершинами из Δ;*

(2) *максимальный порядок клики в Γ не больше 8;*

(3) *максимальный порядок коклики в Γ не больше 22, и каждая вершина вне 22-коклики C смежна точно с 7 вершинами из C.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 3.1 главы 1. Второе и третье утверждение леммы следует из первого.

Лемма 1.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 44)/12$;*

(2) *$\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, взаимно простого с p;*

(3) *$77 - \chi_2(g)$ делится на p.*

Доказательство. Так как Γ имеет собственные значения 49, 5, -7 кратностей 1, 98, 77, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 49 & 5 & -7 \\ 126 & -6 & 6 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 98 & 10 & -14/3 \\ 77 & -11 & 11/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 77 равно

$$\chi_2(g) = (7\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + \alpha_2(g)/3)/16.$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/12 + 11/3$.

Два последних утверждения леммы следует из леммы 2.2 главы 2.

Лемма 1.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 44$ или $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 24l + 8$;*

(2) *если* Ω *является* β*-кликой, то либо*

(*i*) $p = 7$, $\beta = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 49, 133$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $\beta = 2, 4, 6, 8$ *и* $\alpha_1(g) = 24l + 8 + 5\beta$, *либо*

(*iii*) $p = 3$, $\beta = 2, 5, 8$ *и* $\alpha_1(g) = 36l - 4 + 5\beta$;

(3) *если* Ω *является* γ*-кокликой, то* $\gamma = 8, 15, 22$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 84l - 40 + 5\gamma$;

(4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, то* $p = 2$ *и порядок любой максимальной клики из* Ω *равен* $2, 4$ *или* 6.

Доказательство. Напомним, что $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 44)/12$, и положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Если Ω — пустой граф, то p делит 176, поэтому $p = 2$ или 11. В случае $p = 11$ имеем $\chi_2(g) = 11(-w_1 + 4)/12$, поэтому $\alpha_1(g) = 132l + 44$. Если $\alpha_1(g) = 176$, то каждая $\langle g \rangle$-орбита является 11-кликой, противоречие.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = (-w_1 + 22)/6$ нечетно, поэтому $w_1 = 12l + 4$ и $\alpha_1(g) = 24l + 8$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является β-кликой. Если $\beta = 1$, то p делит 49, $p = 7$, $\chi_2(g) = 7(7 - w_1)/12$, $w_1 = 12l + 7$ и $\alpha_1(g) = 49, 133$.

Если же $\beta \geq 2$, то p делит 36, 90 и $14 - \beta$, поэтому либо $p = 2$, $\beta = 2, 4, 6, 8$, число $\chi_2(g) = (5\beta/2 - w_1 + 22)/6$ нечетно и $\alpha_1(g) = 24l + 8 + 5\beta$, либо $p = 3$, $\beta = 2, 5, 8$, число $\chi_2(g) = (5\beta - \alpha_1(g) + 44)/12$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 36l - 4 + 5\beta$.

Пусть Ω является γ-кокликой, $\gamma \geq 2$. Тогда p делит 14, 35 и $92 - \gamma$, поэтому $p = 7$, γ сравнимо с 1 по модулю 7, $\chi_2(g) = (5\gamma - \alpha_1(g) + 44)/12$ и $\alpha_1(g) = 84l - 40 + 5\gamma$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик Тогда p делит 14 и 36, поэтому $p = 2$ и порядок любой максимальной клики из Ω равен 2, 4 или 6.

Лемма 1.4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит вершин* a *таких, что* $[a] \subset \Omega$;

(2) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 12, 14)$, *и* $p \leq 13$;

(3) *если* Ω *содержит геодезический 2-путь, то* $p \leq 11$.

Доказательство. Пусть $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a. Тогда каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 14 вершинами из Ω. С учетом равенства $\lambda = 12$ имеем $\alpha_1(g) = 0$ и $\Omega = a^\perp$. Отсюда $\chi_2(g) = 294/12$, противоречие.

Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 12, 14)$. Тогда $n = 2u$, $k' = u^2 + 13$, Δ имеет неглавные собственные значения $(u-1), -(u+1)$ и кратность $u-1$ равна $u(u^2+13)(u^2+u+14)/(28u)$, поэтому $u \geq 6$, противоречие.

Если $p > 13$, то Ω – сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 12, 14)$, противоречие. Пусть $p = 13$. Тогда $\lambda_\Omega = 12$, $\mu_\Omega = 1, 14$, $|\Omega| = 33, 46$ и степени вершин в Ω равны 23 или 36. В случае $|\Omega| = 33$ получим регулярный граф степени 23 на 33 вершинах, противоречие. Значит, $|\Omega| = 46$. Если Ω содержит такие вершины a, b, что $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = 1$, то $a^\perp \cup b^\perp$ содержит не менее 47 вершин из Ω. Значит, Ω – сильно регулярный подграф с параметрами $(46, k', 12, 14)$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 12$, $\mu_\Omega = 3, 14$, $|\Omega| = 11t$, $t = 2, 3, 4, 5$ и степени вершин в Ω равны 5, 16, 27 или 38. Далее, $\chi_2(g) = 11(5t - \alpha_1(g)/11 + 4)/12$. Если $t = 4$, то $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/12 + 22$ и $\alpha_1(g) = 0, 132$. В последнем случае каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 11 является кликой, противоречие. Если $t = 5$, то $\chi_1(g) = (-\alpha_1(g) + 5)/12 + 22$, $\alpha_1(g) = 12l + 5$ делится на 11 и $l = 6$.

Если Ω содержит вершину a степени 5, то $\Omega(a)$ – регулярный граф степени 1 на 5 вершинах, противоречие.

Пусть Ω содержит вершину a степени 38, $u \in [a] - \Omega|$. Тогда u смежна по крайней мере с 4 вершинами $b_1, ..., b_4$ из $\Omega(a)$. Отсюда $|\Omega - a^\perp| = 16$, $\Omega(b_i) \cap \Omega(b_j)$ содержит a, u, u^g и не менее 12 вершин из $\Omega - a^\perp$, противоречие.

Пусть Ω содержит вершину a степени 27. Тогда $[a] - \Omega$ содержит две $\langle g \rangle$-орбиты и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $25x + 14y + 3(27 - x - y) = 14z + 3(|\Omega - a^\perp| - z)$. В случае $|\Omega| = 33$ указанное число ребер не меньше 81, но не больше 70, противоречие. В случае $|\Omega| = 44$ имеем $14y + 3(27 - y) = 14z + 3(16 - z)$ и $z - y = 3$. Если $y \geq 3$, то найдутся две вершины b_1, b_2 из $\Omega(a)$ такие, что $\Omega(b_1) \cap \Omega(b_2)$ содержит a, u, u^g для некоторой вершины $u \in [a] - \Omega$ и не менее 12 вершин из $\Omega - a^\perp$, противоречие. Значит, $y \leq 2$ и $z \leq 5$. Пусть Y – множество вершин из $\Omega_2(a)$, смежных точно с 3 вершинами из $\Omega(a)$. Тогда $|Y| \geq 11$ и для раличных вершин $c_1, c_2 \in Y$ подграф $\Omega(c_1) \cap \Omega(c_2)$ содержит не менее 10 вершин из $\Omega_2(a)$. Противоречие с тем, что $[c_1] \cap [c_2]$ содержит 11 вершин из $[a] - \Omega$ для подходящих вершин $c_1, c_2 \in Y$. Итак, $|\Omega| = 55$.

Пусть Ω – регулярный граф степени 16. Ввиду леммы 5.1 имеем $|\Omega| \geq 44$, причем в случае равенства каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 11 вершинами из Ω. Лемма доказана.

Из лемм 1.3–1.4 следует предложение 5.1.

Докажем следствие 5.1. В лемме 5.5 предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176, 49, 12, 14)$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действвет транзитивно на множестве его вершин. Тогда $|G : G_a| =$

176 и $\{2,11\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11\}$.

Лемма 1.5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $|G|$ *не делится на* 121*;*

(2) *если* f *– элемент порядка* 11 *из* G*,* g *– элемент простого порядка* $p < 11$ *из* $C_G(f)$*, то либо*

(i) $p = 2$*,* Ω *– пустой граф,* $\alpha_1(g) = 176$ *или* $|\Omega| = 22$*,* $\alpha_1(g) = 22$*, или* $|\Omega| = 44$*,* $\alpha_1(g) = 132$ *либо*

(ii) $p = 3$*,* $|\Omega| = 44$*,* $\alpha_1(g) = 132$*.*

Доказательство. Если $|G|$ делится на 121, то G содержит элементарную абелеву подгруппу W порядка 121. Пусть $g, g_2, ..., g_{11}$ порождают различные подгруппы порядка 11 из W, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$, $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(W)$ и a, b — две вершины из Ω^0, если Ω^0 – непустой граф..

Если на Γ имеется W-орбита Δ длины 121, то либо $|\Omega^0| = 0$ и можно считать, что $|\Omega| = 55$, либо $|\Omega^0| \neq 0$. В первом случае имеем противоречие с тем, что $\alpha_1(g) = 77$ не делится на 11. Во втором случае a смежна с вершиной из Δ, поэтому a смежна со всеми вершинами из Δ, противоречие.

Значит, на Γ нет W-орбит длины 121. Если $|\Omega^0| \neq 0$, то либо $|\Omega^0| = 33$, и можно считать, что $|\Omega^i| = 44$ для $i = 1, 2, ..., 11$, $|\Omega| = 55$, либо $|\Omega^0| = 44$, и $|\Omega| = |\Omega^i| = 55$ для $i = 1, 2, ..., 11$. В первом случае для орбиты $u^{\langle g \rangle}$, не являющейся кокликой, можно считать, что $u \in \Omega^1$ и $u^{\langle g \rangle} = u^{\langle g_2 \rangle}$ является кокликой, противоречие.

Во втором случае пусть $u \in \Omega - \Omega^0$. Тогда для любой орбиты y^W на $\Gamma - \Omega$ вершина u смежна либо с нулем вершин из y^W, либо со всеми вершинами из y^W. Далее, $\Omega - \Omega^0$ содержит трехвершинный подграф U, являющийся кокликой или геодезическим 2-путем, причем $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 121 вершин из $\Gamma - \Omega$. Противоречие с леммой 1.1.

Если $|\Omega^0| = 0$, то можно считать, что $|\Omega| = |\Omega^2| = |\Omega^3| = |\Omega^4| = 44$ и Γ имеет разбиение четырьмя регулярными графами степени 16 на 44 вершинах. Более того, подграф Ω^2 имеет разбиение четырьмя кокликовыми $\langle g \rangle$-орбитами Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4. Пусть U – трехвершинный подграф из $\langle g_2 \rangle$-орбиты на Ω. Тогда U попадает в окрестности 0 или 11 вершин из $\langle g \rangle$-орбиты на Ω_i, поэтому $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 132 вершины из $\Gamma - \Omega$. Противоречие с леммой 1.1. Утверждение (1) доказано.

Пусть f – элемент порядка 11 из G, g – элемент простого порядка $p < 11$ из $C_G(f)$. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ – пустой граф и $\alpha_1(f) = 44$. Пусть $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Ω – пустой граф, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 24l + 8$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g) = 176$.

Если $|\Omega| = 11t$, то по предложению 5.1 либо

Ω является 22-кокликой, $p=7$, $\chi_1(g)=(154-\alpha_1(g))/12$ и $\alpha_1(g)=154$, либо

Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, $p=2$, порядок любой максимальной клики из Ω равен 2 или 4 и $|\Omega|=22,44$, либо

Ω содержит геодезический 2-путь и $p\le 7$.

Пусть $p=2$. Если $|\Omega|=22$, то число $\chi_1(g)=(154-\alpha_1(g))/12$ нечетно и $\alpha_1(g)=24l-2$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g)=22$. Если $|\Omega|=44$, то число $\chi_1(g)=(264-\alpha_1(g))/12$ нечетно и $\alpha_1(g)=24l+12$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g)=132$.

Пусть $p=3$. Если $|\Omega|=11$, то число $\chi_1(g)=(99-\alpha_1(g))/12$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g)=36l+3$ делится на 11, противоречие. Если $|\Omega|=44$, то число $\chi_1(g)=(264-\alpha_1(g))/12$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g)=36l-12$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g)=132$.

