

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Пустошилов Александр Сергеевич

**Повышение точности обработки данных ГНСС
с использованием полиномиальных и адаптивных методов**

Специальность 2.2.16 – Радиолокация и радионавигация

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель –
доктор физ.-мат. наук, профессор
Царев Сергей Петрович

Красноярск – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Полиномиальные методы поиск аномалий в восстановленных орбитах	16
1.1 Формат передачи информации SP3.....	18
1.2 Описание методики поиска и обнаружения аномалий	19
1.3 Анализ SP3-данных, предоставляемых аналитическими центрами.....	24
1.4 Выводы по главе 1.....	32
Глава 2. Адаптивные методы определение кинематических параметров движения навигационных спутников по таблицам эфемерид	33
2.1 Метод численного интегрирования уравнений движения навигационного спутника	34
2.2 Стандартные методы интерполяции кинематических параметров движения навигационных спутников	34
2.3 Метод свободной интерполяции кинематических параметров движения навигационных спутников	37
2.4 Выводы по главе 2.....	53
Глава 3. Обнаружение скачков в фазовых измерениях одночастотных приемников с различными стандартами частоты.....	55
3.1 Модели измерений для одночастотного приемника	57
3.2 Формализация задачи поиска скачков в одночастотных измерениях.....	59
3.3 Алгоритмы поиска скачков в фазовых измерениях	70
3.4 Апробация алгоритмов на модельных данных	80
3.5 Апробация алгоритмов на измерениях навигационных приемников	103
3.6 Выводы по главе 3.....	131
Заключение	132
Список сокращений и условных обозначений.....	134
Список литературы	135
Приложение А. Акт внедрения СФУ	145
Приложение Б. Акт внедрения АО «ИСС»	146

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Повышение точности решения навигационной задачи является одним из приоритетных направлений развития глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). В постобработке для точного решения задачи навигации используются кодовые и фазовые измерения навигационного приемника (НП). Одной из известных проблем использования фазовых измерений является фазовая неоднозначность [1, 2], для нахождения которой существует множество подходов. В фазовых измерениях НП встречаются «скачки» (проскоки счета циклов) различного характера, которые затрудняют решение задачи определения фазовой неоднозначности. В настоящее время на рынке появилось множество недорогих (в англоязычной литературе «low-cost») одночастотных НП, в которых доступны фазовые измерения, но применение наиболее распространенных алгоритмов поиска скачков в фазовых измерениях не применимо из-за отсутствия измерений на второй частоте.

Основной вклад в измерения вносит геометрическая дальность между НП и навигационным спутником (НС), изменение которой обусловлено движением НС по его орбите и вращением Земли [1, 2]. Для решения задач на этапе постобработки измерительной информации используются уточненные орбиты НС, полученные в результате решения задач эфемеридно-временного обеспечения (ЭВО) в виде SP3-данных. Диссертационная работа посвящена разработке методов поиска аномалий, интерполяции и экстраполяции орбит НС по SP3-данным (информации об эфемеридах НС)[3] и исследованию методов обнаружения скачков в фазовых измерениях одночастотного НП.

Актуальность данного исследования определяется недостаточной проработкой в известной литературе способов обнаружения малых (порядка одного цикла) скачков в фазовых измерениях одночастотных НП без привлечения дополнительной информации. Необходимость разработки новых алгоритмов поиска аномалий в SP3-данных без привлечения дополнительной информации и определения кине-

матических параметров движения НС по ограниченному набору данных определяется отсутствием в известной литературе таких методов.

Способы поиска аномалий и определения кинематических параметров движения НС, с одной стороны, имеют самостоятельный интерес, с другой стороны, существенно развивают аппарат для решения задач обнаружения малых скачков в фазовых измерениях.

Степень разработанности темы исследования. Решением задач ЭВО занимаются ведущие мировые центры: международная служба ГНСС (IGS) [4]; информационно-аналитический центр координатно-временного и навигационного обеспечения (ИАЦ КВНО) ЦНИИмаш. ГЛОНАСС [5]; Center for Orbit Determination in Europe (CODE) [6]; European Space Agency (ESA) [7] и другие. Такие центры выдают решение задач ЭВО в виде табулированных данных. Анализу и методам использования данных аналитических центров посвящено множество работ как зарубежных авторов, таких как О. Montenbruck, М. Schenewerk, J. Griffiths, J. R. Ray, так и российских: А.К. Гречкосеев, А.В. Забокрицкий, В.В. Митрикас, В.В. Пасынков, С.Л. Пасынок.

Для определения кинематических параметров движения НС по SP3-данным в известных работах [8–19] предлагается использовать полиномиальную или тригонометрическую интерполяцию. Кинематические параметры движения НС определяются этими методами по 9-12 SP3-точкам, при уменьшении числа SP3-точек ошибка определения параметров увеличивается в разы.

Классификации и способам обнаружения скачков в фазовых измерениях посвящено множество работ, в частности, таких авторов, как К.М. Антонович, А.И. Перов, Л. Рапопорт, А.С. Толстиков, В.Н. Харисов, G. Blewitt, P.J.G. Teunissen и др. В большинстве случаев задачу поиска скачков в фазовых измерениях решают по набору кодовых и фазовых измерений на двух частотах, используя комбинацию Мельбуерна–Вуббена [2, 20, 21]. Для одночастотных приемников задача обнаружения скачков в фазовых измерениях [22] решается либо с использованием доплеровских измерений [23], нескольких НС [24], временными разностями вы-

соких порядков [25] (при этом детектируются лишь большие скачки), либо в режимах относительного позиционирования [26, 27].

В известных работах не рассмотрены такие вопросы, как:

- использование полиномиальных аппроксимаций высоких степеней для поиска и определения типа аномалий в орбитах НС;
- использование адаптивных базисов для интерполяции и экстраполяции орбит НС;
- использование адаптивных и полиномиальных базисов для обнаружения скачков в фазовых измерениях одночастотного НП.

Существующие методы поиска аномалий в SP3-данных и обнаружения разрывов в фазовых измерениях требуют наличия большого объема дополнительной информации. Методы интерполяции требуют не менее 9 SP3-точек, а при меньшем количестве имеют большую погрешность. Таким образом, существует актуальность разработки алгоритмов, которые с высокой точностью решают задачи поиска аномалий, интерполяции и экстраполяции орбит по SP3-данным, а также обнаружения скачков в фазовых измерениях в условиях ограниченных исходных данных.

Целью работы является повышение точности решения задач обработки измерительной и эфемеридной информации ГНСС за счет использования полиномиальных и адаптивных аппроксимаций.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Анализ существующих методов оценки качества и обнаружения аномалий в таблицах высокоточных эфемерид.
2. Разработка методики оценки качества и обнаружения аномалий в таблицах высокоточных эфемерид.
3. Оценка качества и обнаружение аномалий в таблицах высокоточных эфемерид, рассчитанных аналитическими центрами из сети IGS.

4. Анализ существующих методов интерполяции и экстраполяции кинематических параметров движения НС по таблицам высокоточных эфемерид.
5. Разработка новых алгоритмов интерполяции (экстраполяции) кинематических параметров движения НС по таблицам высокоточных эфемерид.
6. Анализ существующих алгоритмов поиска скачков в фазовых измерениях одночастотных НП.
7. Разработка новых алгоритмов поиска скачков фазовых измерений для одночастотных НП.
8. Апробация разработанных алгоритмов на модельных и реальных измерениях.

Объектом исследования являются кодовые и фазовые измерения НП, а также высокоточные эфемериды НС, представленные в виде SP3-данных аналитических центров ГНСС.

Предметом исследования являются полиномиальные и адаптивные аппроксимации для оценки качества и обнаружения аномалий в таблицах высокоточных эфемерид НС, интерполяции и экстраполяции кинематических параметров движения НС и поиска скачков в фазовых измерениях одночастотных НП.

Научная новизна полученных в диссертации результатов состоит в том, что впервые показаны:

1. Возможность определения типа аномалии по невязкам полиномиальной аппроксимации;
2. Возможность линейной интерполяции орбиты навигационного спутника по 6 значениям SP3-данных с шагом 15 минут с миллиметровой точностью;

3. Возможность интерполяции орбиты НС по двум SP3-точкам путем применения нелинейной интерполяции с учетом информации о векторе лунно-солнечных ускорений с миллиметровой точностью;
4. Возможность обнаружения скачков в одночастотных фазовых измерениях без использования дополнительной информации;
5. Возможность использования адаптивной фильтрации для исключения медленно меняющегося тренда в фазовых измерениях.

Теоретическая значимость работы:

1. Усовершенствована методика применения аппроксимации полиномами высоких степеней к таблицам эфемерид с целью обнаружения аномалий в данных;
2. Разработаны алгоритмы вычисления свободных коэффициентов интерполяции (экстраполяции) орбиты по таблицам эфемерид – как по одной координате, так и по совокупности координат (X, Y, Z) линейным и нелинейным методами;
3. Разработана методика построения полиномиального и адаптивного фильтра, исключающего медленно меняющийся тренд в измерениях НП;
4. Модифицированы алгоритмы оценки кусочно-постоянной функции для применения их к фазовым измерениям НП.

Практическая значимость работы:

1. Разработанные теоретические и практические материалы могут быть использованы в учебных целях;
2. Проведен анализ аномалий в данных аналитических центров для навигационных спутников ГЛОНАСС и GPS за 2010–2018 годы, приведена статистика аномалий и возможность обнаружения аномалий в предварительной обработке данных об орбитах с использованием аппроксимации полиномами высоких степеней;

3. Разработанные алгоритмы свободной интерполяции, реализованные в виде программ на языке программирования Julia, позволяют выполнять высокоточное определение кинематических параметров движения НС по таблицам эфемерид;
4. Разработанные программы по оценке SP3-данных позволяют обнаруживать малые (несколько миллиметров) аномалии в орбитах НС, что применено для предварительной обработки данных в задачах ГНСС;
5. Разработанные алгоритмы поиска скачков в фазовых измерениях на основе полиномиальных и адаптивных фильтров, реализованные на языке программирования Julia, могут быть использованы во вторичной обработке одночастотных фазовых измерений.

Методология и методы исследования. Применены методы математической статистики, математического моделирования и машинного обучения.

Положения, выносимые на защиту:

1. Аппроксимация SP3-данных полиномами высоких степеней позволяет обнаруживать аномалии величиной более 5 миллиметров и определять их тип;
2. Нелинейная свободная интерполяция позволяет по двум SP3-точкам определять кинематические параметры движения навигационных спутников со среднеквадратическим отклонением в несколько миллиметров;
3. Линейная фильтрация медленно меняющегося тренда позволяет обнаруживать скачки величиной от 1 фазового цикла в фазовых измерениях одночастотного навигационного приемника с высокостабильными опорными генераторами без использования дополнительной информации;
4. Алгоритм CFATV-LP позволяет обнаруживать скачки величиной от 1 фазового цикла в фазовых измерениях одночастотного навигационного приемника с низкостабильным опорным генератором по разности кодовых и фазовых измерений с вероятностью 80 % правильного обнаружения по-

ложений скачков при отношении величины скачка к СКО шума измерений, равном 1.

Достоверность полученных результатов обеспечивается правильным применением математического аппарата. Эффективность предложенных решений подтверждена результатами сравнения с существующими методами. Устойчивость решения подтверждена экспериментально.

Апробация работы. Материалы работы докладывались на шести научных конференциях: XIII Международная IEEE-Сибирская конференция по управлению и связи SIBCON, 29–30 июня 2017 г. в г. Астана, Казахстан; IV Всероссийская научно-техническая конференция «Системы связи и радионавигации», 12–13 октября 2017 г., г. Красноярск; XXI Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием, посвященная 123-й годовщине Дня радио «Современные проблемы радиоэлектроники», 3–4 мая 2018 г., г. Красноярск; V Всероссийская научно-техническая конференция «Системы связи и радионавигации», 25–26 октября 2018 г., г. Красноярск; VI Всероссийская научно-техническая конференция «СИСТЕМЫ СВЯЗИ И РАДИОНАВИГАЦИИ», посвященная 100-летию образования Войск связи Вооруженных сил РФ, 28–29 ноября 2019 г., г. Красноярск; XXIV Международная научно-практическая конференция, посвященная памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика Михаила Федоровича Решетнева «РЕШЕТНЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ», 10–13 ноября 2020 г., г. Красноярск.

Внедрение результатов исследования. Результаты диссертации используются при выполнении ОКР и НИОКР с участием автора в СФУ по заказу АО «ИСС», что подтверждается соответствующими актами.

Публикации. По результатам работы опубликовано: четыре статьи в журналах из перечня ВАК [28–31], пять тезисов в сборниках трудов конференций

[32–36], два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [37–38].

Личный вклад автора. Экспериментальная часть работы была выполнена автором лично. Теоретическая часть была выполнена совместно с научным руководителем Царевым С.П.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Основная часть работы изложена на 147 страницах, содержит 28 таблиц, 66 рисунков и список литературы из 93 наименований.

Краткое содержание работы.

В первой главе диссертационного исследования разрабатываются полиномиальные методы аппроксимации орбит НС. В качестве данных для исследования полиномиальных методов выступают орбиты НС, которые, с одной стороны, имеют важность в задачах постобработки ГНСС, с другой стороны, непосредственно связаны с геометрической дальностью между НП и НС, которая в свою очередь входит в состав фазовых измерений НП. Разработанная в рамках главы методика позволяет обнаруживать аномалии в орбитах НС более 5 мм, а также определять их тип. Исследованные в данной главе полиномиальные методы используются для построения линейного фильтра медленноменяющегося тренда измерений в третьей главе.

В разделе 1.1 дается описание формата SP3, который используется IGS для передачи информации об орбитах НС.

В разделе 1.2 представлена методика обработки SP3-данных с целью выявления аномалий.

В разделе 1.3 показаны результаты применения предложенной методики к данным четырех аналитических центров (ИАЦ КВНО, IGS, ESA, CODE) на интервале с 1 января 2010 по 31 декабря 2018 года.

В разделе 1.4 приводятся основные выводы по данной главе. Представленная методика поиска аномалий в орбитах НС позволяет обнаруживать аномалии величиной более 5 мм, а также определять их тип. Разработанная в данной главе методика успешно применяется для обнаружения скачков в фазовых измерениях, что показано в третьей главе.

Во второй главе работы разрабатывается новая концепция свободной (адаптивной) интерполяции и экстраполяции орбит НС, которая позволяет сократить количество интерполяционных функций. С помощью данной концепции разработаны методы интерполяции кинематических параметров НС: *линейный* по 6 SP3-точкам и *нелинейный* по 2 SP3-точкам с точностью в несколько миллиметров. Разработанная в данной главе концепция используется в третьей главе для построения линейного фильтра медленноменяющегося тренда измерений на основе адаптивного базиса, что позволяет сократить его размер по сравнению с полиномиальным базисом. Концепция свободной интерполяции, разработанная в данной главе, имеет большой спектр применения во многих задачах обработки данных ГНСС, в частности, уже нашла применение в задачах моделирования ионосферы, о чем написано в выводах по главе.

В разделе 2.1 описывается подход определения кинематических параметров движения НС на основе интегрирования дифференциальных уравнений движения.

В разделе 2.2 описываются стандартные предлагаемые IGS и описанные в последних научных работах способы интерполяции кинематических параметров движения НС, а также приводятся погрешности таких методов.

В разделе 2.3 описывается новая концепция определения кинематических параметров движения НС, концепция введения нелинейных слагаемых и лунно-солнечных ускорений. Использование предложенного метода позволяет выполнять интерполяцию кинематических параметров движения НС по двум SP3-точкам с СКО для координат 2 мм, для проекций скоростей – 0,0016 мм/с.

В конце раздела дана оценка устойчивости предложенного метода свободной интерполяции к данным ограниченной точности (ограниченное число

значащих знаков) и стабильности коэффициентов свободной интерполяции в течение как минимум пяти лет.

В разделе 2.4 сделаны выводы по полученным результатам. Концепция, заложенная в основу метода свободной интерполяции, находит применение не только для интерполяции или экстраполяции кинематических параметров движения НС, но и в других задачах, где число данных, по которым нужно восстановить значение функции, ограничено. Также разработанная концепция позволяет сократить размер базиса, на котором строится линейный фильтр в третьей главе данной работы.

В третьей главе диссертации разрабатываются методы поиска скачков в фазовых измерениях одночастотного НП с применением алгоритмов из семейства *sparse recovery*, а также полиномиальных (исследованных в первой главе) и адаптивных (исследованных во второй главе) методов. В данной главе был разработан простой метод обнаружения скачков в фазовых измерениях одночастотного НП в случае высокостабильного опорного генератора на основе применения линейного фильтра медленноменяющегося тренда. В случае низкостабильного опорного генератора применяются модифицированные алгоритмы из семейства *sparse recovery* также с использованием линейного фильтра медленноменяющегося тренда. Разработанные алгоритмы позволяют с высокой точностью обнаруживать величины и положение разрывов в фазовых измерениях одночастотных НП.

В разделе 3.1 описываются модели измерений для одночастотных НП и разности этих измерений, которые будут использоваться для формализации задачи поиска скачков в фазовых измерениях.

В разделе 3.2 формализуется задача поиска скачков в фазовых измерениях одночастотного НП. В работе рассматривается решение задачи восстановления кусочно-постоянной функции в **двух ситуациях**: для НП с высокостабильными опорными генераторами и для НП с низкостабильными опорными генераторами.

Для восстановления кусочно-постоянной функции скачков в фазовых измерениях рассматриваются задачи:

- восстановление кусочно-постоянной функции в смеси с шумом;

- аппроксимация медленно меняющегося тренда в измерениях НП;
- оценка нормы реализации шума для использования такой оценки в алгоритмах поиска скачков.

В разделе 3.3 рассматриваются алгоритмы поиска скачков в фазовых измерениях. Поиск скачков в фазовых измерениях выполняется **в двух ситуациях**:

- СКО шумовой составляющей фазовых измерений имеет значения существенно меньше, чем величина предполагаемых скачков;
- СКО шумовой составляющей фазовых измерений имеет значения, сравнимые с величиной скачка.

Для первой ситуации предлагается использование линейной фильтрации для обнаружения скачков в фазовых измерениях.

Для второй ситуации предлагается два способа решения задачи.

Первый на основе алгоритмов *скользящего окна* с предполагаемым скачком в середине.

Второй способ обнаружения скачков в фазовых измерениях на основе алгоритмов *sparse recovery*.

В разделе 3.4 проводится серия модельных экспериментов для второй рассматриваемой ситуации (СКО шумовой составляющей сопоставимо с величиной скачка). Выполняется оценка размера полиномиального и адаптивного базиса для аппроксимации геометрической дальности. Приводятся модели, которые будут использоваться в экспериментах. Описываются эксперименты по оценке точности предложенного способа оценки нормы реализации шума. Описываются эксперименты по определению СКО ошибки оценки алгоритмом величины скачка кусочно-постоянной функции при известном положении скачка. Проводится серия экспериментов по оценке точности алгоритмов *ATV (Approximation – Total Variation)*, в которых обосновываются преимущества использования адаптивных базисов в сравнении с полиномиальными.

В разделе 3.5 проводятся эксперименты по применению алгоритмов, рассмотренных в рамках данной главы, к реальным данным (измерительной информации, взятой со станций сети IGS). Приводится описание станций, изме-

рительная информация которых была обработана в данном разделе. Приводятся результаты применения линейной фильтрации к фазовым измерениям НП с водородным стандартом частоты и кварцевым стандартом частоты.

Для НП с высокостабильными опорными генераторами показана эффективность применения линейной фильтрации медленно меняющегося тренда и взятие разности между соседними измерениями для обнаружения скачков в фазовых измерениях.

Для НП с низкостабильными опорными генераторами выполнение поиска скачков по прямым фазовым измерениям не работает, поэтому предлагается использовать разность кодовых и фазовых измерений.

Описываются результаты экспериментов по обнаружению модельных скачков в реальных измерениях алгоритмом CPNATV-LP (Constrained Polynomial Nahn Approximation – Total Variation – в метрике ℓ_p).

Алгоритм CPNATV-LP позволяет по разности фазовых и кодовых измерений с вероятностью более 0,8 обнаруживать одиночные скачки фазовых измерений в шуме, соизмеримом с величиной скачка.

В разделе 3.6 сформулированы основные выводы по третьей главе.

Для одночастотных навигационных приемников с высокостабильным опорным генератором поиск скачков фазовых измерений выполняется непосредственно по фазовым измерениям с исключением медленно меняющегося тренда линейным адаптивным фильтром. Скачки в фазовых измерениях, в таком случае, непосредственно видны в разностях по времени в фильтрованных фазовых измерениях. Данный алгоритм устойчив к пропускам в измерениях.

Для одночастотных навигационных приемников с низкостабильным опорным генератором было показано, что на шумовую составляющую фазовых измерений большое влияние оказывает шкала времени НП, для исключения которой предлагается использовать разность фазовых и кодовых измерений. Поиск скачков в фазовых измерениях в таком случае выполняется разработанными алгоритмами CPNATV-LP или CFATV-LP с вероятностью не менее 80 % при отношении величины скачка к СКО остаточного шума измерений, равным 1.

Благодарности. Выражаю благодарность научному руководителю – доктору физико-математических наук Царёву С.П. – за руководство работой по подготовке диссертации. Отдельно хочу поблагодарить кандидата физико-математических наук Ушакова Ю.Ю. за ценные замечания и предоставление программ для численного интегрирования орбит навигационных спутников, доктора технических наук Гребенникова А.В. и кандидата технических наук Валиханова М.М. за критические замечания, позволившие улучшить качество диссертационного исследования.

Основные научные результаты были получены в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (научная тема FSRZ-2020-0011).

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Глава 1. Полиномиальные методы поиска аномалий в восстановленных орбитах

Данная глава посвящена исследованию полиномиальных методов аппроксимации, на основе которых выполнена разработка простого метода поиска аномалий в восстановленных орбитах, предоставляемых различными аналитическими центрами. В качестве данных для исследования полиномиальных методов выступают орбиты НС, которые, с одной стороны, имеют важность в задачах постобработки ГНСС, с другой, непосредственно связаны с геометрической дальностью между НП и НС, входящей в состав фазовых измерений НП. Исследованные в данной главе методы полиномиальной аппроксимации используются в третьей главе для аппроксимации медленно меняющегося тренда в фазовых измерениях НП.

Высокоточные данные об орбитах навигационных спутников рассчитываются различными аналитическими центрами: в России – ИАЦ КВНО ГЛОНАСС; в мире – Европейское космическое агентство (ESA), Международная служба ГНСС (IGS), Центр определения орбит в Европе (CODE) и др. В качестве формата передачи информации об орбитах навигационных спутников был принят Standard Product 3 (SP3), который подразумевает передачу данных об орбите спутника в виде табулированных значений эфемерид с одинаковым фиксированным шагом. Стандартный шаг, используемый аналитическими центрами в SP3-данных, равен 15 минутам.

Таблицы эфемерид, предоставляемые аналитическими центрами, содержат в себе информацию о точности расчета орбиты в виде оценочных кодов. В работе [9] говорится, что такие коды не всегда оказываются достоверным из-за присутствия в орбитах навигационных спутников различных аномалий, например, теневых участков (участки, когда спутник находится в тени Земли относительно Солнца). Авторы работы предлагают использовать как критерий качества орбиты величину

разрыва орбиты на стыке суточных интервалов, а также метод, основанный на численном интегрировании уравнений движения для оценки такого разрыва.

Орбиту навигационного спутника будем считать гладкой функцией, и, соответственно, такая функция хорошо аппроксимируется полиномами достаточной степени. В данной главе представлена методика оценки разрыва орбиты навигационного спутника в SP3-данных без использования численного интегрирования уравнений движения, основанная на методе аппроксимации орбиты полиномами высоких степеней. Первые идеи применения полиномов высоких степеней для аппроксимации орбиты были описаны в работе [39].

Степень полинома зависит от длины временного интервала анализируемых данных и характера исходных данных.

Шаг в SP3-данных равен 15 минутам, и аппроксимация будет выполняться на двухсуточном интервале SP3-данных. Степень полинома наилучшего приближения, на котором необходимо остановить процесс аппроксимации, была определена экспериментально – так, чтобы невязка результатов аппроксимации соответствовала естественной погрешности SP3-данных (порядка 1 мм, что связано с округлением данных) [3]. Для ряда данных из 192 точек (что соответствует 48 часам или двум суткам) необходимая степень аппроксимирующего полинома была определена как 100.

В разделе 1.1 данной главы приводится описание формата передачи информации об орбитах навигационных спутников, используемого в продуктах IGS.

В разделе 1.2 описывается методика поиска аномалий в SP3-данных, проводится моделирование возможных аномалий и показывается метод их обнаружения.

В разделе 1.3 проводится экспериментальная проверка методики, предложенной в разделе 1.2, на данных различных аналитических центров [36]. Показана высокая чувствительность данного метода, а также обнаруженные в SP3-данных аномалии, такие как «скачок», «выброс», маневр (для спутников GPS), вхождение спутника в тень Земли. В разделе также приводится статистика аномалий, обна-

руженных в SP3-данных с 2010 по 2018 годы для аналитических центров ИАЦ КВНО, CODE, ESA и IGS.

1.1 Формат передачи информации SP3

Международная служба ГНСС (IGS) определяет форматы данных для передачи информации, необходимой для решения геодезических и исследовательских задач. Информация, предоставляемая сетью IGS, делится на два типа: «сырая» или измерительная информация в форматах RINEX (Receiver Independent EXchange format) и результаты уточнения параметров в виде SINEX (Solution INdependent EXchange), SP (Standard Product) и других [40]. В качестве формата передачи эфемеридно-временной информации о спутниках выступает формат SP3, на данный момент актуальной версией формата является редакция SP3d.

Формат SP3 предусматривает разделение эфемеридной информации на суточные интервалы с шагом по времени 15 минут (возможен и другой, но 15 минут наиболее распространенное значение) между SP3-точками (под SP3-точками понимаются эфемериды навигационного спутника) (Рисунок 1.1), расстояние между соседними SP3-точками по радиус-вектору достигает порядка 3500 км.

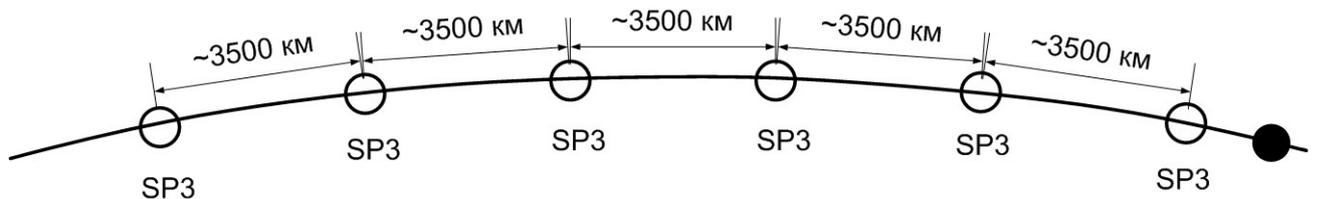


Рисунок 1.1 – SP3-точки на орбите навигационного спутника

Точность такой информации, согласно данным IGS, составляет ~ 3 см. Под точностью IGS понимают СКО (среднеквадратичное отклонение) финальной орбиты, рассчитанной IGS от результатов восстановления орбиты по независимым лазерным измерениям дальности [4].

1.2 Описание методики поиска и обнаружения аномалий

Методика поиска аномалий в SP3-данных состоит из нескольких этапов: этап подготовки данных, этап аппроксимации и этап анализа невязок результатов аппроксимации.

Этап подготовки данных. В методике предлагается анализировать разрыв орбиты на стыке суток (SP3-данные доступны суточными интервалами), поэтому для анализа одного такого суточного интервала требуется присутствие данных на предыдущие и последующие сутки. На этапе подготовки анализируемые SP3-данные, представленные в виде набора последовательно идущих суточных SP3-файлов (содержащих SP3-данные за одни сутки, доступных на сайтах аналитических центров), дополняются SP3-файлами за сутки до начала и на сутки после набора.

Этап аппроксимации данных. Оценка разрыва выполняется на стыке двух суточных интервалов путем аппроксимации этого двухсуточного интервала. Расширенный сутками в начале и сутками в конце анализируемый набор SP3-файлов разбивается на двухсуточные интервалы с перекрытием таких интервалов в одни сутки. Пример подготовки набора из 4 SP3-файлов к аппроксимации показан на схеме (Рисунок 1.2).



Рисунок 1.2 – Аппроксимация SP3-данных 4-дневного интервала

Из схемы (Рисунок 1.2) видно, что анализируемые SP3-файлы (День 1, День 2, День 3, День 4) были дополнены SP3-файлом в начале (День 1-1) и SP3-файлом в конце (День 4+1). Окно аппроксиматора на рисунке показывает, какой набор SP3-файлов подается на вход программного комплекса, который выполняет аппроксимацию для каждой координаты в SP3-данных полиномами степени 100, о чем подробнее будет рассказано в разделе 1.2.1.

Этап анализа невязок результатов аппроксимации. После завершения этапа аппроксимации вычисляется невязка между SP3-данными и результатом аппроксимации. Именно эти невязки и подлежат анализу с целью поиска аномалий в SP3-данных. По результатам анализа невязок делается заключение о величине разрыва орбиты в SP3-данных на стыке суток, а также о других аномалиях в SP3-данных спутника. Подробнее об анализе невязок и возможных заключениях написано в разделах 1.2.2 и 1.3.1.

1.2.1 Аппроксимации орбиты навигационных спутников полиномами высоких степеней

Существует два способа построения полиномов наилучшего приближения. Первый – найти коэффициенты произвольного полинома, записанного как:

$$P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 + \dots + \alpha_n \cdot t^n, \quad (1.1)$$

где α_i – неизвестные коэффициенты полинома.

Нахождение неизвестных коэффициентов α_i полиномов (1.1) выполняется в ходе решения задачи (1.2):

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \underset{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}{\operatorname{argmin}} \left(\|y(t) - P(t)\|_2 \right), \quad (1.2)$$

где α_i – неизвестные коэффициенты полинома $P(t)$, $y(t)$ – приближаемая полиномом функция времени.

Задача (1.2) решается методом наименьших квадратов (МНК) [41].

Преимуществами такого метода является возможность аппроксимировать неравномерные по времени ряды данных, а также использовать вместо полиномов любые многопараметрические наборы функций (например, вейвлеты или тригонометрические). Недостатками данного метода являются плохая обусловленность задачи МНК и необходимость решать задачу МНК для каждого ряда данных.

Второй способ – это использование набора дискретных ортогональных полиномов.

В данной работе будут использоваться нормированные ортогональные дискретные полиномы Чебышева (или в иностранных источниках Хана) $P_k(t)$ [42, 43]. Такие полиномы рассчитываются до выбранной степени r (в нашем случае $r =$

100): $P_0(t), P_1(t), \dots, P_r(t)$, после чего начинается процесс вычисления полинома наилучшего приближения (1.3):

$$L(t) = \sum_{k=0}^r C_k \cdot P_k(t), \quad C_k = (P_k(t), D(t)), \quad (1.3)$$

где $L(t)$ – вычисляемый полином наилучшего приближения; $P_k(t)$ – дискретный ортогональный полином Чебышева (Хана) k степени; $D(t)$ – ряд данных, по которому производится аппроксимация; $(P_k(t), D(t))$ – скалярное произведение. К преимуществам данного способа относится то, что набор полиномов заранее вычисляется и используется для нахождения полиномов наилучшего приближения по всем рядам данных.

Основная проблема состоит в вычислении полиномов $P_k(t)$. Стандартные формулы, приводимые в [42], непригодны в силу накопления большой ошибки при вычислении полиномов высоких степеней (в нашей работе под большими степенями мы понимаем степени, начиная с 100) и большом количестве точек на интервале построения полинома (в нашей работе необходимо построить полином на 192 точки). В работах [43], [44] показано, что способы вычисления дискретных полиномов Хана высоких степеней, предложенные в [42], приводят к накоплению большой ошибки, и дан сложный алгоритм вычисления таких полиномов. Простые алгоритмы вычисления полиномов Хана описаны в работе [45]. При аппроксимации такими полиномами также наблюдаются граничные эффекты в начале и конце интервала аппроксимации, которые проявляются в высоком приближении полинома к ряду исходных данных, что не позволяет обнаруживать аномалии в начале и в конце интервала аппроксимации. Подробнее данный феномен рассмотрен в работе [45].

В настоящей работе будет использоваться второй способ аппроксимации полиномами высоких степеней. Для этого по методике, предложенной Царевым С.П., был написан программный комплекс [38], в дальнейшем адаптированный к задаче аппроксимации орбит навигационных спутников. В результате аппроксимации по каждой из координат формируется файл, содержащий исходные данные,

попадающие во временной интервал аппроксимации, аппроксимирующий полином, и невязку между исходными данными и аппроксимирующим полиномом. Дополнительно формируется результирующий файл, в котором записывается статистическая информация: обозначение спутника, аналитического центра, начало временного интервала, минимальный угол СОЗ (Солнце-объект-Земля) на временном интервале, максимальная невязка по каждой из координат.

1.2.2 Моделирование аномалий

Так как процедура аппроксимации линейна, то рассмотрим только результат аппроксимации самих аномалий, независимо от исходных данных. Смоделируем две аномалии, которые могут присутствовать в данных.

Модель разрыва в орбите навигационного спутника

Смоделируем «скачок» (ситуацию, когда на стыке двух дневных интервалов присутствует разрыв в орбите спутника). На графике (Рисунок 1.3) изображен ряд данных, содержащий «скачок» величиной в 1 см.

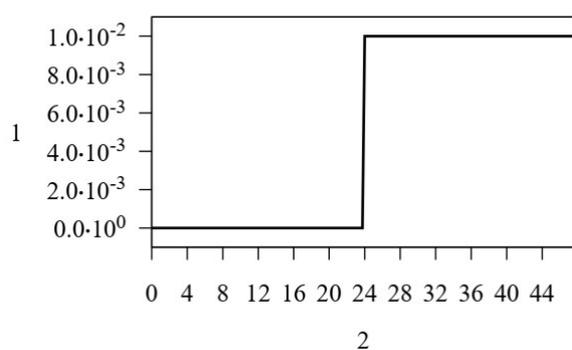


Рисунок 1.3 – Модель «скачка» в орбите
(1 – амплитуда в метрах,
2 – время в часах)

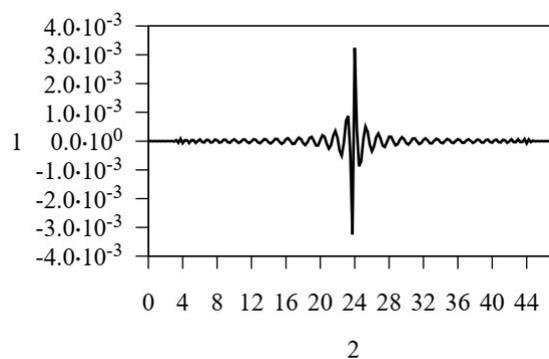


Рисунок 1.4 – Невязка результатов аппроксимации модели «скачка» полиномом степени 100 (1 – амплитуда в метрах, 2 – время в часах)

После аппроксимации ряда данных, содержащего «скачок» полиномом 100 степени, вычисляется невязка аппроксимации (Рисунок 1.4). Как видно из графика (Рисунок 1.4), в месте, где происходит «скачок», наблюдаются два пика в невязке

аппроксимации, при этом один из пиков отрицательный, второй положительный. С учетом величины «скачка» в 1 см разница между пиками составляет порядка $\sim 6,5$ мм, это позволяет говорить о том, что «скачок», наблюдаемый в невязке, примерно в 1,5 раза меньше реального «скачка» в данных.

Модель аномального выброса в орбите навигационного спутника

Смоделируем «выброс» (ситуация, когда на стыке двух дневных интервалов или внутри суток присутствует аномальное значение координаты в орбите спутника) На графике (Рисунок 1.5) изображен ряд данных, содержащий «выброс» величиной в 1 см. После аппроксимации ряда данных, содержащего «выброс» полиномом 100 степени, вычисляется невязка аппроксимации, которая показана на графике (Рисунок 1.6).

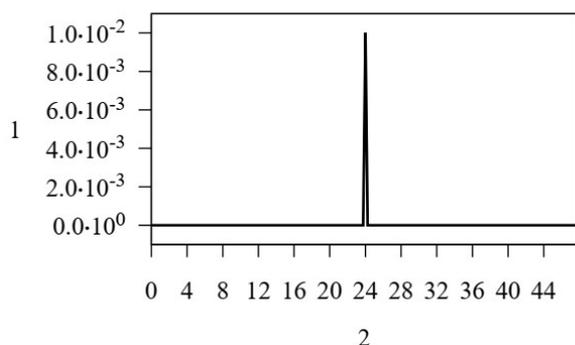


Рисунок 1.5 – Модель «выброса» в орбите (1 – амплитуда в метрах, 2 – время в часах)

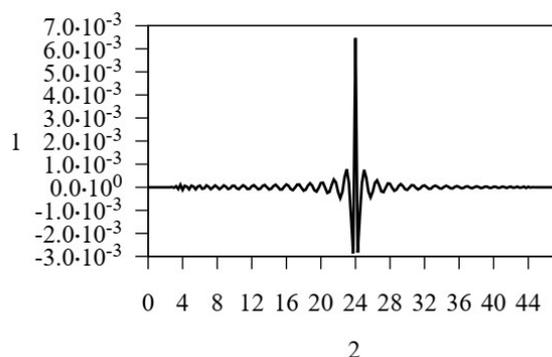


Рисунок 1.6 – Невязка аппроксимации полиномом 100 степени модели «выброса» в орбите (1 – амплитуда в метрах, 2 – время в часах)

По графикам невязки аппроксимации ряда данных, содержащих «выброс» (Рисунок 1.5 и Рисунок 1.6), наблюдается симметрия относительно места расположения «выброса» и три пика. При этом пик в момент времени, соответствующий «выбросу», имеет наибольшее (по абсолютной величине) значение, а соседние (слева и справа) пики имеют знак, противоположный максимальному пику. Оценив отклонение между максимальным отрицательным и

максимальным положительным пиком (~ 9 мм) и соотнести его со значением «выброса», то делается вывод, что их величина почти совпадает.

1.3 Анализ SP3-данных, предоставляемых аналитическими центрами

В качестве отработки методики, предложенной в разделе 1.2, была произведена серия экспериментов по данным 4 аналитических центров (ИАЦ КВНО, IGS, ESA, CODE) с последующим анализом невязок результатов аппроксимации как для навигационных спутников ГЛОНАСС, так и для навигационных спутников GPS. Для анализа был выбран интервал с 1 января 2010 года по 31 декабря 2018 года.

1.3.1 Типы обнаруженных аномалий в орбитах аналитических центров

Самая распространенная аномалия, наблюдаемая у всех аналитических центров, это «скачок» в орбите на стыке суток. Обнаруженный по результатам аппроксимации «скачок» в координате X (Рисунок 1.7 – график координаты X) представлен в виде графика (Рисунок 1.8) невязки аппроксимации (полиномом степени 100) для спутника R03 стык суток 3–4 января 2010 г., данные аналитического центра ИАЦ КВНО.

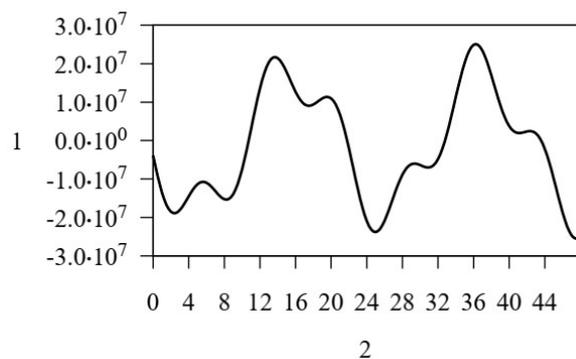


Рисунок 1.7 – Координата X спутника R03 на стыке суток 3–4 января 2010 г. ИАЦ КВНО
(1 – амплитуда в метрах,
2 – время в часах)

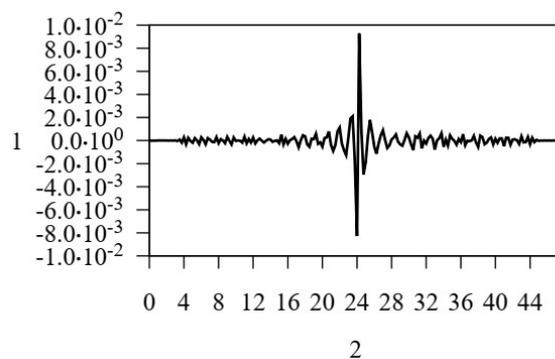


Рисунок 1.8 – Невязка аппроксимации полиномом степени 100 координаты X спутника R03 на стыке суток 3–4 января 2010 г. ИАЦ КВНО
(1 – амплитуда в метрах,
2 – время в часах)

Из графика (Рисунок 1.8) видно, что «скачок» имеет амплитуду $\sim 2,5$ см и происходит на стыке суток. Такие «скачки» наблюдаются в трех координатах, независимо от спутника, ГНСС и аналитического центра.

Второй часто наблюдаемой аномалией был «выброс». Обнаруженный по результатам аппроксимации «выброс» в координаты X (Рисунок 1.9 – график координаты X) представлен в виде графика (Рисунок 1.10) невязки аппроксимации (полиномом степени 100) для спутника R03, стык суток 27–28 августа 2010 г., данные аналитического центра ИАЦ КВНО.

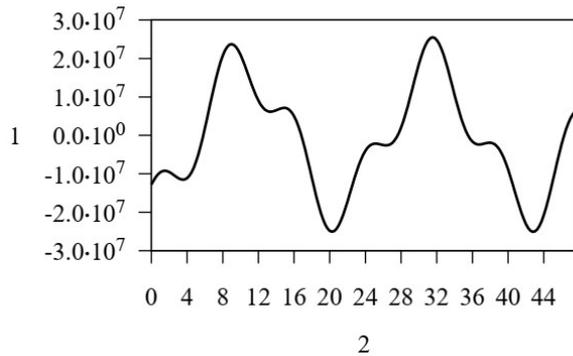


Рисунок 1.9 – Координаты X спутника R03 на стыке суток 27–28 августа 2010 г. ИАЦ КВНО (1 – амплитуда в метрах, 2 – время в часах)

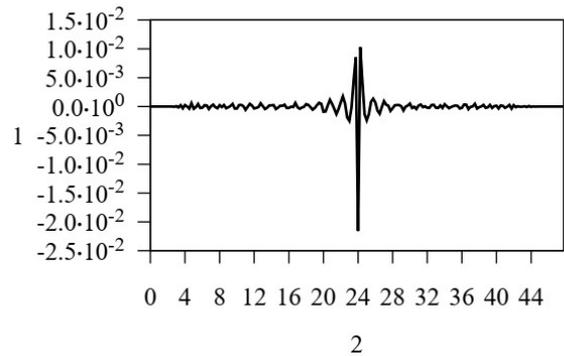


Рисунок 1.10 – Невязка аппроксимации полиномом степени 100 «выброса», координата X спутника R03 на стыке суток 27–28 августа 2010 г. ИАЦ КВНО (1 – амплитуда в метрах, 2 – время в часах)

Из графика (Рисунок 1.10) видно, что наблюдается «выброс» амплитудой ~ 3 см. Подобные «выбросы» редко наблюдаются как на стыке суток, так и намного реже внутри суточного интервала для всех координат и спутников по результатам аппроксимации финальных орбит всех аналитических центров.

Следующая аномалия, которую позволяет обнаружить методика, это поведение финальной орбиты навигационного спутника при выполнении маневра. Маневр спутника GPS подтверждается по сообщениям NANU (Notice Advisory to Navstar Users) [46]. Спутник G15, согласно сообщениям NANU, выполнял один из маневров 20 августа 2013 года. Рассмотрим невязку аппроксимации координаты X (Рисунок 1.11 – график координаты X) полиномом 100 степени финальной орбиты данного спутника за 20–21 августа 2013 года, показанную на графике (Рисунок 1.12).

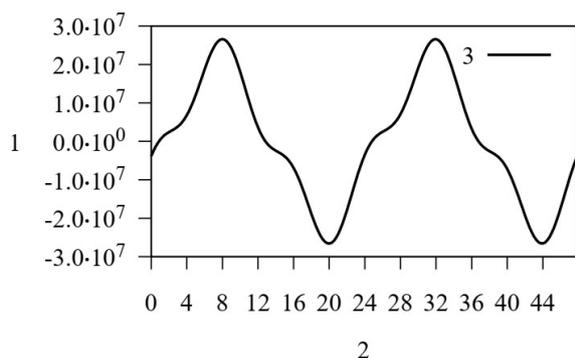


Рисунок 1.11 – Координаты X спутника G15 на стыке суток 20–21 августа 2013 г. ИАЦ КВНО (1 – амплитуда в метрах, 2 – время в часах)

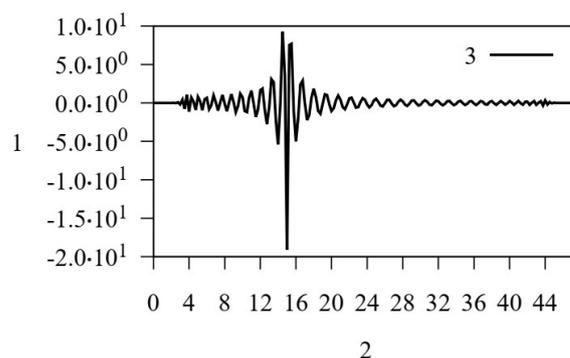


Рисунок 1.12 – Невязка аппроксимации полиномом степени 100 «выброса» координата X спутника G15 на стыке суток 20–21 августа 2013 г. ИАЦ КВНО (1 – амплитуда в метрах, 2 – время в часах)

Согласно данным NANU, маневр спутника начался в 13:01 GPS Time и закончился в 19:42 GPS Time. Из графика (Рисунок 1.12) видно, что на середину этого участка и приходится пик в невязке аппроксимации орбиты спутника.

Кроме того, по результатам анализа определяются аномалии в орбите, вызванные вхождением спутника в теневые участки, как показано на графике невязки аппроксимации (Рисунок 1.13).

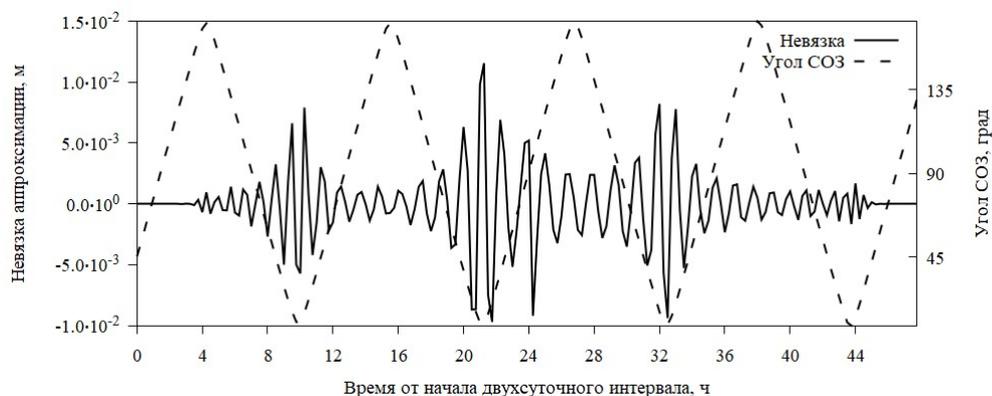


Рисунок 1.13 – Временная диаграмма невязки аппроксимации для спутника R03 для временного интервала 30–31 мая 2013 г.

На графике (Рисунок 1.13) моменты вхождения спутника в теневые участки определяются по графику угла СОЗ (Солнце–объект–Земля).

1.3.2 Статистика аномалий в SP3-данных аналитических центров

В данном разделе приводится статистика для навигационных спутников ГНСС ГЛОНАСС по аналитическим центрам ИАЦ КВНО, IGS, CODE, ESA с 01 января 2010 по 31 декабря 2018 года, для которых применялся метод, описанный в разделе 1.2.

В каждом временном окне, по которому выполнялась аппроксимация SP3-данных, определяется максимум модуля невязки (для каждого спутника берется максимальное значение из трех координат), после чего проводится анализ распределения такого максимума модуля невязки по следующим факторам, которые в дальнейшем будут называться измерениями:

- спутник, к которому относится временное окно;
- аналитический центр, к которому относится временное окно;
- начало временного окна;
- значение максимума модуля невязки во временном окне.

Анализ такой многомерной величины предлагается делать с использованием построения кумулятивных проекций, для чего:

1. Выбираются измерения, по которым будет строиться двумерная гистограмма, и разбиваются на подмножества (интервалы гистограммы);
2. По остальным измерениям выбираются подмножества накопления (интервалы по остальным измерениям, на которых будет выполняться суммирование);
3. Подсчитывается количество событий, соответствующих интервалам двумерной гистограммы, которые принадлежат подмножествам накопления по остальным измерениям;
4. Строится тепловая карта (либо столбиковая диаграмма) по результатам подсчета событий.

Разделим определенные максимумы модуля невязки на 2 группы **менее 10 см** и **более 10 см**. Тогда для группы, где величина менее 10 см, построим двумерное распределение, где в качестве одного из измерений выбираем спутник, к

которому относится максимум модуля невязки. А в качестве второго – величину этого максимума модуля невязки с шагом 2 мм. По измерению начала временного окна накопление выполняется на всем временном интервале, по измерению аналитических центров накопление выполняется по каждому аналитическому центру отдельно. Двумерные гистограммы для каждого аналитического центра представлены на графике (Рисунок 1.14) для ИАЦ КВНО, на графике (Рисунок 1.15) для IGS, на графике (Рисунок 1.16) для CODE, на графике (Рисунок 1.17) для ESA. Данная двумерная гистограмма нормирована на количество временных окон по каждому навигационному спутнику. Справа от гистограммы показана легенда нормированной частоты событий.

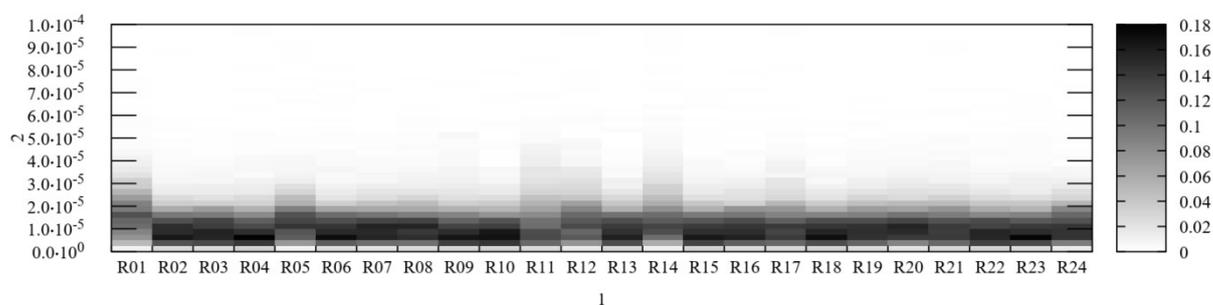


Рисунок 1.14 – Распределение максимума модуля невязки менее 10 см по спутнику и значению для ИАЦ КВНО
(1 – обозначение спутника, 2 – значение максимума модуля невязки)

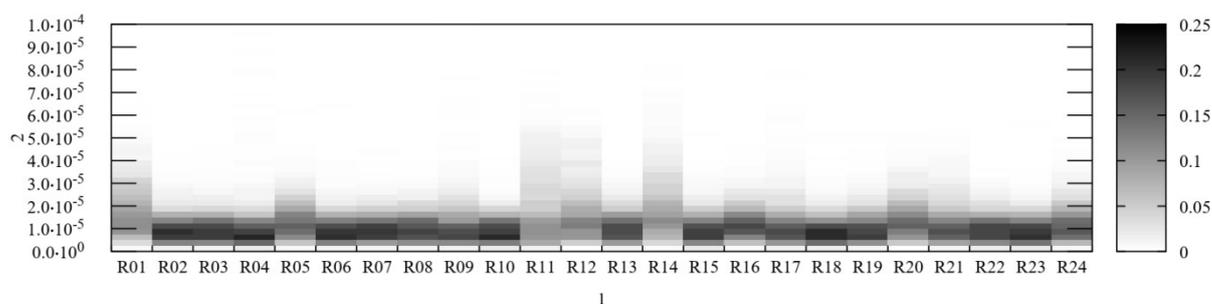


Рисунок 1.15 – Распределение максимума модуля невязки менее 10 см по спутнику и значению для IGS
(1 – обозначение спутника, 2 – значение максимума модуля невязки)

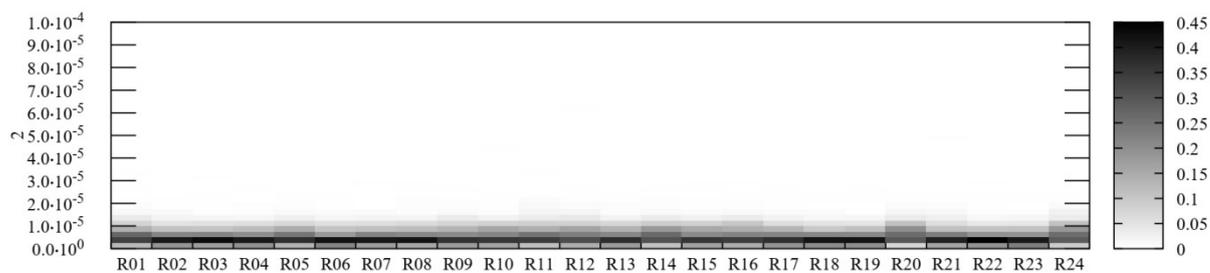


Рисунок 1.16 – Распределение максимума модуля невязки менее 10 см по спутнику и значению для CODE
(1 – обозначение спутника, 2 – значение максимума модуля невязки)

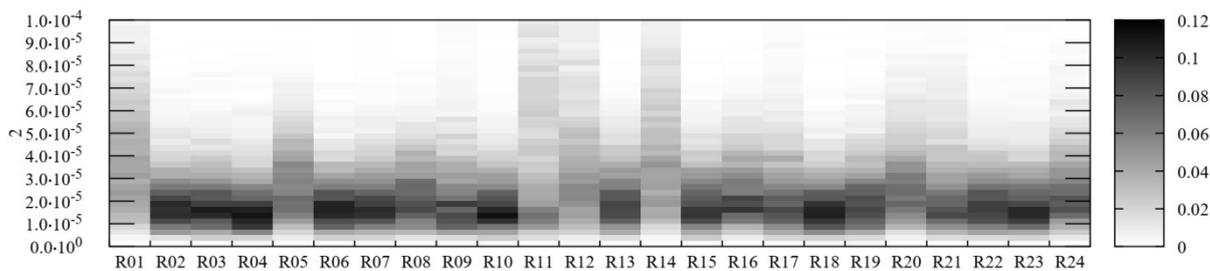


Рисунок 1.17 – Распределение максимума модуля невязки менее 10 см по спутнику и значению для ESA
(1 – обозначение спутника, 2 – значение максимума модуля невязки)

Для группы менее 10 см отмечается, что финальные орбиты определенных спутников (R01, R05, R11, R12, R14) характеризуются высоким разбросом максимума модуля невязки в диапазоне от 0 до 10 см. Необходимо также отметить, что финальные орбиты аналитического центра CODE имеют минимальный разброс максимума модуля невязки и сосредоточены в районе 2 см. Наибольший разброс максимума модуля невязки наблюдается у аналитического центра ESA.

Ситуаций, когда максимум модуля **невязки превышает порог в 10 см**, значительно меньше, и для таких ситуаций построим двумерное распределение. В качестве одного из измерений выбираем **спутник**, а в качестве второго – **начало временного окна** с шагом 1 год. По измерению значений максимума модуля невязки накапливаются все события более 10 см, по измерению аналитических центров накопление выполняется по каждому аналитическому центру отдельно. Распределение показано на графиках (Рисунок 1.18 – ИАЦ КВНО, Рисунок 1.19 – IGS, Рисунок 1.20 – CODE, Рисунок 1.21 – ESA). Данная двумерная гистограмма показывает количество временных окон с аномалиями, превышающими 10 см. Справа от гистограммы показана легенда количества событий.

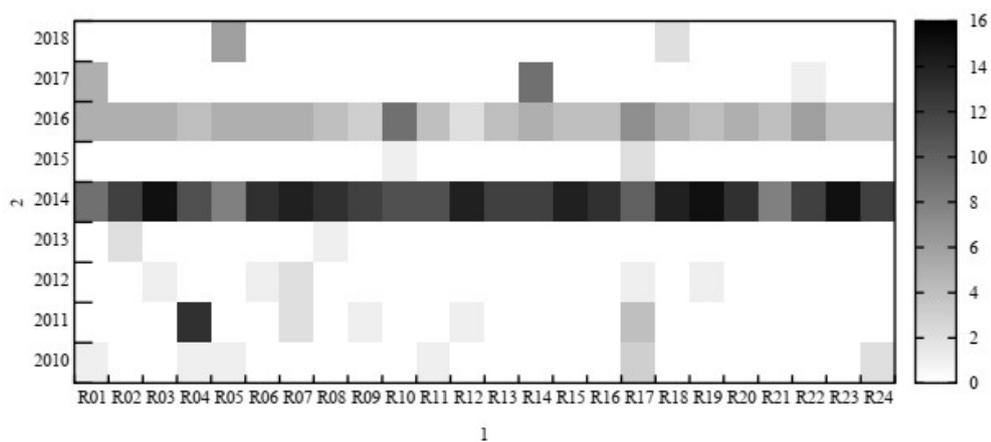


Рисунок 1.18 – Распределение максимума модуля невязки более 10 см по спутникам и годам для ИАЦ КВНО (1 – обозначение спутника, 2 – год аппроксимации)

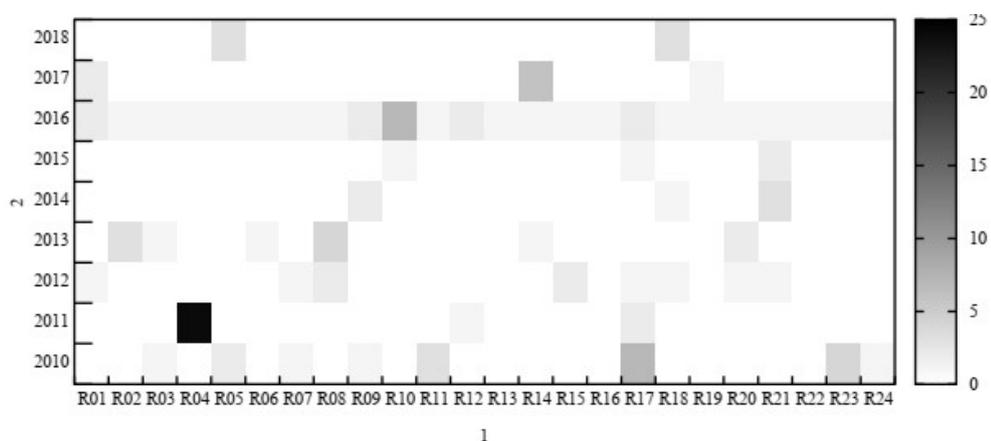


Рисунок 1.19 – Распределение максимума модуля невязки более 10 см по спутникам и годам для IGS (1 – обозначение спутника, 2 – год аппроксимации)

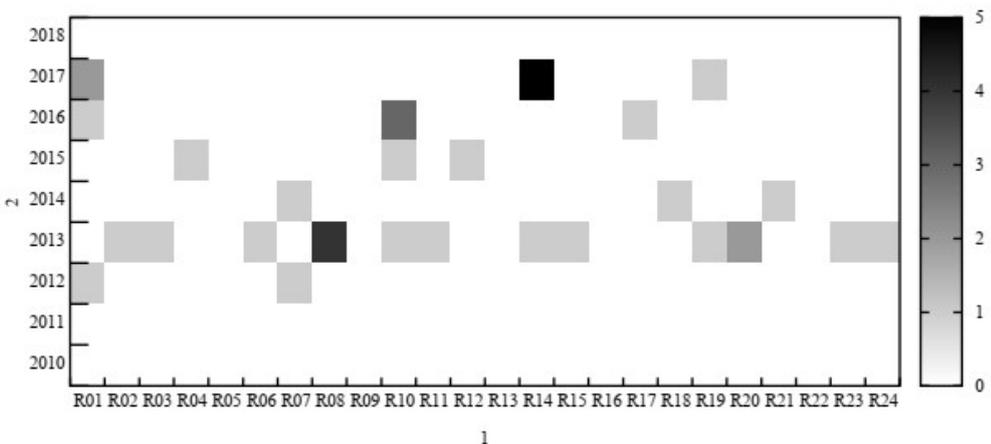


Рисунок 1.20 – Распределение максимума модуля невязки более 10 см по спутникам и годам для CODE (1 – обозначение спутника, 2 – год аппроксимации)

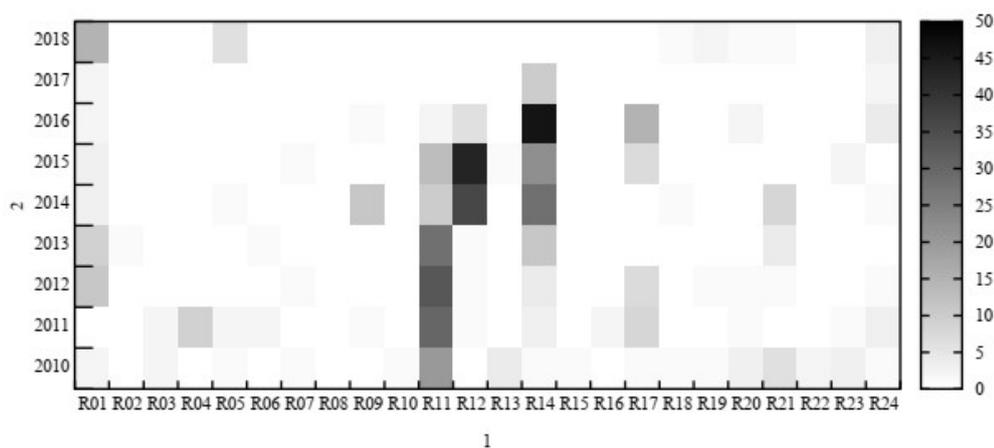


Рисунок 1.21 – Распределение максимума модуля невязки более 10 см по спутникам и годам для ESA
(1 – обозначение спутника, 2 – год аппроксимации)

Наиболее значимые аномалии, имеющие массовый характер (почти на всех спутниках), наблюдались у ИАЦ КВНО в апреле, июле, августе 2014 года (величиной от 10 см до 1 метра) и в ноябре 2016 года величиной более 1 метра. У всех остальных аналитических центров такие массовые аномалии отсутствуют. Исходя из количества наблюдаемых аномалий, превышающих 10 см, делаются следующие выводы: наименьшее число аномалий наблюдается у аналитического центра CODE: не более 5 аномалий на спутник в год. Наибольшее число аномалий наблюдается у аналитического центра ESA: порядка 50 аномалий на спутник в год. Необходимо отметить, что бывают ситуации, когда несколько аналитических центров не рассчитывают орбиту спутника на сутки, в которых у других аналитических центров обнаруживаются аномалии по результатам аппроксимации.

Был выполнен анализ положения максимума модуля невязки в окне аппроксиматора. Чаще всего максимум приходился на стык суточных интервалов, однако наблюдались ситуации у спутников GPS, когда такой стык приходился не на стык суточного интервала, что почти всегда было связано с маневрами спутников GPS.

1.4 Выводы по главе 1

Данная методика поиска и обнаружения аномалий в орбитах навигационных спутников позволяет обнаруживать аномалии величиной более 5 мм, а также определять тип аномалии, наблюдаемой в орбите. В описании методики показаны возможные аномалии и их влияние на результат аппроксимации, дается оценка величины аномалии по результатам оценки невязки аппроксимации.

Предложенная методика применена в предварительном анализе SP3-данных, предоставляемых аналитическими центрами с целью оценки результатов решения задач с использованием ГНСС.

По результатам применения данной методики к SP3-данным аналитических центров делаются следующие заключения:

- усовершенствованная методика обнаружения аномалий в SP3-данных обладает высокой чувствительностью, что позволяет обнаруживать аномалии в орбите навигационного спутника величиной в 5 миллиметров и более;
- по форме невязки аппроксимации определяется тип аномалии, например, аномалии типа «скачок» или «выброс», а также аномалии, вызванные маневром и вхождением спутника в тень Земли;
- при использовании данной методики не требуется дополнительная информация об орбитах спутника (модели движения, параметры вращения Земли, параметры гравитационного Поля Земли), а только SP3-данные, что позволяет упростить применение данной методики;
- более 99 % аномалий не превышает величину в 10 см;
- чаще всего аномалии встречаются в данных аналитического центра ESA;
- наименьшее число аномалий встречается у аналитического центра CODE.

Глава 2. Адаптивные методы определение кинематических параметров движения навигационных спутников по таблицам эфемерид

Данная глава описывает исследование адаптивных методов определения кинематических параметров движения НС по SP3-данным. В главе разрабатывается концепции свободной линейной и нелинейной интерполяции. Разработанная концепция отрабатывается на методах интерполяции и экстраполяции орбит НС, необходимых при решении задач с использованием ГНСС, а также непосредственно связанных с геометрической дальностью между НП и НС, которая, в свою очередь, входит в состав фазовых измерений НП. Разработанная концепция используется для построения адаптивного базиса линейного фильтра, исключая медленноменяющийся тренд в фазовых измерениях НП в третьей главе.

Орбиты навигационных спутников, предоставляемые аналитическими центрами, передаются в формате SP3, о чем подробно описано в разделе 1.1.

Для работы с такими данными потребителям требуется метод определения кинематических параметров движения навигационных спутников на произвольный момент времени, для чего существует два подхода.

Первым подходом к вопросу определения кинематических параметров движения навигационных спутников является численное интегрирование дифференциальных уравнений движения с учетом действующих сил и согласованием начальных условий с SP3-данными. Описание этого подхода приводится в разделе 2.1 данной главы.

Вторым подходом к вопросу определения кинематических параметров движения навигационных спутников является использование методов интерполяции, таких как интерполяция Лагранжа, интерполяция Ньютона, тригонометрическая интерполяция, подробнее данные методы рассмотрены в разделе 2.2 настоящей главы.

Разрабатываемый метод свободной интерполяции для определения кинематических параметров движения навигационных спутников относится к методам второго подхода, его подробное описание приводится в разделе 2.3 данной главы.

2.1 Метод численного интегрирования уравнений движения навигационного спутника

Наиболее физически обоснованным способом определения кинематических параметров движения навигационных спутников, позволяющим восстановить орбиту НС между SP3-точками, является численное интегрирование дифференциальных уравнений движения. Начальные условия и параметры модели движения определяются по SP3-данным методом наименьших квадратов. Дифференциальные уравнения движения записаны в векторном виде (2.1) [1]:

$$\begin{cases} \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \end{cases} \quad (2.1)$$

Описание правой части, а именно ускорений, действующих на НС, дается в [1, 47]. Подробнее методы согласования модели движения рассмотрены в работе [48]. Система дифференциальных уравнений движения решается методом численного интегрирования Адамса 7-го порядка. В работе использовались данные, рассчитанные Ушаковым Ю.Ю. по SP3-данным IGS за 2013 год. Описание способа численного интегрирования уравнений движения приводится также в работе [49].