Пусть $p=5$. Если $|\Omega|=11$, то число $\chi_1(g)=(99-\alpha_1(g))/12$ сравнимо с 2 по модулю 5 и $\alpha_1(g)=60l+15$ делится на 11, противоречие.

Пусть $p=7$. Если $|\Omega|=22$, то $\chi_1(g)=(154-\alpha_1(g))/12$ и $\alpha_1(g)=154$. В этом случае каждая $\langle g\rangle$ длины 7 является кликой. Покажем, что $\lambda_\Omega=12$. Иначе найдутся смежные вершины $a,b\in\Omega$ такие, что $\Omega(a)\cap[b]$ содержит вершину $u\in\Gamma-\Omega$, противоречие с тем, что $\{a,b\}\cup u^{\langle g\rangle}$ является 9-кликой.

Покажем, что $\mu_\Omega=14$. Иначе найдутся две несмежные вершины $a,b\in\Omega$ такие, что $\Omega(a)\cap[b]$ содержит вершину $u\in\Gamma-\Omega$, противоречие с тем, что $\{a\}\cup u^{\langle g\rangle}$ является 8-кликой, в которой b смежна с 7 вершинами. Противоречие с тем, что Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(22,k',12,14)$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 5.1. Так как $O_{11'}(G)$ является 2-группой, то либо $G/O_2(G)$ – расширение группы порядка 11 с помощью подгруппы порядка, делящего 10, либо по [53, таблица 1] цоколь $\bar T$ группы $\bar G=G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, $U_5(2)$, $U_6(2)$, M_{22}, A_{11}, A_{12}, McL, HiS. Так как $|\bar T:\bar T_a|$ делит 176, то либо $\bar T\cong M_{11}$, $|\bar T:\bar T_a|=11,22$, либо $\bar T\cong M_{22}$, группа $\bar T_a$ изоморфна $L_3(4)$ и имеет индекс 22 в $\bar T$ или A_7 и имеет индекс 176 в $\bar T$, либо $\bar T\cong U_5(2)$, группа $\bar T_a$ изоморфна $Z_3\times U_4(2)$ и имеет индекс 176 в $\bar T$, либо $\bar T\cong HiS$, группа $\bar T_a$ изоморфна $U_3(5).Z_2$ и имеет индекс 176 в $\bar T$.

Известно, что подстановочное представление M_{22} по A_7 дает граф ранга 3 с параметрами (176,70,18,34), представление $U_5(2)$ по $Z_3\times U_4(2)$ дает граф ранга 3 с параметрами (176,40,12,8), представление HiS по $U_3(5).Z_2$ является 2-транзитивным.

Следствие 5.1 доказано.

§ 5.2. Новые верхние границы для порядков клик сильно регулярных графов Γ_3

Приведем список массивов пересечений небольших примитивных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3 (но не Γ_2).

1. $\{4,3,3;1,1,2\}$, нечетный граф O_7 имеет спектр $4^1, 2^{14}, -1^{14}, -3^6$, $v = 35 = 1+4+12+18$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(4,3)$.

2. $\{5,4,2;1,1,4\}$, граф Сильвестра имеет спектр $5^1, 2^{16}, -1^{10}, -3^9$, $v = 36 = 1+5+20+10$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_4(5,4)$.

3. $\{6,4,4;1,1,3\}$, обобщенный шестиугольник порядка $(2,2)$ имеет спектр $6^1, 3^{21}, -1^{27}, -3^{154}$, $v = 63 = 1+6+24+32$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(6,4)$.

4. $\{7,6,5;1,2,3\}$, свернутый 7-куб имеет спектр $7^1, 3^{21}, -1^{35}, -5^7$, $v = 64 = 1+7+21+35$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(7,3)$.

5. $\{7,6,6;1,1,2\}$, обобщенный нечетный граф имеет спектр $7^1, 3^{66}$, $-1^{77}, -4^{32}$, $v = 176 = 1+7+42+126$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(7,6)$.

6. $\{8,7,5;1,1,4\}$, граф имеет спектр $8^1, 3^{54}, -1^{50}, -4^{30}$, $v = 135 = 1+8+56+70$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_4(8,7)$.

7. $\{10,8,7;1,1,4\}$, граф имеет спектр $10^1, 4^{77}, -1^{98}, -4^{55}$, $v = 231 = 1+10+80+140$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_4(10,8)$.

8. $\{12,9,9;1,1,4\}$, обобщенный шестиугольник порядка $(3,3)$ имеет спектр $12^1, 5^{104}, -1^{168}, -4^{91}$, $v = 364 = 1+12+108+243$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_4(12,9)$.

9. $\{12,10,5;1,1,8\}$, унитарный неизотропный граф (граф Шилла) имеет спектр $12^1, 4^{78}, -1^{64}, -4^{65}$, $v = 208 = 1+12+120+75$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_8(12,10)$.

10. $\{13,10,7;1,2,7\}$, граф имеет спектр $13^1, 5^{39}, -1^{78}, -5^{26}$, $v = 144 = 1+13+65+65$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_7(13,5)$.

11. $\{14,12,8;1,3,7\}$, дуально полярный граф имеет спектр $14^1, 5^{35}$, $-1^{84}, -7^{15}$, $v = 135 = 1+14+56+64$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_7(14,4)$.

12. $\{14, 12, 12; 1, 1, 3\}$, граф имеет спектр $14^1, 5^{266}, -1^{399}, -5^{189}$, $v = 855 = 1 + 14 + 168 + 672$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(14, 12)$.

13. $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, граф Шилла имеет спектр $15^1, 5^{48}, -1^{75}, -5^{36}$, $v = 160 = 1 + 15 + 90 + 54$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{10}(15, 6)$.

14. $\{17, 16, 10; 1, 2, 8\}$, граф имеет спектр $17^1, 5^{102}, -1^{170}, -7^{51}$, $v = 324 = 1 + 17 + 136 + 170$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_8(17, 8)$.

15. $\{18, 14, 5; 1, 2, 14\}$, граф имеет спектр $18^1, 5.623^{57}, -1^{75}, -4.623^{57}$, $v = 190 = 1 + 18 + 126 + 45$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{14}(18, 7)$.

16. $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, граф имеет спектр $18^1, 5.623^{171}, -1^{189}, -4.623^{171}$, $v = 532 = 1 + 18 + 270 + 243$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{10}(18, 15)$.

17. $\{20, 16, 5; 1, 1, 16\}$, граф имеет спектр $20^1, 6^{144}, -1^{100}, -4^{196}$, $v = 441 = 1 + 20 + 320 + 100$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{16}(20, 16)$.

18. $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$, граф Шилла имеет спектр $20^1, 5^{210}, -1^{125}, -5^{189}$, $v = 525 = 1 + 20 + 360 + 144$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{15}(20, 18)$.

19. $\{20, 18, 6; 1, 3, 15\}$, граф Шилла имеет спектр $20^1, 5^{63}, -1^{90}, -7^{35}$, $v = 189 = 1 + 20 + 120 + 48$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{15}(20, 6)$.

20. $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$, граф Шилла имеет спектр $21^1, 7^{33}, -1^{98}, -7^{22}$, $v = 154 = 1 + 21 + 84 + 48$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{14}(21, 4)$.

21. $\{21, 16, 10; 1, 2, 12\}$, граф имеет спектр $21^1, 7.325^{77}, -1^{175}, -5.325^{77}$, $v = 330 = 1 + 21 + 168 + 140$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{12}(21, 8)$.

22. $\{21, 20, 10; 1, 1, 12\}$, граф имеет спектр $21^1, 5^{315}, -1^{252}, -6^{224}$, $v = 792 = 1 + 21 + 420 + 350$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{12}(21, 20)$.

23. $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, граф Шилла имеет спектр $24^1, 8^{175}, -1^{224}, -4^{300}$, $v = 700 = 1 + 24 + 432 + 243$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{16}(24, 18)$.

24. $\{26,24,19;1,3,8\}$, граф имеет спектр $26^1, 8^{156}, -1^{494}, -10^{78}$, $v = 729 = 1+26+208+494$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_8(26,8)$.

25. $\{27,20,7;1,4,21\}$, граф имеет спектр $27^1, 8.211^{45}, -1^{117}, -6.211^{45}$, $v = 208 = 1+27+135+45$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{21}(27,5)$.

26. $\{27,20,10;1,2,18\}$, граф имеет спектр $27^1, 9^{96}, -1^{216}, -5^{135}$, $v = 448 = 1+27+270+150$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{18}(27,10)$.

27. $\{31,24,8;1,4,24\}$, граф имеет спектр $31^1, 8.746^{62}, -1^{155}, -6.746^{62}$, $v = 280 = 1+31+186+62$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{24}(31,6)$.

28. $\{31,30,17;1,2,15\}$, граф имеет спектр $31^1, 7^{310}, -1^{527}, -9^{186}$, $v = 1024 = 1+31+465+527$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{15}(31,15)$.

29. $\{35,28,6;1,2,30\}$, граф имеет спектр $35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5^{273}$, $v = 624 = 1+35+490+98$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{30}(35,14)$.

30. $\{35,30,8;1,3,28\}$, граф имеет спектр $35^1, 8^{140}, -1^{210}, -7^{135}$, $v = 486 = 1+35+350+100$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{28}(35,10)$.

31. $\{35,32,8;1,2,28\}$, граф Шилла имеет спектр $35^1, 7^{270}, -1^{245}, -7^{240}$, $v = 756 = 1+35+560+160$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{28}(35,16)$.

32. $\{39,32,10;1,4,30\}$, граф имеет спектр $39^1, 9.718^{104}, -1^{247}, -7.718^{104}$, $v = 456 = 1+39+312+104$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{30}(39,8)$.

33. $\{39,32,16;1,4,24\}$, граф имеет спектр $39^1, 11^{104}, -1^{364}, -9^{91}$, $v = 560 = 1+39+312+208$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{24}(39,8)$.

34. $\{40,33,19;1,3,22\}$, граф имеет спектр $40^1, 11.311^{164}, -1^{532}$, -8.311^{164}, $v = 861 = 1+40+440+380$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{22}(40,11)$.

35. $\{43,36,11;1,4,33\}$, граф имеет спектр $43^1, 10.165^{129}, -1^{301}$, -8.165^{129}, $v = 560 = 1+43+387+129$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{33}(43,9)$.

36. $\{44,36,12;1,3,33\}$, граф Шилла имеет спектр $44^1, 11^{170}, -1^{374}$, -7^{220}, $v = 765 = 1 + 44 + 528 + 192$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{33}(44,12)$.

37. $\{44,40,12;1,5,33\}$, граф имеет спектр $44^1, 9^{132}, -1^{308}, -11^{84}$, $v = 525 = 1+44+352+128$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{33}(44,8)$.

38. $\{44,42,5;1,7,40\}$, граф имеет спектр $44^1, 6^{132}, -1^{152}, -12^{57}$, $v = 342 = 1+44+264+33$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{40}(44,6)$.

39. $\{49,40,22;1,5,28\}$, граф имеет спектр $49^1, 14^{112}, -1^{539}, -11^{98}$, $v = 750 = 1+49+392+308$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{28}(49,8)$.

40. $\{51,44,13;1,4,39\}$, граф имеет спектр $51^1, 11^{187}, -1^{425}, -9^{187}$, $v = 800 = 1+51+561+187$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{39}(51,11)$.

41. $\{54,42,11;1,3,44\}$, граф имеет спектр $54^1, 14^{189}, -1^{432}, -6^{378}$, $v = 1000 = 1+54+756+189$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{44}(54,14)$.

42. $\{55,48,12;1,4,44\}$, граф Шилла имеет спектр $55^1, 11^{224}, -1^{440}$, -9^{231}, $v = 896 = 1 + 55 + 660 + 180$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{44}(55,12)$.

43. $\{55,48,12;1,6,44\}$, граф Шилла имеет спектр $55^1, 11^{140}, -1^{363}$, -11^{112}, $v = 616 = 1 + 55 + 440 + 120$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{44}(55,8)$.

В теореме 5.2 получены новые верхние границы для порядков клик сильно регулярных графов Γ_3, уточняющие классическую границу Хофмана-Дельсарта. С помощью этих оценок доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивами пересечений $\{27,20,7;1,4,21\}$.