2.2 Стандартные методы интерполяции кинематических параметров движения навигационных спутников

В работах [10–18] рассматриваются стандартные алгоритмы интерполяции кинематических параметров движения навигационных спутников, к которым авторы относят интерполяцию полиномами Лагранжа или Ньютона и тригонометрическую интерполяцию. Эти методы были рекомендованы IGS [50]

как основные способы для использования их продуктов, поэтому дальнейшие исследования будут сравниваться с этими работами. В данных исследованиях рассматривают вопросы погрешности при определении кинематических параметров движения навигационных спутников при различном количестве SP3-точек, используемых для интерполяции, и различных стратегиях интерполяции (полиномы Лагранжа, тригонометрические функции).

Формула, используемая в стандартном методе интерполяции полиномами Лагранжа, выглядит следующим образом:

$$L(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{\hat{t} - t_k}{t_i - t_k}, \quad (2.2)$$

где $L(\hat{t})$ – результат интерполяции (интерполируемый кинематический параметр навигационного спутника на эпоху \hat{t}), x_i – положения спутников, взятые из SP3-точек на эпохи t_i .

Вид формулы для тригонометрической интерполяции:

$$L(\hat{t}) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \cdot e^{j2\pi k \hat{t}}; \quad c_k = \sum_{i=0}^n x_i \cdot e^{-j2\pi k t_i}, \quad (2.3)$$

где $L(\hat{t})$ – результат интерполяции (интерполируемый кинематический параметр навигационного спутника на эпоху \hat{t}), x_i – положения спутников, взятые из SP3-точек на эпохи t_i .

В работе [10] показано, что лучшая точность интерполяции координат навигационного спутника достигается при использовании 9 SP3-точек и тригонометрических функций интерполяции, при этом достигается СКО **0.1 см**, при использовании полиномиальной интерполяции СКО составляет **0.2 см** при таком же количестве SP3-точек.

Для оценки точности методов интерполяции орбиты предлагается сравнивать интерполированные орбиты с орбитами, полученными в результате решения дифференциальных уравнений движения, согласованных с SP3-данными от аналитического центра. В качестве меры оценки предлагается оценивать СКО (2.4) интерполированной орбиты относительно орбиты, полученной в результате численного интегрирования:

$$\sigma = \sqrt{(I(t_i) - L(t_i))^2}, \quad (2.4)$$

где σ – СКО координаты; $I(t_i)$ – значения координат орбиты НС, полученное путем численного интегрирования; $L(t_i)$ – значения координат орбиты НС, полученное путем интерполяции орбиты.

Для объективного сравнения наших дальнейших результатов с результатами применения интерполяции Лагранжа были произведены эксперименты по интерполяции со следующими параметрами:

- момент времени, на который выполнялась интерполяция, выбирался таким образом, чтобы он соответствовал середине временного интервала всех SP3-точек, используемых в формуле (2.2);

- момент времени, на который выполняется интерполяция, постоянно смещается на 15 минут вместе с данными, по которым выполняется интерполяция;

- в качестве SP3-данных в экспериментах выступают SP3-данные IGS.

Эксперименты проводились на орбитах спутников ГЛОНАСС и GPS за весь 2013 год за исключением дней с теньевыми участками и аномальных дней. Методика исключения дней с теньевыми участками и аномальных дней описана в первой главе данной работы.

В результате экспериментов с интерполяцией полиномами Лагранжа были получены результаты, представленные в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Результаты интерполяции полиномами Лагранжа

Тип эксперимента		СКО без удаления теньевых участков и разрывов на стыках суток, мм	СКО без теньевых участков и разрывов на стыках суток, мм
ГНСС	Число SP3-точек		
Все спутники GPS	6	979.98	979.97
Все спутники ГЛОНАСС	6	1642.11	1642.11
Все спутники GPS	8	10.80	8.67
Все спутники ГЛОНАСС	8	15.55	15.08
Все спутники GPS	10	6.59	0.99
Все спутники ГЛОНАСС	10	3.95	0.70
Все спутники GPS	12	6.63	1.01
Все спутники ГЛОНАСС	12	3.96	0.70

По Таблице 2.1 и с учетом работы [10] делается следующее заключение: для метода интерполяции Лагранжа, который предложен IGS как основной, использование менее 9 SP3-точек приводит к высокому значению СКО-погрешности определения координат спутника, и, соответственно, использование интерполяции Лагранжа с ограниченным количеством данных (менее 9 SP3-точек) в задачах, где требуется высокая точность результатов, недопустимо.

При интерполяции полиномами эфемерид навигационного спутника наблюдается эффект Рунге, который выражен ухудшением точности интерполяции при приближении к крайним точкам во временном окне, по которому выполняется интерполяция. Наибольший эффект Рунге наблюдается **между последней и предпоследней SP3-точками** во временном ряду, используемом в интерполяционной формуле.

2.3 Метод свободной интерполяции кинематических параметров движения навигационных спутников

Основным недостатком методов интерполяции, описанных в разделе 2.2, является необходимость использования более 9 SP3-точек для достижения высокой точности интерполяции эфемерид спутников. В этом разделе описывается метод, который позволит сократить число SP3-точек до 2 со сравнимой точностью интерполяции. Данный метод также позволяет интерполировать значение скорости по значениям координат с высокой точностью.

Метод свободной интерполяции не ограничивается конкретным выбором интерполирующих функций (полиномиальных, тригонометрических и т.д.) – он автоматически адаптируется к любому типу орбит и имеет значительно меньшее СКО по сравнению с методами, предлагаемыми IGS. В работе [32] была описана первоначальная экспериментальная апробация предлагаемого метода на примере одной целевой точки (с минимальным эффектом Рунге). В статье [28] полностью исследуем точность нашего алгоритма и изменение коэффициентов интерполяции на всем протяжении 6-точечного интерполяционного промежутка. Дальнейшее развитие метода свободной интерполяции описано в статьях [29], [34] и заключа-

ется в использовании всех трех координат – как для интерполяции, так и для экстраполяции (прогноза) орбиты НС. В разделе 2.3.1 дается описание понятий интерполяционного шаблона и метода линейной свободной интерполяции. В разделе 2.3.2 описывается метод нелинейной свободной интерполяции и введение дополнительной информации в модель свободной интерполяции. В разделе 2.3.3 предлагается способ интерполяции скоростей по SP3-данным координат.

2.3.1 Линейная свободная интерполяция и экстраполяция

Общий вид формулы интерполяции:

$$L(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \alpha_i(\hat{t}), \quad (2.5)$$

где $L(\hat{t})$ дает результат интерполяции (приближенное положение спутника для промежуточной эпохи \hat{t}); x_i – положения спутников, взятые из SP3-данных на эпохи t_i ; $\alpha_i(\hat{t})$ – интерполяционная функция.

Свободная интерполяция базируется на формуле (2.5), далее вводится понятие шаблона интерполяции, а именно (Рисунок 2.1) мы фиксируем:

- 1) число n последовательных SP3-эпох t_i , $i = 1, \dots, n$, с 15-минутным временным шагом (нумерация SP3-эпох показана на схеме (Рисунок 2.1) ниже временной оси);
- 2) положение целевой точки \hat{t} относительно n эпох t_i .

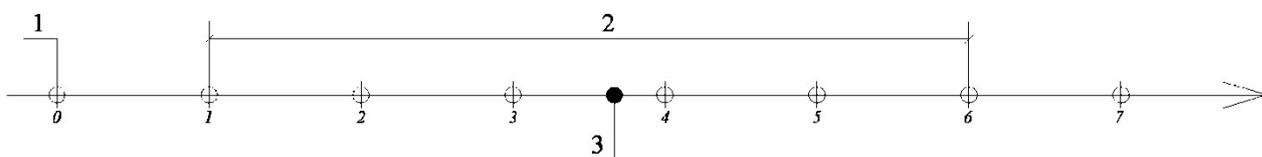


Рисунок 2.1 – Интерполяционный шаблон на временной оси для 6 SP3-точек
(1 – SP3-точки с шагом 15 минут;
2 – SP3-точки интерполяционного шаблона для $n = 6$; 3 – целевая точка \hat{t}).

Как только шаблон интерполяции фиксирован, зависимость α_i от \hat{t} не важна, поэтому перепишем (2.5) как уравнение:

$$\underline{x}(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i + \varepsilon, \quad (2.6)$$

где α_i – неизвестные (скалярные) коэффициенты, x_i – SP3-координаты в эпохи t_i интерполяционного шаблона, $\underline{x}(\hat{t})$ – орбитальная точка с целевой эпохой \hat{t} ; ε – интерполяционный остаток. Считая x_i , $\underline{x}(\hat{t})$ и ε 3-мерными векторами, сохраняя α_i скалярными, или брать в качестве x_i и $\underline{x}(\hat{t})$ какую-то одну из координат.

Чтобы найти коэффициенты α_i и невязку ε , сдвигаем выбранный шаблон интерполяции (одновременно все t_i и \hat{t}) как «окно интерполяции» вдоль оси времени на 15 минут и, заменяя SP3-координаты x_i для сдвинутых эпох и координаты целевой точки $\underline{x}(\hat{t})$ на сдвинутую эпоху \hat{t} из расширенных SP3-данных, получим другое уравнение вида (2.6) с теми же коэффициентами α_i и другим ε . Проведя подобный сдвиг $m > n$ раз с 15-минутным шагом, получим систему:

$$\begin{cases} \underline{x}(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i + \varepsilon_0 \\ \dots \\ \underline{x}(\hat{t} + 15m) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_{i+m} + \varepsilon_m \end{cases} \quad (2.7)$$

Теперь применяем стандартный алгоритм наименьших квадратов к системе (2.7), находим α_i такие, что $\sum_{k=0}^m (\varepsilon_k)^2$ будет минимизирована.

Повторяя эксперимент, описанный в разделе 2.2, заменим стандартную интерполяцию Лагранжа свободной линейной интерполяцией. Эксперименты будут проводиться на орбитах спутников R01 ГЛОНАСС и G01 GPS за весь 2013 год за исключением дней с теневыми участками и аномальных дней. Результаты эксперимента показаны в Таблице 2.2. В качестве целевой точки для эксперимента выбиралась точка **в середине интервала между последней и предпоследней** точками шаблона, вблизи этой точки наблюдается наибольший эффект Рунге. Подробное описание эффекта Рунге приводится в работе [32].

Таблица 2.2 – Результаты применения линейной свободной интерполяции

Число используемых SP3-точек в (2.6)	ГНСС	СКО по координате X, мм	СКО по координате Y, мм	СКО по координате Z, мм
4	G01	1152.29	1170.63	1034.93
5		262.25	267.06	18.600
6		2.78	2.85	5.411
7		0.98	1.00	0.069
8		0.09	0.09	0.018
9		0.07	0.07	0.005
10		0.07	0.07	0.001
11		0.06	0.06	0.001
12		0.06	0.06	0.001
4	R01	402.33	402.15	385.80
5		98.36	98.29	29.07
6		5.53	5.52	8.60
7		1.95	1.94	0.06
8		0.19	0.20	0.03
9		0.11	0.13	0.03
10		0.08	0.10	0.03
11		0.08	0.10	0.02
12		0.08	0.10	0.02

Исследуем форму свободных функций α для шаблона из 6 SP3-точек. Используя формулу (2.6), рассчитаем коэффициенты свободной интерполяции для всех положений целевой точки внутри 6-точечного шаблона интерполяции с шагом в 1 секунду. Рисунок 2.2 показывает результирующие графики. Как и ожидалось, найденные α_i изменяются достаточно плавно, что подтверждает анализ их численных значений методом аппроксимации полиномами небольших степеней. Однако приближение полиномами больших степеней показывает, что в невязке приближения псевдослучайные вариации ("цифровой шум" порядка 10^{-7}) для координат X, Y спутника и намного меньшие псевдослучайные вариации (порядка 10^{-12}) для координаты Z при расчетах во вращающейся земной системе координат. При расчете в невращающейся небесной системе координат "цифровой шум" α_i снижается до 10^{-12} для всех трех координат. Это показывает недостаточную (для наших целей) точность применяемых в [47] алгоритмов IAU и IERS расчета параметров вращения Земли.

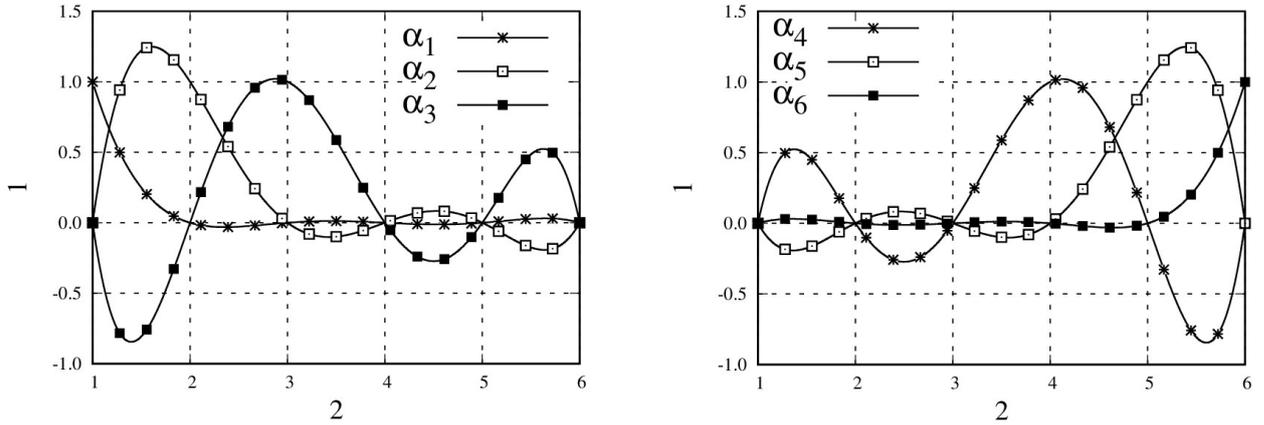


Рисунок 2.2 – Изменение коэффициентов α_i , найденных по 6 SP3-точкам, при изменении \hat{t} , варьируемой от крайней левой эпохи t_1 до последней эпохи t_6 (по осям отложены: 1 – значения α_i , 2 – расположение эпох t_i , помеченных цифрами 1–6, и целевой эпохи \hat{t}).

Линейный адаптивный базис

Показанные на графиках (Рисунок 2.2) функции $\alpha_i(\hat{t})$ образуют собой адаптивный ненормированный базис (в данной работе под *базисом* мы будем понимать *неполный набор дискретных функций*). Как показано выше, использование такого базиса позволяет сократить количество функций, необходимое для выполнения интерполяции координат НС с заданной точностью. В разделе 3.2 будет представлен способ построения такого базиса для выполнения фильтрации медленно меняющегося тренда в измерениях НП.

Трехкоординатная интерполяция

Стандартные формулы интерполяции не позволяют использовать сразу все три координаты для интерполяции, хотя SP3-точка содержит в себе информацию сразу о трех координатах навигационного спутника, в свободной интерполяции нет такого ограничения. Для того чтобы использовать сразу все три координаты, перепишем формулу (2.6) следующим образом:

$$\underline{x}(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i + \gamma_i \cdot z_i) + \varepsilon. \quad (2.8)$$

Здесь $\{x_i, y_i, z_i\}$ – координаты спутника, взятые из SP3-точки на эпоху t_i ; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – коэффициенты интерполяции; $\underline{x}(\hat{t})$ – x -координата орбитальной точки с целевой эпохой \hat{t} ; ε – интерполяционный остаток.

Для нахождения коэффициентов интерполяции $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ составляется система из уравнений вида (2.8) путем смещения интерполяционного шаблона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i + \gamma_i \cdot z_i) + \varepsilon_0. \\ \dots \\ \underline{x}(\hat{t} + 15m) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_{i+m} + \beta_i \cdot y_{i+m} + \gamma_i \cdot z_{i+m}) + \varepsilon_m. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Решение системы уравнений (2.9) выполняется методом наименьших квадратов с минимизацией квадрата ошибки $\sum_{k=0}^m (\varepsilon_k)^2$.

Проведем эксперимент по определению СКО для линейной интерполяции с применением всех трех координат. Эксперименты будут проводиться на орбитах спутников R01 ГЛОНАСС и G01 GPS за весь 2013 год за исключением дней с теневыми участками и аномальных дней. Результаты эксперимента показаны в Таблице 2.3. В качестве целевой точки для эксперимента выбиралась **точка в середине между последней и предпоследней точкой шаблона**.

Таблица 2.3 – Результаты линейной свободной интерполяции при использовании трех координат

Число используемых SP3-точек в (2.9)	ГНСС	СКО по координате X, мм	СКО по координате Y, мм	СКО по координате Z, мм
4	R01	343.84	341.702	385.728
4	G01	378.85	393.39	1034.61
5	R01	24.778	24.536	29.072
5	G01	5.55	5.69	18.59
6	R01	5.162	5.087	8.602
6	G01	1.41	1.43	5.41
7	R01	0.08	0.090	0.064
7	G01	0.08	0.08	0.06
8	R01	0.08	0.089	0.028
8	G01	0.08	0.08	0.01

Число используемых SP3-точек в (2.9)	ГНСС	СКО по координате X, мм	СКО по координате Y, мм	СКО по координате Z, мм
9	R01	0.06	0.078	0.028
9	G01	0.06	0.06	0.005
10	R01	0.06	0.073	0.024
10	G01	0.06	0.06	0.001
11	R01	0.06	0.073	0.024
11	G01	0.06	0.06	0.001
12	R01	0.06	0.072	0.023
12	G01	0.06	0.06	0.001

Свободная линейная экстраполяция

Помимо вопросов интерполяции возникает вопрос возможности экстраполяции кинематических параметров движения за пределами SP3-данных. Рассмотрим возможность применения свободной интерполяции для экстраполяции кинематических параметров. Для этого в формулах (2.6) и (2.8) целевая точка выбирается таким образом, чтобы она находилась за пределами шаблона интерполяции. Для сравнения возьмем экстраполяцию с использованием полиномов Лагранжа, а также однокоординатную и трехкоординатную свободную интерполяцию. Так как из результатов предыдущих экспериментов видно, что СКО для всех трех координат примерно на одном уровне, в последующих экспериментах по умолчанию мы будем интерполировать координату X. Результаты эксперимента показаны в Таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Результаты экстраполяции полиномами Лагранжа

Сдвиг целевой точки относительно последней точки шаблона ($\hat{t} - t_n$), сек	Количество точек n, которые составляют интерполяционный шаблон экстраполяции с использованием полиномов Лагранжа			
	8	10	12	14
	СКО отклонения вычисленной координаты X от исходных данных, мм			
300	821	28	4	14
600	3248	118	18	64
900	8913	348	54	202

Таблица 2.5 – Результаты однокоординатной линейной свободной экстраполяции

Сдвиг целевой точки относительно последней точки шаблона ($\hat{t} - t_n$), сек	Количество точек n , которые составляют шаблон экстраполяции с использованием метода линейной свободной экстраполяции (2.6)								
	8	10	12	14	16	18	20	22	24
	СКО отклонения вычисленной координаты X от исходных данных, мм								
300	0.4	0.3	0.23	0.22	0.2	0.19	0.16	0.16	0.16
600	1.4	1	0.8	0.73	0.63	0.6	0.5	0.49	0.47
900	3.5	2.5	2	1.79	1.51	1.43	1.15	1.13	1.08
1200	7.5	5.3	4.1	3.75	3.11	2.95	2.33	2.29	2.18

Таблица 2.6 – Результаты трехкоординатной линейной свободной экстраполяции

Сдвиг целевой точки относительно последней точки шаблона, ($\hat{t} - t_n$), сек	Количество точек n , которые составляют шаблон экстраполяции с использованием метода линейной свободной экстраполяции (2.8)								
	8	10	12	14	16	18	20	22	24
	СКО отклонения вычисленной координаты X от исходных данных, мм								
300	0.35	0.25	0.22	0.21	0.21	0.20	0.18	0.17	0.17
600	1.24	0.84	0.75	0.71	0.70	0.65	0.58	0.56	0.54
900	3.07	2.05	1.83	1.74	1.70	1.56	1.38	1.34	1.28
1200	6.45	4.29	3.83	3.64	3.54	3.23	2.84	2.74	2.61

Для сравнения в Таблице 2.4 приведены результаты экстраполяции с использованием стандартного метода Лагранжа по тем же реальным данным. Отметим, что при применении стандартных формул экстраполяции Лагранжа при количестве точек в шаблоне более 10 приходится применять вычисления большой точности, чтобы избежать существенного накопления ошибок.

Как видно из Таблицы 2.5 и Таблицы 2.6, с увеличением числа точек, входящих в интерполяционный шаблон, ошибка экстраполяции уменьшается, хотя и виден *эффект насыщения*. Уменьшение СКО невязки сильно замедляется, при количестве точек шаблона больше 20, несмотря на хорошую численную устойчивость применяемого алгоритма и проверки полученных результатов с помощью вычислений с большой точностью. Видимо, это связано с достижением предела точности самой применяемой нами линейной математической модели (2.6). Для проверки численной устойчивости и возможного накопления ошибок округления была проведена серия экспериментов с использованием вычислений с высокой

точностью (размер мантиисы 256 бит). Как оказалось, вычисления с большой точностью дают несущественное (на 10–20 %) уменьшение СКО отклонения вычисленной координаты от исходных данных, что подтверждает устойчивость нашего метода.

2.3.2 Нелинейная свободная интерполяция и экстраполяция

При использовании линейной свободной интерполяции удается сократить число SP3-точек в интерполяционной формуле с 9 до 6. Для дальнейшего сокращения числа точек введем в интерполяционную формулу (2.8) слагаемые вида $\sum_{p \leq q} \kappa_{p,q} \cdot w_p \cdot w_q$, где набор $\{w_p\}$ – объединение наборов $\{x_i, y_i, z_i\}$ во всех слагаемых из правой части (2.8), получаем формулу для нелинейной интерполяции второго порядка с пока неизвестными коэффициентами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \kappa_{p,q}$:

$$\underline{x}(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i + \gamma_i \cdot z_i) + \sum_{p \leq q} \kappa_{p,q} \cdot w_p \cdot w_q + \varepsilon. \quad (2.10)$$

Аналогично вводятся слагаемые более высоких порядков.

Для нахождения коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \kappa_{p,q}$ составим множество уравнений вида (2.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i + \gamma_i \cdot z_i) + \sum_{p \leq q} \kappa_{p,q} \cdot w_p \cdot w_q + \varepsilon_0. \\ \dots \\ \underline{x}(\hat{t} + 15m) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_{i+m} + \beta_i \cdot y_{i+m} + \gamma_i \cdot z_{i+m}) + \sum_{p \leq q} \kappa_{p,q} \cdot w_{p+m} \cdot w_{q+m} + \varepsilon_m. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Решение системы уравнений (2.11) выполняется методом наименьших квадратов с минимизацией квадрата ошибки $\sum_{k=0}^m (\varepsilon_k)^2$.

Проведем эксперимент для оценки СКО при введении нелинейных слагаемых в формулу свободной интерполяции, аналогичный предыдущим экспериментам. Ввиду плохой обусловленности матрицы вычисления будут вы-

полняться с высокой точностью BigFloat (1000 бит). В Таблице 2.7 приведены СКО невязок (т.е. интерполяционных остатков ε) при выборе различных степеней нелинейности в формуле (2.10); для сравнения также приводятся результаты для шаблонов из 3 и 4 точек. Положение целевой точки \hat{t} дается относительно правого конца шаблона, отрицательные значения смещения соответствуют интерполяции, положительные – экстраполяции. При выборе координаты y или z в левой части (2.10) для целевой точки \hat{t} получаемые СКО имеют тот же порядок.

Таблица 2.7 – Результаты применения свободной нелинейной интерполяции

Число SP3-точек в шаблоне в (2.10)	Степень нелинейности в формуле (2.10)	СКО невязки в мм			
		Смещение целевой точки \hat{t} относительно конца шаблона в сек.			
		-450 с	300 с	900 с	3600 с
2	1	35150	62380	279693	–
2	2	13065	23212	104023	–
2	3	119	212	951	9291
2	4	89	159	713	6995
3	1	2821	7767	44669	–
3	2	1173	3236	18649	347969
3	3	3	8	49	957
4	1	339	1242	8550	–
4	2	72	264	1850	56211
4	3	0,16	0,5	4	124

Тем самым при трех и более точках в шаблоне повышение степени нелинейности сводит невязку к нескольким миллиметрам. Для двухточечных шаблонов повышение степени не приводит к столь же малым невязкам. Естественной причиной могут служить лунно-солнечные приливные воздействия и световое давление, дающие квадратичные поправки к траекториям, которые легко интерполируются по 3 и 4 точкам и не интерполируются по 2 точкам. Отметим, что наличие теневых участков на орбитах практически не влияет на результаты интерполяции; для экстраполяции важно исключать теневые участки, чтобы избежать потери точности.

Дополнительная информация в свободной нелинейной интерполяции

Помимо использования информации о трех координатах в формулу свободной интерполяции включается дополнительная информация, например, о положении притягивающих тел, таких как Луна или Солнце. Тогда формула свободной интерполяции (2.10) модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{x}(\hat{t}) = & \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i + \gamma_i \cdot z_i) + \sum_{p \leq q} \kappa_{p,q} \cdot w_p \cdot w_q + \\ & + \dots + \eta_x \cdot J_x(\hat{t}) + \eta_y \cdot J_y(\hat{t}) + \eta_z \cdot J_z(\hat{t}) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \kappa_{p,q}, \eta_x, \eta_y, \eta_z$ – это коэффициенты свободной интерполяции, $J_x(\hat{t})$, $J_y(\hat{t})$, $J_z(\hat{t})$ – это дополнительная информация, вносимая в уравнение свободной интерполяции (проекции лунно-солнечных ускорений).

Нахождение свободных коэффициентов выполняется аналогично формуле (2.12) методом наименьших квадратов с минимизацией квадрата ошибки $\sum_{k=0}^m (\varepsilon_k)^2$.

Проведем эксперимент для оценки СКО при введении в формулу свободной интерполяции дополнительной информации, аналогичный экспериментам с использованием нелинейной интерполяции. Ввиду плохой обусловленности матрицы вычисления будут выполняться с высокой точностью BigFloat (1000 бит). Необходимые для дальнейших экспериментов лунно-солнечные приливные ускорения J_x , J_y , J_z в формуле (2.12) для инерциальной системы координат найдутся с использованием астрономического пакета SOFA [51], а переход во вращающуюся систему координат ПЗ.90 выполняется по РД 50-25645.325-89 [52]. Результаты эксперимента приведены в Таблице 2.8.

Таблица 2.8 – Результаты применения свободной нелинейной интерполяции с введением дополнительной информации, шаблон из двух точек

Координата в левой части (2.12)	Степень нелинейности в (2.12)	СКО невязки в инерциальной системе координат в мм	СКО невязки во вращающейся системе координат в мм	СКО невязки в инерциальной системе координат в мм	СКО невязки во вращающейся системе координат в мм
		Без использования лунно-солнечных ускорений		С использованием лунно-солнечных ускорений	
X	2	1646	–	1619	–
X	3	128	119	21	16
X	4	99	89	15	3,7
X	5	75	54	13	2
Z	2	2869	–	–	–
Z	3	44	50	20	15
Z	4	30	38	14	3,5
Z	5	21	27	12	–

Из Таблицы 2.8 делается вывод, что введение лунно-солнечных ускорений в формулу свободной интерполяции позволяет уменьшить СКО погрешности интерполяции при степени нелинейности 5 до 2 мм.

2.3.3 Определение скоростей по SP3-данным

В задачах ГНСС часто встает необходимость получения не только значений координат навигационного спутника, но и вектора скорости. Наиболее часто встречающийся метод восстановления скоростей основывается на аппроксимации рядов данных полиномами, после чего вычисляется производная по полиному и находится скорость в требуемый момент времени. Метод свободной интерполяции позволяет получать компоненты вектора скорости непосредственно из SP3-точек.

Используем в качестве примера финальную формулу свободной нелинейной интерполяции (2.12), однако заменим $\underline{x}(\hat{t})$ на $\dot{\underline{x}}(\hat{t})$ (проекцию скорости на данную ось координат), и тогда получаем формулу для интерполяции скоростей методом свободной нелинейной интерполяции:

$$V_x = \dot{x}(\hat{t}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i + \gamma_i \cdot z_i) + \sum_{p \leq q} \kappa_{p,q} \cdot w_p \cdot w_q + \dots + \eta_x \cdot J_x(\hat{t}) + \eta_y \cdot J_y(\hat{t}) + \eta_z \cdot J_z(\hat{t}) + \varepsilon, \quad (2.13)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \kappa_{p,q}, \eta_x, \eta_y, \eta_z$ – это коэффициенты свободной интерполяции; J_x, J_y, J_z – дополнительная информация, вносимая в уравнение свободной интерполяции (проекции лунно-солнечных ускорений).

Проведем экспериментальную оценку СКО интерполируемой скорости с использованием нелинейной свободной интерполяции. **Используется двухточечный шаблон интерполяции с различной степенью нелинейности. В качестве целевой точки выбирается точка в середине такого шаблона.** Эксперименты будут проводиться на данных орбиты спутника R01 ГЛОНАСС за весь 2013 год, за исключением дней с теньвыми участками и аномальных дней. Вычисление лунно-солнечных ускорений проводилось с использованием SOFA [51] для вычисления ускорений в инерциальной системе координат и РД 50-25645.325-89 [52] для перехода во вращающуюся систему координат ПЗ.90. Результаты эксперимента представлены в Таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Результаты применения свободной нелинейной интерполяции с введением дополнительной информации для интерполяции скоростей

Параметр в левой части (2.13)	Степень нелинейности в (2.13)	СКО невязки скорости в инерциальной системе координат в мм/с	
		Без использования лунно-солнечных ускорений	С использованием лунно-солнечных ускорений
V_x	2	0,2108	0,2100
V_x	3	0,0064	0,0058
V_x	4	0,0051	0,0030
V_x	5	0,0038	0,0018
V_z	2	0,2494	0,2492
V_z	3	0,0030	0,0029
V_z	4	0,0022	0,0020
V_z	5	0,0018	0,0016

Отметим, что нахождение скорости с точностью 0,001 мм/сек соответствует точности 1 мм при интегрировании уравнений движения на промежутке 15 мин. Применение нелинейной формулы (2.12) позволило относительно простыми сред-

ствами (не используя численные методы интегрирования дифференциальных уравнений, подробные данные о гравитационном поле Земли и т.п.) находить скорость навигационного спутника по двум SP3-точкам с СКО = 0,0016 мм/сек.

2.3.4 Оценка устойчивости метода свободной интерполяции

Оценка устойчивости свободной интерполяции к данным ограниченной точности

Так как в реальных условиях данные об орбитах ограничены количеством разрядов, проведем оценку устойчивости метода интерполяции Лагранжа и метода свободной интерполяции к ограничению точности данных. Под ограничением точности данных будет пониматься число значащих знаков в числе, а для ограничения этого числа мы будем округлять данные об орбитах до мм, см, дм. Для экспериментов были использованы данные, взятые с IGS за 2013 год для спутника ГЛОНАСС R01 с удалением теневых участков и дней с аномалиями. Для обучения свободных коэффициентов использовались орбиты, рассчитанные путем численного интегрирования уравнений движения. Для определения СКО погрешности метода свободной интерполяции вычисления выполнялись по SP-данным с округлением.

Таблица 2.10 – Результаты оценки погрешности методов интерполяции Лагранжа и линейной свободной интерполяции

Исследуемый алгоритм интерполяции (\hat{t} в середине интерполяционного шаблона)	Ограничение точности данных		
	дм	см	мм
	СКО отклонения вычисленной координаты от исходных данных, мм		
Алгоритм Лагранжа, шаблон из 6 точек	1125	1125	1125
Алгоритм Лагранжа, шаблон из 8 точек	22.01	9,6	9,5
Алгоритм Лагранжа, шаблон из 10 точек	20.7	2,83	0.28
Алгоритм Лагранжа, шаблон из 12 точек	21.2	2.9	0.27
Линейная свободная интерполяция по шаблону из 6 точек с коэффициентами, найденными по данным ограниченной точности	19.92	2.75	0.71

Исследуемый алгоритм интерполяции (\hat{t} в середине интерполяционного шаблона)	Ограничение точности данных		
	дм	см	мм
	СКО отклонения вычисленной координаты от исходных данных, мм		
Линейная свободная интерполяция по шаблону из 8 точек с коэффициентами, найденными по данным ограниченной точности	17.5	2.74	0.26
Линейная свободная интерполяция по шаблону из 10 точек с коэффициентами, найденными по данным ограниченной точности	15.96	2.22	0.22
Линейная свободная интерполяция по шаблону из 12 точек с коэффициентами, найденными по данным ограниченной точности	13.64	1.99	0.17

Как видно из Таблицы 2.10, округление данных имеет одинаковый эффект как для интерполяции Лагранжа, так и для линейной свободной интерполяции, а также погрешность, сопоставимую со степенью округления исходных данных. Рассмотрим погрешность, возникающую из-за ограничения точности используемых данных для нелинейной свободной интерполяции, на примере двухточечного шаблона интерполяции с целевой точкой в середине шаблона. В Таблице 2.11 приводятся результаты интерполяции как координат, так и скоростей в условиях ограничения точности исходных данных.

Таблица 2.11 – Результаты применения нелинейной свободной интерполяции к данным с ограниченной точностью

Интерполируемый параметр в (2.13)	Степень нелинейности в (2.13)	СКО отклонения вычисленной координаты от исходных данных, мм, мм/с			
		Ограничение точности данных			
		–	дм	см	мм
X	3	16	25	16	15
X	4	3,7	25	4,3	3,8
Z	3	15	20	16	15
Z	4	3,5	20	4	3,5
V_x	3	0,0058	0,0456	0,0074	0,0058
V_x	4	0,0030	0,0453	0,0055	0,0031
V_z	3	0,0029	0,0458	0,0054	0,0029
V_z	4	0,0020	0,0458	0,0050	0,0020

По результатам, полученным в Таблице 2.11, делается вывод о том, что нелинейная свободная интерполяция также имеет погрешность, сопоставимую со степенью округления исходных данных. Это говорит об устойчивости метода свободной интерполяции к данным ограниченной точности. Следующая серия экспериментов рассматривала метод свободной экстраполяции в условиях данных с ограниченной точностью.

Таблица 2.12 – Результаты применения свободной линейной экстраполяции к данным с ограниченной точностью

Сдвиг целевой точки относительно последней точки шаблона ($\hat{t} - t_n$), сек	Количество точек n, которые составляют шаблон экстраполяции с использованием метода линейной свободной экстраполяции (2.6)														
	22			24			26			28			30		
	СКО вычисленной координаты от исходных данных, мм														
	дм	см	мм	дм	см	мм	дм	см	мм	дм	см	мм	дм	см	мм
300	52	6.8	1	51	6.8	0.9	51	6.7	0.9	51	6.4	0.8	51	6.4	0.8
600	95	15	2.6	94	15	2.4	94	15	2.3	94	14	2.2	94	14	2.1
900	162	30	5.6	160	30	5	160	29	5	159	27	4.6	159	27	4.5
1200	257	53	11	255	53	9.5	253	51	9.3	253	47	8.5	252	46	8.3

По Таблице 2.12 видно, что метод свободной экстраполяции устойчив к ограничению точности данных, увеличение СКО происходит в пределах ограничения данных.

Оценка стабильности коэффициентов свободной интерполяции с течением времени

Одним из важных параметров является стабильность коэффициентов с течением времени. Была проведена проверка стабильности коэффициентов свободной интерполяции через 5 лет. Для проверки стабильности коэффициентов с течением времени и применимости их к данным других центров IGS коэффициенты, рассчитанные по данным на 2013 год для двухточечного шаблона с целевой точкой в середине шаблона, были применены к SP3-данным спутника R01 за март 2017 год, рассчитанным центром CODE [6]. Для нелинейной свободной интерполяции с использованием приливных воздействий СКО невязки составляет для 3

степени 4 см, для 4 степени – 1,5 см. Это показывает стабильность таких коэффициентов на интервале в 5 лет, с небольшой деградацией точности интерполяции.

2.4 Выводы по главе 2

Рассмотренный в данной главе метод свободной интерполяции позволяет достичь уменьшения числа SP3-точек, используемых в формуле линейной интерполяции (2.5) до 6, что обусловлено числом параметров, описывающих орбиту навигационного спутника.

Свободная линейная интерполяция позволяет использовать в формуле интерполяции информацию как об одной координате, так и обо всех трех координатах, что дает эффект при числе SP3-точек в шаблоне интерполяции меньше шести и использовании нелинейных слагаемых в интерполяционной формуле (2.10). Это позволяет сократить число SP3-точек в шаблоне до трех.

Последнее изменение, которому подвергся метод нелинейной свободной интерполяции, – это введение в формуле (2.12) дополнительной информации в виде вектора лунно-солнечных ускорений.

Идея свободной интерполяции применяется не только непосредственно к координатам навигационного спутника, но и к компонентам вектора скорости, как показано в разделе 1.4.3.

Использование формул (2.12) и (2.13) позволяет выполнять интерполяцию кинематических параметров движения навигационных спутников по двум SP3-точкам с СКО для координат 2 мм, для проекций скоростей – 0,0016 мм/с.

Как было показано в численных экспериментах, свободную интерполяцию применима и для экстраполяции координат навигационных спутников, при этом погрешность экстраполяции выше по сравнению с результатами интерполяции и зависит от удаления целевой точки от конца шаблона, однако находится на уровне нескольких миллиметров для экстраполяции на временные интервалы до 15 минут. При экстраполяции на 15 минут СКО погрешности составляет 5 мм при использовании линейной свободной экстраполяции по 24 SP3-точкам. При использовании нелинейной свободной экстраполяции такая точность достигается

при использовании 4 SP3-точек и степени нелинейности 3. Это показывает возможность применения метода свободной экстраполяции для экстраполяции орбиты в начале и в конце суточных интервалов.

На программный комплекс, реализующий метод линейной свободной интерполяции орбиты навигационных спутников по SP3-данным, было получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [37]. Этот программный комплекс состоит из двух частей, реализующих адаптивный алгоритм машинного обучения для универсальной интерполяции орбит спутников ГНСС по SP3-данным с высокой точностью (менее 1 мм). Данный комплекс позволяет повысить точность интерполяции более чем в 100 раз для шаблона из шести SP3-точек по сравнению с полиномиальной или тригонометрической интерполяцией.

Концепция, заложенная в основу метода свободной интерполяции, находит применение не только для интерполяции или экстраполяции кинематических параметров движения навигационных спутников, но и в других задачах, где число данных, по которым нужно восстановить значение функции, ограничено. Пример такой задачи – это новая интерполяционная модель ионосферных задержек, описанная в работах Царева С.П., Валиханова М.М., Денисенко В.В. [53, 54].

Глава 3. Обнаружение скачков в фазовых измерениях одночастотных приемников с различными стандартами частоты

В настоящее время использование навигационных приемников можно встретить почти во всех отраслях деятельности человека. Использование фазовых измерений НП позволяет значительно повысить точность решения навигационной задачи, так как их шум значительно ниже, чем у кодовых измерений. Основная проблема использования фазовых измерений заключается в определении фазовой неоднозначности, для решения которой существует множество различных методов. Однако эти методы хорошо работают только в случае, когда фазовая неоднозначность постоянна на всем интервале наблюдений. В случае, когда в фазовой неоднозначности присутствуют скачки, она представляет собой кусочно-постоянную функцию, поэтому сначала восстанавливают данную кусочно-постоянную функцию, а после этого решают задачу определения фазовой неоднозначности. Для двухчастотных НП обнаружение скачков обычно выполняется комбинацией Мельбурна–Вуббена [2, 20–21]. Для недорогих одночастотных НП, появившихся в последнее время на рынке, построение такой комбинации невозможно, и задача поиска скачков для них обычно решается [22] либо с использованием доплеровских измерений [23], с использованием нескольких НС [24], временными разностями высоких порядков [25] (при этом детектируются лишь большие скачки), либо в режимах относительного позиционирования [26, 27].

В данной главе предлагаются алгоритмы, позволяющие с высокой достоверностью находить положения скачков в фазовых одночастотных измерениях и их величину без дополнительной информации за счет применения алгоритмов полиномиальных и адаптивных аппроксимаций и современных алгоритмов семейства *sparse recovery* [31].

В разделе 3.1 описываются модели измерений для одночастотных НП и разности этих измерений, которые будут использоваться для формализации задачи поиска скачков в фазовых измерениях.

В разделе 3.2 формализуется задача поиска скачков в фазовых измерениях одночастотного НП для двух ситуаций: высокостабильного опорного генератора и низкостабильного опорного генератора. Рассматриваются задачи:

- восстановления кусочно-постоянной функции в смеси с шумом;
- аппроксимации медленно меняющегося тренда, выделяемого в измерениях НП, и приводится два способа построения наилучшего приближения – полиномиальный и адаптивный;
- линейной фильтрации медленно меняющегося тренда;
- оценки нормы реализации шума для использования такой оценки в алгоритмах поиска скачков.

В разделе 3.3 рассматриваются две ситуации поиска скачков в фазовых измерениях: НП с высокостабильным опорным генератором и НП с низкостабильным опорным генератором. Рассматриваются алгоритмы поиска разрывов на основе линейной фильтрации медленноменяющегося тренда. Алгоритмы поиска скачков в фазовых измерениях на основе алгоритмов *скользящего окна* и алгоритмов *sparse recovery*. В разделе описываются способы улучшения существующих алгоритмов *sparse recovery*, применяемых в других областях обработки данных, позволяющие применять данный алгоритм к измерениям НП. Описывается способ повторной оценки величин скачков по критерию минимизации ошибки в метрике ℓ_2 .

В разделе 3.4 проводится оценка работы алгоритмов на модельных данных. Выполняется оценка размера полиномиального и адаптивного базиса для аппроксимации геометрической дальности. Приводятся модели, которые будут использоваться в модельных экспериментах. Описываются эксперименты по оценке точности, предложенного способа оценки нормы реализации шума; эксперименты по определению СКО ошибки оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции при известном положении разрыва. Проводятся серии экс-

периментов по оценке точности алгоритмов *ATV* (*Approximation – Total Variation*), в которых обосновываются преимущества использования адаптивных базисов по сравнению с полиномиальными. Приводится статистика экспериментов обнаружения одиночного и множественных разрывов предложенными алгоритмами.

В разделе 3.5 проводятся эксперименты по применению алгоритмов, рассмотренных в рамках данной главы, к реальным данным (измерительной информации, взятой со станций сети IGS). Приводится описание станций, измерительная информация которых была обработана в данном разделе. Приводятся результаты применения линейной фильтрации к измерениям. Приводится обоснование использования для НП с низкостабильными опорными генераторами вместо фазовых измерений, разности кодовых и фазовых измерений. Описываются результаты экспериментов по обнаружению модельного скачка в реальных измерениях алгоритмом *CPHATV-LP* (*Constrained Polynomial Hahn Approximation – Total Variation* – в метрике ℓ_p).

3.1 Модели измерений для одночастотного приемника

В данном подразделе рассматриваются модели измерений одночастотного НП, которые будут использоваться в разрабатываемых алгоритмах.

Модель фазовых измерений

Модель фазовых измерений для одночастотного НП, согласно [1, 2], записывается как (3.1):

$$L(t_i) = \rho(t_i) + c(\Delta t_{\text{Тракт НП}(L)}(t_i) - \Delta t_{\text{Тракт НС}(L)}(t_i)) + \lambda(N + \omega(t_i)) + c(\tau_{\text{проно}}(t_i) - \tau_{\text{ион}}(t_i) + \Delta t_{\text{ШВ НП}}(t_i) - \Delta t_{\text{ШВ НС}}(t_i) + \Delta t_{\text{рел}}(t_i)) + \varepsilon_L, \quad (3.1)$$

где t_i – момент измерений по шкале времени приемника; $L(t_i)$ – фазовые измерения НП; $\rho(t_i)$ – геометрическая дальность; c – скорость света; $\Delta t_{\text{ШВ НС}}(t_i)$ – расхождение ШВ (шкалы времени) НС и СШВ (системной шкалы времени) ГНСС; $\Delta t_{\text{ШВ НП}}(t_i)$ – расхождение ШВ НП и СШВ ГНСС; $\Delta t_{\text{Тракт НС}(L)}(t_i)$ – фазо-

вая задержка сигнала в тракте НС; $\Delta t_{\text{Тракт НП}(L)}(t_i)$ – фазовая задержка в тракте НП; λ – длина волны на частоте несущей; $\tau_{\text{тропо}}(t_i)$ – задержка сигнала в тропосфере; $\tau_{\text{ион}}(t_i)$ – фазовая задержка сигнала в ионосфере (первого порядка); $\Delta t_{\text{рел}}$ – задержка, вызванная релятивистскими эффектами; N – фазовая неоднозначность; $\omega(t_i)$ – доворот фазы из-за взаимного положения антенны НС и НП; ε_L – аддитивный шум фазовых измерений.

Модель кодовых измерений

Модель кодовых измерений для одночастотного НП согласно [1, 2] записывается как (3.2):

$$C(t_i) = \rho(t_i) + c(\Delta t_{\text{Тракт НП}(C)}(t_i) - \Delta t_{\text{Тракт НС}(C)}(t_i)) + c(\tau_{\text{тропо}}(t_i) + \tau_{\text{ион}}(t_i) + \Delta t_{\text{ШВ НП}}(t_i) - \Delta t_{\text{ШВ НС}}(t_i) + \Delta t_{\text{рел}}(t_i)) + \varepsilon_C, \quad (3.2)$$

где t_i – момент измерений по шкале времени приемника; $C(t_i)$ – кодовые измерения НП; $\rho(t_i)$ – геометрическая дальность; c – скорость света; $\Delta t_{\text{ШВ НС}}(t_i)$ – расхождение ШВ (шкалы времени) НС и СШВ (системной шкалы времени) ГНСС; $\Delta t_{\text{ШВ НП}}(t_i)$ – расхождение ШВ НП и СШВ ГНСС; $\Delta t_{\text{Тракт НС}(C)}(t_i)$ – кодовая задержка сигнала в тракте НС; $\Delta t_{\text{Тракт НП}(C)}(t_i)$ – кодовая задержка в тракте НП; $\tau_{\text{тропо}}(t_i)$ – задержка сигнала в тропосфере; $\tau_{\text{ион}}(t_i)$ – фазовая задержка сигнала в ионосфере (первого порядка); $\Delta t_{\text{рел}}$ – задержка, вызванная релятивистскими эффектами; ε_C – аддитивный шум кодовых измерений.

Разность кодовых и фазовых измерений

Разность кодовых и фазовых измерений записывается как (3.3):

$$LC(t_i) = c(\Delta t_{\text{Тракт НП}(L)}(t_i) - \Delta t_{\text{Тракт НС}(L)}(t_i) - \Delta t_{\text{Тракт НП}(C)}(t_i) + \Delta t_{\text{Тракт НС}(C)}(t_i)) + 2 \cdot c \cdot \tau_{\text{ион}}(t_i) + \lambda(N + \omega(t_i)) + \varepsilon_L + \varepsilon_C, \quad (3.3)$$

где t_i – момент измерений; $LC(t_i)$ – разность кодовых и фазовых измерений; c – скорость света в вакууме; λ – длина волны на частоте несущей; $\Delta t_{\text{Тракт НС}(L)}$ – фа-

зовая задержка в тракте навигационного спутника; $\Delta t_{\text{Тракт НС}(C)}$ – кодовая задержка в тракте навигационного спутника; $\Delta t_{\text{Тракт НП}(L)}$ – фазовая задержка в тракте навигационного приемника; $\Delta t_{\text{Тракт НП}(C)}$ – кодовая задержка в тракте навигационного приемника; $\tau_{\text{ион}}(t_i)$ – задержка сигнала в ионосфере; N – фазовая неоднозначность; $\omega(t_i)$ – доворот фазы; ε_L – аддитивный шум фазовых измерений; ε_C – аддитивный шум кодовых измерений.

3.2 Формализация задачи поиска скачков в одночастотных измерениях

Поиск скачков фазовых измерений в данной работе рассматривается как задача выделения кусочно-постоянной функции (а именно определение положений разрывов и их величин в кусочно-постоянной функции) в аддитивной смеси с медленно меняющимся трендом и шумом.

В данной работе для поиска скачков в фазовых измерениях предлагается рассматривать измерения (комбинации измерений) НП как сумму из трех составляющих (3.4):

$$y(t_i) = s(t_i) + x(t_i) + n(t_i), \quad (3.4)$$

где $y(t_i)$ – фазовые измерения $L(t_i)$ (3.1) или разность кодовых и фазовых измерений $LC(t_i)$ (3.3) одночастотного НП на моменты времени t_i ; $s(t_i)$ – медленно меняющийся тренд в измерениях; $x(t_i)$ – кусочно-постоянная функция скачков в фазовых измерениях; $n(t_i)$ – шумовая составляющая измерений; t_i – временной ряд, соответствующий моментам времени измерений (измерения идут с одинаковым шагом по времени, однако в таком ряду могут присутствовать пропуски).

В работе предлагается рассматривать решение задачи восстановления кусочно-постоянной функции $x(t_i)$ в двух ситуациях.

Первая ситуация – поиск скачков в фазовых измерениях НП с высокостабильным (водородным) опорным генератором – с использованием алгоритмов, описанных в подразделе 3.3. В данной ситуации используются непосредственно фазовые измерения, где к медленно меняющемуся тренду $s(t_i)$ относится (3.5):

$$s_L(t_i) = \rho(t_i) + c(\Delta t_{\text{Тракт НП}(L)}(t_i) - \Delta t_{\text{Тракт НС}(L)}(t_i)) + \lambda(N + \omega(t_i)) + c(\tau_{\text{тропо}}(t_i) - \tau_{\text{ион}}(t_i) + \Delta t_{\text{ШВ НП}}(t_i) - \Delta t_{\text{ШВ НС}}(t_i) + \Delta t_{\text{рел}}(t_i)). \quad (3.5)$$

Описанные в подразделе 3.3 алгоритмы, применяемые к фазовым измерениям НП с высокостабильными опорными генераторами, позволяют обнаруживать все скачки в этих измерениях. Результаты обработки таких измерений показаны в подразделе 3.5.4.

Вторая ситуация возникает для НП с низкостабильными опорными генераторами; применение алгоритмов, описанных в подразделе 3.3, к фазовым измерениям напрямую не позволяет обнаруживать скачки в фазовых измерениях по причинам, указанным в подразделе 3.5.3 и работах [55–57]. Для таких НП предлагается использовать разность кодовых и фазовых измерений, в которых к медленно меняющемуся тренду $s(t_i)$ относится (3.6):

$$s_{LC}(t_i) = c(\Delta t_{\text{Тракт НП}(L)}(t_i) - \Delta t_{\text{Тракт НС}(L)}(t_i) - \Delta t_{\text{Тракт НП}(C)}(t_i) + \Delta t_{\text{Тракт НС}(C)}(t_i)) + 2 \cdot c \cdot \tau_{\text{ион}}(t_i) + \lambda(N + \omega(t_i)). \quad (3.6)$$

Результаты применения алгоритмов, описанных в подразделе 3.3, к разностям кодовых и фазовых измерений НП с низкостабильными опорными генераторами показаны в подразделе 3.5.5.

В обеих ситуациях поиск скачков в фазовых измерениях НП формулируется как задача восстановления кусочно-постоянной функции $x(t_i)$ в аддитивной смеси с медленно меняющимся трендом $s(t_i)$ и шумовой составляющей $n(t_i)$.

Для решения задачи восстановления кусочно-постоянной функции скачков в фазовых измерениях рассмотрим следующие задачи:

- задача поиска кусочно-постоянной функции в аддитивной смеси с белым шумом (раздел 3.2.1) для ознакомления с подобными задачами;
- задача аппроксимации медленно меняющегося тренда полиномиальными и адаптивными базисами (раздел 3.2.2);
- задача удаления медленно меняющегося тренда из аддитивной смеси линейным фильтром с ортогональным базисом (раздел 3.2.3);

– задача оценки нормы реализации шумовой составляющей в аддитивной смеси с медленно меняющимся трендом и кусочно-постоянной функцией (раздел 3.2.4).

3.2.1 Задача оценки кусочно-постоянной функции методом минимизации полной вариации

Задача оценки кусочно-постоянной функции в аддитивной смеси с белым шумом имеет множество решений. Наибольшее распространение такие задачи получили при обработке изображений с целью поиска контуров в изображении. Одним из наиболее частых методов решения такой задачи является минимизация полной вариации оценки кусочно-постоянной функции.

Введем понятие полной вариации дискретной функции $\mathbf{x}_i = x(t_i)$, которая записывается в следующем виде:

$$TV(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N-1} |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|, \quad (3.7)$$

где N – длина вектора \mathbf{x} .

В матричной форме значение $TV(\mathbf{x})$ записывается как:

$$TV(\mathbf{x}) = \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}\|_1, \quad (3.8)$$

где матрица \mathbf{D} определена как:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

$\|\cdot\|_p$ – оператор нахождения нормы в метрике ℓ_p – определяется как:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_i |\mathbf{x}_i|^p}. \quad (3.10)$$

Аддитивная смесь кусочно-постоянной функции \mathbf{x} и белого шума \mathbf{n} в векторной форме записывается как:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}. \quad (3.11)$$

Ставится задача найти $\hat{\mathbf{x}}$ – оценку вектора \mathbf{x} в аддитивной смеси \mathbf{y} (3.11). Задача минимизации полной вариации $\hat{\mathbf{x}}$ в условиях дополнительных ограничений на норму в метрике ℓ_2 остаточного шума в реализации формулируется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{cases} \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} (\|\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}\|_1) \\ \text{при условии } \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 \leq r \end{cases} \quad (3.12)$$

Параметр r в (3.12) характеризует оценочную норму реализации шума в метрике ℓ_2 – величину, которая напрямую связана с шумом выражением (3.13):

$$r = \sqrt{\sum_i n_i^2}. \quad (3.13)$$

Решение подобной задачи для одномерного случая рассматривается во множестве работ [59–63 и др.]. Наибольший интерес представляет тот факт, что данные алгоритмы позволяют восстанавливать кусочно-постоянную функцию даже при СКО шума больше величины разрыва в функции, как будет показано ниже.

3.2.2 Полиномиальная и адаптивная аппроксимация медленно меняющегося тренда в смеси с белым шумом

Модель измерений (3.4) без разрыва представляется в виде аддитивной смеси медленно меняющегося тренда $s(t_i)$ и шумовой составляющей и записана как:

$$y(t_i) = s(t_i) + n(t_i), \quad (3.14)$$

где $y(t_i)$ – измерения на моменты времени t_i ; $s(t_i)$ – медленно меняющийся тренд; $n(t_i)$ – шумовая составляющая.

Векторная форма записи выглядит следующим образом:

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (3.15)$$

где \mathbf{y} – вектор значений измерений $y(t_i)$, \mathbf{s} – вектор значений медленно меняющегося тренда $s(t_i)$; \mathbf{n} – вектор значений шумовой составляющей $n(t_i)$.

Ставится задача найти $\hat{\mathbf{s}}$ – оценку вектора \mathbf{s} по вектору \mathbf{y} , которая будет иметь наименьшую ошибку приближения в метрике ℓ_2 . Моменты времени t_i образуют, вектор меток времени \mathbf{t} .

Полиномиальная аппроксимация

Один из способов решения задачи оценки $\hat{\mathbf{s}}$ – это использование полинома наилучшего приближения в метрике ℓ_2 .

Полином наилучшего приближения записывается как:

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \sum_{j=0}^d a_j \cdot t^j, \quad (3.16)$$

где $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_d\} = \underset{a_0, a_1, \dots, a_d}{\operatorname{argmin}} \sqrt{\sum_i \left| y(t_i) - \sum_{j=0}^d a_j \cdot t^j \right|^2}$ – коэффициенты полинома,

d – максимальная степень полинома.

В векторной форме задача нахождения коэффициентов \mathbf{a} записывается следующим образом:

$$\mathbf{a} = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}\|_2), \quad (3.17)$$

где \mathbf{V} – матрица Вандермонда (по вектору меток времени \mathbf{t}).

Задача (3.17) решается методом наименьших квадратов (МНК) [41].

Тогда значения полинома наилучшего приближения могут быть вычислены следующим образом:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.18)$$

У данного способа построения полинома наилучшего приближения имеется ряд ограничений, связанных с вычислительными проблемами при достаточно высокой степени полинома [44].

Второй способ нахождения полинома наилучшего приближения описан в разделе 1.2.1 – использование разложения по ортонормированному полиномиальному базису:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{M}_P^T \cdot \mathbf{y}, \quad (3.19)$$

где \mathbf{M}_P – это матрица, в столбцы которой записаны дискретные ортогональные нормированные полиномы Хана до степени d .

Формирование матрицы \mathbf{M}_P :

$$\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} ph_0(t_0) & \cdots & ph_d(t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ph_0(t_{N-1}) & \cdots & ph_d(t_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

где $ph(t_i)$ – ортонормированные дискретные полинома Хана.

Расчет дискретных ортогональных полиномов Хана будет выполняться по вектору меток времени \mathbf{t} , которые соответствуют значениям вектора \mathbf{y} . Методика построения полиномов подробно описана в разделе 1.2.1, где предложен способ построения ортонормированных полиномов, включая полиномы высоких (более 50) степеней. Тогда в столбцы матрицы \mathbf{M}_P будут записываться значения рассчитанных полиномов на одну степень меньше, чем порядковый номер столбца.

Сформированная таким образом матрица \mathbf{M}_P будет иметь размер $N \times (d+1)$, где N – длина вектора \mathbf{t} , d – степень полинома наилучшего приближения. Важно отметить, что для данных без пропусков (шаг меток времени в векторе \mathbf{t} равномерный) такой базис будет зависеть только от длины вектора \mathbf{t} , а не от его содержания, что значительно сокращает время расчетов.

В данной работе под *базисом* мы будем понимать *неполный набор ортонормированных дискретных функций*, выше был показан способ построения такого базиса на основе дискретных полиномов Хана. Основным параметром, который характеризует базис, будет его размер, для полиномиальных базисов его размер будет на единицу больше максимальной степени полинома, входящего в состав базиса. Размер базиса будет определяться исходя из необходимой в задаче ошибки аппроксимации.

Аппроксимация адаптивным ортонормированным базисом

С целью уменьшения размера ортонормированного базиса для вычисления наилучшего приближения $\hat{\mathbf{s}}$ для медленно меняющегося тренда \mathbf{s} с сохранением СКО ошибки аппроксимации на том же уровне в формуле (3.19) используется не полиномиальный, а адаптивный к измерениям базис. Во второй главе показано, что использование адаптивных функций для интерполяции и экстраполяции орбит навигационных спутников вместо полиномиальных позволяет сократить

необходимое число таких функций без снижения точности результатов. Пример таких функций α приведен на графиках (Рисунок 2.2). Необходимость сокращения числа функций, используемых в аппроксимации, будет показана позже.

Заменим в формуле (3.19) полиномиальный базис \mathbf{M}_P адаптивным \mathbf{M}_G :

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{M}_G^T \cdot \mathbf{y}, \quad (3.21)$$

где \mathbf{M}_G – это матрица, содержащая значения дискретных ортонормированных адаптивных функций.

Основной вопрос адаптивной аппроксимации – это способ построения ортонормированного базиса адаптивных к медленно меняющемуся тренду функций. В данной работе предлагается способ построения такого базиса на основе множества измерений, с применением сингулярного разложения SVD [58].

Алгоритм построения адаптивного базиса

Пролет навигационного спутника (НС) в зоне радиовидимости навигационного приемника (НП) является условно периодическим процессом. Исходя из этого сопоставляется множество периодов таких пролетов для одного и того же НС, таким образом сформировав прямоугольную матрицу измерений, где в каждом столбце будут записаны измерения на отдельный период. НС пролетает в зоне радиовидимости точки наблюдения не менее двух раз в сутки, а орбиты навигационных спутников ГЛОНАСС и GPS имеют свойство приближенно повторять свою трассу с периодом примерно одни сутки для GPS и периодом примерно восемь суток для ГЛОНАСС.

Измерения НП разбиваются на участки, когда НС находился в зоне радиовидимости станции – такие участки мы будем называть пролетами. После этого выбираются такие пролеты, которые соответствуют участкам повторения трассы НС над НП. Выбранные пролеты разбиваются на интервалы заданной длины N , в которых содержатся измерения с заданным шагом, без пропусков (выбираются участки, где отсутствуют пропуски). Затем формируется матрица \mathbf{G} , в столбцы которой записываются фазовые измерения некоторого приемника (например, для спутника R01) отрезками длительностью $w+1$ со сдвигом по времени на величину

Δ из некоторого достаточно длинного интервала наблюдений $[t_a, t_b]$, на котором отсутствовали скачки в фазовых измерениях:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} Y_{R01}(t_a) & \cdots & Y_{R01}(t_{a+\Delta}) & \cdots & Y_{R01}(t_{b-w}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{R01}(t_{a+w}) & \cdots & Y_{R01}(t_{a+w+\Delta}) & \cdots & Y_{R01}(t_b) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Для формирования базиса адаптивных функций в данной работе предлагается использовать стандартную процедуру сингулярного разложения SVD [58], реализованную в библиотеках языка программирования Julia к полученной матрице \mathbf{G} . Используя SVD, матрица \mathbf{G} раскладывается на матрицы \mathbf{U} , \mathbf{S} , \mathbf{V} :

$$\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V} = \text{SVD}(\mathbf{G}). \quad (3.23)$$

В матрицу \mathbf{M}_G переписываются первые d столбцов матрицы \mathbf{U} , далее d мы будем называть размером адаптивного базиса:

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{U}[1,1] & \cdots & \mathbf{U}[1,d] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{U}[w+1,1] & \cdots & \mathbf{U}[w+1,d] \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Количество столбцов d подбирается, исходя из требуемой точности приближения исходной матрицы измерений \mathbf{G} усеченными матрицами \mathbf{U} , \mathbf{S} , \mathbf{V} (стандартная процедура приближения матрицей малого ранга) [58]. Число d векторов адаптивного базиса при той же точности аппроксимации меньше, чем необходимое для той же точности число полиномов Хана-Чебышева.

Адаптивная аппроксимация для временного ряда с пропусками

Часто в измерениях НП могут присутствовать пропуски измерений, для таких случаев при построении адаптивного базиса из матрицы \mathbf{G} , которая была сформирована по измерениям без пропусков; удаляются строки, соответствующие пропускам измерений, и формируется новая матрица \mathbf{G}' . Адаптивный базис формируется по новой матрице измерений \mathbf{G}' также SVD разложением (3.23).

3.2.3 Построение линейного фильтра по ортонормированному базису

Рассмотрим способ построения такого линейного фильтра \mathbf{F} , чтобы компонент медленно меняющегося тренда \mathbf{s} занулялся с достаточной в зависимости от задачи точностью:

$$\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}\|_2 < \varepsilon \approx 0. \quad (3.25)$$

В разделе 3.2.2 рассматривается вопрос полиномиальной и адаптивной аппроксимации медленно меняющегося тренда на фоне шума, которые могут быть найдены по формулам (3.19) и (3.21). Таким образом, линейный фильтр, который выполняет операцию зануления медленно меняющегося тренда, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T. \quad (3.26)$$

Выбор ортонормированного базиса \mathbf{M} зависит от цели фильтрации, в данной работе будут рассматриваться полиномиальный ортонормированный базис \mathbf{M}_P и адаптивный ортонормированный базис \mathbf{M}_G . Фильтр строится как для данных с одинаковым шагом по времени, так и для данных с пропусками, для этого введем \mathbf{t} как вектор меток времени, соответствующих значениям отсчетов измерений, записанных в векторе измерений.

Линейный фильтр \mathbf{F} будет применяться к входным измерениям \mathbf{y} , поэтому помимо исключения компонента \mathbf{s} фильтр будет оказывать влияние на компоненты \mathbf{x} и \mathbf{n} . Наибольшее влияние такой фильтр будет оказывать на кусочно-постоянную функцию \mathbf{x} , что необходимо учитывать при его использовании. Пример прохождения кусочно-постоянной функции через линейный фильтр с размером базиса 10 показан на графике (Рисунок 3.1).

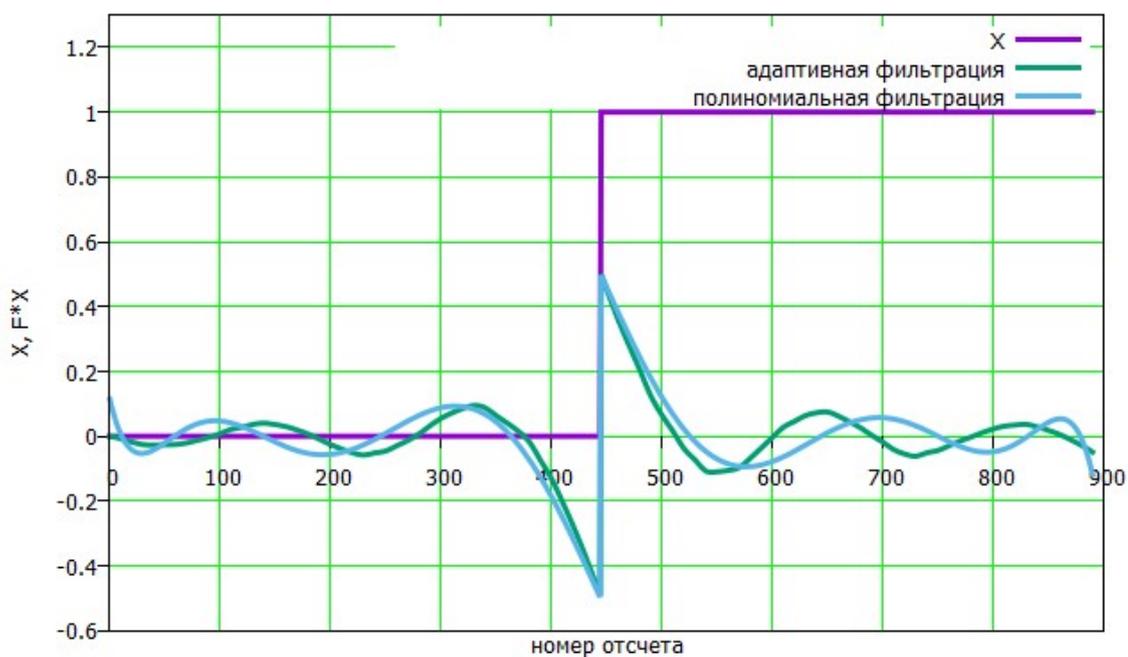


Рисунок 3.1 – Пример фильтрации кусочно-постоянной функции полиномиальным и адаптивным фильтром (размер базиса 10)

Как видно из графика (Рисунок 3.1), кусочно-постоянная функция сильно видоизменяется под действием полиномиального и адаптивного фильтра, несмотря на это при малых степенях фильтра величина разрыва уменьшается незначительно, с ростом степени полиномиального фильтра эта величина будет уменьшаться.

Для оценки влияния полиномиального фильтра на реализацию шума \mathbf{n} (для моделирования взят дискретный квази-белый шум с СКО, равным 1) рассмотрим разницу между исходной и фильтрованной реализацией, показанной на графике (Рисунок 3.2). График (Рисунок 3.2) отображает результат следующих математических операций (3.27):

$$\mathbf{z} = \mathbf{n} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.27)$$

где \mathbf{n} – реализация модельного дискретного квази-белого шума, \mathbf{F} – матрица полиномиального фильтра.