Теорема 5.2 [81]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 содержит n-клику $\{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^{n}\Gamma(u_i)$ содержит $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ вершин и для графа с массивом пересечений $\{27,20,7;1,4,21\}$ имеем $n \leq 3$, с массивом $\{31,24,8;1,4,24\}$ имеем $n \leq 7$, с массивом $\{35,28,6;1,2,30\}$ имеем $n \leq 15$, с массивом $\{35,30,8;1,3,28\}$ имеем $n \leq 12$, с массивом $\{39,30,4;1,5,36\}$ имеем $n \leq 6$, с массивом $\{39,32,10;1,4,30\}$ имеем $n \leq 9$, с массивом $\{43,36,11;1,4,33\}$ имеем $n \leq 10$, с массивом $\{44,30,9;1,5,$*

36} *имеем* $n \leq 7$, *с массивом* $\{44,36,5;1,9,40\}$ *имеем* $n \leq 3$, *с массивом* $\{44,40,12;1,5,33\}$ *имеем* $n \leq 9$, *с массивом* $\{44,42,5;1,7,40\}$, *имеем* $n \leq 6$, *с массивом* $\{49,36,5;1,4,45\}$ *имеем* $n \leq 10$, *с массивом* $\{51,44,13;1,4,39\}$ *имеем* $n \leq 12$, *с массивом* $\{54,42,11;1,3,44\}$ *имеем* $n \leq 15$.

Следствие 5.2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27,20,7;1,4,21\}$ *не существует.*

Докажем теорему 5.2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $\theta_2 = -1$. Если граф Γ_3 содержит n-клику $\{u, u_2, ..., u_n\}$, то $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^{n} u_i^{\perp}$ содержит $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ вершин. В этом параграфе рассматриваются массивы пересечений для которых граф Γ_3 не является псевдогеометрическим.

Лемма 2.1. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27,20,7;1,4,21\}$, *то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(208,45,26,10)$ *и не содержит* 4*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27,20,7;1,4,21\}$. Тогда $v = 1+27+135+45 = 208$ и Γ имеет спектр $27^1, 8,211^{45}, -1^{117}, -6,211^{45}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{21}(27,5)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $5, -7$ и имеет параметры (208,45,26,10).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^{\perp} \cup (\cup_{i=2}^{n} u_i^{\perp})$ содержит $28n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^{n} u_i^{\perp}$ содержит $45 - 7(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 7$.

Если $n \geq 5$, то Δ содержит не более 17 вершин. Противоречие с тем, что $\Sigma(u_i) \cap \Sigma(u_j)$ содержит $n-2$ вершины из L и не менее $28-n$ вершин из Δ.

Если $n = 4$, то Δ содержит 24 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 2 вершины из L и все 24 вершины из Δ. Противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 5-кликой.

Лемма 2.2. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{31,24,8;1,4,24\}$, *то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(280,62,12,14)$ *и не содержит* 8*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{31,24,8;1,4,24\}$. Тогда $v = 1+31+186+62 = 280$ и Γ имеет спектр $31^1, 8.746^{62}, -1^{155}, -6.746^{62}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{24}(31,6)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -8$ и имеет параметры (280,62,12,14).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $32n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $62 - 8(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 8$.

Если $n = 8$, то Δ содержит 6 вершин. Тогда $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 6 вершин из L и все 6 вершин из Δ. Противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 9-кликой.

Лемма 2.3. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(624, 98, 22, 14)$ *и не содержит* 16*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$. Тогда $v = 1 + 35 + 490 + 98 = 624$ и Γ имеет спектр $35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5273$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{30}(35, 14)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $14, -6$ и имеет параметры (624,98,22,14).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $36n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $98 - 6(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 17$.

Если $n \geq 16$, то Δ содержит не более 8 вершин. Тогда $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит $n - 2$ вершины из L и не менее $24 - n$ вершин из Δ. Отсюда $n = 16$ и $\Sigma(u_i) \cap \Sigma(u_j)$ содержит все 8 вершин из Δ. Противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 17-кликой.

Лемма 2.4. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(486, 100, 18, 20)$ *и не содержит* 13*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$. Тогда $v = 1 + 35 + 350 + 100 = 486$ и Γ имеет спектр $35^1, 8^{140}, -1^{210}, -7^{135}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{28}(35, 10)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $10, -8$ и имеет параметры (486,100,18,20).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $36n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $100 - 8(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 13$.

Если $n = 13$, то Δ содержит не более 4 вершины. Тогда $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 11 вершин из L и не более 4 вершин из Δ, противоречие.

Лемма 2.5. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(300, 26, 4, 2)$ *и не содержит* 7*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$. Тогда $v = 1 + 39 + 234 + 26 = 300$ и Γ имеет спектр $39^1, 9^{78}, -1^{117}, -6^{104}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{36}(39, 6)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -4$ и имеет параметры (300,26,4,2).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $40n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $26-4(n-1)$ вершин. Далее, $\lambda(\Sigma) = 4$, поэтому $n \leq 6$.

Если $n = 6$, то Δ содержит 6 вершин. В этом случае Σ содержит 6 вершин из L, 240 вершин из $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^6 u_i^\perp)$, 36 вершин, находящихся на расстоянии 3 от единственной вершины из L и 24 вершины из $\Sigma_2(u) \cap (\cap_i \Sigma_2(u_i))$.

Лемма 2.6. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(456, 104, 22, 24)$ *и не содержит* 10*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$. Тогда $v = 1 + 39 + 312 + 104 = 456$ и Γ имеет спектр $39^1, 9,718^{104}, -1^{247}, -7,718^{104}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{30}(39, 8)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $8, -10$ и имеет параметры (456,104,22,24).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $40n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $104 - 10(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 11$.

Если $n = 11$, то Δ содержит 4 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 9 вершин из L и не более 4 вершин из Δ, противоречие.

Если $n = 10$, то Δ содержит 14 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_i)$ содержит 8 вершин из L и все 14 вершин из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 11-кликой.

Лемма 2.7. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(560, 129, 28, 30)$ *и не содержит* 11*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$. Тогда $v = 1 + 43 + 387 + 129 = 560$ и Γ имеет спектр $43^1, 10,165^{129}, -1^{301}, -8,165^{129}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{33}(43, 9)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $9, -11$ и имеет параметры (560,129,28,30).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $44n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $129 - 11(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 12$.

Если $n = 12$, то Δ содержит 8 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 10 вершин из L и не более 8 вершин из Δ, противоречие.

Если $n = 11$, то Δ содержит 19 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 9 вершин из L и все 19 вершин из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 12-кликой.

Лемма 2.8. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(375, 66, 9, 12)$ *и не содержит* 8*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$. Тогда $v = 1 + 44 + 264 + 66 = 375$ и Γ имеет спектр $44^1, 14^{55}, -1^{220}, -6^{99}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{36}(44, 6)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -9$ и имеет параметры (375,66,9,12).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $66 - 9(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 8$.

Если $n = 8$, то Δ содержит 3 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 6 вершин из L и все 3 вершин из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 9-кликой.

Лемма 2.9. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(243, 22, 1, 2)$ *и не содержит* 4*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$. Тогда $v = 1 + 44 + 176 + 22 = 243$ и Γ имеет спектр $44^1, 8^{66}, -1^{132}, -10^{44}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{40}(44, 4)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $4, -5$ и имеет параметры (243,22,1,2).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $22 - 5(n-1)$ вершин. Далее, $\lambda(\Sigma) = 1$, поэтому $n = 3$.

Если $n = 3$, то Δ содержит 12 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит вершину из L и 0 вершин из Δ.

Лемма 2.10. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом* *пересечений* $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(525, 128, 28, 32)$ *и не содержит* 10*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$. Тогда $v = 1 + 44 + 352 + 128 = 525$ и Γ имеет спектр $44^1, 9^{132}, -1^{308}, -11^{84}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{33}(44, 8)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $8, -12$ и имеет параметры (525,128,28,32).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $129 - 12(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 11$.

Если $n = 11$, то Δ содержит 9 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 9 вершин из L и не более 9 вершин из Δ, противоречие.

Если $n = 10$, то Δ содержит 21 вершину и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 8 вершин из L и 20 вершин из Δ, противоречие с тем, что $\cap_i \Sigma(u_i)$ содержит вершину $w \in \Delta$ и $L \cup \{w\}$ является 11-кликой.

Лемма 2.11. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(342, 33, 4, 3)$ *и не содержит* 7*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$. Тогда $v = 1 + 44 + 264 + 33 = 342$ и Γ имеет спектр $44^1, 6^{132}, -1^{152}, -12^{57}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{40}(44, 6)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -5$ и имеет параметры (342,33,4,3).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $33 - 5(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 7$. Далее, $\lambda(\Sigma) = 4$, поэтому $n \leq 6$.

Если $n = 6$, то Δ содержит 8 вершин, и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 4 вершины из L и 0 вершин из Δ. В этом случае Γ содержит 270 вершин из $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^6 u_i^\perp)$, 48 вершин, находящихся на расстоянии 3 от единственной вершины из L и множество X_0 из 24 вершин, находящихся на расстоянии 2 от любой вершины из L.

Лемма 2.12. *Если* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(540, 49, 8, 4)$ *и не содержит* 11*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$. Тогда $v = 1 + 49 + 441 + 49 = 540$ и

Γ имеет спектр $49^1, 13^{105}, -1^{189}, -5^{245}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{45}(49, 9)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $9, -5$ и имеет параметры (540,49,8,4).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $50n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $49-5(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 10$.

Если $n = 10$, то Δ содержит 4 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 8 вершин из L и 0 вершин из Δ. В этом случае Σ содержит 500 вершин из $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^{10} u_i^\perp)$ и 40 вершин, каждая из которых смежна в Σ с единственной вершиной из L.

Лемма 2.13. *Если Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$, то граф $\Sigma = \Gamma_3$ сильно регулярен с параметрами $(800, 187, 42, 44)$ и не содержит 13-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$. Тогда $v = 1 + 51 + 561 + 187 = 800$ и Γ имеет спектр $51^1, 11^{187}, -1^{425}, -9^{187}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{39}(51, 11)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $11, -13$ и имеет параметры (800,187,42,44).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $52n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $187 - 13(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 15$.

Если $n = 13$, то Δ содержит 31 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 11 вершин из L и все 31 вершин из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 14-кликой.

Лемма 2.14. *Если Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$, то граф $\Sigma = \Gamma_3$ сильно регулярен с параметрами $(1000, 189, 38, 35)$ и не содержит 16-клик.*

Доказательство. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$. Тогда $v = 1+54+756+189 = 1000$ и Γ имеет спектр $54^1, 14^{189}, -1^{432}, -6^{378}$.

По теореме 3.6 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{44}(54, 14)$. Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $14, -11$ и имеет параметры (1000,189,38,35).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $55n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $189 - 11(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана-Дельсарта имеем $n \leq 18$.

Если $n = 18$, то Δ содержит 2 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 16 вершин из L и не более 2 вершин из Δ.

Если $n = 17$, то Δ содержит 13 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 15 вершин из L и не более 13 вершин из Δ.

Если $n = 16$, то Δ содержит 24 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 14 вершин из L и все 24 вершины из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 17-кликой.

Теорема 5.2 следует из лемм 2.1–2.14.

Докажем следствие 5.2. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$, $\Sigma = \Gamma_3$, u — вершина графа Γ, $w \in \Sigma(u)$. Тогда Σ является сильно регулярным графом с параметрами (208,45,26,10). Далее, по лемме 2.1 подграф $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ является 26-кокликой в Σ для смежных вершин $u, w \in \Sigma$. Противоречие с тем, что для $z \in \Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ имеем $|\Sigma(u) \cap \Sigma(z)| \le 1 + 18$. Следствие 5.2 доказано.

§ 5.3. Дистанционно регулярные графы с $\theta_2 = -1$, новые бесконечные серии допустимых массивом пересечений

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. Указанные массивы совпадают в случае $c = a + 1$. Но в этом случае по [, теорема 1] получим граф Шилла с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 8, 28\}$, противоречие с тем, что для этого массива $q^3_{33} = -36/25$.

В случае, когда Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$, граф Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1, a)$, а максимальному 1-коду отвечает разбиение графа Γ_3 овоидами.

Перечислим небольшие графы с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$:

1. Граф Сильвестра с массивом $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$.
2. Граф с массивом $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$.
3. Граф с массивом $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ (не существует по [7]).
4. Граф с массивом $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$.
5. Граф с массивом $\{49, 36, 8; 1, 6, 42\}$.
6. Граф с массивом $\{54, 40, 7; 1, 5, 48\}$.

7. Граф с массивом $\{63, 48, 10; 1, 8, 54\}$.

8. Граф с массивом $\{80, 63, 11; 1, 9, 70\}$.

9. Граф с массивом $\{99, 80, 12; 1, 10, 88\}$.

Можно выдвинуть следующее предположение (А.А. Махнев):

Гипотеза 5.1 *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. Тогда либо Γ принадлежит некоторому конечному множеству графов, либо $c = a-1$. В последнем случае граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(p+1, 2a)$ и кратности неглавных собственных значений равны $(a+1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1)$, $(ap+a+1)a(p+2)(p+1)/((2a+p)(a+p+1))$, $(ap+a+1)(p+1)p/(2a+p)$.*

Теорема 5.3 [81]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. Тогда $a < p(p+1)$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $a \leq c$, то либо $a = c$ и Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$, либо $2p+2 \leq a$;*

(2) *параметр a не равен $c-1$;*

(3) *если $a = c-2$, то $\theta_1 = a-x$, $\theta_3 = -(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x) = a(a+p+3)$ и $0 < x < p/2$;*

(4) *если $a = c+2$, то $\theta_1 = a+x$, $\theta_3 = 2p+1-a-x$, $(a+x)(a+x-2p-1) = a(p+a-1)$ и $3p/2 < x < 2p+1$.*

(5) *если $a = c+1$ и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1, a)$ с квазиклассическими параметрами $\{p+1, a\} = \{q, q\}, \{q^2, q\}, \{q^2, q^3\}, \{q-1, q+1\}$, то Γ имеет массив пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, q^2-q-2\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ или $\{195, 168, 14; 1, 11, 182\}$.*

Для массива пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$ при $1 \leq a, p \leq 1000$ только для следующих пар (a, p) кратности собственных значений целые: $(1, 4), (1, 54), (6, 28), (6, 119), (204, 984)$.

Теорема 5.4 [81]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{a(p+1), (a-1)p, a+1; 1, a-1, ap\}$. Тогда следующие серии содержат бесконечное число допустимых массивов*

(1) *$p = a-3$: $\{a(a-2), (a-1)(a-3), a+1; 1, a-1, a(a-3)\}$, $a \geq 5$;*

(2) *$p = 2a+2$: $\{a(2a+3), 2(a-1)(a+1), a+1; 1, a-1, 2a(a+1)\}$, a не сравнимо с 1 по модулю 3;*

(3) *$p = 2a-4$: $\{a(2a-3), 2(a-1)(a-2), a+1; 1, a-1, 2a(a-2)\}$, a четно и не сравнимо с 1 по модулю 3;*

(4) $p = 3a - 5$*:* $\{a(3a-4), (a-1)(3a-5), a+1; 1, a-1, a(3a-5)\}$*, a четно и сравнимо с* $0, 2$ *по модулю* 5.

Для доказательства теоремы 5.3 полезны следующие результаты.

Лемма 3.1 *Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственными значениями $k = \theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$, то $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = a_1 + a_2 + a_3 - k$, $\theta_1\theta_2\theta_3 = (a_1+1)(b_2-a_3) + a_3c_2$ и $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1) = b_1(b_2 - a_3 - 1)$.*

Доказательство. Матрица T порядка 3, собственные значения которой совпадают с собственными значениями $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ графа Γ имеет вид [2, стр. 130]

$$T = \begin{pmatrix} -1 & b_1 & 0 \\ 1 & k-b_1-c_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3-b_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = Tr(T) = a_1 + a_2 + a_3 - k$ и $\theta_1\theta_2\theta_3 = det(T) = k(b_2-a_3)+a_3c_2$. Наконец, $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1) = det(T+I) = b_1(b_2-a_3-1)$.

Лемма 3.2 *Пусть Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1, a)$. Если O, O' — различные овоиды из Γ, то $0 \leq |O \cap O'| \leq \min\{ap, (ap+p+p^2)/2\}$, причем в случае $|O \cap O'| = ap$, подграф $(O - O') \cup (O' - O)$ является полным двудольным с долями порядка $a+1$ и $a < p+1$.*

Доказательство. Положим $\gamma = |O \cap O'|$. Тогда $(O-O') \cup (O'-O)$ — регулярный подграф степени $a+1$ на $2pa+2a+2-2\gamma$ вершинах. Отсюда $-(a+1) \leq a+1-p(a+1)(2pa+2a+2-2\gamma)/((p+2)(1+(p+1)a) - (2pa+2a+2-2\gamma)) \leq p$.

Левое неравенство влечет $p(pa+a+1-\gamma)/((p+2)(p+1)a+p-(2pa+2a-2\gamma)) \leq 1$ и $p(pa+a+1-\gamma) \leq (p^2a+pa+p+2\gamma)$. Поэтому $0 \leq (p+2)\gamma$ и в случае $\gamma = 0$ любая вершина вне $O \cup O'$ смежна с $2a+2$ вершинами из $O \cup O'$.

Правое неравенство влечет $(a+1-p)(p^2a+pa+p+2\gamma) \leq p(a+1)(2pa+2a+2-2\gamma)$. Отсюда $(2ap+2p+2a+2-2p)\gamma \leq p(a+1)(2pa+2a+2) - (a+1-p)(p^2a+pa+p)$ и $\gamma \leq p(a+1) - p(a+1-p)/2 = (ap+p+p^2)/2$. Ясно, что в случае $\gamma = (ap+p+p^2)/2$ имеем $(ap+p+p^2)/2 = ap+p+1$, $ap = p^2-p-2$ и $p = 2$, противоречие.

Если $|O \cap O'| = ap$, то $a < 1+p$ и подграф $(O-O') \cup (O'-O)$ является полным двудольным с долями порядка $a+1$. Лемма доказана.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями k, r, l $(l < 0)$ кратностей $1, f, g$ соответственно. Тогда (см. [62]) выполняются следующие утверждения:

(1) $|C| \leq v(-l)/(k-l)$ для любой коклики C из Γ, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина вне C смежна точно с $-l$ вершинами из C (граница Хофмана для коклик);

(2) размер любой коклики C из Γ не превосходит $g = \dfrac{k(r+1)(k-r)}{(k+rl)(r-l)}$ (граница Цветковича для коклик), причем из равенств $|C| = g = v(-l)/(k-l)$ следует сильная регулярность графа, индуцированного $\Gamma - C$.

Там же доказано

Предложение 5.2 *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s, (s-1)(s+1-\alpha))$, содержащий коклику C порядка $1 + s(s-1)(s+1-\alpha)/\alpha$ и $\Sigma = \Gamma - C$. Тогда Σ — сильно регулярный граф с параметрами $v = s(1 + s(s-1)(s+1-\alpha)/\alpha)$, $k = (s-1)(s^2 - s\alpha + \alpha)$, $\lambda = (s-2)(1 + (\alpha-1)(s+1-\alpha))$, $\mu = \alpha(s^2 - s\alpha - s + 2\alpha - 1)$ и собственными значениями $s - \alpha$, $-(s^2 - s\alpha - s + 2\alpha)$, причем кратность $s - \alpha$ равна $(s-1)(s^3 - s^2\alpha + s\alpha - s + \alpha)/\alpha$.*

Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $GQ(s, s^2 - s)$, содержащий овоид O. По предложению 5.2 граф $\Sigma = \Gamma - O$ сильно регулярен с параметрами $v = s(1 + s^2(s-1))$, $k = (s-1)(s^2 - s + 1)$, $\lambda = s - 2$,$\mu = s^2 - 2s + 1$ и неглавными собственными значениями $s - 1$, $-(s^2 - 2s + 2)$, причем кратность $s - 1$ равна $(s-1)(s^3 - s^2 + 1)$.

По предложению 5.2 для любых вершин $a, b \in \Sigma$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит единственную вершину из O, если a, b смежны, s вершин, если a, b не смежны.

Лемма 3.3 *Если Γ содержит два различных овоида O и O', то $|O \cap O'| = (s-1)^2$, причем $(O - O', O' - O)$ является симметричной 2-$(v, s^2 - s+1, s)$ схемой, где $v = s(s^2 - 2s + 2)$. Далее, любая вершина из $\Gamma - (O \cup O')$ смежна с $s - 1$ вершинами из $O \cap O'$.*

Доказательство. Для любых двух несмежных вершин вне O пересечение их окрестностей содержит s точек из O, поэтому $(O - O', O' - O)$ является симметричной 2-$(v, s^2 - s + 1, s)$ схемой, где $v = |O| - |O' \cap O|$. Но тогда $(s^2 - s)(s^2 - s + 1) = (v - 1)s$, поэтому $v = s(s^2 - 2s + 2)$ и $|O \cap O'| = (s-1)^2$.

Заметим, что для коклики $O - O'$ графа $\Gamma - O'$ достигается равенство в границе Хофмана для коклик, поэтому любая вершина из $\Gamma - (O \cup O')$ смежна с $s - 1$ вершинами из $O \cap O'$. Лемма доказана.

Примером такой схемы для $s=4$ является схема проективных точек и гиперплоскостей проективного пространства $PG(3,3)$. Далее, пара $(O\cap O', \Gamma-(O\cup O'))$ является 2-$((s-1)^2, s-1, s^2-s+1)$ схемой.

Докажем теорему 5.3 В леммах 3.4–3.6 предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$.

Лемма 3.4 *Имеем $a_1=(a-c)p+a-1\geq 0$, $a<p(p+1)$, и в случае $a=c-i$, $i\geq 0$ выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $a=c$, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$, $\theta_1+\theta_3=-1$ и $-\theta_1\theta_3=a(a+p+1)$, а если $1\leq a<p+1$, то $a=c$;*

(2) *параметр a не равен $c-1$, а если $p+1\leq a<c$, то $2p+2\leq a$;*

(3) *если $a=c-2$, то $\theta_1=a-x$, $\theta_3=-(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x)=a(a+p+3)$ и $0<x<p/2$.*

Доказательство. Заметим, что $a_1=(a-c)p+a-1\geq 0$. Так как Γ_3 содержит овоид, то $p(p+1)\leq a$. Но овоиды $u^\perp$, $w^\perp$ не пересекаются, если $d(u,w)=3$ и ввиду леммы 3.3 имеем $a<p(p+1)$.

Пусть $a=c-i$, $i\geq 0$. Если $a=c$, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$ и кратности неглавных собственных значений равны

$((p^2+3p+2)(a^2+a)/(a+p+1)$,

$1/2(4a^2p^4+(4a^3+16a^2+5a)p^3+4a^3+(12a^3+28a^2+15a+1)p^2+8a^2+(12a^3+24a^2+15a+2)p-(ap^3+(2a^2+3a+1)p^2+2a^2+(4a^2+5a+2)p+3a+1)\sqrt{4a^2+4ap+4a+1}+5a+1)/(4a^3+4ap^2+8a^2+(8a^2+8a+1)p+5a+1)$,

$1/2(4a^2p^4+(4a^3+16a^2+5a)p^3+4a^3+(12a^3+28a^2+15a+1)p^2+8a^2+(12a^3+24a^2+15a+2)p+(ap^3+(2a^2+3a+1)p^2+2a^2+(4a^2+5a+2)p+3a+1)\sqrt{4a^2+4ap+4a+1}+5a+1)/(4a^3+4ap^2+8a^2+(8a^2+8a+1)p+5a+1)$.

По лемме 3.1 имеем $\theta_1\theta_3=-1$ и $-\theta_1\theta_3=a(a+p+1)$.

Пусть $1\leq a<p+1$. Если $a<c$, то $a_1\leq -p+a-1$, противоречие. Значит, $a=c$.

Если $a=c-1$, то Γ является графом Шилла. Но в этом случае по [, теорема 1] граф имеет массив пересечений $\{35,32,$
$8;1,8,28\}$, противоречие с тем, что для этого массива $q^3_{33}=-36/25$.

Пусть $p+1\leq a<2p+1$ и $a<c$. Если $i\geq 2$, то $a_1\leq -2p+a-1$, противоречие. Значит, $i=1$ и $a=c-1$, противоречие.