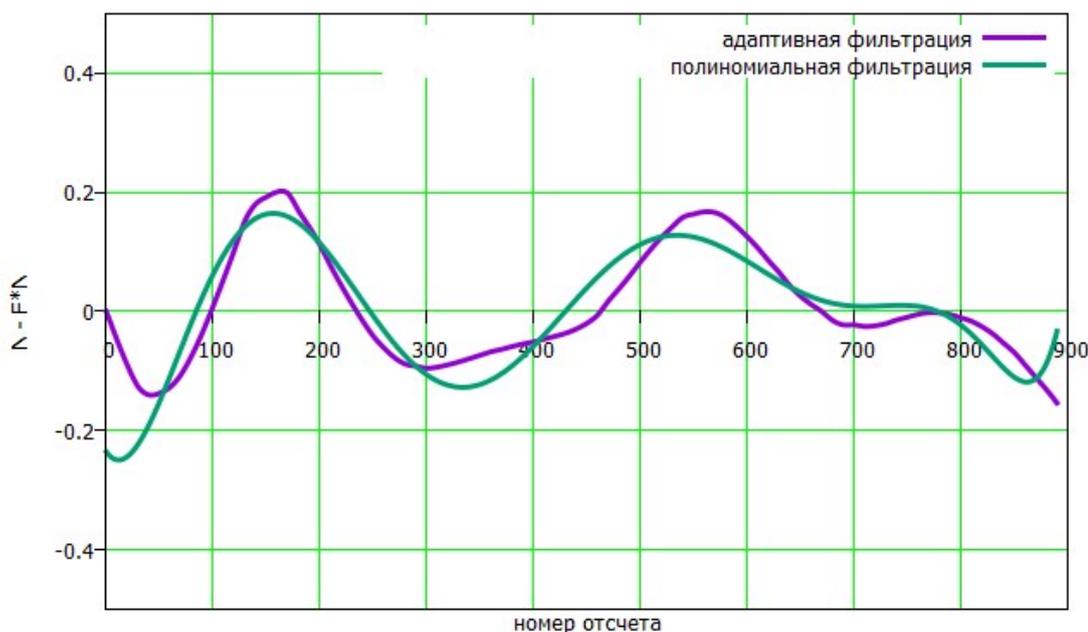


Рисунок 3.2 – Пример изменения реализации шума после фильтрации полиномиальным фильтром 10 степени

Как показано на графике (Рисунок 3.2), реализация шума после прохождения через линейный фильтр отличается от исходной реализации на некоторую медленно меняющуюся функцию: чем меньше размер базиса линейного фильтра, тем меньшее влияние фильтр оказывает на шум.

3.2.4 Оценка нормы реализации шума в метрике ℓ_2

В рассмотренном в разделе 3.2.1 алгоритме поиска разрывов в кусочно-постоянной функции встает задача оценить параметр r . Для решения данной задачи предлагается использовать рассмотренный в разделе 3.2.3 линейный фильтр для уменьшения влияния скачка на оценку нормы шума.

Рассмотрим выражение:

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (3.28)$$

где \mathbf{s} – вектор медленно меняющегося тренда; \mathbf{x} – вектор, содержащий значения кусочно-постоянной функции; \mathbf{n} – вектор значений аддитивного белого шума.

Измерения, прошедшие через линейный фильтр, могут быть записаны как:

$$\mathbf{y}_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \approx \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.29)$$

где \mathbf{F} – матрица линейного фильтра медленно меняющегося тренда \mathbf{s} .

Истинное значение нормы реализации шума записывается как:

$$r = \sqrt{\sum_i \mathbf{n}_i^2}. \quad (3.30)$$

А его оценка с использованием линейного фильтра будет записана как:

$$\hat{r} = \sqrt{\sum_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_i)^2}. \quad (3.31)$$

Эксперименты, на основании которых делался выбор порядка фильтра и в которых показана зависимость оценки нормы реализации шума в метрике ℓ_2 , показаны в разделе 3.4.3.

3.3 Алгоритмы поиска скачков в фазовых измерениях

В данной работе рассматривается две ситуации, в которых выполняется поиск скачков в фазовых измерениях.

В первом случае предполагается, что СКО шумовой составляющей фазовых измерений имеет значения существенно меньше, чем величина предполагаемых скачков, поэтому для их оценки применяется способ, который был предложен для обнаружения аномалий в орбитах НС, описанный в разделе 1.2.2. Идея заключается в линейной фильтрации медленно меняющегося тренда с последующим определением положений скачков и повторной оценкой величин скачков с использованием МНК, подробнее данный способ описан в разделе 3.3.1.

Во втором случае предполагается, что СКО шумовой составляющей фазовых измерений имеет значения, сравнимые с величиной скачка в фазовых измерениях, в этом случае был проведен анализ алгоритмов поиска разрывов кусочно-постоянной функции в аддитивной смеси с медленно меняющегося тренда и шума. Проблемой в данном случае является выполнение совместной оценки медленно меняющегося тренда и кусочно-постоянной функции.

Исторически, алгоритмы решения задачи с числом уравнений меньшим, чем число формальных неизвестных, при условии, что среди неизвестных лишь небольшое число ненулевых (однако мы предполагаем, что нам неизвестно, какие из них ненулевые!), известны уже давно. Очевидные подходы, основанные на пере-

боре всех возможных поднаборов неизвестных, которые могут оказаться ненулевыми, и решении соответствующих редуцированных подсистем, могут быть применены лишь при очень небольшом числе неизвестных в силу очевидного "комбинаторного взрыва" числа возможных вариантов перебора. Однако и подобный подход иногда применялся (см. [25]).

Уже в 90-х годах прошлого века были предложены алгоритмы, основанные не на переборе вариантов, а на сведении задачи к некоторой вспомогательной задаче минимизации нелинейных функционалов с ограничениями. Широко известным примером такого алгоритма служит алгоритм LASSO (least absolute shrinkage and selection operator), предложенный в [64] (см. также современное изложение в монографии [65]) и развивавший намного более ранние работы. Однако, несмотря на эффективность алгоритма LASSO, успешно применявшегося в практике, теоретическое обоснование корректности его работы было явно недостаточным.

Новый этап был открыт в начале 2000-х с появлением работ [66–68], авторами которых были известный специалист в численных методах обработки сигналов David Donoho и математик-лауреат Филдсовской премии Terence Tao и их ученики. Рассмотрим вначале простейший вариант задачи – линейную неоднородную систему алгебраических уравнений с числом уравнений, большим числа неизвестных (недоопределенная система). Предположим, что мы должны найти точное разреженное решение (т.е. решение с небольшим числом ненулевых переменных = sparse solution), и правая часть системы не включает никаких ошибочных или зашумленных измерений. В [66–67] авторам удалось доказать, что при достаточно общих и применимых на практике ограничениях на матрицу недоопределенной системы можно гарантировать, что находимые алгоритмом LASSO и его вариантами поднабор ненулевых переменных единственный и в точности тот, который и служит решением задачи при задании априорной оценки на число ненулевых неизвестных. Для практически важных случаев зашумленных измерений (когда нам надо найти приближенное решение с сохранением требования разреженности неизвестных) также удается доказать при практически

применимых ограничениях на матрицу и уровень шума измерений, что найденное алгоритмами семейства LASSO решение мало отличается от истинного.

Следует отметить, что точно будет найден лишь поднабор ненулевых переменных. Их значения при зашумлении измерений будут, вообще говоря, несколько меньше "оптимальных" значений, минимизирующих невязку между правой и левой частью недоопределенной системы (эффект *shrinkage*, отраженный в названии метода LASSO = least absolute shrinkage and selection operator). Однако, поскольку задача отбора ненулевых переменных (*selection* в сокращении LASSO) решается точно, можно далее воспользоваться любыми известными методами для уточнения значений переменных (например, метод наименьших квадратов).

После работ Donoho, Тао и многих других исследователей прогресс в данной области развивался поистине стремительными темпами. Сама теоретическая область получила название *compressive sensing* или *compressed sensing* (наряду с более давним именем *sparse recovery*). Практические применения очень обширны, и привести исчерпывающий список просто невозможно. Достаточно сослаться на монографии и работы, применяющие эти методы в областях, близких к обработке сигналов [69–72], "сверхразрешению" [73] и многочисленные обзорные монографии и труды конференций (см, например, [74–77]).

Особо следует отметить успехи, достигнутые с помощью технологий *sparse recovery* в магнитно-резонансной томографии (*Magnetic resonance imaging* = MRI), что позволило в несколько раз сократить время, проводимое пациентами в аппарате МРТ, и улучшить качество получаемого изображения [74].

Успехи в теоретических разработках и их приложениях были отмечены престижными премиями их авторам. В частности, Donoho был отмечен премиями *Shaw Prize* (2013) и *Gauss Prize* (2018).

Кроме уже классического метода LASSO, имеются его многочисленные варианты, в частности, основанные на минимизации полной вариации (*total variation*) искомого вектора, что подробнее описано в подразделе 3.2.1.

Именно этот вариант метода мы и будем использовать далее. Практические реализации данного метода были известны уже давно и под именем "Fused Lasso" описаны в монографии [25]. Общая идея подобных алгоритмов может быть упрощенно описана как нахождение неизвестного разреженного (sparse) вектора (например, положения разрывов) с помощью решения некоторой задачи оптимизации с нелинейной целевой функцией и нелинейными дополнительными ограничениями (подробные формальные постановки соответствующих задач приведены ниже в подразделах 3.3.2 и 3.3.3).

Особенно хорошо разработаны приложения этого метода к обработке изображений (нахождение границ объектов, локализация резких переходов и т.п.) [61, 78–80]. Алгоритмы нахождения разрывов зашумленных одномерных временных рядов методом минимизации полной вариации также хорошо разработаны (см., например, недавние работы [81–82]) и позволяют распознавать разрывы в очень сильно зашумленных сигналах [83].

Однако, как правило, в публикациях на эту тему рассматривалась задача выделения кусочно-постоянной функции из ее смеси с большим шумом. В нашем случае ситуация существенно сложнее из-за присутствия гладкого, но очень большого по величине тренда. В имеющейся литературе этот случай редко рассматривается, и наиболее подходящей к нашей задаче является работа [63].

Следует подчеркнуть, что sparse recovery и compressive sensing уже применялись в задачах обработки сигналов ГНСС [25, 84–88]. Однако, как легко заметить, в работах [25, 84], где и рассматривалась задача нахождения скачков в фазовых измерениях, методика применения compressive sensing была выбрана неудачно (решение небольших систем недоопределенных линейных уравнений, взятых на основе одномоментных измерений) и фактически не позволяет использовать все преимущества compressive sensing: лишь решение достаточно больших систем обеспечивает помехоустойчивость найденного разреженного решения. В дальнейшем мы покажем, как использовать методику compressive sensing в решении задачи нахождения скачков в фазовых измерениях на основе составления больших систем уравнений, исходя из измерений на большом временном интер-

вале наблюдений, что и гарантирует возможность определения положений и величин разрывов с большой точностью при большом шуме измерений.

Из работы [63] были рассмотрены два алгоритма: CPATV (Constrained Polynomial Approximation – Total Variation) и CPATV-LP (Constrained Polynomial Approximation – Total Variation – в метрике ℓ_p). После их анализа были разработаны модификации способа получения фильтрующей матрицы F , улучшающие работу алгоритмов при использовании их для решения нашей задачи. Вместо использования матрицы Вандермонда (результаты которого не всегда корректны в виду плохой обусловленности матрицы для полиномов больших степеней) выполняется вычисление дискретных ортогональных полиномов Хана. Такие алгоритмы мы будем называть CPNATV (Constrained Polynomial Hahn Approximation – Total Variation) и CPNATV-LP (Constrained Polynomial Hahn Approximation – Total Variation – в метрике ℓ_p). Следующим улучшением была замена ортонормированных дискретных полиномов Хана на ортонормированные дискретные адаптивные функции. Такие алгоритмы будут называться CFATV (Constrained Free Approximation – Total Variation) и CFATV-LP (Constrained Free Approximation – Total Variation – в метрике ℓ_p). Постановка задачи для алгоритмов CPNATV, CFATV, CPNATV-LP и CFATV-LP описана в подразделах 3.3.2 и 3.3.3.

3.3.1 Алгоритмы поиска разрывов кусочно-постоянной функции на основе линейной фильтрации

Поиск максимума разности по времени

Основной проблемой поиска разрывов кусочно-постоянной функции $x(t_i)$ в аддитивной смеси с медленно меняющимся трендом $s(t_i)$ и шумовой составляющей $n(t_i)$ в случае малого шума является медленно меняющийся тренд. Причина, по которой мы называем этот тренд медленно меняющимся, заключается в том, что степень полинома, достаточная для его описания, невысокая, однако значения изменения за шаг измерений много больше величины разрыва величиной в один цикл (1 длина волны). Как было показано ранее, исключение такого тренда вы-

полняется с использованием линейного фильтра, описанного в разделе 3.2.3, тогда алгоритм оценки кусочно-постоянной функции $x(t_i)$ формулируется следующим образом.

Пусть \mathbf{y} – вектор фазовых измерений, который состоит из трех компонент, как описано в формуле (3.4), тогда для нахождения $\hat{\mathbf{x}}$ оценки кусочно-постоянной функции \mathbf{x} выполняется следующие действия с \mathbf{y} :

1. Вычисляется результат фильтрации:

$$\mathbf{y}_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{y}. \quad (3.32)$$

2. Выполняется процедура вычисления разностей по времени вектора \mathbf{y}_F :

$$d\mathbf{y}_F = \mathbf{D} \cdot \mathbf{y}_F. \quad (3.33)$$

3. Выполняется поиск положений значений вектора $d\mathbf{y}_F$, которые превышают заданный пороговый уровень (выбирается из соображений ожидаемой величины разрыва кусочно-постоянной функции).

Результаты применения данного алгоритма к реальным измерениям представлены в разделе 3.5.4.

Адаптированное к тренду скользящее окно с полиномиальным дополнением

Данный способ поиска скачков в фазовых измерениях заключается в оценке разрыва в скользящем окне. Для оценки величины разрыва в кусочно-постоянной функции формируется матрица, в которой два первых столбца содержат смоделированный ожидаемый разрыв, а последующие – полиномы для аппроксимации медленно меняющегося тренда:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ph_1(t_1) & \cdots & ph_d(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & ph_1(t_q) & \cdots & ph_d(t_q) \\ 0 & 1 & ph_1(t_{q+1}) & \cdots & ph_d(t_{q+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & ph_1(t_N) & \cdots & ph_d(t_N) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

где параметр q – половина длины скользящего окна, момент ожидаемого разрыва; $N = 2q$ – длина скользящего окна, d – максимальная степень аппроксимирующего полинома в окне, $ph_k(t_i)$ – значение дискретного полинома Хана, вычисленного по способу, описанному в работе [11] для k – степени и t_i – моментам времени, соответствующим измерениям, для которых строится полином.

После формирования матрицы C вычисляется псевдообратная матрица Мура – Пенроуза C^+ .

Далее к вектору измерений y применяется скользящее окно с матрицей C^+ , и в каждом окне вычисляется:

$$\hat{c}_j = C^+ \cdot y[j : j + 2i - 1], \quad (3.35)$$

где \hat{c}_j – вектор коэффициентов аппроксимации; $y[j : j + 2i - 1]$ – скользящее окно; j – положение начального отсчета в скользящем окне.

Затем выполняется вычисление оценки величины разрыва в середине данного скользящего окна и запись его в вектор оценок величины разрыва \hat{d} :

$$\hat{d}_{j+i} = \hat{c}_j[2] - \hat{c}_j[1]. \quad (3.36)$$

После прохождения скользящего окна по всему вектору измерений y и формирования вектора оценки разрывов \hat{d} выполняется поиск положения и величины пиков в векторе \hat{d} .

Вместо полиномиального дополнения $ph_k(t_i)$, могут быть использованы дискретные адаптивные функции, взятые из адаптивного базиса, который описан в разделе 3.2.2.

3.3.2 Алгоритмы CRHATV и CFATV

Входными данными для алгоритмов ATV (Approximation Total Variation), описанных в работе [63], выступает вектор измерений y , описанный в модели измерений в подразделе 3.2 в случае, когда составляющая медленно меняющегося тренда соотносится с разностью кодовых и фазовых измерений формулой (3.3). В

таком случае СКО шумовой составляющей измерений сопоставимо с величиной единичного скачка.

Для алгоритма SPATV в соответствии с работой [63] формулируется следующая постановка задачи для поиска оценки кусочно-постоянной функции $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} TV(\mathbf{x}) \\ \text{при условии } \|\mathbf{F} \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}})\|_2 \leq r \end{cases}, \quad (3.37)$$

где \mathbf{y} (входные данные) – вектор дискретных измерений; $\hat{\mathbf{x}}$ (результат работы алгоритма) – вектор значений оценки кусочно-постоянной функции; \mathbf{F} – матрица линейного полиномиального фильтра (принцип построения матрицы описан в разделе 3.2.3); r (входной параметр) – норма реализации шума в метрике ℓ_2 .

На выходе алгоритма формируется два вектора: $\hat{\mathbf{x}}$ – оценка кусочно-постоянной функции, и $\hat{\mathbf{s}}$ – оценка медленно меняющегося тренда.

Первой модификацией данного алгоритма будет изменение способа формирования полиномиального фильтра. В разделах 1.2.1 и 3.2.2 описывается причина, по которой использование матрицы Вандермонда (3.18) возможно только для полиномов малых степеней, поэтому вместо использования вычисления полинома наилучшего приближения с использованием матрицы Вандермонда (3.18) для его вычисления используется матрица ортонормированных полиномов Хана (3.19). Такой алгоритм мы будем называть SPHATV.

Новый разработанный алгоритм SFATV заключается в использовании вместо полиномиального фильтра для исключения медленно меняющегося тренда адаптивный, который использует в своей работе адаптивную матрицу (3.21).

Для решения задачи (3.37) используются алгоритмы SPHATV и SFATV, предложенные в работе [63]. Модифицированные алгоритмы реализованы на языке Julia. Данные алгоритмы использовались для апробации метода, в конечных расчетах использовались версии ℓ_p , которые описаны в разделе 3.3.3.

3.3.3 Алгоритмы с использованием ℓ_p -минимизации

В задаче (3.37) для минимизации полной вариации используется норма в метрике ℓ_1 . В данной модификации алгоритма предполагается использование нормы ℓ_p , где $0 \leq p \leq 1$. Вопросы реализации ℓ_p минимизации описаны в работе [63].

В работе [63] предлагается определить регуляризованную норму в метрике ℓ_p следующим образом:

$$TV(\mathbf{x}, p, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N-1} (|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| + \varepsilon)^p, \quad (3.38)$$

где ε – положительное число порядка 10^{-6} , необходимое для корректной работы алгоритмов ATV.

Тогда задача нахождения кусочно-постоянной функции \mathbf{x} формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} TV(\mathbf{x}, p, \varepsilon) \\ \text{при условии } \|\mathbf{F} \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}})\|_2 \leq r \end{cases}. \quad (3.39)$$

В зависимости от вида алгоритма используются различные способы построения матрицы линейного фильтра \mathbf{F} . Так, для алгоритма SPATV-LP используется фильтр на основе матрицы Вандермонда (3.18), для алгоритма SRNATV-LP – фильтр на основе матрицы ортогональных полиномов Хана (3.19), для алгоритма SFATV-LP – фильтр на основе матрицы малого ранга (3.21).

Для решения задачи (3.39) используются алгоритмы SPATV-LP и SFATV-LP, предложенные в работе [63]. Модифицированные алгоритмы реализованы на языке Julia. Результаты применения данных алгоритмов к модельным данным приводятся в разделе 3.4, к реальным данным – в разделе 3.5.

3.3.4 Повторная оценка величин разрывов кусочно-постоянной функции в смеси с медленно меняющимся трендом и шумом

Предполагается, что по вектору y , используя алгоритмы, описанные выше, провели поиск положений разрывов \mathbf{b} кусочно-постоянной функции $x(t_i)$. Предлагается способ повторной оценки величины разрыва с использованием защитного интервала 2Δ в окрестностях обнаруженных положений разрывов. Введение *защитного интервала* позволяет уменьшить влияние ошибки определения положения разрывов относительно истинного положения разрыва. Сформируем матрицу \mathbf{E} , состоящую из кусочно-постоянных интервалов и полиномиальных или адаптивных функций (в примере показана матрица с ортонормированными полиномами Хана (3.40)):

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & ph_1(t_1) & \cdots & ph_d(t_1) \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & ph_1(t_{\mathbf{b}_1-\Delta}) & \cdots & ph_d(t_{\mathbf{b}_1-\Delta}) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & ph_1(t_{\mathbf{b}_1+\Delta}) & \cdots & ph_d(t_{\mathbf{b}_1+\Delta}) \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & ph_1(t_{\mathbf{b}_2-\Delta}) & \cdots & ph_d(t_{\mathbf{b}_2-\Delta}) \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & ph_1(t_{\mathbf{b}_{M-1}+\Delta}) & \cdots & ph_d(t_{\mathbf{b}_{M-1}+\Delta}) \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & ph_1(t_{\mathbf{b}_M-\Delta}) & \cdots & ph_d(t_{\mathbf{b}_M-\Delta}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & ph_1(t_{\mathbf{b}_M+\Delta}) & \cdots & ph_d(t_{\mathbf{b}_M+\Delta}) \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & ph_1(t_N) & \cdots & ph_d(t_N) \end{array} \right], \quad (3.40)$$

где \mathbf{b} – вектор положений разрывов длиной M ; Δ – половина защитного интервала; $ph_k(t_i)$ – значение дискретного полинома Хана, вычисленного по способу, описанному в работе [11] для k – степени и t_i – моментам времени, соответствующим измерениям, для которых строится полином; d – максимальная степень полиномов, которая используется для построения матрицы.

Вместо полиномиального дополнения $ph_k(t_i)$ могут быть использованы дискретные адаптивные функции, взятые из адаптивного базиса, который описан в разделе 3.2.2.

Сформулируем задачу оценки величин интервалов кусочно-постоянной функции $x(t_i)$ и ортогонального разложения медленно меняющегося тренда в виде минимизации (3.41):

$$\hat{\mathbf{e}} = \underset{\mathbf{e}}{\operatorname{argmin}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}\|_2). \quad (3.41)$$

Задача (3.41) решается с использованием МНК [41].

Величины разрывов могут быть найдены путем умножения левых M -элементов вектора оценок $\hat{\mathbf{e}}$ на матрицу \mathbf{D} :

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}}[1 : M]. \quad (3.42)$$

Предложенный способ позволяет получить оценку величин разрывов кусочно-постоянной функции $x(t_i)$ с наименьшей ошибкой в метрике ℓ_2 .

3.4 Апробация алгоритмов на модельных данных

3.4.1 Оценка необходимого размера базиса для полиномиальной и адаптивной аппроксимации измерений НП

В модельных экспериментах по обнаружению скачков фазовых измерений необходимо провести оценку размера полиномиального и адаптивного базиса, которого достаточно для описания медленно меняющегося тренда в реальных измерениях приемника. Медленно меняющийся тренд имеет схожий характер для навигационных спутников одной и той же навигационной системы. Основной вклад в медленно меняющийся тренд вносит геометрическая дальность, поэтому для оценки необходимого размера базиса аппроксимировалась геометрическая дальность между НП и различными навигационными спутниками систем ГЛОНАСС и GPS. Оценки СКО ошибки аппроксимации показаны в Таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Оценка СКО ошибки аппроксимации геометрической дальности полиномиальными и адаптивными базисами

Длительность интервала, с	Размер базиса	Полиномиальный базис СКО, м		Адаптивный базис СКО, м	
		ГЛОНАСС	GPS	ГЛОНАСС	GPS
60	1	8471.908	7418.031	5299.019	4109.423
	2	13.387	9.211	7.058	5.013
	3	0.013	0.008	0.005	0.004
	4	1e-6	7e-6	3e-6	2e-6
300	1	46245.617	40404.542	19516.662	16366.227
	2	303.933	205.063	175.594	119.101
	3	1.722	1.179	0.647	0.556
	4	0.007	0.004	0.001	0.001
	5	3e-5	1e-6	9e-6	3e-6
	6	1e-6	9e-7	1e-6	9e-7
900	1	172974.428	142267.082	37130.214	28836.513
	2	1225.527	1135.115	1059.225	1039.700
	3	51.926	32.856	18.960	14.224
	4	0.328	0.248	0.126	0.099
	5	0.006	0.003	9e-4	5e-4
	6	8e-5	3e-5	1e-5	1e-5
	7	5e-6	5e-6	5e-6	5e-6
3600	1	679661.139	561986.502	149556.375	119117.851
	2	21212.377	18611.627	15442.587	15098.301
	3	3390.898	2135.330	1210.691	914.380
	4	80.191	63.954	28.324	24.421
	5	7.159	3.768	0.977	0.541
	6	0.346	0.153	0.054	0.036
	7	0.015	0.007	0.001	0.001
	8	0.001	3e-4	1e-4	5e-5
	9	8e-5	4e-5	4e-5	3e-5
10800	1	1316935.692	1242729.276	516894.121	538204.040
	2	436946.180	286088.233	176804.499	90416.434
	3	66987.291	50727.691	26732.481	25089.510
	4	13446.089	7055.715	1580.477	1704.245
	5	2300.151	1196.761	291.173	143.020
	6	315.051	141.601	60.601	32.629
	7	79.474	25.422	4.102	4.786
	8	12.300	4.222	0.647	0.292
	9	2.841	0.654	0.115	0.085
	10	0.664	0.136	0.007	0.008
	11	0.104	0.023	0.002	0.001
	12	0.033	0.004	3e-4	3e-4
	13	0.005	8e-4	1e-4	2e-4
	14	0.001	2e-4	1e-4	1e-4

Условием достаточности будем считать такой размер базиса, когда СКО ошибки аппроксимации геометрической дальности будет в пределах нескольких

сантиметров. Выбранные размеры базисов для аппроксимации на основании Таблицы 3.1 показаны в Таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Достаточный размер базиса для аппроксимации геометрической дальности

Длительность интервала, с	Число полиномов (степень плюс один)		Размер адаптивного базиса (число компонент)	
	ГЛОНАСС	GPS	ГЛОНАСС	GPS
60	3	3	3	3
300	4	4	4	4
900	5	5	5	5
1800	6	6	5	5
3600	7	7	6	6
7200	9	9	8	8
10800	12	11	10	10

Как видно из Таблицы 3.1 и Таблицы 3.2, при небольших интервалах (менее часа) для аппроксимации геометрической дальности до спутников GPS и ГЛОНАСС размер полиномиального и адаптивного базиса одинаковый, с ростом интервала размер адаптивного базиса начинает сокращаться по сравнению с размером полиномиального базиса. Из оценок СКО ошибки аппроксимации (Таблица 3.1) видно, что с увеличением интервала аппроксимации, при одинаковом размере базиса, адаптивная аппроксимация имеет СКО в несколько раз меньше, чем полиномиальная.

3.4.2 Описание моделей, используемых в экспериментах

В работе используется модель измерений, описанная в формуле (3.4). Далее будут рассмотрены способы моделирования ее составляющих.

Модель медленно меняющегося тренда

В качестве модели медленно меняющегося тренда будет использоваться два варианта.

Первый вариант – полиномы различных степеней в зависимости от длины интервала анализируемых фазовых измерений. Степени полиномов выбираются в соответствии с Таблицей 3.2. Для формирования полинома генерируются случайные равномерно распределенные на всем временном интервале корни полинома, после чего происходит его нормирование по ℓ_2 . Так как процедура линейна, то независимо от амплитуды полиномиальный тренд достаточно исключается полиномиальным фильтром – как нормированным, так и с большой амплитудой.

Второй вариант – это использование расчетной геометрической дальности в качестве медленно меняющегося тренда. В этом случае для генерации таких измерений необходимо задавать два параметра: координаты станции наблюдения и координаты спутника. В расчете геометрической дальности необходимо учитывать все эффекты, связанные с распространением сигнала (движение спутника за время распространения сигнала, поворот Земли за время распространения сигнала), поэтому для моделирования необходимо иметь трассу движения навигационного спутника. В качестве данных об орбите спутника будут использоваться высокоточные орбиты, рассчитанные аналитическими центрами и передаваемые в SP3-файлах. Расчет положения спутника будет выполняться методами интерполяции.

Модель кусочно-постоянной функции (скачки в фазовых измерениях)

В качестве модели скачка в фазовых измерениях мы будем использовать кусочно-постоянную функцию с величиной скачка в 1 цикл для измерений в циклах и длиной волны для измерений в метрах. Так, пример подобного скачка для интервала в 900 секунд, где разрыв находится в середине интервала и его величина равна 1 циклу, показан на графике (Рисунок 3.3).

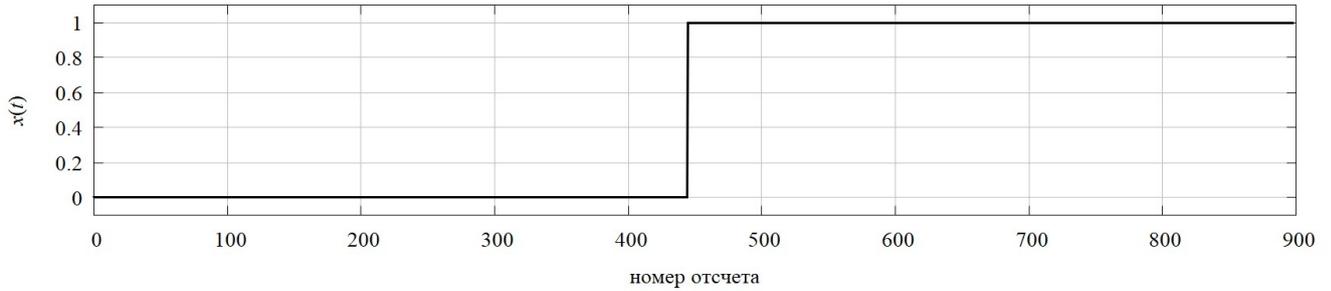


Рисунок 3.3 – Пример модели скачка в фазовых измерениях (разрыв кусочно-постоянной функции)

Модель шумовой составляющей

В качестве модельного шума предлагается использовать статистически независимые реализации шума с нормальным законом распределения, СКО, равным 1, и средним значением, равным 0. Пример такой реализации показан на графике (Рисунок 3.4).

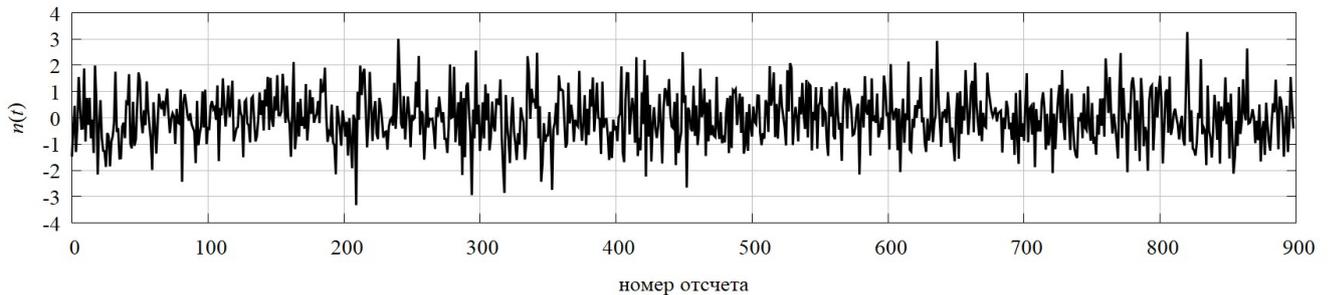


Рисунок 3.4 – Пример реализации шума (СКО равно 1, средние равны 0) длительностью 900 отсчетов

3.4.3 Эксперименты по оценке нормы в реализации шума

Для работы алгоритмов SRHATV-LP и SFATV-LP оценки скачка в фазовых измерениях требуется оценить норму реализации шума в метрике ℓ_2 в обрабатываемых измерениях. Для этого предлагается пропускать измерения через полиномиальный фильтр высокой степени, как описано в разделе 3.2.4. В данном разделе проводится оценка степени достоверности такого метода.

Критерием качества оценки параметра принимается коэффициент k :

$$k = \frac{\hat{r}}{r}, \quad (3.43)$$

где \hat{r} – это величина оценки параметра r , полученного после фильтрации, а r – это истинное значение величины, посчитанное по реализации шума. Чем ближе коэффициент k к 1, тем точнее оценка. Если же коэффициент k больше 1, то это говорит о том, что такой фильтр переоценивает шум, недостаточно убирает влияние полинома и скачка; если коэффициент k меньше единицы, значит, шум недооценен.

В качестве измерений будем использовать модель на основе геометрической дальности:

$$y(t_i) = \rho(t_i) + x(t_i) + n(t_i), \quad (3.44)$$

где $\rho(t_i)$ – моделируемая геометрическая дальность; $x(t_i)$ – модельная кусочно-постоянная функция с разрывом величиной в единицу в середине интервала; $n(t_i)$ – модельная шумовая составляющая.

Оценка нормы шума будет проводиться для различных значений СКО шума и различных степеней полиномиального фильтра. Размер окна оценивания – 900 секунд.

Рассмотрим две ситуации оценки нормы реализации шума: 1) ситуация, когда оценка происходит в смеси медленно меняющегося тренда, шума и кусочно-постоянной функции; 2) ситуация, когда оценка происходит в смеси медленно меняющегося тренда и шума без кусочно-постоянной функции. Результаты оценки нормы реализации шума фильтрами с различными размерами базиса показаны на графике (Рисунок 3.5), точками отмечены результаты оценки шума с кусочно-постоянной функцией, сплошными линиями – без кусочно-постоянной функции.