В случае $a=2p+1$ число $a+p+1=3p+2$ делит $(a+1,p)(p+2,a-1)$, поэтому $3p+2$ делит 8, $p=2$ и $a=c=5$, противоречие.

Пусть $a=c-2$. Тогда кратности неглавных собственных значений равны

$(a+1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1)$,

$1/2(4a^2p+4ap^2+4p^3-2\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}p^2$
$+4a^2+16ap+16p^2-2\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}a$
$-5\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}p+12a+21p$
$-3\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}+9)(ap+a+1)(p+1)$
$/((4a^2+4ap+4p^2+12a+12p+9)(a+p+1))$,

$1/2(4a^2p+4ap^2+4p^3+2\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}p^2$
$+4a^2+16ap+16p^2+2\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}a$
$-5\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}p+12a+21p$
$+3\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}+9)(ap+a+1)(p+1)$
$/((4a^2+4ap+4p^2+12a+12p+9)(a+p+1))$.

По лемме 3.1 имеем $\theta_1+\theta_3=-(2p+3)$ и $-\theta_1\theta_3=a(a+p+3)$. Отсюда $\theta_1=a-x$ и $\theta_3=-(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x)=a(a+p+3)$. Если $x=0$, то $2p+3+a=a+p+3$, противоречие. Если $x<0$, то $2p+3+a-x<a+p+3$, противоречие. Поэтому $x>0$, $2p+3+a-x>a+p+3$ и $x<p$. Пусть $x\geq p/2$. Тогда $(a-p/2)(a+3p/2+3)\geq a(a+p+3)$ и $-3p^2/4-3p/2\geq 0$, противоречие. Значит, $0<x<p/2$.

Лемма доказана.

Для массива пересечений $\{a(p+1),(a+2)p,a+1;1,a+2,ap\}$ при $1\leq a,p\leq 1000$ только для $a=76,p=75$ кратности целые. Но в этом случае $k<b_1$, противоречие.

Лемма 3.5 *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p\leq 2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{3,2,2;1,1,2\}$, $\{9,2c,4;1,c,6\}$, $c=2,3$, $\{15,2,6;1,,10\}$ *и* $c=3,5$*;*

(2) *если* $p=3$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{4,3,2;1,1,3\}$, $\{8,3c,3;1,c,6\}$, $c=1,2$, $\{16,3c,5;1,c,12\}$, $c=2,4$, $\{24,3c,7;1,c,18\}$, $c=3,4,6$, $\{32,3c,9;1,c,24\}$, $c=3,...,6,8,10$, $\{44,3c,12;1,c,33\}$, $c=5,...,11,13,14$.

Доказательство. Пусть $p=1$. Тогда $a\in\{1,2,4\}$. В случае $a=1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{2,1,2;1,1,1\}$, в случае $a=2$ граф Γ имеет массив пересечений $\{4,c,3;1,c,2\}$, и в случае $a=4$ граф Γ имеет массив пересечений $\{8,c,5;1,c,4\}$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть $p=2$. Ввиду леммы 3.4 имеем $a\in\{1,3,5\}$. В случае $a=1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{3,2,2;1,1,2\}$. В случае $a=3$ граф Γ имеет массив пересечений $\{9,2c,4;1,c,6\}$, ввиду леммы 3.4 получим $c\in\{2,3\}$ и при $c=2$ граф $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(6,3)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a=5$ граф Γ имеет массив пересечений $\{15,2c,6;1,c,10\}$ и ввиду леммы 3.4 получим $c\in\{3,5\}$.

Пусть $p = 3$. Ввиду леммы 3.4 имеем $a \in \{1, 2, 4, 6, 8, 11\}$. В случае $a = 1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{4, 3, 2; 1, 1, 3\}$. В случае $a = 2$ граф Γ имеет массив пересечений $\{8, 3c, 3; 1, c, 6\}$, ввиду леммы 3.4 имеем $c \in \{1, 2\}$ и при $c = 1$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 2)$.

В случае $a = 4$ граф Γ имеет массив пересечений $\{16, 3c, 5; 1, c, 12\}$, ввиду леммы 3.4 получим $c \in \{2, 3, 4\}$, при $c = 3$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 4)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a = 6$ граф Γ имеет массив пересечений $\{24, 3c, 7; 1, c, 18\}$, ввиду леммы 3.4 имеем $c \in \{3, ..., 6\}$, при $c = 5$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 6)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a = 8$ граф Γ имеет массив пересечений $\{32, 3c, 9; 1, c, 24\}$, ввиду леммы 3.4 получим $c \in \{3, ..., 8, 10\}$, при $c = 7$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 8)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a = 11$ граф Γ имеет массив пересечений $\{44, 3c, 12; 1, c, 33\}$, ввиду леммы 3.4 имеем $c \in \{5, ..., 11, 13, 14\}$. Лемма доказана.

Замечание 5.1 *В заключении леммы* 3.5 *нет допустимых массивов пересечений (в каждом случае найдется собственное значение, имеющее нецелую кратность).*

Лемма 3.6 *Если* $c = a - 2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{a(p+1), (a-2)p, a+1; 1, a-2, ap\}$, $\theta_1 = a + x$, $\theta_3 = 2p + 1 - a - x$, $(a+x)(a+x-2p-1) = a(p+a-1)$ *и* $3p/2 < x < 2p + 1$.

Доказательство. По лемме 3.1 имеем $\theta_1 + \theta_3 = (a - c)(p + 1) - 1$ и $-\theta_1\theta_3 = a(p+1+c)$. Если $c = a-2$, то $\theta_1+\theta_3 = 2p+1$ и $-\theta_1\theta_3 = a(p+a-1)$.

Положим $\theta_1 = a+x$. Тогда $\theta_3 = 2p+1-a-x$ и $(a+x)(a+x-2p-1) = a(p+a-1)$. Если $x = 0$, то $a-2p-1 = p+a-1$, противоречие. Если $x < 0$, то $a+x-2p-1 > p+a-1$ и $x-2p-1 > p-1$, противоречие. Значит, $x > 0$. Далее, $a(2x-2p-1)+x(x-2p-1) = a(p-1)$ и $x(2p+1-x) = a(2x-3p)$. Отсюда $3p/2 < x < 2p + 1$.

В случае $x = (3p + 1)/2$ получим $a = (3p + 1)(p + 1)/4$.

В случае $x = 3p/2 + 1$ получим $a = (3p + 2)p/8$.

В случае $x = 2p - 1$ получим $a(p - 2) = (2p - 1)2$ и $p = 8$ В случае $x = 2p-2$ получим $a(p-4) = 3(2p-2)$ и $p-4$ делит 18. Лемма доказана.

Из лемм 3.4–3.6 следует теорема 5.3 в случае $a \neq c + 1$.

В лемм 3.7–3.10 предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{a(p + 1), (a - 1)p, a + 1; 1, a - 1, ap\}$.

Лемма 3.7 *Если $c = a - 1$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *граф Γ_2 является псевдогеометрическим для $pG_{a(p-1)}(a(p+1), p-1)$, $2a + p$ делит $(p^2 + p)(ap + a + 1)$ и в случае $c = (p^2 - 4)/2$ граф Γ не существует;*

(2) *кратности неглавных собственных значений графа Γ равны $(a + 1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1)$, $(ap+a+1)a(p+2)(p+1)/((2a+p)(a+p+1))$, $(ap+a+1)(p+1)p/(2a+p)$, поэтому $a+p+1$ делит $(a, p+1)^2(p+2, a-1)$ и $2a + p$ делит $(p - 1, 2a + 1)(p, 2a)(p + 1, 2a - 1)(p + 2, 2a - 2)$;*

(3) *если Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1, a)$ с квазиклассическими параметрами $\{p+1, a\} = \{q, q\}, \{q^2, q\}, \{q^2, q^3\}, \{q-1, q + 1\}$, то Γ имеет массив пересечений $\{q^2 - 1, q^2 - 2q, q + 2; 1, q, q^2 - q - 2\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ или $\{195, 168, 14; 1, 11, 182\}$.*

Доказательство. Пусть $c = a - 1$. По [6, предложение 6] граф Γ_2 является псевдогеометрическим для $pG_{a(p-1)}(a(p+1), p-1)$ и $2a+p$ делит $(p^2+p)(ap+a+1)$. Поэтому граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(p+1, 2a)$. Если еще $c = (p^2-4)/2$, то граф Γ является Q-полиномиальным и по [6, 1теорема 3] не существует.

Ввиду леммы 5.1 граф Γ имеет собственные значения $\theta_1 = a + p$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -a$.

Далее, кратности неглавных собственных значений равны $(a+1)a(p+2)(p + 1)/(a + p + 1)$, $(ap + a + 1)a(p + 2)(p + 1)/((2a + p)(a + p + 1))$, $(ap+a+1)(p+1)p/(2a+p)$. Заметим, что $(a+p+1, 2a+p) = (p+2, a-1)$ и $a+p+1$ делит $a(p+2)(p+1)(ap+p+1, a+1)$, поэтому $a+p+1$ делит $a(p + 2)(p + 1)$ и $a + p + 1$ делит $(a, p + 1)^2(p + 2, a - 1)$.

Аналогично, $2a + p$ делит $(ap + a + 1)(p + 1)(2a, p)$. Так как $(ap + a + 1, 2a + p)$ делит $(p - 1, 2a + 1)(p + 2, 2a - 2)$, то $2a + p$ делит $(p - 1, 2a + 1)(p, 2a)(p + 1, 2a - 1)(p + 2, 2a - 2)$.

Заметим наконец, что $(a + p + 1, 2a + p) = (p + 2, a - 1)$.

Лемма 3.8 *Если $c = a - 1$ и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p + 1, a)$ с квазиклассическими параметрами $\{p + 1, a\} \in \{\{q, q\}, \{q^2, q\}, \{q^2, q^3\}, \{q - 1, q + 1\}\}$, то либо*

(i) $p = q^2 - 1, a = q$ и $q = 2, 3$, либо

(ii) $p = 26, a = 9$, либо

(iii) $p = q - 2, a = q + 1$, либо

(iv) $p = q, a = q - 1$, $q = 4, 14$.

Доказательство. Утверждение доказано в [63].

По лемме 3.8 имеем бесконечную серию массивов пересечений $\{q^2 - 1, q^2 - 2q, q + 2; 1, q, (q + 1)(q - 2)\}$, $q \geq 6$ и шесть спорадических массива

$\{243, 208, 10; 1, 8, 234\}$, $\{243, 208, 28; 1, 26, 216\}$, $\{8, 3, 3; 1, 1, 6\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$ или $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$. Но первые два спорадических графа не существуют: они имеют собственное значение 35 кратностей 11529/11 и 8235/31 соответственно. В случае массива $\{8, 3, 3; 1, 1, 6\}$ имеем $a_1 = 4$ и $[u]$ является объединением изолированных 5-клик, противоречие. Теорема 5.3 в случае $a = c + 1$ доказана.

Докажем теорему 5.4.

В случае массива $p = a - 3$: $\{a(a-2), (a-1)(a-3), a+1; 1, a-1, a(a-3)\}$, $a \geq 5$ имеем кратности неглавных собственных значений: $(a+1)a(a-1)(a-2)/(2a-2)$, $(a-1)^2a(a-1)(a-2)/((3a-3)(2a-2))$, $(a-1)^2(a-2)(a-3)/(3a-3)$.

В случае массива $p = 2a + 2$: $\{a(2a+3), 2(a-1)(a+1), a+1; 1, a-1, 2a(a+1)\}$, число a не сравнимо с 1 по модулю 3 и мы имеем кратности неглавных собственных значений: $(a+1)a(2a+4)(2a+3)/(3a+3)$, $(2a^2+3a+1)a(2a+4)(2a+3)/((4a+2)(3a+3))$, $(2a^2+3a+1)(2a+3)(2a+2)/(4a+2)$.

В случае массива $p = 2a-4$: $\{a(2a-3), 2(a-1)(a-2), a+1; 1, a-1, 2a(a-2)\}$, число a четно, не сравнимо с 1 по модулю 3 и мы имеем кратности неглавных собственных значений: $(a+1)a(2a-2)(2a-3)/(3a-3)$, $(2a^2-3a+1)a(2a-2)(2a-3)/((4a-4)(3a-3))$, $(2a^2-3a+1)(2a-3)(2a-4)/(4a-4)$.

В случае массива $p = 3a - 5$: $\{a(3a-4), (a-1)(3a-5), a+1; 1, a-1, a(3a-5)\}$, число a четно, a сравнимо с 0 или 2 по модулю 5 и мы имеем кратности неглавных собственных значений: $(a+1)a(3a-3)(3a-4)/(4a-4)$, $(3a^2-4a+1)a(3a-3)(3a-4)/((5a-5)(4a-4))$, $(3a^2-4a+1)(3a-4)(3a-5)/(5a-5)$.

Теорема 5.4 доказана.

§ 5.4. Графы Шилла с $b_2 = c_2$

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3.

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\max\{a_3, (a_1+\sqrt{k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1 = a_3$ по [5, теорема 7] имеем $\theta_1 = (a_1+\sqrt{k+a_1^2})/2$ и k делится на a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k и полагают $b(\Gamma) = k/a$.

Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = c_2$. Тогда $a_1 = a - b$, Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ и собственные значения θ_2, θ_3, являющиеся корнями уравнения $x^2-(a_2+a-b-ab)x+(b-1)b_2-a_2 = 0$. Если θ_2, θ_3 – целые числа, то $(a_2+a-b-ab)^2-4((b-1)b_2-a_2)$ является квадратом натурального числа, в противном случае кратности θ_2 и θ_3 совпадают.

Если $u_0 = 1, u_1 = \theta_1/k, ..., u_d$ – стандартная последовательность графа Шилла, отвечающая θ_1, $(c_i u_{i-1} + a_i u_i + b_i u_{i+1} = \theta_1 u_i)$, то по [7, теорема 7] имеем $u_2 = 0$.

Известные графы Шилла – это граф Хэмминга $H(3,3)$ с массивом пересечений $\{6,4,2;1,2,3\}$, нечетный граф $O(4)$ с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$, обобщенный шестиугольник $GH(2,2)$ с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$, граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{10,6,4;1,2,5\}$, граф Доро с массивом пересечений $\{12,10,3;1,3,8\}$, унитарный граф на множестве неизотропных векторов с массивом пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$ или граф Джонсона $J(9,3)$ с массивом пересечений $\{18,10,4;1,4,9\}$.

Возможные автоморфизмы графа Шилла с массивом пересечений $\{24,21,3;1,3,18\}$ найдены в [29]. Если собственное значение θ_2 графа Шилла Γ с $b_2 = c_2$ равно -1, то ввиду [78] Γ имеет массив пересечений $\{35,32,8;1,8,28\}$. Но в этом случае $q^3_{33} = -36/25$, противоречие.

Теорема 5.5 [78]. *Пусть граф Шилла* Γ *с* $b_2 = c_2$ *содержит нецелое собственное значение. Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$, *а кратности неглавных собственных значений равны* $(b^2-b+2)(b-1)b/2$, $(b^2-b+2)(b-1)b/2$ *и* $(b^2-b+1)b$.

Теорема 5.6. *Пусть граф Шилла* Γ *с* $b_2 = c_2$ *не содержит треугольников и* $b < 170$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{25,24,3;1,3,20\}$, $\{81,80,18;1,18,72\}$, $\{441,440,9;1,9,420\}$ *или* $\{441,440,49;1,49,420\}$.

Утверждение следует из [78, теорема 1] с привлечением [38, лемма 1.5].

В [78] рассмотрены также Q-полиномиальные графы Шилла с $b_2 = c_2$.

Предложение 5.3 [78]. *Пусть* Γ *является* Q*-полиномиальным графом Шилла с* $b_2 = c_2$. *Тогда* $\theta_3 = -b(b+1)/2$, $c_2 = qb/2$ *для некоторого натурального числа* q, *делящего* $2a(a+1)(b-1)$, $a = (b+1)(2q-b)/2$, $\theta_2 = q - b$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* b *четно, то для* $b = 2r$ *и* $q = t + r$ *граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{2rt(2r+1), (2r-1)(2rt+t+1), r(r+t); 1, r(r+t), t(4r^2-1)\}$, *для любой вершины* u *из* Γ *подграф* $\Gamma_3(u)$ *является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{t(2r+1), (2r-1)(t+1), 1; 1, t+1, t(2r+1)\}$ *и кратность собственного значения* θ_1 *равна* $2r(1 + 2rt(2r+1) + 2t(2r+1)(2r-1)(2rt+t+1)/(r+t) + 2r(2rt+t+1))/(1+4rt+2r+2t)$;

(2) *если b нечетно, то для $b = 4r+1$ и $q = 2(t+r)$ граф Γ имеет массив пересечений* $\{(2r+1)(4r+1)(4t-1), 4r(8rt+4t-2r), (t+r)(4r+1); 1, (t+r)(4r+1), 4r(2r+1)(4t-1)\}$, *$t+r$ делит* $(2r+1)(4t-1)4r(8rt+4t-2r)$ *и кратность θ_1 равна* $(4r+1)(1+(2r+1)(4r+1)(4t-1)+4r(2r+1)(4t-1)(8rt+4t-2r)/(t+r)+(8rt+4t-2r)(4r+1))/(8t(2r+1))$.

В [56] доказано, что случай нечетного b невозможен. Теория Q-полиномиальных графов Шилла с $b_2 = c_2$ построена в [64].

Теорема 5.7 [78]. *Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = c_2$ и $b = 4$. Тогда Γ имеет массив пересечений* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{40, 33, 3; 1, 3, 30\}$, *или* $\{20(q-2), 3(5q-9), 2q; 1, 2q, 15(q-2)\}$, $q = 6, 9, 18$.

Докажем теорему 5.5. Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 4.1. *Пусть Γ — граф Шилла с $b_2 = {}_2$ и $u_0 = 1, u_1 = \theta_1/k, ..., u_3$ — стандартная последовательность, отвечающая θ_1. Тогда $u_1 = 1/b, u_3 = -1/b$ и кратность m_1 собственного значения θ_1 равна* $b(1+ab+a(a+1)b(b-1)/c_2+(a+1)b)/(2a+b+1)$.

Доказательство. Имеем $c_iu_{i-1}+a_iu_i+b_iu_{i+1} = \theta_1u_i$, поэтому $c_2/b+b_2u_3 = 0$ и $u_3 = -1/b$. По формуле Бигса [2, теорема 4.1.4] имеем $m_i = v/\sum k_iu_i^2$ и кратность m_1 собственного значения θ_1 равна $(1+ab+a(a+1)b(b-1)/c_2+(a+1)b)/(1+a/b+(a+1)/b)$.

В леммах 4.2–4.4 будем предполагать, что Γ является графом Шилла, $a = a_3, b = b(\Gamma) = k/a$ и $c_2 = b_2$. Пусть u – вершина графа Γ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$.

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *Γ имеет массив пересечений* $\{ab, (a+1)(b-1), c_2; 1, c_2, a(b-1)\}$;

(2) $a_2 = k-2c_2$, $k_2 = ab(a+1)(b-1)/c_2$ *и* $k_3 = b(a+1)$;

(3) $\theta_2+\theta_3 = a-b-2c_2$, $\theta_2\theta_3 = (b-1)c_2-a_2 = b(c_2-a)+c_2$ *и* $(\theta_2+1)(\theta_3+1) = (b-1)(c_2-a-1)$.

Доказательство. Если $c_2 = b_2$, то Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), c_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. Далее, $a_2 = k-2c_2$, $k_2 = kb_1/c_2 = ab(a+1)(b-1)/c_2$ и $k_3 = k_2b_2/c_3 = b(a+1)$.

По лемме 1 имеем $\theta_2+\theta_3 = a-b-2c_2$, $\theta_2\theta_3 = (b-1)c_2-a_2$ и $(\theta_2+1)(\theta_3+1) = (b-1)(c_2-a-1)$.

Лемма 4.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $-b^2 < \theta_3 < -b$;

(2) *если кратность* θ_2 *равна кратности* θ_3*, то* $a-b<2c_2<a+b$, $a=b(b-1)/2$, Γ *имеет массив пересечений* $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$ *и спектр* $b^2(b-1)/2^1, b(b-1)/2^{b(b^2-b+1)}, ((-b+\sqrt{b^2+b(b-1)^2})/2)^{b(b^2-b+2)(b-1)/2}, ((-b-\sqrt{b^2+b(b-1)^2})/2)^{b(b^2-b+2)(b-1)/2}$, b *сравнимо с* 0 *или* 1 *по модулю* 4.

Доказательство. Первое утверждение следует из [7, следствие 16].

Пусть кратность θ_i равна m_i и $m_2=m_3$. По [7, теорема 11] имеем $a-b<2c_2<a+b$ и $a=b(b-1)/2$. Из доказательства теоремы 11 [7] следует, что $2c_2=a$ и $c_2=b(b-1)/4$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$, b сравнимо с 0 или 1 по модулю 4.

По лемме 4.1 кратность m_1 собственного значения θ_1 равна $b(1+b^2(b-1)/2+b(b^2-b+2)(b-1)+b(b^2-b+2)/2)/(1+b^2)$. Отсюда $m_1=b(b^2-b+1)$, $m_2=m_3=k_2/2=b(b^2-b+2)(b-1)/2$. Лемма доказана.

Из леммы 4.3 следует теорема 5.5.

Докажем теорему 5.7. До конца параграфа предполагается, что Γ является графом Шилла с $b_2=c_2$.

Лемма 4.4. *Если* Γ *не является* Q*-полиномиальным графом относительно* θ_1 *и* $b\geq 4$*, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *либо* $k<b^3-b$*, либо* $v<k(b^3-b+3)$*;*

(2) $2k<b^2(b+1/2)^2(b^3-b+3)$.

Доказательство. Если $a_1+1<b^2-b$, то $a<b^2-1$ и $k<b^3-b$. Если же $a_1+1\geq b^2-b$, то $a+1\geq b^2$ и по [7, лемма 8] имеем $c_2\geq (a+b+1)(a+1-b^2)/(b^2+b)\geq (a+1)/(b^2+b)$. Отсюда $v=1+k+k_2+k_3=1+k+k(a+1)(b-1)/c_2+k(a+1)/a<k(2+1/(b^2-1)+(b-1)(b^2+b))$.

Пусть $k\geq b^3-b$. По [7, лемма 13] имеем $v<(m_1+1)(m_1+2)/2$, где m_1 – кратность θ_1. Ввиду формулы Бигса имеем $m_1+2<v/(a/b)+2<((b+1/2)/b)(v/(a/b))$, где последнее неравенство выполняется ввиду $v/a>k/a\geq 4$. Отсюда $\sqrt{2v}<((b+1/2)/b)(v/(a/b))$, поэтому $v>2(a/(b+1/2))^2)$. Отсюда $2k^2<b^2(b+1/2)^2v$ и по утверждению (1) имеем $2k<b^2(b+1/2)^2(b^3-b+3)$.

Лемма 4.5. *Пусть* $b=4$*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если кратность* θ_3 *равна кратности* θ_2*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{24,21,3;1,3,18\}$ *и спектр* $24^1, 6^{52}, (-2+\sqrt{13})^{84}, (-2-\sqrt{13})^{84}$*;*

(2) Γ *содержит треугольников;*

(3) *если* Γ *является* Q*-полиномиальным графом, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{20(q-2),3(5q-9),2q;1,2q,15(q-2)\}$*, для любой вершины и*

из Γ подграф $\Gamma_3(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{5(q-2),3(q-1),1;1,q-1,5(q-2)\}$, $q=6,9,18$ и кратность θ_1 равна $4(8q-15+6(q-2)(5q-9)/q)/(2q-3)$.

Доказательство. Если кратность θ_3 равна кратности θ_2, то по теореме 5.5 граф Γ имеет массив пересечений $\{24,21,3;1,3,18\}$ и спектр $24^1,6^{52},(-2+\sqrt{13})^{84},(-2-\sqrt{13})^{84}$.

Ввиду теоремы 5.6 граф Γ содержит треугольник.

Пусть Γ является Q-полиномиальным графом. Если $c_2=2q$, то по предложению 5.1 для $r=2$ и $t=q-2$ граф Γ имеет массив пересечений $\{20(q-2),3(5q-9),2q;1,2q,15(q-2)\}$, для любой вершины u из Γ подграф $\Gamma_3(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{5(q-2),3(q-1),1;1,q-1,5(q-2)\}$, q делит $30(q-2)(5q-9)$, кратность $\theta_1=5(q-2)$ равна $4(8q-15+6(q-2)(5q-9)/q)/(2q-3)$, поэтому q делит $4\cdot 27$. Легко проверить, что если q делится на 27, то допустимых массивов пересечений нет. Пэтому q делит 36.