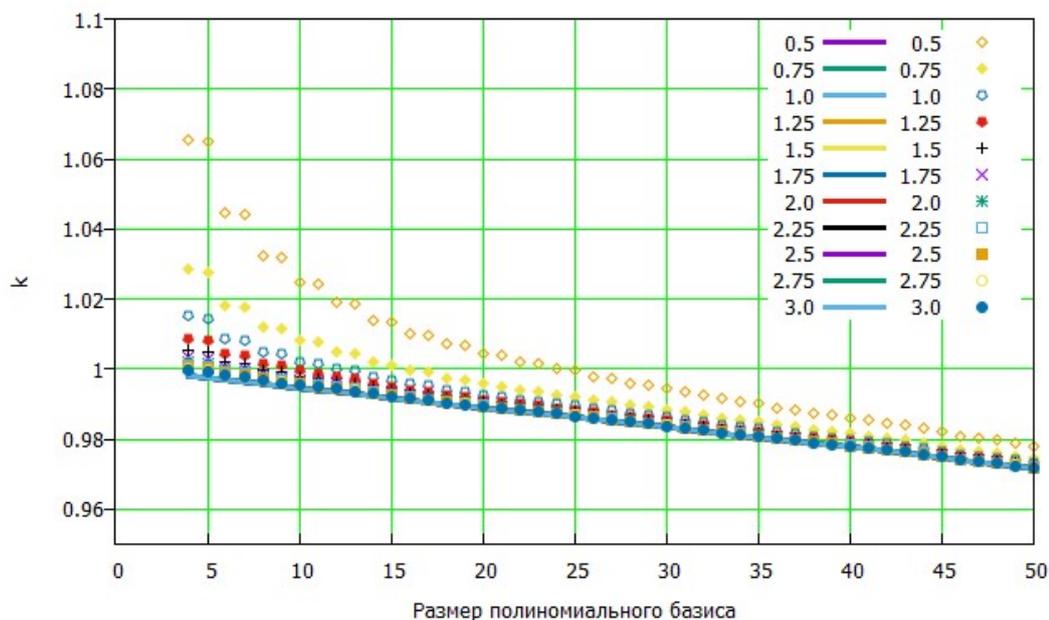


Рисунок 3.5 – Коэффициент оценки дисперсии шума с использованием полиномиального фильтра степеней от 3 до 50 при СКО шума от 0.5 до 3

На графике (Рисунок 3.5) показана величина коэффициента k (3.44), по которой видно отличие оценки нормы реализации шума от истинного значения. Линиями показаны коэффициенты оценки шума в ситуации отсутствия кусочно-постоянной функции, и как видно из графика (Рисунок 3.5), такая оценка зависит только от размера полиномиального базиса фильтра и не зависит от СКО шума. Точками показаны коэффициенты оценки шума в ситуации присутствия кусочно-постоянной функции, и как видно из графиков, эта оценка для малых степеней полиномиального находится в ситуации переоценки нормы реализации шума; при этом чем меньше СКО шума, тем выше такая переоценка. В случае повышения степени полинома наступает момент компенсации недооценки шума нормой остатка от фильтрации кусочно-постоянной функции полиномиальным фильтром; при дальнейшем повышении степени полиномиального фильтра оценка нормы реализации шума с присутствием кусочно-постоянной функции стремится к оценке нормы реализации шума в ситуации отсутствия кусочно-постоянной функции. Как показано на графике (Рисунок 3.5), оценка нормы реализации шума в ситуации присутствия кусочно-постоянной функции сильно зависит от значения СКО шума, и чем меньше СКО, тем сложнее оценить его уровень.

В разделе 3.2.3 описывалось, что полиномиальный фильтр исключает медленно меняющийся тренд, но также и вносит изменения в кусочно-постоянную функцию (Рисунок 3.1) и шум (Рисунок 3.2). При достижении определенной степени полиномиального фильтра зависимость от степени полинома становится линейной и отличие составляет не более 1 % для ситуации присутствия или отсутствия кусочно-постоянной функции в оцениваемых измерениях.

Рассмотрим результаты оценки с использованием вместо полиномиального фильтра адаптивного (Рисунок 3.6): точками показаны результаты оценки шума с кусочно-постоянной функцией, сплошными линиями – без кусочно-постоянной функции.

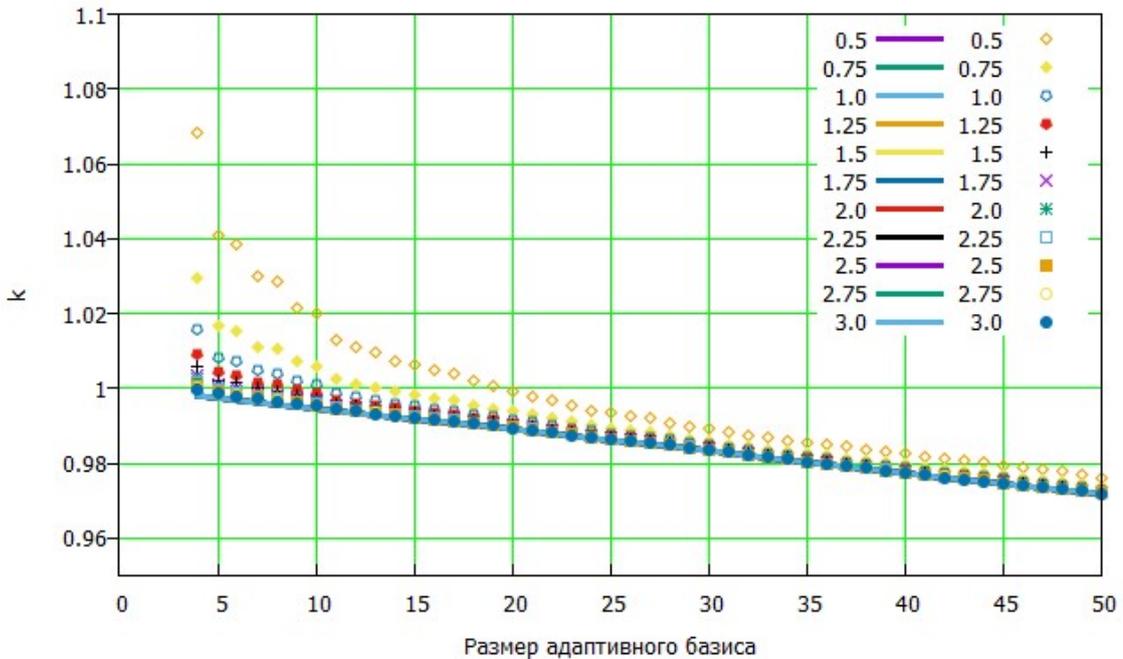


Рисунок 3.6 – Коэффициент оценки нормы шума с использованием адаптивного фильтра с размером базиса от 3 до 50 при СКО шума от 0.5 до 3

Как видно из графиков (Рисунок 3.5) и (Рисунок 3.6), использование адаптивного фильтра позволяет уменьшить размер базиса линейного фильтра, а также уменьшает разницу между оценкой в ситуации присутствия и отсутствия разрывов кусочно-постоянной функции.

В рассматриваемых нами задачах восстановления кусочно-постоянной функции оценка нормы реализации шума выполняется, когда СКО шума примерно равно или больше предполагаемой величине разрыва, что, согласно графику

(Рисунок 3.5), при использовании предложенной методики выполняется с ошибкой в пределах 1 %.

3.4.4 Модельные эксперименты по повторной оценке величины разрыва кусочно-постоянной функции

Рассмотрим ситуацию, когда положение разрыва кусочно-постоянной функции нам известно и необходимо оценить только его величину. В разделе 3.3.4 предлагается способ повторной оценки величины разрыва при определенных положениях разрывов. Рассчитаем СКО ошибки, при такой переоценке величины разрыва изменяя положение разрыва.

Рассмотрим две ситуации оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции: первая оценка выполняется в смеси кусочно-постоянной функции и шума (без медленно меняющегося тренда); вторая оценка выполняется в смеси кусочно-постоянной функции, медленно меняющегося тренда (в виде геометрической дальности) и шума.

Первая ситуация (без медленно меняющегося тренда)

Для интервала в 900 секунд было сформировано 100000 реализаций шума с нормальным законом распределения, нулевым математическим ожиданием и СКО шума, равным единице. После этого данный интервал разбивался на два интервала в положении i , которое перемещалось от начала интервала до его конца. На каждом из двух интервалов вычислялось среднее значение, после чего находилась разность этих значений для каждой реализации; затем для каждого положения i вычислялось СКО ошибки оценки величины разрыва. Величина СКО ошибки оценки в зависимости от положения i показана на графике (Рисунок 3.7).

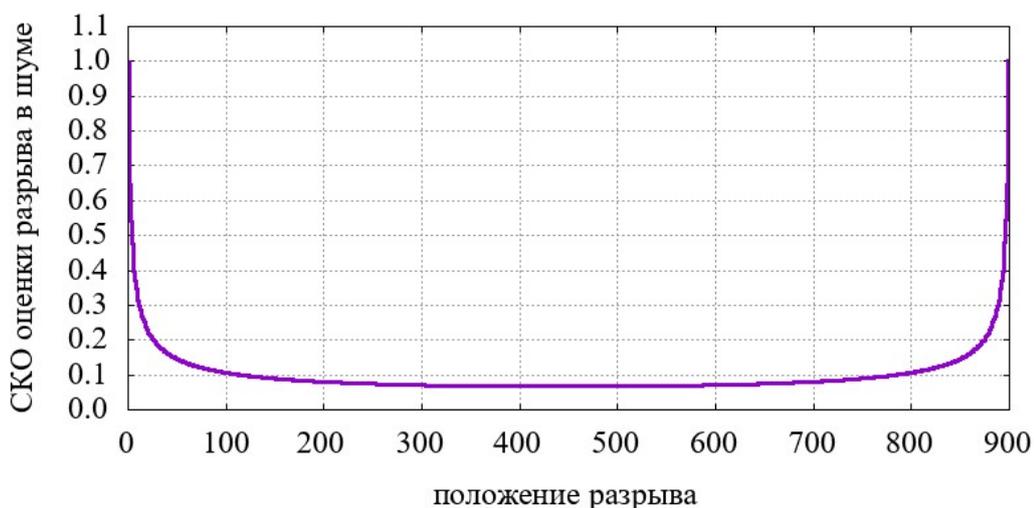


Рисунок 3.7 – СКО ошибки оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции в зависимости от положения разрыва на интервале 900 секунд, смесь кусочно-постоянной функции и шума

Как показано на графике (Рисунок 3.7), СКО ошибки оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции на интервале от 100 до 800 секунд на 900 секундном интервале не превышает 0.1 от величины СКО шума исходных данных, что говорит о серьезной ошибке оценки величины разрыва на концах интервала оценки.

Вторая ситуация (с медленно меняющимся трендом)

Рассмотрим СКО ошибки оценки величины разрыва в смеси из тренда, кусочно-постоянной функции и шума на 100000 реализаций (СКО = 1, математическое ожидание = 0). На графике (Рисунок 3.8) показано СКО ошибки оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции при известном положении разрыва в аддитивной смеси с трендом в виде геометрической дальности и белым шумом. Для оценки использовался метод, описанный в разделе 3.3.4; для повторной оценки величины разрыва размер используемого полиномиального базиса – 3 (максимальная степень полинома 2), адаптивного базиса – 2.

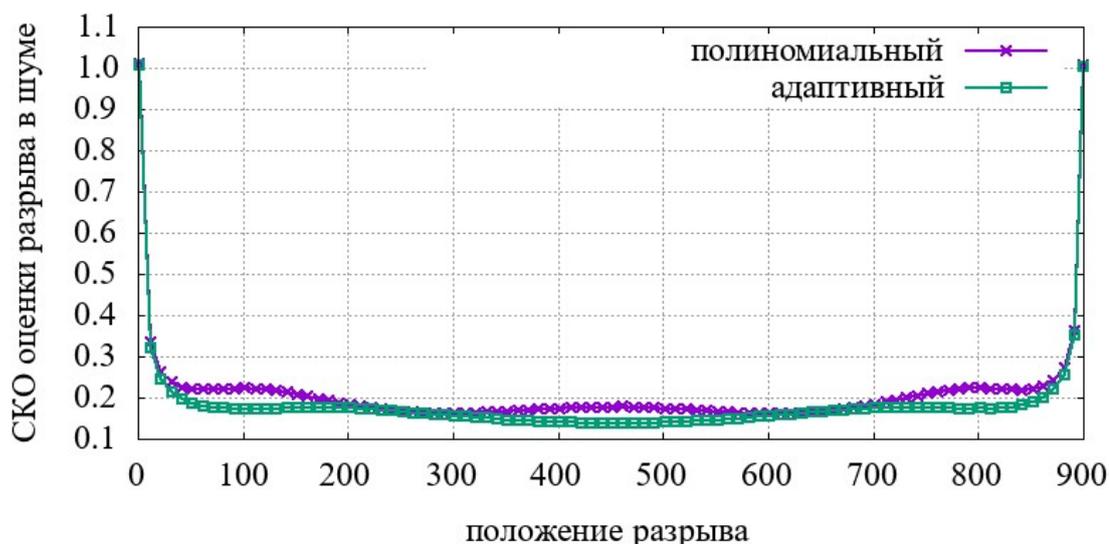


Рисунок 3.8 – СКО ошибки оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции в зависимости от положения разрыва на интервале 900 секунд, смесь кусочно-постоянной функции, тренда и шума; степень полиномиального базиса 2, размер адаптивного базиса 2

Как видно из графика (Рисунок 3.8), СКО ошибки оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции при положении разрыва в диапазоне от 50 до 850 секунд на 900 секундном интервале находится в районе 0.2 от величины СКО шума исходных данных. На графике (Рисунок 3.8) показаны результаты с использованием как полиномиального базиса размером 3 (максимальная степень полинома 2), так и адаптивного размером 2. Различие между СКО ошибки оценки разрыва для полиномиального и адаптивного базиса (Рисунок 3.8) показано на графике (Рисунок 3.9).

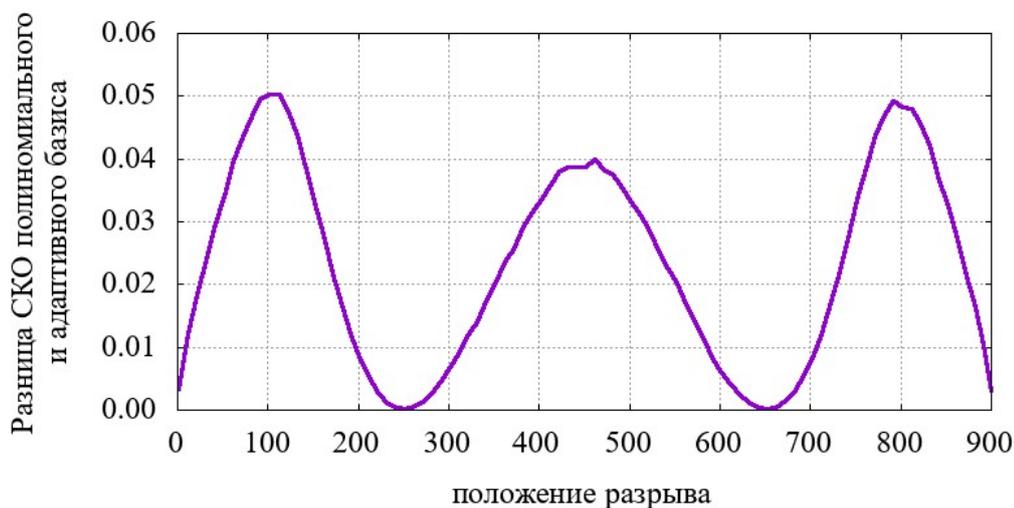


Рисунок 3.9 – Разница СКО ошибки полиномиального и адаптивного базиса при оценке величины разрыва кусочно-постоянной функции

Как видно из графика (Рисунок 3.9), СКО ошибки оценки адаптивного базиса меньше СКО ошибки адаптивного базиса, при этом размер адаптивного базиса на 1 меньше (размер матрицы \mathbf{E} одинаковый).

Рассмотрим СКО ошибки оценки величины разрыва при повышении степени полиномиального базиса и размера адаптивного базиса на графике (Рисунок 3.10).

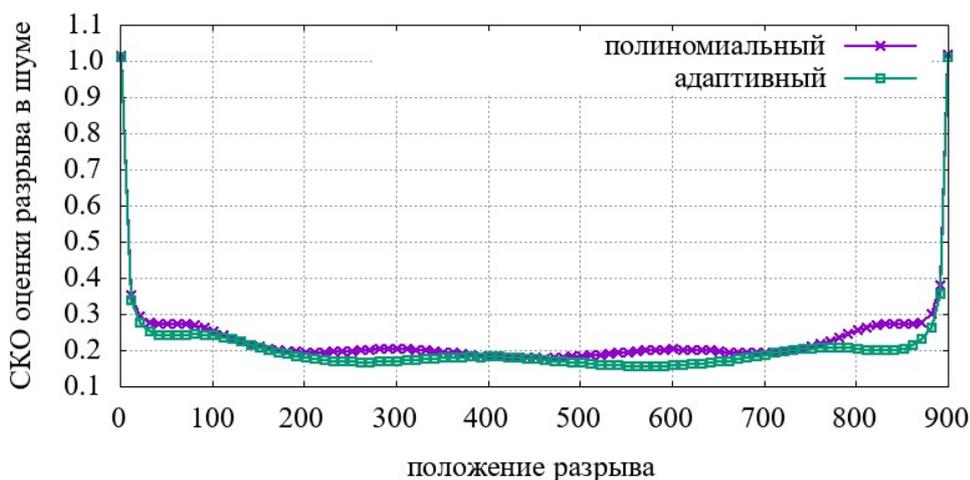


Рисунок 3.10 – СКО ошибки оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции в зависимости от положения разрыва на интервале 900 секунд, смесь кусочно-постоянной функции, тренда и шума; степень полиномиального базиса 3, размер адаптивного базиса 3

Различие между СКО ошибки оценки разрыва для полиномиального и адаптивного базиса (Рисунок 3.10) показано на графике (Рисунок 3.11).

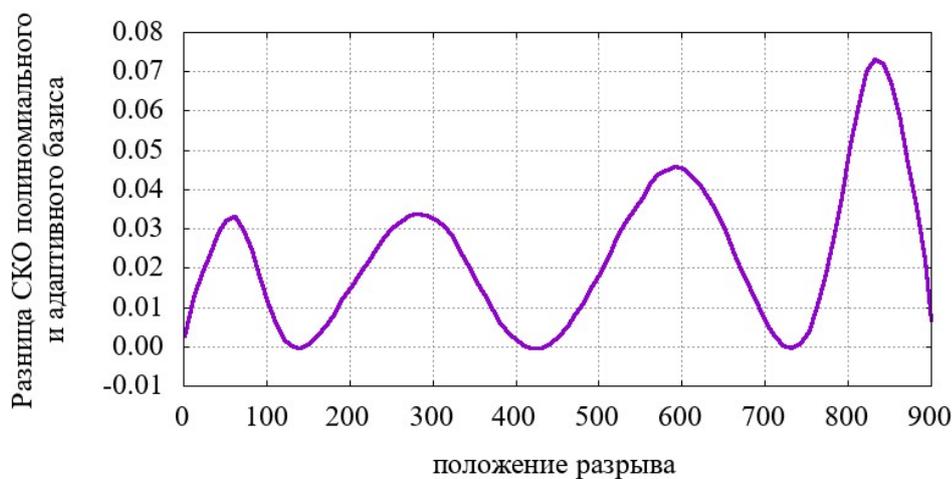


Рисунок 3.11 – Разница СКО ошибки полиномиального и адаптивного базиса при оценке величины разрыва кусочно-постоянной функции

По графикам (Рисунок 3.8 и Рисунок 3.10) делаются выводы о том, что увеличение размера используемого базиса увеличивает СКО ошибки оценки разрыва кусочно-постоянной функции в аддитивной смеси с трендом и шумом, что отражено на следующем графике (Рисунок 3.12).

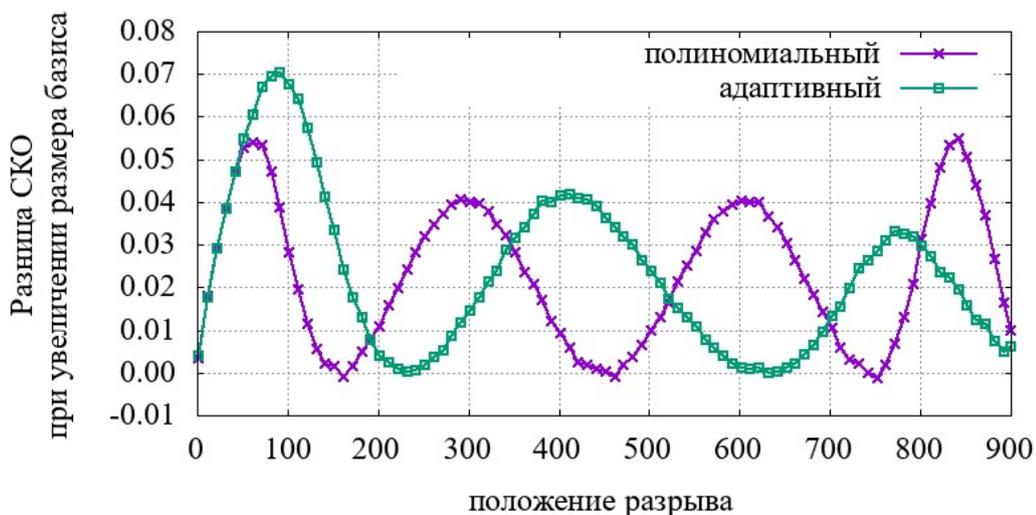


Рисунок 3.12 – Разница СКО ошибки полиномиального и адаптивного базиса при увеличении размера (степени) используемого базиса

В рассмотренных ситуациях оценки величины разрыва кусочно-постоянной функции в зависимости от положения видно, что в случае отсутствия медленно меняющегося тренда наблюдается наименьшее СКО ошибки оценки по сравнению с ситуацией присутствия медленно меняющегося тренда. Важно отметить, что увеличение размера базиса в матрице переоценки величины разрыва \mathbf{E} приводит к увеличению СКО ошибки оценки величины разрыва, что показано на графике (Рисунок 3.12). Кроме того, важно отметить, что использование адаптивного базиса для построения матрицы переоценки величин разрывов \mathbf{E} позволяет уменьшить СКО ошибки оценки величины разрыва до 20 %.

3.4.5 Модельный эксперимент по обнаружению разрыва в кусочно-постоянной функции с пропусками в данных

Рассмотрим постоянную функцию, у которой между двумя интервалами присутствует пропуск данных. Для данных длительностью 10000 секунд смоделируем ситуацию отсутствия измерений с середины интервала на заданный интервал в диапазоне от 0 до 2000 секунд, так что данные разделятся на две части,

ко второй части добавляется модельный разрыв величиной 1. После этого будет выполняться оценка величины разрыва с использованием описанного в подразделе 3.3.1 алгоритма с линейным полиномиальным фильтром с различным размером базиса (от 10 до 30 с шагом 5). Результаты оценки показаны на семействе графиков (Рисунок 3.13).

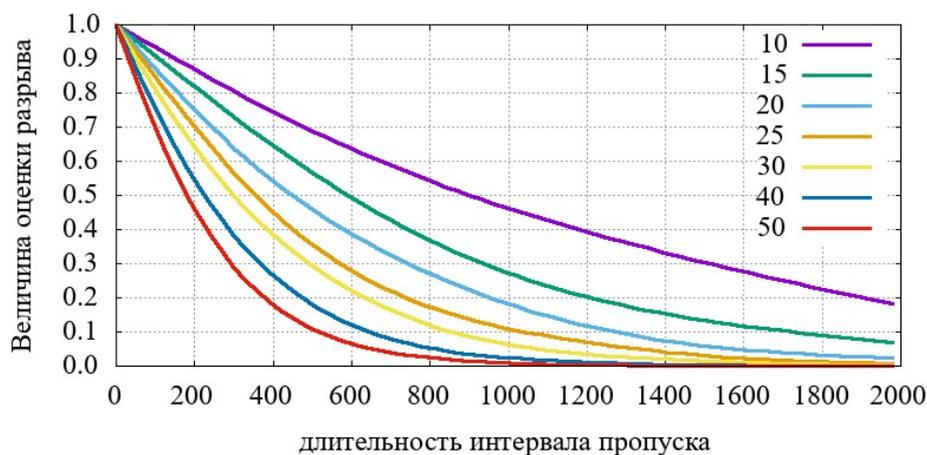


Рисунок 3.13 – Зависимость величины оценки единичного разрыва от размера полиномиального базиса и длительности интервала пропуска измерений

По графикам (Рисунок 3.13) видно, что чем выше степень полинома, тем быстрее уменьшается оценка величины разрыва в зависимости от длительности интервала пропуска в данных. В экспериментах на реальных данных этот эффект будет показан в подразделе 3.5.4.

3.4.6 Модельные эксперименты применения алгоритма SPATV-LP

В данной серии экспериментов проводилась оценка влияния степени полиномиального тренда на вероятность обнаружения места и величины разрыва в аддитивной смеси полиномиального тренда, кусочно-линейной функции и белого шума. Модельные данные используются согласно описанию, приведенному в разделе 3.4.2. Степень полиномиального тренда будет меняться от 0 до 5, что, согласно Таблицы 3.2, соответствует оптимальной степени для полинома наилучшего приближения на мерном интервале 15 минут. Для обнаружения будет использоваться алгоритм SPATV-LP с параметром $p = 0,5$. Оценка шума будет выполняться отдельно (до эксперимента обнаружения) по выборке моделируемой

шумовой составляющей $n(t_i)$. На вход алгоритма SPATV-LP подается вектор моделируемых измерений \mathbf{y} , который формируется как сумма трех векторов:

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (3.45)$$

где $\mathbf{s}_i = s(t_i)$ – вектор с данными модели полиномиального тренда; $\mathbf{x}_i = x(t_i)$ – вектор с данными модели кусочно-постоянной функции; $\mathbf{n}_i = n(t_i)$ – вектор со случайными значениями белого шума.

В результате работы алгоритма формируются векторы оценки этих компонентов в векторе \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.46)$$

где $\hat{\mathbf{s}}$ – вектор оценки полиномиального тренда \mathbf{s} ; $\hat{\mathbf{x}}$ – вектор оценки кусочно-постоянной функции \mathbf{x} ; $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{y} - (\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}})$ – вектор оценки шумовой составляющей.

В данных экспериментах было использовано 100 независимых реализаций шума.

Пример входного сигнала для алгоритмов SPATV-LP показан на графиках (Рисунок 3.14).

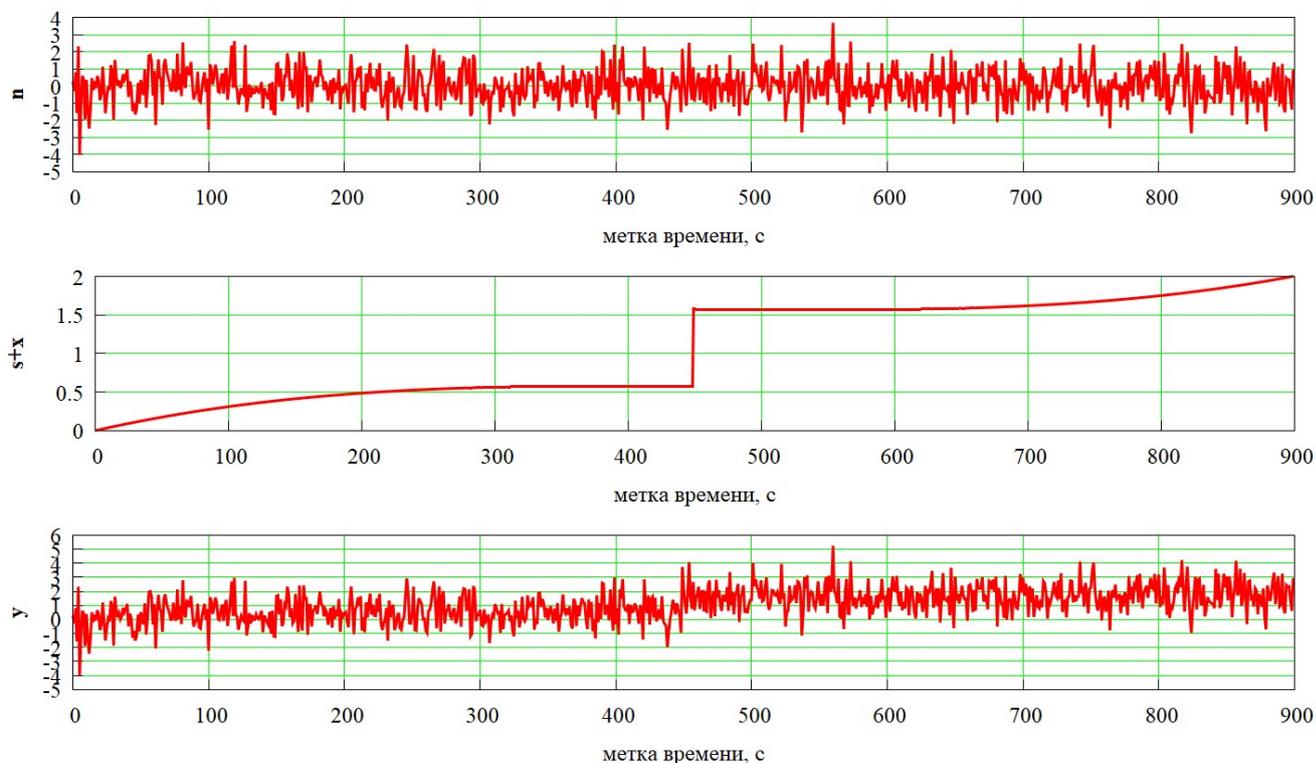


Рисунок 3.14 – Исходные данные (первый график – реализация шума (СКО = 1), второй график – аддитивная смесь разрыв в данных величиной 1 с полиномиальным трендом степени 3, третий график – аддитивная смесь всех трех компонентов)

Результаты оценки компонентов \hat{s} , \hat{x} , \hat{n} с использованием алгоритма SPATV-LP показаны на графиках (Рисунок 3.15).

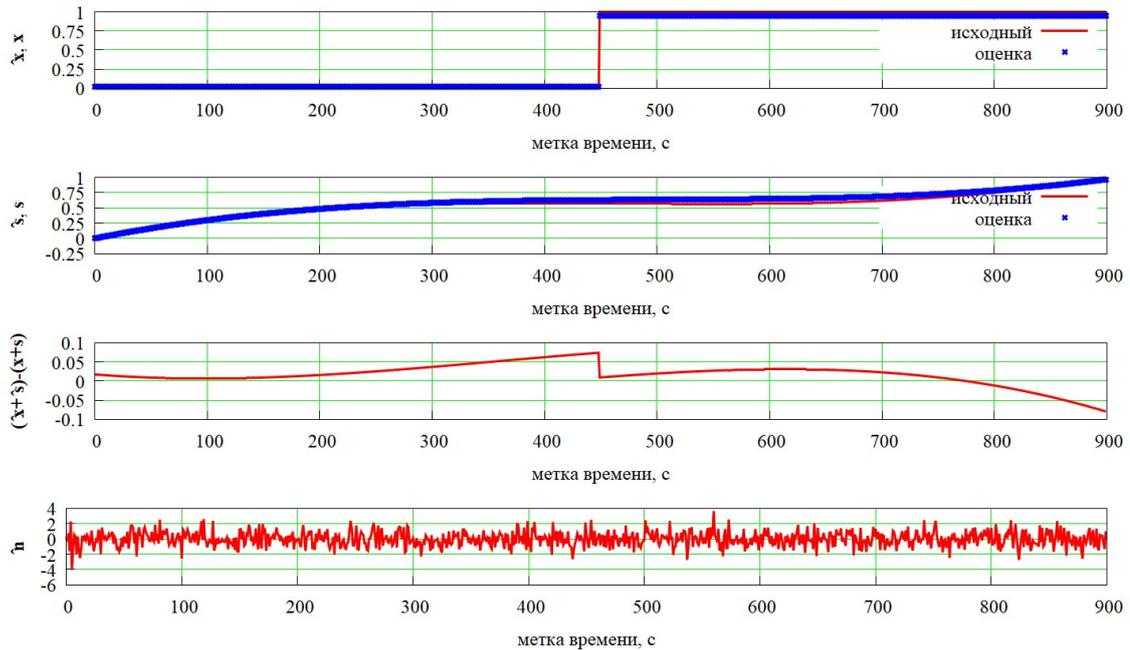


Рисунок 3.15 – Результаты работы алгоритма SPATV-LP (на первом графике красным цветом выделена моделируемая кусочно-постоянная функция, синим – оценка кусочно-постоянной функции; на втором графике красным цветом выделен моделируемый медленно меняющийся тренд, синим – оценка медленно меняющегося тренда; третий график – разница $(\hat{s} + \hat{x}) - (s + x)$; четвертый график – остаточный шум $\hat{n} = y - (\hat{s} + \hat{x})$)

На графике (Рисунок 3.15) показаны истинные и оцененные значения x и \hat{x} , s и \hat{s} , разность $(\hat{s} + \hat{x}) - (s + x)$, остаточный шум $\hat{n} = y - (\hat{s} + \hat{x})$.