Если $q=3$, то граф Γ имеет массив пересечений $\{20,18,6;1,6,15\}$, $m_1=4(9+12)/3=28$, $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{5,6,1;1,2,5\}$, противоречие.

Если $q=4$, то Γ имеет массив пересечений $\{40,33,8;1,8,30\}$, $m_1=40$, $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{10,9,1;1,3,10\}$. Но последний граф имеет собственные значения $2,-5$, причем кратность 2 равна $33/2$, противоречие. Значит, $q\geq 6$.

Если $q=6$, то Γ имеет массив пересечений $\{80,63,12;1,12,60\}$, $m_1=4(33+84)/9=52$, $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{20,15,1;1,5,20\}$.

Если $q=9$, то Γ имеет массив пересечений $\{140,108,18;1,18,105\}$, $m_1=12(19+56)/15=60$, $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{35,24,1;1,8,35\}$.

Если $q=12$, то Γ имеет массив пересечений $\{200,153,24;1,24,150\}$, $m_1=4(27+85)/7=64$, $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{50,33,1;1,11,50\}$.

Если $q=18$, то Γ имеет массив пересечений $\{320,243,36;1,36,240\}$, $m_1=4(43+144)/11=68$, $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{80,51,1;1,17,80\}$.

Если $q=36$, то Γ имеет массив пересечений $\{680,513,72;1,72,510\}$, $m_1=4(91+323)/23=72$, $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{170,105,1;1,35,170\}$.

Лемма 4.6. *Если $b=4$, кратность θ_3 не равна кратности θ_2, и Γ не является Q-полиномиальным графом относительно θ_1, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $a/2-2\leq c_2\leq a+1$*;*

(2) $2a+5$ *делит* $15(c_2-3)$ *и* a *делится на* 5*;*

(3) $\theta_2 \neq 1$ *и если* $\theta_2 = 0$*, то* $a \leq 60$*;*

(4) *если* $a \leq 60$*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{40, 33, 3; 1, 3, 30\}$*.*

Доказательство. По лемме 3.1 имеем $\theta_2 + \theta_3 = a - 4 - 2c_2$, $\theta_2\theta_3 = 5c_2 - 4a$ и $(\theta_2 + 1)(\theta_3 + 1) = 3(c_2 - a - 1)$. Отсюда $c_2 \geq a/2 - 2$. Ввиду [65, предложение 5] имеем $c_2 \leq k/2 = 2a$.

Если $\theta_2 = 0$, то $5c_2 = 4a$, $\theta_3 = a - 4 - 2c_2 = -3c_2/4 - 4$. Если $\theta_2 = 1$, то $\theta_3 = a - 5 - 2c_2 = 5c_2 - 4a$, противоречие.

Допустим, что $c_2 > a+1$. Тогда $|\theta_2| \geq 2$, $2c_2+6-a \leq |\theta_3| \leq (5c_2-4a)/2$ и $c_2 \geq 12 + 2a$, противоречие. Значит, $a/2 - 2 \leq c_2 \leq a + 1$

По лемме 4.4 имеем $a < b(b + 1/2)^2(b^3 - b + 3)/2 = 8 \cdot 20.25 \cdot 63$. Далее, Γ имеет массив пересечений $\{4a, 3(a + 1), c_2; 1, c_2, 3a\}$ и по лемме 4.1 кратность m_1 собственного значения θ_1 равна $4(1+4a+12a(a+1)/c_2+4(a + 1))/(2a + 5)$. Отсюда $2a + 5$ делит $15(c_2 - 3)$.

Если $c_2 = 3$, то $m_1 = 4(2a + 1)$. По утверждению (1) имеем $a \leq 10$.

Допустим, что a не делится на 5. Тогда $2a + 5$ делит $3(c_2 - 3)$. Если $2a + 5 = 3(c_2 - 3)$, то $c_2 = (2a + 14)/3$, $\theta_2 + \theta_3 = a - 4 - 2(2a + 14)/3 = -a - 40/3$, противоречие. Если же $2a + 5 = 3(c_2 - 3)/2$, то $c_2 = (4a + 19)/3$, $\theta_2 + \theta_3 = -5(a + 10)/3$, $(\theta_2 + 1)(\theta_3 + 1) = a + 16$. Так как c_2 делит $12a(a+1)$, то $a \geq 29$, причем в случае $a = 29, c_2 = 45$ имеем $\theta_2+\theta_3 = -65$, $(\theta_2 + 1)(\theta_3 + 1) = 45$. В любом случае имеем противоречие. Итак, $a = 5l$, $2l + 1$ делит $3(c_2 - 3)$. Если $\theta_2 = 0$, то $a = 5c_2/4$ и $_2 + 2$ делит $6(c_2 - 3)$, поэтому c_2 делит 30 и $a \leq 60$.

Если $a = 5$, то $a_1 = 1$, $1 \leq c_2 \leq 6$, c_2 делит $30 \cdot 12$ и допустимых массивов пересечений нет.

Если $a = 10$, то $3 \leq c_2 \leq 11$, c_2 делит $110 \cdot 12$, 5 делит $c_2 - 3$ и Γ имеет массив пересечений $\{40, 33, 3; 1, 3, 30\}$ или $\{40, 33, 8; 1, 8, 30\}$. Но в последнем случае Γ является Q-полиномиальным графом, противоречие.

Если $a = 15$, то $6 \leq c_2 \leq 16$, c_2 делит $240 \cdot 12$, 7 делит $c_2 - 3$, $c_2 = 10$ и массив пересечений $\{60, 48, 10; 1, 10, 45\}$ не является допустимым.

Если $a = 20$, то $8 \leq c_2 \leq 21$, c_2 делит $420 \cdot 12$, 3 делит $c_2 - 3$ и Γ имеет массив пересечений $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$. Но в этом случае Γ является Q-полиномиальным графом, противоречие.

Если $a = 25$, то $11 \leq c_2 \leq 26$, c_2 делит $650 \cdot 12$, 11 делит $c_2 - 3$, $c_2 = 25$ и массив пересечений $\{100, 78, 25; 1, 25, 75\}$ не является допустимым.

Если $a = 30$, то $13 \leq c_2 \leq 31$, c_2 делит $930 \cdot 12$, 13 делит $c_2 - 3$, $c_2 = 16$, противоречие.

Если $a = 35$, то $16 \leq c_2 \leq 36$, c_2 делит $1260 \cdot 12$, 5 делит $c_2 - 3$, $c_2 = 18, 28$ и мы имеем массив пересечений $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ (для графа с массивом $\{140, 108, 28; 1, 28, 105\}$ собственное значение $\theta_3 = -5$ имеет кратность $336/5$). Но в этом случае граф является Q-полиномиальным.

Если $a = 40$, то $18 \le c_2 \le 41$, c_2 делит $1640 \cdot 12$, 17 делит $c_2 - 3$, $c_2 = 20$ и массив пересечений $\{160, 123, 20; 1, 20, 120\}$ не является допустимым.

Если $a = 45$, то $21 \le c_2 \le 46$, c_2 делит $2070 \cdot 12$, 19 делит $c_2 - 3$, $c_2 = 22$, противоречие.

Если $a = 50$, то $23 \le c_2 \le 51$, c_2 делит $2550 \cdot 12$, 7 делит $c_2 - 3$, $c_2 = 17, 24, 45$ и допустимых массивов пересечений нет.

Если $a = 55$, то $26 \le c_2 \le 56$, c_2 делит $55 \cdot 56 \cdot 12$, 23 делит $c_2 - 3$, противоречие.

Если $a = 60$, то $28 \le c_2 \le 61$, c_2 делит $60 \cdot 61 \cdot 12$, 25 делит $c_2 - 3$, противоречие. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 5.7. Ввиду леммы 4.5 будем считать, что кратность θ_3 не равна кратности θ_2, и Γ не является Q-полиномиальным графом относительно θ_1. По лемме 4.6 можно считать, что $a \ge 65$, $\theta_2 \ge 2$, $\theta_2 + \theta_3 = a - 4 - 2c_2$ и $(\theta_2 + 1)(\theta_3 + 1) = 3(c_2 - a - 1)$. Отсюда $2c_2 + 5 - a \le |\theta_3 + 1| \le c_2 - a - 1$, противоречие. Теорема 5.7 доказана.

В заключение сформулируем ряд задач, возникших из результатов, полученных в диссертации.

Глава 1.

1.1. Найти автоморфизмы графа $Izo(5)$ и его локальных подграфов.

Глава 2.

2.1. Найти автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{21,18,12,4;1,1,6,21\}$.

2.2. Найти автоморфизмы графов с массивами пересечений $\{33,30,8;1,1,30\}$ и $\{39,36,4;1,1,36\}$.

2.3. Найти автоморфизмы антиподальных графов с массивами пересечений $\{63,60,1;1,4,63\}$, $\{99,96,1;1,4,99\}$, $\{108,105,1;1,5,108\}$, $\{147,144,1;1,16,147\}$, $\{171,168,1;1,12,171\}$ и $\{243,240,1;1,20,243\}$.

Глава 3.

3.1. С целью построения новых $AT4$-графов найти автоморфизмы

(i) небольших $AT4(q-2,q,r)$-графов и вторых окрестностей их вершин;

(ii) небольших $AT4(p,q,r)$-графов.

3.2. Обратные задачи в теории дистанционно регулярных графов.

Найти допустимые массивы пересечений дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3 в случаях:

(i) $\bar{\Gamma}_3$ — двойственная 2-схема;

(ii) $\bar{\Gamma}_3$ — сеть.

Глава 4.

4.1. Найти автоморфизмы графа Γ с массивом пересечений $\{119,100,15;1,20,105\}$, для которого Γ_3 — граф с параметрами (800,85,0,10).

4.2. Для антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Gamma_{3,4}$ найти параметры $\Gamma_{3,4}$ по массиву пересечений графа Γ. Обратно, по параметрам сильно регулярного графа Δ найти массив пересечений антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4, для которого граф $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры графа Δ.

Глава 5.

5.1. Найти автоморфизмы графа Γ с массивом пересечений $\{q^2-1,q^2-2q,q+2;1,q,(q+1)(q-2)\}$, $q\geq 6$ (в частности, в случае, когда Γ_3 — точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(q-1,q+1)$).

5.2. Найти автоморфизмы графов Γ, имеющих массивы пересечений

(*i*) $\{a(a-2),(a-1)(a-3),a+1;1,a-1,a(a-3)\}$, $a\geq 5$;

(*ii*) $\{a(2a+3),2(a-1)(a+1),a+1;1,a-1,2a(a+1)\}$, a не сравнимо с 1 по модулю 3;

(*iii*) $\{a(2a-3),2(a-1)(a-2),a+1;1,a-1,2a(a-2)\}$, a четно и не сравнимо с 1 по модулю 3;

(*iv*) $\{a(3a-4),(a-1)(3a-5),a+1;1,a-1,a(3a-5)\}$, a четно и сравнимо с $0,2$ по модулю 5.

5.3. Найти автоморфизмы графов Шилла с $b=3$ (массивы пересечений $\{24,18,9;1,1,16\}$, $\{27,20,10;1,2,18\}$, $\{30,22,9;1,3,20\}$, $\{42,30,12;1,6,28\}$, $\{60,42,18;1,6,40\}$, $\{69,48,24;1,4,46\}$, $\{93,64,24;1,6,62\}$, $\{105,72,24;1,12,70\}$).

5.4. Найти автоморфизмы графов Шилла с $b_2=c_2$ и $b=4$ (массивы пересечений $\{40,33,3;1,3,30\}$ и $\{20(q-2),3(5q-9),2q;1,2q,15(q-2)\}$, $q=6,9,18$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tits J. Buildings of Spherical Type and finite BN-pairs, Springer Lecture Notes in Mathematics, v. 386, 1974.

2. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

3. Higman D.G. Finite permutation groups of rank 3 // Math. Z. 1964, v. 86, 145-156.

4. Higman D.G. Primitive rank 3 groups with a prime subdegree // Math. Z. 1966, v. 91, 70-86.

5. Prager C.E., Soicher L.H. Low rank representations and graphs for sporadic groups. Lecture series 8. Cambridge, University press, 1997.

6. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012, v. 65, 29–47.

7. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010, v. 31, 2064–2073.

8. Cameron P.J. Permutation Groups. London Math. Soc. Student Texts №45. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1999.

9. Махнев А.А., Нирова М.С. Об однородных расширениях частичных геометрий // Труды Института математики и механики УрО РАН 2007, т. 13, N 1, 148-157.

10. Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 groups // J. Algebra 1977, v. 45, 391-434.

11. Махнев А.А. Локально GQ(3,5)-графы и геометрии с короткими прямыми // Дискр. матем. 1998, т. 10, 72-86.

12. Махнев А. А., Падучих Д. В. Расширения GQ(4,2), вполне регулярный случай // Дискретная математика 2001, т. 13, N 3, 91-109.

13. Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О вполне регулярных локально GQ(4,4)-графах // Доклады академии наук 2010, т. 434, N 5, 583-586.

14. Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О вполне регулярных локально GQ(4,6)-графах // Доклады академии наук 2011, т. 439, N 2, 146-149.

15. Махнев А.А., Падучих Д.В. О вполне регулярных локально GQ(4,8)-графах // Доклады академии наук 2012, т. 443, N 1, 583-586.

16. Махнев А.А., Падучих Д.В. Обобщенный четырехугольник GQ(4,16) и его расширения // Доклады академии наук 2013, т. 451, № 4, 378-380.

17. Кагазежева А.М. О локально $GQ(4,11)$-графах // Математический форум (Итоги науки. Юг России), т. 6 Группы и графы, Владикавказ 2012, 28-39.

18. Махнев А.А. О сильно регулярных локально GQ(4,t)-графах // Сибирский матем. журнал 2008, т. 49, N 1, 161-182.

19. Cameron P., Van Lint J. Designs, Graphs, Codes and their Links, London Math. Soc. Student Texts 22 1981. Cambr. Univ. Press.

20. Nebe G., Venkov B. On tight spherical designs // Алгебра и анализ 2012, т. 24, N 3, 163-171.

21. Махнев А.А. О несуществовании сильно регулярных графов с параметрами (486,
165,36,66) // Украинский матем. журнал 2002, т. 54, N 7, 941-949.

22. Махнев А.А., Токбаева А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (243,66,9,21) // Владикавказский матем. журнал 2010, т. 12, N 4, 35-45.

23. Исакова М.М., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54) // Владикавказский матем. журнал 2010, т. 12, N 3, 32-42.

24. Буриченко В.П., Махнев А.А. О вполне регулярных локально циклических графах // Современные проблемы математики. Тезисы 42 Всероссийской молодежной конференции. ИММ УрО РАН, Екатеринбург 2011, 11-14.

25. Махнев А.А. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$ // Доклады академии наук 2014, т. 459, N 5, 539-543.

26. M. Shi, D. Krotov, P. Sole, A new distance-regular graph of diameter 3 on 1024 vertices, https://arxiv.org/pdf/1806.07069.pdf).

27. Зюляркина Н.Д., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ // Доклады академии наук 2011, т. 439, N 4, 443-447.

28. Белоусов И.Н., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$ // Труды Института математики и механики 2016, т. 22, N 2, 28-37.

29. Махнев А.А., Падучих Д.В. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ // Алгебра и логика 2012, т. 51, № 4, 476-495.

30. Махнев А.А., Циовкина Л.Ю. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ // Труды Института математики и механики 2012, т. 18, N 1, 235-241.

31. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math. 2011, v. 311, N 2-3, 132-144.

32. Ефимов К.С., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (88,27,6,9) // Доклады академии наук 2012, т. 445, N 3, 247-250.

33. Журтов А.Х., Махнев А.А., Кагазежева А.М. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (96,45,24,18) // Доклады академии наук 2012, т. 445, N 3, 247-250.

34. Белоусов И.Н., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (96,60,38,36) // Доклады академии наук 2013, т. 451, N 3, 247-250.

35. Ефимов К.С., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами (99,42,21,15) и (99,56,44,42) // Доклады академии наук 2013, т. 449, N 3, 247-250.

36. Jurisic A., Koolen J.H. Terwilliger P. Tight distance-regular graphs // J. Algebr. Comb. 2000, v. 12, 163-197.

37. Bang S., Koolen J. Distance-regular graphs of diameter three having eigenvalue -1 // Linear Algebra and its Applications 2017, v. 531, 38-53.

38. Белоусов И.Н. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018, т. 24, N 3, 16-26.

39. Hobart S.A., Hughes D.R. *EpG*s with minimal μ. II // Geom. Dedic. 1992, v. 42, 129-138.

40. Neumaier A. Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979, v. 33, 392-400.

41. Hobart S.A., Hughes D.R. Extended partial geometries: nets and dual nets // Europ. J. Comb. 1990, v. 11, 357-372.

42. Cameron P.J., Hughes D.R., Pasini A. Extended generalized quadrangles // Geom. Dedic. 1990, v. 35, 193-228.

43. Brouwer A.E., Haemers W.H. Spectra of graphs (course notes) // http://www.
win.tue.nl/ aeb/

44. Blokhuis A., Brouwer A., E. Locally 4-by-4 grid graphs // J. Graph Theory 1989, v. 13, 229-244.

45. Gardiner A. Homogeneous graphs // J. Comb. Theory 1976, v. 20, 94-102.

46. Brouwer A.E., Haemers W.H. The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993, v. 14, 397-407.

47. Cameron P., Goethals J., Seidel J. Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents // J. Algebra 1978, v. 55, 257-280.

48. Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Доклады академии наук 2010, т. 432, N 5, 512-515.

49. Bous R.C., Dowling T.A. A generalization of Moore graphs of diameter 2 // J. Comb. Theory (B) 1971, v. 11, 213-226.

50. Cameron P. Permutation Groups, London Math. Soc. Student Texts 45 1999. Cambr. Univ. Press.

51. MacKay M., Siran J. Search for properties of the missing Moore graph // Linear Algebra and its Applications 2010, v. 432, 2381-2398.

52. Махнев А.А., Падучих Д.В. О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // Труды ИММ УрО РАН 2013, т. 19, N 3, 518-522.

53. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports 2009, v. 6, 1-12.

54. Koolen J.H., Park J., Yu H. An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph // Linear Algebra and its Applications 2011, v. 434, 2404-2412.

55. Degraer J. Isomorph-free exhaustive generation algorithms for assocition chemes // PHD, Univ. Gent, 2007

56. Vidali J. Kode v razdaljno regularnih grafih // Doctorska Dissertacija, Univerza v Ljubljani, 2013.

57. Jurisic A. $AT4$-family and 2-homogeneous graphs // Discrete Math. 2003, v. 264, 127-148.

58. Махнев А.А., Падучих Д.В., Самойленко М.С. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ // Доклады академии наук 2014, т. 459, № 2, 149-153.

59. Махнев А.А., Самойленко М.С. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (276,75,10,24) // Доклады академии наук 2014, т. 457, № 5, 516-519.

60. Brouwer A.E. Polarities of G. Higman's symmetric design and a strongly regular graph on 176 vertices // Aequationes Math. 1982, v. 25, 77-82.

61. Makhnev A.A. Graphs in which Hoffman bound for cocliques coincides with Cvetcovich bound // Doklady RAN 2011, v. 438, 303-307.

62. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On distance-regular graphs with intersection array $\{a(p+1),(a-1)p,a+1;1,a-1,ap\}$ // Mal'tsevskie Chteniya, Abstracts 2017, 81.

63. Белоусов И.Н., Махнев А.А. К теории графов Шилла с $b_2 = c_2$ // Сибирские электрон. матем. известия 2017, т. 14, 1064-1077.

64. Koolen J.H., Park J. Distance-regular graphs with large a_1 or c_2 at least half the valency // J. Combin. Theory Ser. A. 2012, v. 434, 546-555.

65. Махнев А.А., Падучих Д.В. Обратные задачи в теории дистанционно регулярных графов // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018, т. 24, N 3, 134-144.

Публикации автора по теме диссертации

66. Журтов А.Х., Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Труды Института математики и механики УрО РАН 2010, т. 16, N 3, 93-104.

67. Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) // Доклады академии наук 2011, т. 440, N 6, 743-746.

68. Нирова М.С. Сильно $(s-2)$-однородные расширения частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2011, т. 17, N 4, 244-257.

69. Махнев А.А., Нирова М.С. О небольших симметричных сильно регулярных графах // Доклады академии наук 2012, т. 444, N 1, 23-27.

70. Нирова М.С. Об антиподальных дистанционно регулярных графах с $\mu = 1$ // Доклады академии наук 2013, т. 448, N 4, 392-395.

71. Нирова М.С. Реберно симметричные сильно регулярные графы с числом вершин, не большим 100 // Сибирские электронные математические известия 2013, т. 10, 22-30.

72. Нирова М.С. Дистанционно регулярные локально $GQ(4,12)$-графы // Сибирские электронные математические известия 2013, т. 10, 144-150.

73. Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{51,48,8;1,4,36\}$ // Доклады академии наук 2013, т. 449, N 3, 258-261.

74. Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular graphs with $\lambda = 2$ // Jornal of Siberian Federal Univ. 2014, т. 7, N 2, 188-194.

75. Махнев А.А., Нирова М.С., Падучих Д.В. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2016, т. 22, N 1, 212-219.

76. Нирова М.С. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивами пересечений $\{144,125,32,1;1,8,125,144\}$ // Сибирские электрон. матем. известия 2017, т. 14, 178-189.

77. Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2017, т. 23, N 3, 182-190.

78. Махнев А.А., Нирова М.С. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Матем. заметки 2018, т. 103, N 5, 730-748.

79. Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018, т. 24, N 2, 215-228.

80. Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 // Сибирские электрон. матем. известия 2018,

т. 15, 175-185.
81. Нирова М.С. Коды в дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018, т. 24, N 3, 155-163.
82. Махнев А.А., Нирова М.С. Обратные задачи в теории графов: обобщенные четырехугольники // Сибирские электрон. матем. известия 2018, т. 15, 927-934.
83. Журтов А.Х., Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Теория групп и ее приложения. Труды VIII Международной школы-конференции по теории групп. Нальчик 2010, 100-107.
84. Махнев А.А., Нирова М.С. О небольших симметричных сильно регулярных графах // Алгебра и линейная оптимизация. Тез. докл. Международной конф. Екатеринбург 2012, 124-125.
85. Нирова М.С. Об антиподальных дистанционно регулярных графах с $\mu = 1$ // Теория групп и ее приложения. Тез. докл. Международной школы-конференции. Владикавказ 2012, 94-96.
86. Нирова М.С. О локально $GQ(4,12)$-графах // Современные проблемы математики. Тез. докл. 44 Международной молодежной школы-конференции. Екатеринбург 2013, 85-87.
87. Нирова М.С. О реберно симметричных сильно регулярных графах с числом вершин, не большим 100 // Алгебра и комбинаторика. Тез. докл. межд. конф., посвященной 60-летию А.А. Махнева, Екатеринбург 2013, 120-122.
88. Махнев А.А., Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах с $\lambda = 2$ // Теория групп и ее приложения. Труды Международной школы-конф. по теории групп, Нальчик 2014, 41-42.
89. Makhnev A.A., Nirova M., Paduchikh D. Automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ "Groups and Graphs, Algorithms and Automata". Abstracts of Intern. Conf and PHD Summer School, Yekaterinburg 2015, 69-70.
90. Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular graphs with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 // Тез. докл. межд. конф. Актуальные проблемы прикладной математики и физики, Нальчик 2017, 253-254.
91. Makhnev A.A., Nirova M.S. Automorphisms of graph with intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ // "Graphs and Groups, Metrics and Manifolds". Abstracts of Intern. Conf and PHD-Master Summer School, Ekaterinburg 2017, 70.
92. Махнев А.А., Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Мальцевские чтения. Тезисы докладов, Новосибирск 2017, 80.

93. Махнев А.А., Нирова М.С. Коды в дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Теория групп и ее приложения. Материалы XII школы-конференции по теории групп. Краснодар 2018, 96-98.