Для статистического анализа результатов вычислим вектор скачков по оценке кусочно-постоянной функции \hat{x} . Для этого умножим ее на матрицу $D \cdot \hat{x}$, в полученном векторе приравняем к нулю все значения, которые по модулю меньше 1 % истинной величины оцениваемого разрыва. Предполагается, что данный вектор должен содержать только один ненулевой элемент. Проверив данное условие, вычисляем положение ненулевого элемента относительно положения истинного разрыва и его величину. *Принятие решения о правильном обнаружении разрыва выполнялось в случае, если его положение было идентифицировано с точностью ± 10 секунд.* Результаты моделирования показаны в Таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Вероятность правильного обнаружения одиночного разрыва алгоритмом SPATV-LP в аддитивной смеси кусочно-постоянной функции, полиномиального тренда и шума

Степень полинома	СКО шума										
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	1,00	1,00	0,94	0,81	0,63	0,52	0,47	0,42	0,32	0,29	0,25
1	1,00	1,00	0,95	0,80	0,56	0,42	0,31	0,24	0,18	0,16	0,13
2	1,00	1,00	0,94	0,79	0,58	0,39	0,29	0,25	0,22	0,18	0,17
3	1,00	1,00	0,94	0,64	0,38	0,27	0,22	0,17	0,14	0,10	0,08
4	1,00	1,00	0,93	0,64	0,40	0,29	0,21	0,17	0,14	0,10	0,08
5	1,00	1,00	0,80	0,43	0,28	0,19	0,11	0,10	0,05	0,04	0,02

Как видно из Таблицы 3.3, вероятность обнаружения положения разрыва алгоритмами SPATV-LP зависит как от СКО шума в аддитивной смеси, так и от степени полиномиального тренда. При высоком СКО шума (более 1) вероятность обнаружения разрыва при повышении степени полинома тренда от 0 до 5 уменьшается в 2-3 раза.

3.4.7 Модельные эксперименты применения алгоритмов SPHATV-LP и SFATV-LP

Было проведено несколько десятков экспериментов для сравнения алгоритмов SPHATV-LP и SFATV-LP при одинаковом размере ортонормированного базиса в линейном фильтре. Модельные данные используются согласно описанию, приведенному в разделе 3.4.2. Для обнаружения будут использоваться алгоритмы SPHATV-LP и SFATV-LP с параметром $p = 0,5$. Оценка шума будет выполняться отдельно (до эксперимента обнаружения) по выборке шума $n(t_i)$. На вход алгоритма SPATV-LP подается вектор моделируемых измерений \mathbf{y} , который формируется как сумма трех векторов:

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (3.47)$$

где $\mathbf{s}_i = s(t_i)$ – вектор с данными модельной геометрической дальностью; $\mathbf{x}_i = x(t_i)$ – вектор с данными модели кусочно-постоянной функции; $\mathbf{n}_i = n(t_i)$ – вектор со случайными значениями белого шума.

В результате работы алгоритма формируются векторы оценки этих компонентов в векторе \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.48)$$

где $\hat{\mathbf{s}}$ – вектор оценки модельной геометрической дальности \mathbf{s} ; $\hat{\mathbf{x}}$ – вектор оценки кусочно-постоянной функции \mathbf{x} ; $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{y} - (\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}})$ – вектор оценки шумовой составляющей.

Для моделирования геометрической дальности использовались SP3-данные для спутника системы GPS G01. Интервал моделирования вектора \mathbf{Y} составляет 15 минут с шагом 1 секунда, что составляет 900 отсчетов. Для формирования обучающей матрицы \mathbf{G} используется множество интервалов расчетной геометрической дальности для данного спутника (более 900 интервалов). Из медленно меняющегося тренда была вычтена значение геометрической дальности на начало интервала.

Пример входных данных для алгоритмов показан на графиках (Рисунок 3.16).

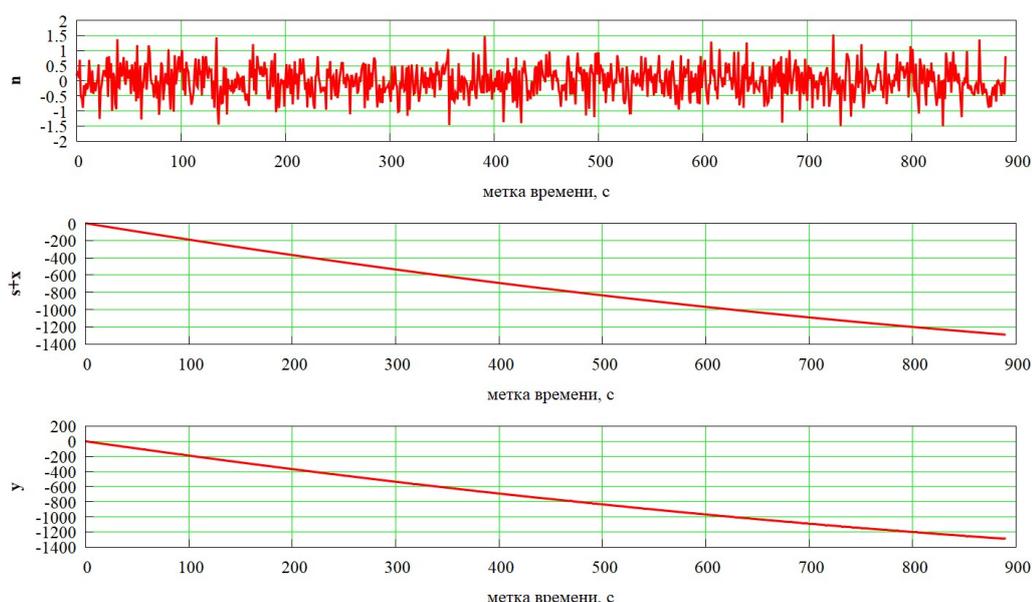


Рисунок 3.16 – Исходные данные (первый график – реализация шума (СКО = 1); второй график – аддитивная смесь разрыв в данных величиной 1 с трендом в виде геометрической дальности; третий график – аддитивная смесь всех трех компонентов)

Результат оценки компонентов $\hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ с использованием алгоритма CFATV-LP (размер базиса равен 2) показан на графиках (Рисунок 3.17).

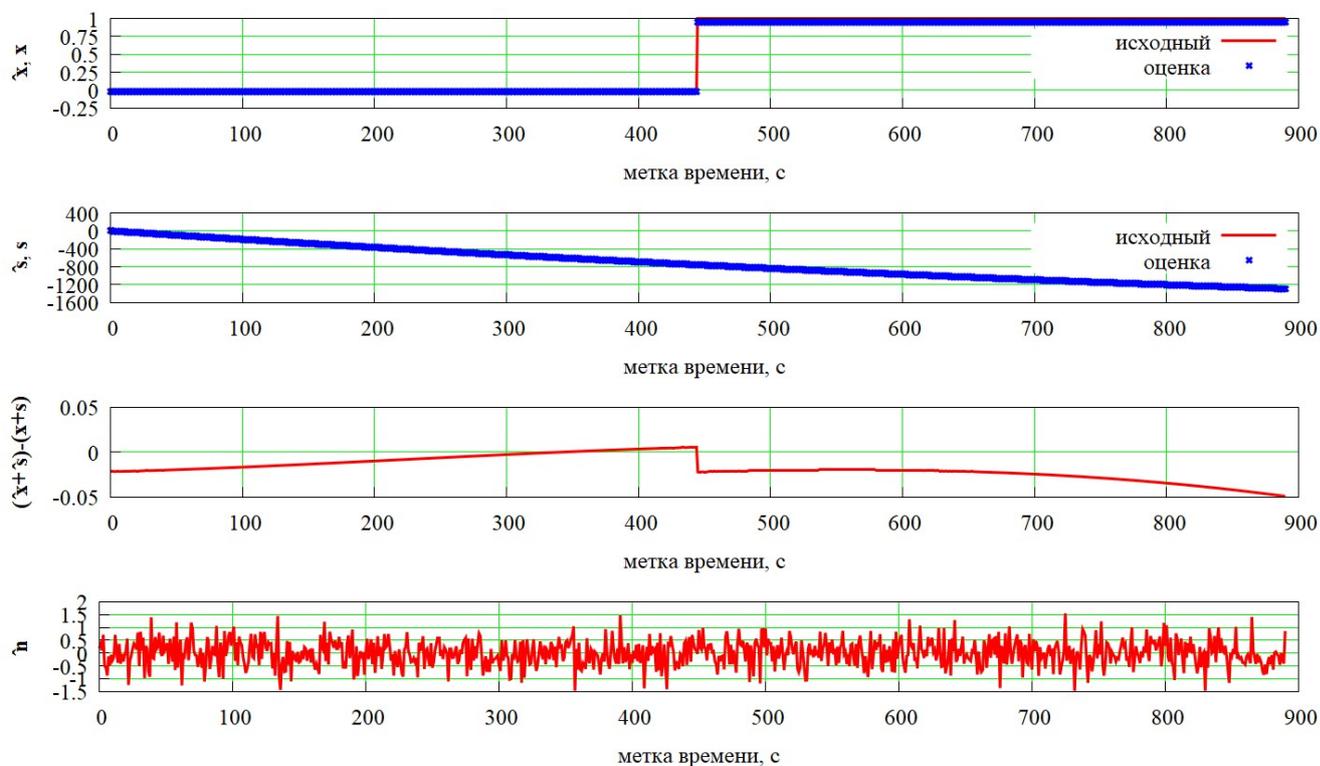


Рисунок 3.17 – Результаты работы алгоритма CFATV-LP (на первом графике красным цветом выделена моделируемая кусочно-постоянная функция, синим – оценка кусочно-постоянной функции; на втором графике красным цветом выделен моделируемый медленно меняющийся тренд, синим – оценка медленно меняющегося тренда; на третьем графике показана разница $(\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}}) - (\mathbf{s} + \mathbf{x})$; на четвертом графике – остаточный шум $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{y} - (\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}})$)

На графиках (Рисунок 3.17) показаны истинные и оцененные значения \mathbf{x} и $\hat{\mathbf{x}}$, \mathbf{s} и $\hat{\mathbf{s}}$, разность $(\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}}) - (\mathbf{s} + \mathbf{x})$ и остаточная шумовая составляющая $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{y} - (\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{x}})$.

На малой выборке было проверено влияние размера адаптивного базиса на вероятность обнаружения разрыва и правильность оценки его величины. Увеличение размера базиса из адаптивных функций приводит к снижению точности определения величины разрыва и вероятности обнаружения разрыва, что соотносится с экспериментами, проведенными в разделе 3.4.5 для полиномиального тренда и базиса.

Выполним оценку компонентов \hat{s} , \hat{x} , \hat{n} с использованием алгоритма СРНATV-LP для размера базиса, равного 2. Результаты оценки показаны на графиках (Рисунок 3.18).

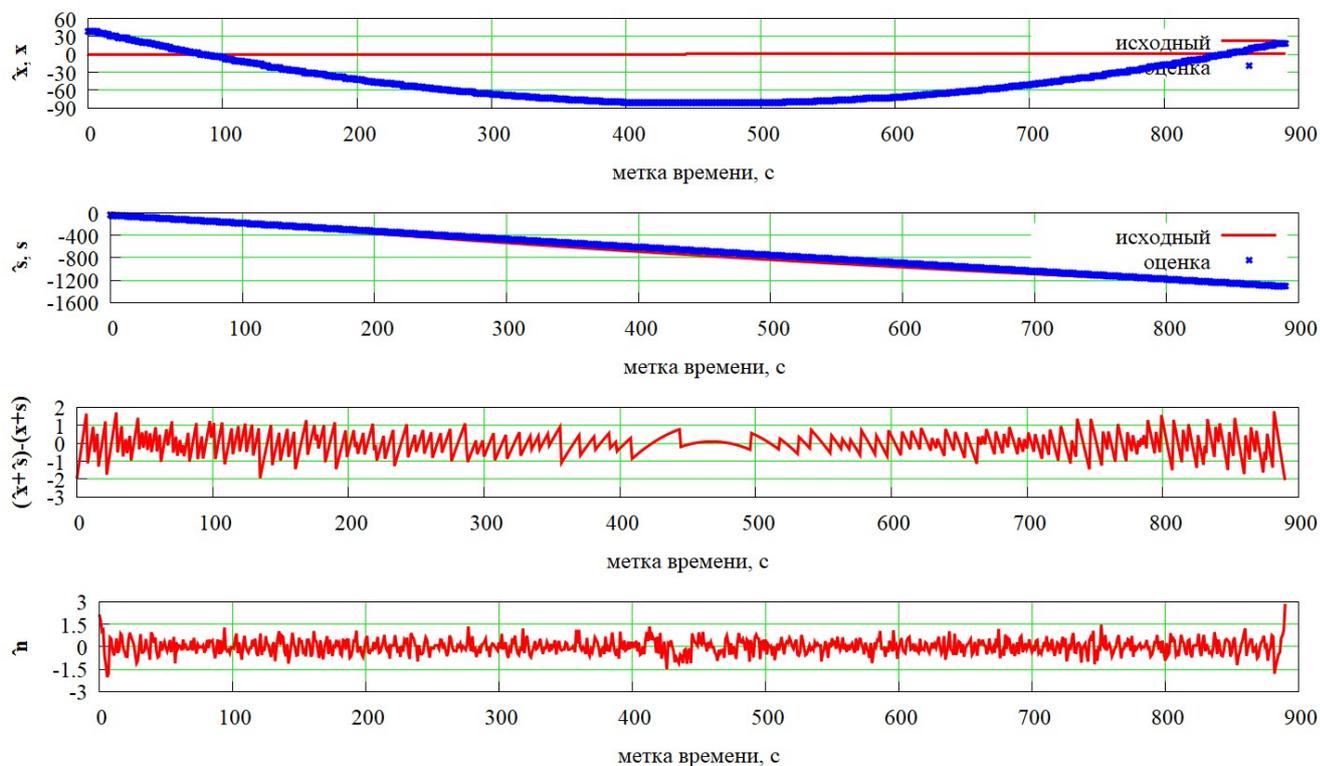


Рисунок 3.18 – Результаты работы алгоритма СРНATV-LP (на первом графике красным цветом выделена моделируемая кусочно-постоянная функция, синим – оценка кусочно-постоянной функции; на втором графике красным цветом выделен моделируемый медленно меняющийся тренд, синим – оценка медленно меняющегося тренда; на третьем графике показана разница $(\hat{s} + \hat{x}) - (s + x)$; на четвертом графике – остаточный шум $\hat{n} = y - (\hat{s} + \hat{x})$)

На графиках (Рисунок 3.18) показаны истинные и оцененные значения x и \hat{x} , s и \hat{s} , разность $(\hat{s} + \hat{x}) - (s + x)$ и остаточная шумовая составляющая $\hat{n} = y - (\hat{s} + \hat{x})$.

Выводы по экспериментам с алгоритмами ATV

Проведя анализ экспериментов, описанных в разделах 3.4.1, 3.4.3, 3.4.4, 3.4.5, 3.4.7, делаются следующие выводы:

– чем меньше размер базиса (без потери точности аппроксимации тренда) в линейном фильтре, тем выше вероятность правильного обнаружения разрыва в кусочно-постоянной функции, что показано в разделах 3.4.4 и 3.4.5;

– использование алгоритма CFATV-LP по сравнению с алгоритмами CRATV-LP и CRHATV-LP для данных, основанных на геометрической дальности, позволяет сократить размер базиса линейного фильтра, что, в свою очередь, делает возможным повышение вероятности обнаружения положения разрыва кусочно-постоянной функции.

3.4.8 Статистика обнаружения одиночного скачка

Для определения вероятностных характеристик обнаружения скачков предложенными в разделе 3.3 алгоритмами было проведено статистическое моделирование обнаружения случайного единичного скачка. В эксперименте использовались алгоритмы скользящего окна с полиномиальным и адаптивным базисом (описание в разделе 3.3.1) и алгоритм CFATV-LP, описанный в разделах 3.3.2 и 3.3.3. Эксперименты проводились на модельных данных, где в качестве медленно меняющегося тренда выступала геометрическая дальность, в качестве скачка – функция со случайным положением разрыва и величиной разрыва, равной единице; в качестве шума выступал дискретный квази-белый нормальный шум с различным значением СКО шума и нулевым математическим ожиданием. Для набора статистики генерировалось 500 различных реализаций аддитивной смеси, длина одной реализации составляла 10800 секунд (3 часа).

Эксперимент проводился как для данных с шагом в 1 секунду, так и для данных с шагом в 30 секунд, что соответствует шагу выдачи данных в реальных навигационных приемниках. **Критерием правильного обнаружения скачка для 1-секундных данных было обнаружение положения разрыва с точностью ± 30 секунд и величиной от 0.5 до 1.5, что при округлении до целого приводит к задаваемой величине разрыва. Критерием правильного обнаружения скачка для 30-секундных данных было обнаружение положения разрыва с точностью ± 150 секунд (± 5 измерений) и величиной от 0.5 до 1.5, что при округлении до целого приводит к задаваемой величине разрыва.**

Результаты экспериментов представлены в виде таблиц (Таблица 3.4 и Таблица 3.6), выраженных в процентах от числа проведенных экспериментов по обнаружению. В Таблице 3.5 и Таблице 3.7 приведена статистика правильного принятия решения об отсутствии разрыва кусочно-постоянной функции.

Таблица 3.4 – Вероятность правильного обнаружения (в процентах) одиночного скачка, 1-секундные модельные измерения

СКО шума	CFATV-LP	Алгоритмы скользящего окна					
		Полином. 300 с	Адапт. 300 с	Полином. 600 с	Адапт. 600 с	Полином. 900 с	Адапт. 900 с
0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
0,5	100,0	99,8	99,8	100,0	100,0	100,0	100,0
1,0	99,4	47,6	46,8	92,4	92,4	93,4	94,2
1,5	97,6	17,6	18,2	49,6	50,4	54,2	54,4
2,0	87,6	6,6	6,6	25,0	24,6	23,2	24,2
2,5	74,8	5,2	5,4	14,2	14,2	15,6	15,6
3,0	53,6	3,4	3,2	10,2	9,6	8,8	9,0

Таблица 3.5 – Вероятность правильного принятия решения (в процентах) об отсутствии одиночного скачка, 1-секундные модельные измерения

СКО шума	CFATV-LP	Алгоритмы скользящего окна					
		Полином. 300 с	Адапт. 300 с	Полином. 600 с	Адапт. 600 с	Полином. 900 с	Адапт. 900 с
0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
0,5	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
1,0	99,6	99,8	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
1,5	96,8	96,2	99,0	99,2	99,8	99,6	100,0
2,0	76,8	92,8	96,0	94,4	95,6	96,6	97,4
2,5	50,0	87,4	92,8	90,6	93,0	92,0	94,8
3,0	29,2	82,4	84,6	82,4	87,8	87,2	89,6

Таблица 3.6 – Вероятность правильного обнаружения (в процентах) одиночного скачка, 30-секундные модельные измерения

СКО шума	CFATV-LP	Алгоритмы скользящего окна					
		Полином. 300 с	Адапт. 300 с	Полином. 600 с	Адапт. 600 с	Полином. 900 с	Адапт. 900 с
0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
0,5	86,53	12,06	11,3	34,23	35,2	27,3	27,8
1,0	24,86	3,1	2,96	7,73	7,7	5,93	6,46
1,5	7,63	1,8	1,96	3,63	3,8	3,53	3,83

СКО шума	CFATV-LP	Алгоритмы скользящего окна					
		Полином. 300 с	Адапт. 300 с	Полином. 600 с	Адапт. 600 с	Полином. 900 с	Адапт. 900 с
2,0	2,7	1,56	1,56	2,36	2,26	2,16	2,13
2,5	1,1	0,8	0,66	1,93	2,03	1,43	1,5
3,0	0,63	0,13	0,23	1,06	1,1	1,0	1,03

Таблица 3.7 – Вероятность правильного принятия решения (в процентах) об отсутствии одиночного скачка, 30-секундные модельные измерения

СКО шума	CFATV-LP	Алгоритмы скользящего окна					
		Полином. 300 с	Адапт. 300 с	Полином. 600 с	Адапт. 600 с	Полином. 900 с	Адапт. 900 с
0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
0,5	43,76	84,3	86,06	86,4	86,9	85,43	88,46
1,0	10,26	53,56	55,6	54,26	55,7	56,46	59,5
1,5	5,43	37,4	39,6	37,2	39,96	37,46	41,86
2,0	3,56	27,0	29,5	28,16	29,13	29,66	29,96
2,5	2,93	16,96	17,53	24,06	24,56	23,46	25,23
3,0	2,06	3,33	4,3	17,3	20,0	17,1	19,1

Рассмотренные выше алгоритмы имеют довольно большой интервал (для 1-секундных измерений ± 30 секунд), в котором считается, что положение скачка определено верно. В Таблице 3.8 показана *вероятность правильного обнаружения (в процентах) положения скачка с попаданием в интервал ± 10 секунд от истинного положения.*

Таблица 3.8 – Вероятность правильного обнаружения (в процентах) скачка с точностью ± 10 секунд для измерений с шагом в 1 секунду

СКО шума	CFATV-LP	Алгоритмы скользящего окна					
		Полином. 300 с	Адапт. 300 с	Полином. 600 с	Адапт. 600 с	Полином. 900 с	Адапт. 900 с
0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
0,5	100,0	99,8	99,8	100,0	100,0	100,0	100,0
1,0	94,2	46,2	45,4	86,6	86,2	87,8	88,2
1,5	79,2	15,8	16,0	40,6	40,8	46,4	46,0
2,0	63,2	5,4	5,2	19,6	19,0	20,2	20,4
2,5	50,2	4,8	5,0	11,0	10,8	12,0	11,8
3,0	33,6	3,8	3,6	7,4	7,0	6,0	6,0

Как видно из Таблицы 3.8, точность обнаружения положения скачка алгоритмом CFATV-LP при увеличении СКО шума выше, чем у оконных алгоритмов. Высокая точность определения положения скачка позволяет сократить защитный интервал, что, в свою очередь, позволяет сохранить больше измерений в дальнейшей обработке.

3.4.9 Статистика обнаружения нескольких скачков

В реальных данных встречаются случаи, когда скачки в фазовых измерениях происходят один за другим, что сильно затрудняет работу алгоритмов. Как было показано в разделе 3.4.4, наибольшая сложность обнаружения разрывов кусочно-постоянной функции происходит, когда разрыв находится близко к краям интервала измерений. Была проведена оценка эффективности обнаружения 3 модельных скачков в положениях в 300, 400 и 500 секунд от начала интервала измерений, величины разрывов 1, -1, 1 соответственно. Интервал моделируемых измерений составляет 10800 секунд (3 часа). Вероятность правильного обнаружения всех трех разрывов алгоритмом CFATV-LP от СКО шума показана в Таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Вероятность правильного обнаружения нескольких скачков на 1-секундных модельных измерениях

СКО шума	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
CFATV-LP	100	100	99	69	24	1	1

Как видно из Таблицы 3.9, для СКО шума до 0,5 алгоритм CFATV-LP справляется с задачей обнаружения скачков, при повышении уровня шума вероятность обнаружения падает.

3.5 Апробация алгоритмов на измерениях навигационных приемников

3.5.1 Исходные данные для обработки алгоритмов

В данном исследовании для обработки и апробации предложенных алгоритмов линейной полиномиальной фильтрации и алгоритма поиска скачков СРНАТV-LP были выбраны станции, расположенные вблизи северного и южного полярного круга.

Наиболее высокий шум, вносимый ионосферой, наблюдается в период высокой солнечной активности [89] – исходя из этого, были выбраны дни в 2019 году с высокой солнечной активностью, согласно данным ИЗМИРАН [89]. Таблица 3.10 содержит данные планетарных ионосферно-плазмосферных бурь с карт JPL GIM-TEC IONEX [89].

Таблица 3.10 – Планетарные ионосферно-плазмосферные бури с карт JPL GIM-TEC IONEX за 2019 год

№	Начало		Пиковое значение		Пиковое значение индекса W_p	Окончание		Длительность в часах	Среднее значение индекса W_p
	Дата	Время UT	Дата	Время UT		Дата	Время UT		
657	2019/01/04	12	2019/01/04	22	5.1	2019/01/06	11	48	4.4
658	2019/05/14	5	2019/05/14	8	5.4	2019/05/16	0	44	4.0
659	2019/05/27	8	2019/05/27	12	5.0	2019/05/28	0	17	4.4
660	2019/08/05	7	2019/08/05	12	5.5	2019/08/06	5	23	4.7
661	2019/08/30	17	2019/09/01	20	5.1	2019/09/02	1	57	4.4
662	2019/09/27	11	2019/09/27	23	6.8	2019/09/29	4	42	5.0

Как видно из Таблицы 3.10, общий интервал анализируемых данных составляет 231 час; так как данные загружались за полные сутки, суммарный временной интервал анализируемых данных составляет 264 часа или 11 дней.

В работе была использована измерительная информация, полученная с сети IGS, со станций:

- KIR0, характеристики которой приведены в Таблице 3.11;
- REYK, характеристики которой приведены в Таблице 3.12;
- YELL, характеристики которой приведены в Таблице 3.13;
- ONI3, характеристики которой приведены в Таблице 3.14.

Таблица 3.11 – Характеристика станции KIRO

Сокращенное название	KIRO
Местоположение	Kiruna, Sweden
Координаты	67.878N, 21.060E, 498.0 m
Приемник	SEPT POLARX5-5.3.0
Антенна	JNSCR_C146-22-1 – OSOD
Стандарт частоты	INTERNAL
Обрабатываемые ГНСС	GPS+GLO+GAL+BDS+QZSS+SBAS

Таблица 3.12 – Характеристика станции REYK

Сокращенное название	REYK
Местоположение	Reykjavik, Iceland
Координаты	64.139N, -21.955E, 93.1 m
Приемник	LEICA GR50-4.31/7.403
Антенна	LEIAR25.R4 – LEIT
Стандарт частоты	INTERNAL
Обрабатываемые ГНСС	GPS+GLO+GAL+BDS+IRNSS+SBAS

Таблица 3.13 – Характеристика станции YELL

Сокращенное название	YELL
Местоположение	Yellowknife, Canada
Координаты	62.481N, -114.481E, 181.00 m
Приемник	JAVAD TRE_3N DELTA-3.7.5p1 Jan 23, 2019
Антенна	AOAD/M_T – NONE
Стандарт частоты	EXTERNAL MASER
Обрабатываемые ГНСС	GPS+GLO+GAL

Таблица 3.14 – Характеристика станции OH13

Сокращенное название	OH13
Местоположение	O'Higgins, Antarctica
Координаты	-63.321N, -57.901E, 32.15 m
Приемник	LEICA GR50-4.31/7.403
Антенна	LEIAR25.R4 – LEIT
Стандарт частоты	EXTERNAL H-Maser
Обрабатываемые ГНСС	GPS+GLO+GAL+BDS+SBAS

Из официального архива IGS [90] были получены файлы с 1-секундными измерениями от выбранных станций в формате RINEX 2.11 (Receiver INdependent EXchange – формат IGS для обмена информацией от навигационных приемников, вне зависимости от его производителя) [91]. Для дальнейшей работы файлы измерений в формате RINEX были переработаны в текстовые файлы в столбцовом

формате, содержащие всего два столбца: первый – метка времени в секундах, второй – измерения или комбинация измерений. Были выделены следующие измерения и их комбинации (при наличии всех необходимых измерений) для спутников ГЛОНАСС:

- фазовые измерения на диапазоне L1;
- фазовые измерения на диапазоне L2;
- кодовые измерения на диапазоне C1;
- кодовые измерения на диапазоне C2;
- разность кодовых и фазовых измерений на диапазоне L1–C1L1;
- разность кодовых и фазовых измерений на диапазоне L2–C2L2;
- разность фазовых измерений на диапазоне L1 и L2 – L1L2.

Фазовые измерения L1 и L2 выражаются в циклах, все остальные измерения и разности выражаются в метрах. Все измерения объединяются в интервалы по нахождению навигационного спутника в зоне радиовидимости станции наблюдения. Для обработки и формирования измерений для последующей обработки различными алгоритмами был использован программный пакет GPStk [92] и разработанные в рамках работы скрипты последовательной предобработки измерительной информации на языке Julia и AWK [93].

3.5.2 Линейная фильтрация измерений (комбинаций измерений)

Примеры измерений с отсутствием скачков в фазовых измерениях

Для измерений (комбинаций измерений), полученных в разделе 3.5.1, проведем оценку шума измерений (комбинаций измерений) с использованием линейного полиномиального фильтра.

На графиках (Рисунок 3.19) для станции KIR0 по порядку показаны:

- разности кодовых и фазовых измерений C1L1 до использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график);

- разности кодовых и фазовых измерений C1L1 после использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график);
- разности фазовых измерений L1L2 после использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график);
- фазовые измерения L1 до использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график);
- фазовые измерения L1 после использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график).

Вычисление разности по времени выполнялось между соседними измерениями в векторе измерений без учета разницы во времени.

Аналогичные графики показаны для станций REYK (Рисунок 3.20), YELL (Рисунок 3.21) и ОНЗ (Рисунок 3.22). На графиках (Рисунок 3.19, Рисунок 3.20, Рисунок 3.21, Рисунок 3.22) были выбраны интервалы, когда согласно разности фазовых измерений L1L2 в данных отсутствовали скачки в фазовых измерениях.

В качестве линейного полиномиального фильтра выступал фильтр, который строился с использованием ортонормированных полиномов Хана, размер базиса фильтра определялся в зависимости от протяженности интервала измерений. В показанных далее графиках использовался полиномиальный фильтр с размером базиса 21 (максимальная степень полинома 20).

kir0 R01 пролет 011

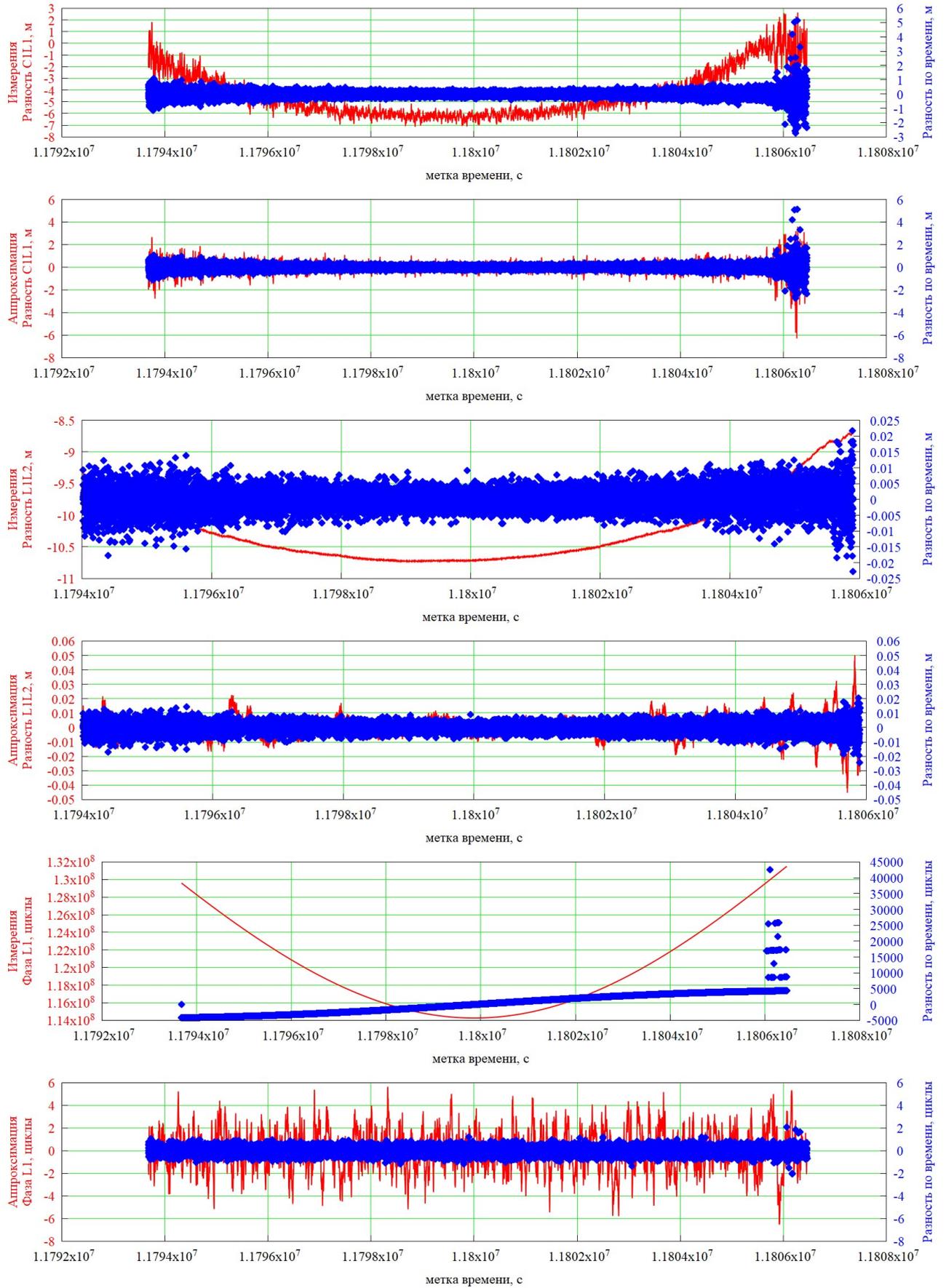


Рисунок 3.19 – Обработка измерений станции KIR0 (красным цветом на графиках выделены измерения или результаты линейной фильтрации полиномиальным фильтром, синим – разности по времени)

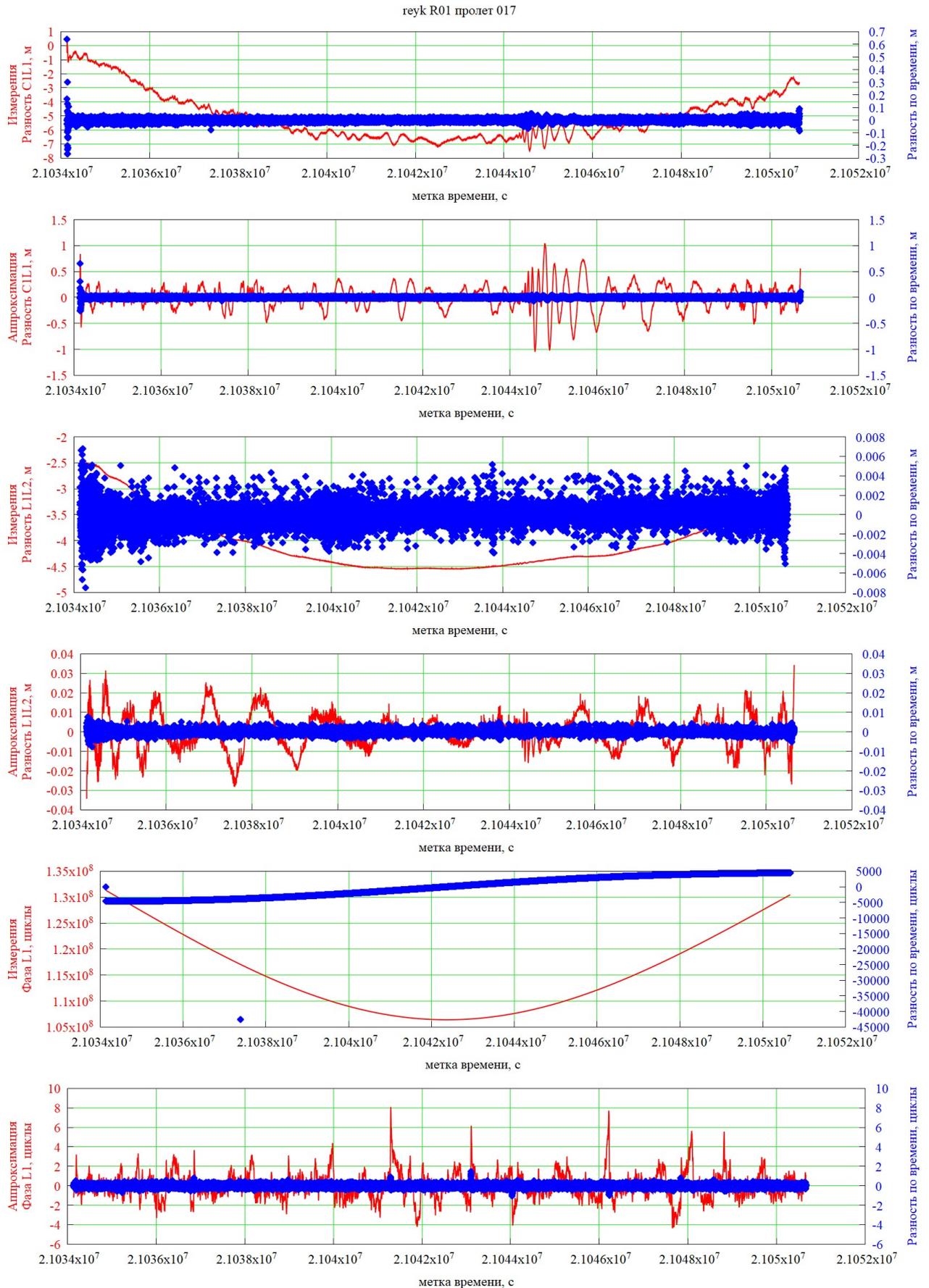


Рисунок 3.20 – Обработка измерений станции REYK (красным цветом на графиках выделены измерения или результаты линейной фильтрации полиномиальным фильтром, синим – разности по времени)

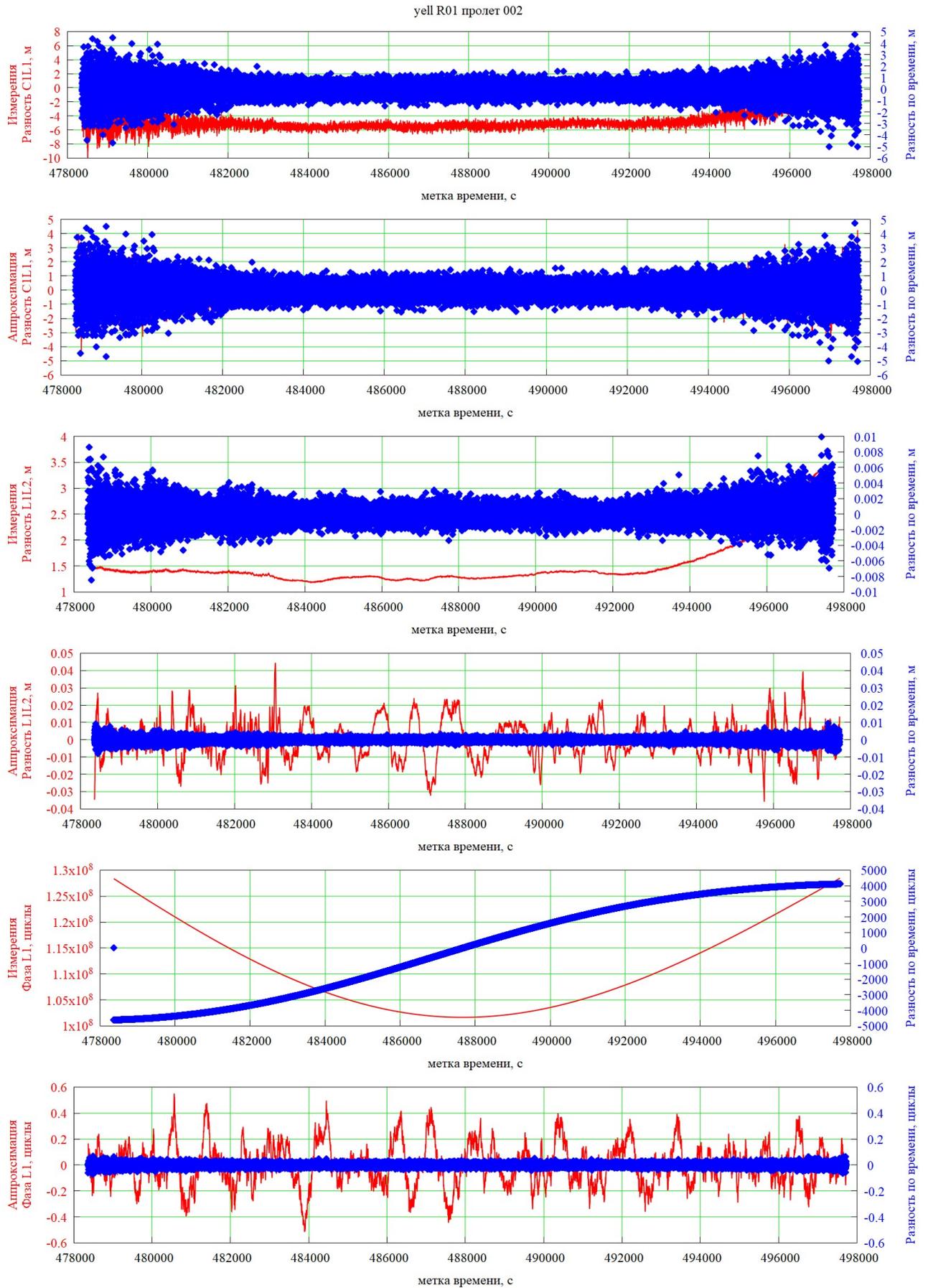


Рисунок 3.21 – Обработка измерений станции YELL (красным цветом на графиках выделены измерения или результаты линейной фильтрации полиномиальным фильтром, синим – разности по времени)

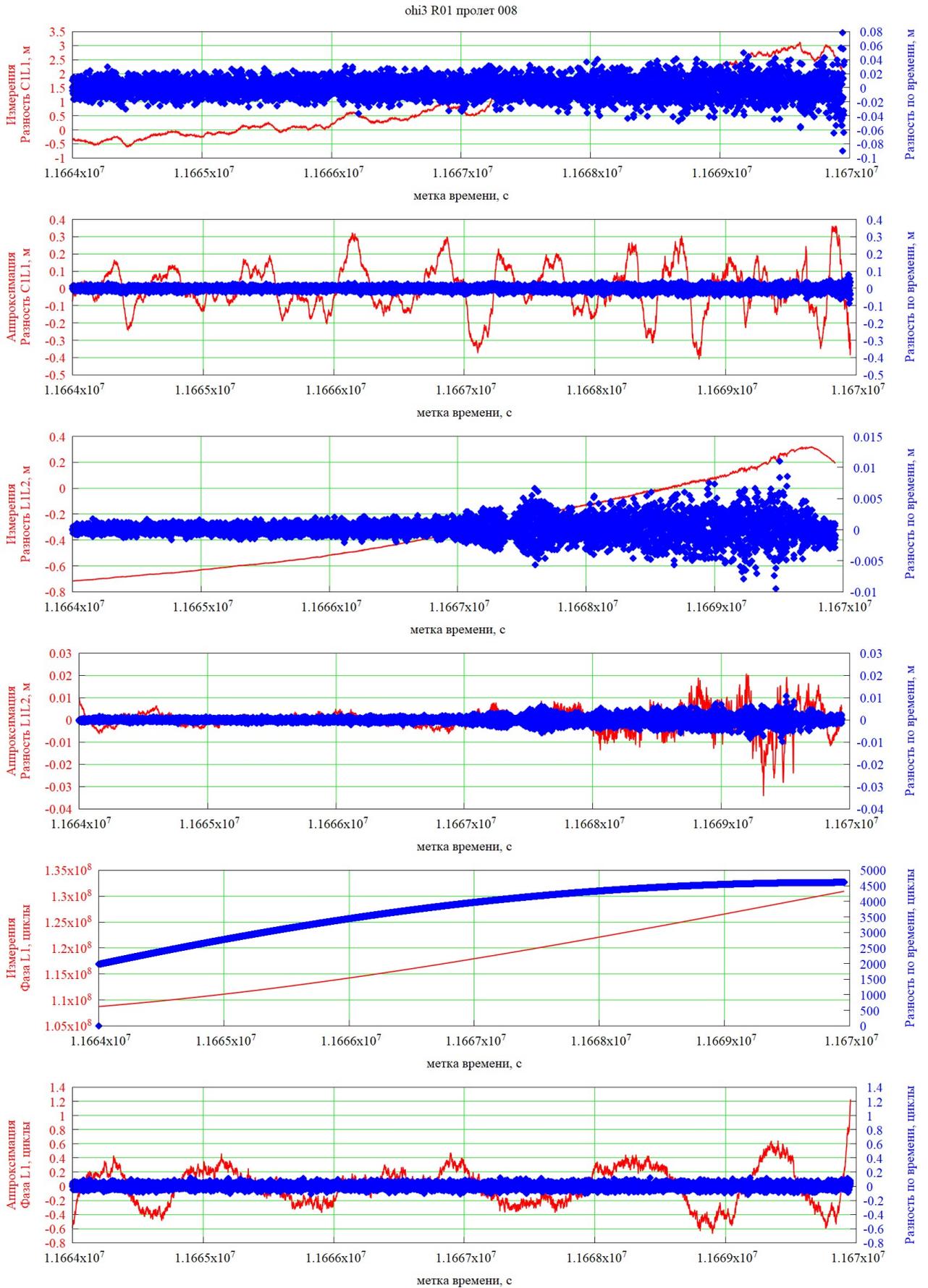


Рисунок 3.22 – Обработка измерений станции ОНІЗ (красным цветом на графиках выделены измерения или результаты линейной фильтрации полиномиальным фильтром, синим – разности по времени)

Как видно из графиков (Рисунок 3.19, Рисунок 3.20, Рисунок 3.21, Рисунок 3.22), для разностных измерений C1L1 результаты вычисления первых разностей по времени слабо зависят от фильтрации полиномиального тренда, однако первые разности по времени для непосредственно фазовых измерений L1 и результатов полиномиальной фильтрации фазовых измерений L1 значительно отличаются друг от друга (± 4000 циклов к ± 0.1 цикла). Такая ситуация характерна для всех интервалов наблюдений.

На графиках разности по времени фазовых измерений видны «выбросы», которые появляются из-за пропусков в измерениях. В результатах фильтрации такие выбросы отсутствуют, что говорит о том, что линейный полиномиальный фильтр исключил медленно меняющийся тренд даже с учетом пропусков в данных.

Понятие шумовой составляющей при использовании полиномиальных и адаптивных фильтров

На графиках (Рисунок 3.19, Рисунок 3.20, Рисунок 3.21, Рисунок 3.22) в результатах фильтрации измерений полиномиальным фильтром (сверху второй, четвертый, шестой красные графики) наблюдается *шумовая составляющая* (результат удаления медленно меняющегося тренда), которая далека от белого шума, использовавшегося в моделировании. Такое поведение шумовой составляющей обусловлено тем, что размер базиса полиномиального фильтра выбирался таким образом, чтобы уменьшить амплитуду медленно меняющегося тренда до такой степени, чтобы алгоритмы, применяемые нами для обнаружения скачков в фазовых измерениях, работали. При увеличении размера базиса шумовая составляющая будет приближаться к белому шуму, однако это приведет к невозможности обнаружения скачков в фазовых измерениях. Анализ зависимости шумовой составляющей от НП с различными опорными генераторами проведен в подразделе 3.5.3.

Шумовая составляющая будет зависеть как от анализируемых измерений, так и от типа и размера применяемого в фильтре базиса. Во всей главе 3 под шумовой составляющей понимаются именно результаты фильтрации.

Примеры скачков в фазовых измерениях

Рассмотрим случаи, когда в фазовых измерениях (предположение строится на основании анализа результатов фильтрации разности фазовых измерений L1L2) наблюдаются скачки. На графиках (Рисунок 3.23) для станции KIR0 по порядку показаны:

- разности кодовых и фазовых измерений C1L1 после использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график);
- разности фазовых измерений L1L2 после использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график);
- фазовые измерения L1 после использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график);
- фазовые измерения L2 после использования линейного полиномиального фильтра (красный график) и разность по времени (синий график).

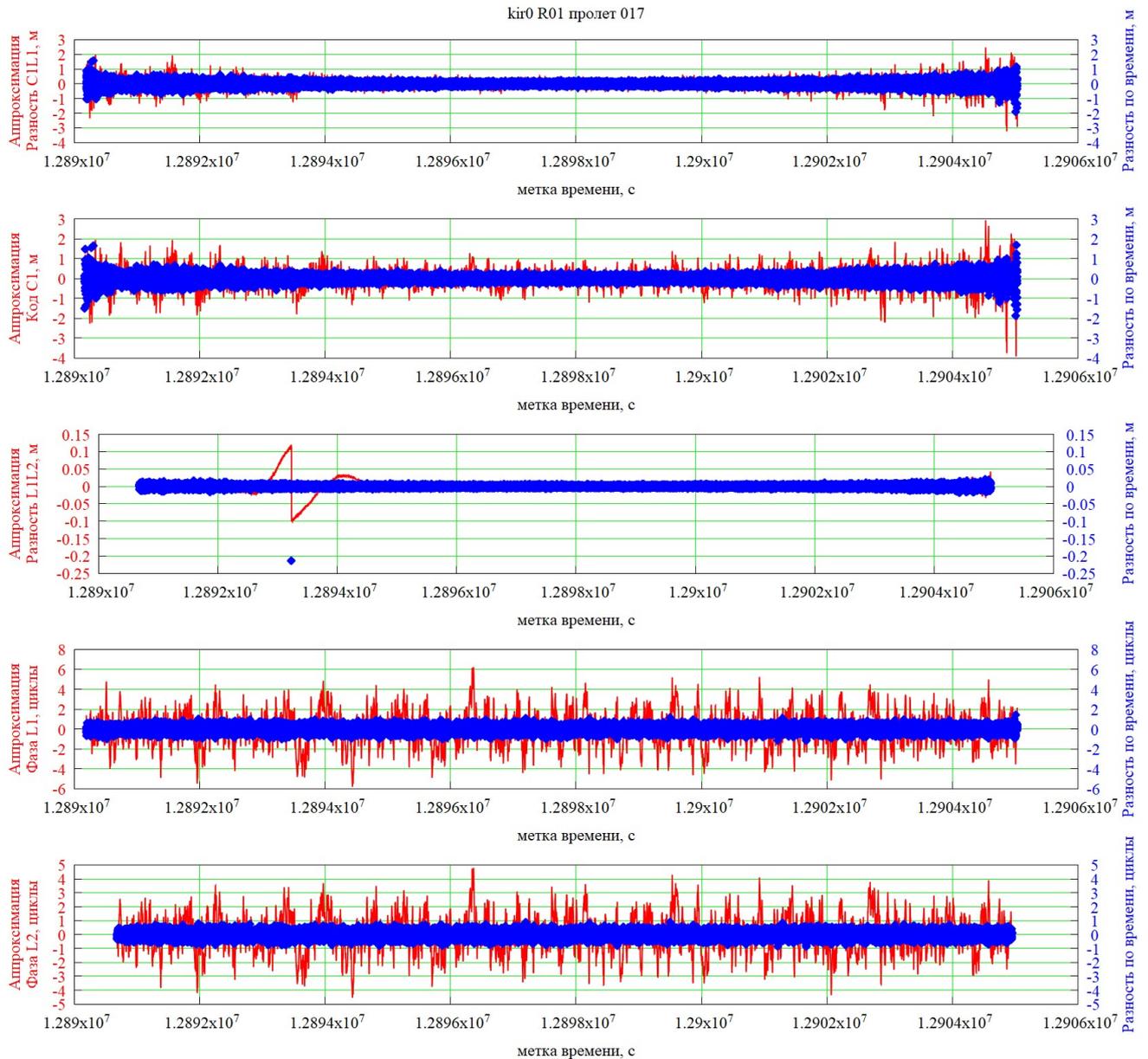


Рисунок 3.23 – Обработка измерений станции KIR0 (красным цветом на графиках показаны измерения или результаты линейной фильтрации полиномиальным фильтром, синим – разности по времени)

Как видно из графиков (Рисунок 3.23), в разности фазовых измерений наблюдается характерный для скачка остаток фильтрации полиномиальным фильтром (фильтрация модельного разрыва показана на графике (Рисунок 3.1)), по величине скачка делается предположение о том, что скачок имеет величину 0.22 м, что с учетом того, что полиномиальный фильтр уменьшает величину скачка, характерно для 1 длины волны в диапазоне L2, $\lambda_{L2} \approx 0.24$ м. На графиках результатов фильтрации фазовых измерений данный скачок визуально не наблюдается. Рассмотрим аналогичные графики для станции YELL (Рисунок 3.24).

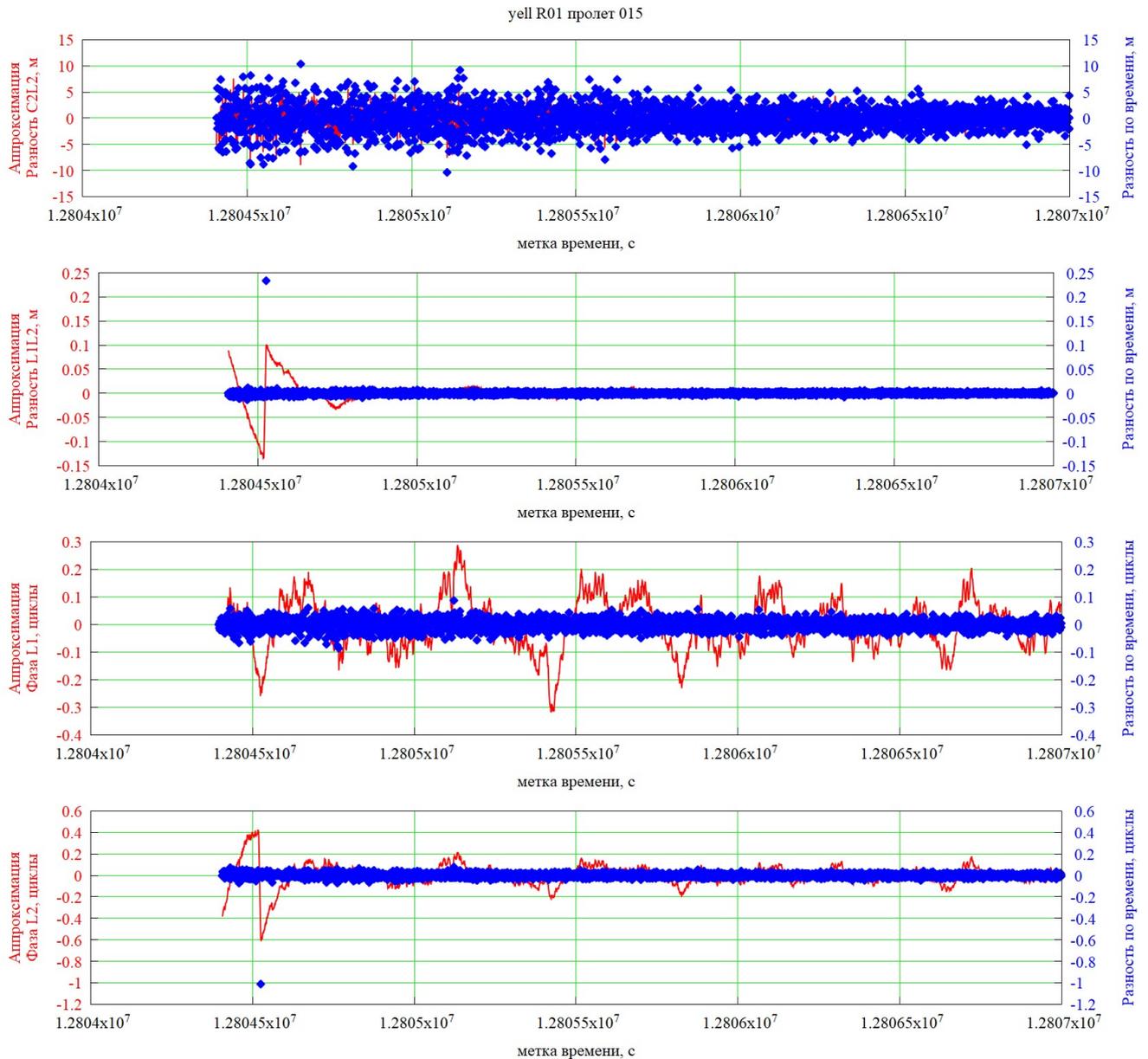


Рисунок 3.24 – Обработка измерений станции YELL (красным цветом на графиках выделены измерения или результаты линейной фильтрации полиномиальным фильтром, синим – разности по времени)

Как видно из графиков (Рисунок 3.24), в разности фазовых измерений наблюдается характерный для скачка остаток фильтрации полиномиальным фильтром (фильтрация модельного скачка показана на графике (Рисунок 3.1)), по величине скачка делается предположение о том, что скачок имеет величину 0.23 м, что с учетом того, что полиномиальный фильтр уменьшает величину скачка, характерно для 1 длины волны в диапазоне L2, $\lambda_{L2} \approx 0.24$ м. В этот же момент времени в результатах фильтрации фазовых измерений L2 наблюдается аналогичный скачок величиной в один цикл.

Аномальное поведение шумовой составляющей

При анализе измерений описанных выше станций также наблюдались ситуации, когда по результатам фильтрации фазовых измерений в них обнаруживались скачки, а по результатам оценки разностных измерений никаких скачков не обнаруживалось, что связано с поведением ШВ НП. Пример такой ситуации показан на графиках (Рисунок 3.25).

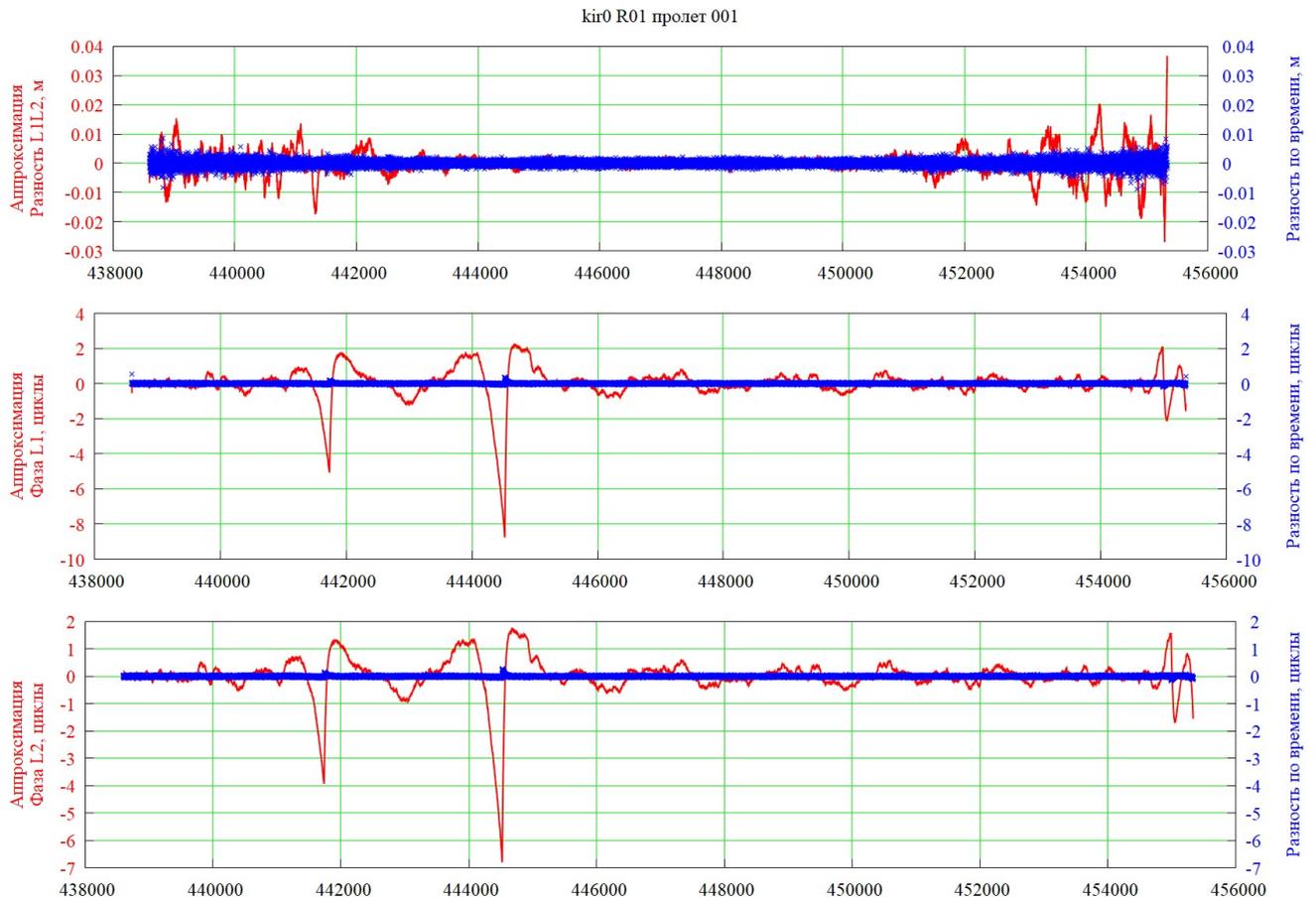


Рисунок 3.25 – Обработка измерений станции KIR0 (красным цветом на графиках выделены измерения или результаты линейной фильтрации полиномиальным фильтром, синим – разности по времени)

На графиках (Рисунок 3.25) видно, что в результатах фильтрации разности фазовых измерений L1L2 характерных для скачков остатков фильтрации не наблюдается, однако в результатах фильтрации фазовых измерений L1 и L2 присутствуют аномальные остатки аппроксимаций, предположительно связанные с ШВ НП, о чем подробнее будет рассказано в разделе 3.5.3.

3.5.3 Необходимость использования разности кодовых и фазовых измерений

При анализе фазовых измерений от станций сети IGS для НП с внутренним (кварцевым) опорным генератором амплитуда шумовой составляющей после выполнения линейной фильтрации медленно меняющегося тренда (Рисунок 3.19 и Рисунок 3.20) достигает нескольких фазовых циклов, а разность соседних измерений достигает 1 цикла. Для таких станций была выполнена линейная фильтрация медленно меняющегося тренда в кодовых измерениях для оценки шумовой составляющей. Один из примеров результатов сравнения кодовой и фазовой шумовой составляющей показан на графиках (Рисунок 3.26).

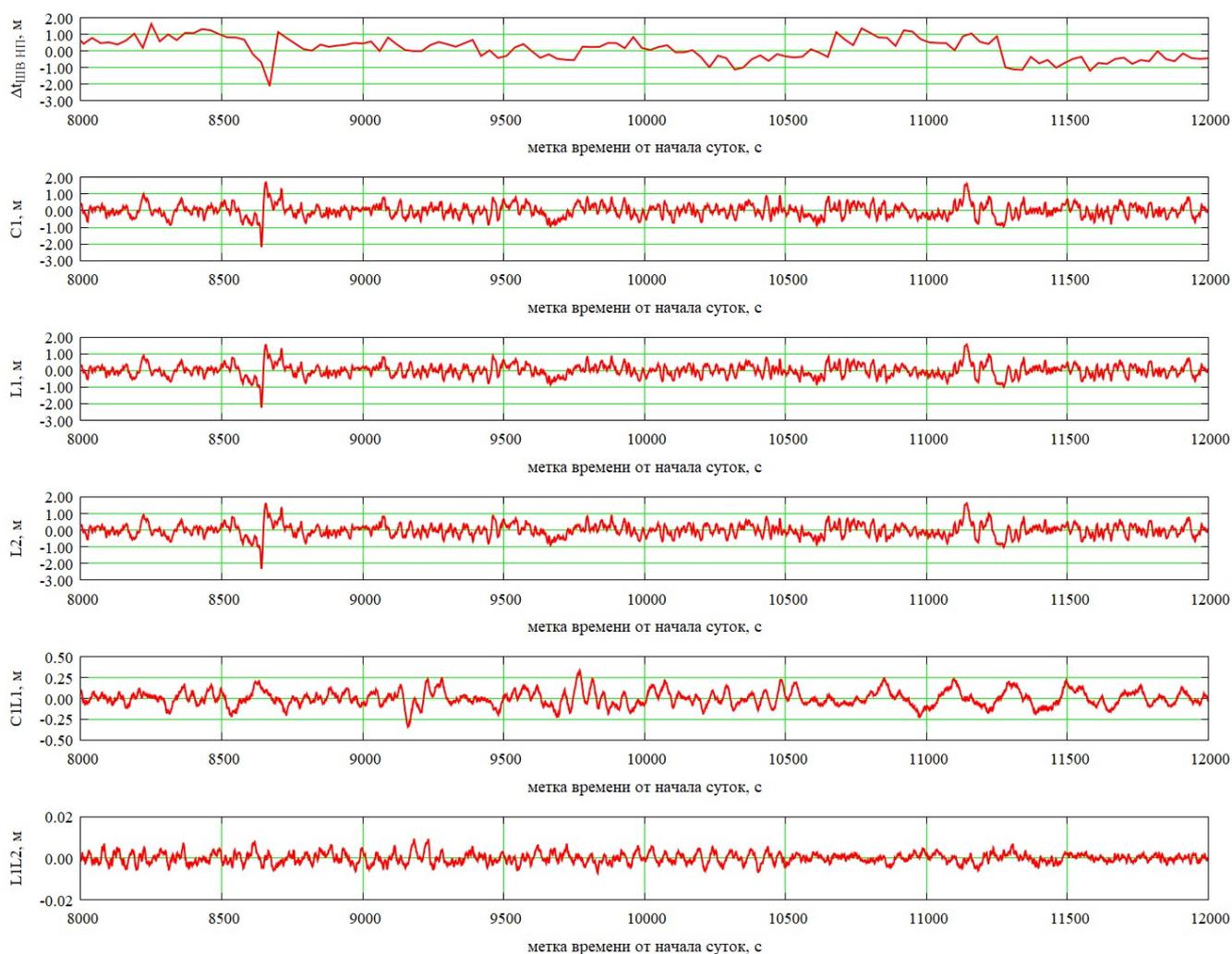


Рисунок 3.26 – ШВ НП станции REYK и измерения спутника R01 за 04 января 2019 г.

На графиках (Рисунок 3.26) также приведена оценка ШВ НП, сделанная аналитическим центром ИАЦ КВНО в ходе выполнения решения задачи ЭВО. Ре-

зультаты линейной фильтрации кодовых и фазовых измерений, а также ШВ НП имеют схожий характер. Подобная шумовая составляющая в реальных фазовых измерениях затрудняет применения алгоритмов поиска скачков, описанных в разделе 3.3.

Похожее поведение шумовой составляющей для НП с низкостабильными (кварцевыми) опорными генераторами в фазовых измерениях описывается в работах [55–57] и связывается авторами с непрерывно управляемой ШВ НП для синхронизации с СШВ ГНСС. Для исключения данного эффекта предлагается использовать разность кодовых и фазовых измерений. Эффективность использования разности кодовых и фазовых измерений для обнаружения скачков величиной в один цикл и более показана в подразделе 3.5.5.

Необходимо отметить, что для НП из сети станций IGS с высокостабильными опорными генераторами такого влияния ШВ НП на фазовые измерения не наблюдается, что видно по графикам (Рисунок 3.21 и Рисунок 3.22). При этом максимальная амплитуда шумовой составляющей не превышает 0,2–0,4 фазовых цикла, а разность соседних значений не превышает 0,05 фазовых циклов.

3.5.4 Апробация алгоритма поиска скачков в одночастотных фазовых измерениях

Для НП с высокостабильными опорными генераторами для обнаружения скачков в фазовых измерениях предлагается использовать алгоритм на основе линейной фильтрации фазовых измерений, который подробно описан в подразделе 3.3.1. К фазовым измерениям применяется линейный фильтр (адаптивный или полиномиальный) и выделяется шумовая составляющая, а также возможные скачки в фазовых измерениях. После этого вычисляются разности по соседним измерениям, при этом неважно, были ли в измерениях небольшие (менее 10 минут) пропуски по времени (линейный фильтр исключает их влияние). С помощью полученных разностей оценивается присутствие скачка в фазовых измерениях. В случае присутствия пропуска в данных величина оценки скачка будет зависеть от

длительности интервала пропуска и степени полинома, как показано в подразделе 3.4.5.

На графике (Рисунок 3.27) красным показан пример результата фильтрации (полиномиальный фильтр с размером базиса 15) фазовых измерений без пропусков и скачков. Предположение об отсутствии скачков строится на основании результатов фильтрации разности фазовых измерений L1L2.

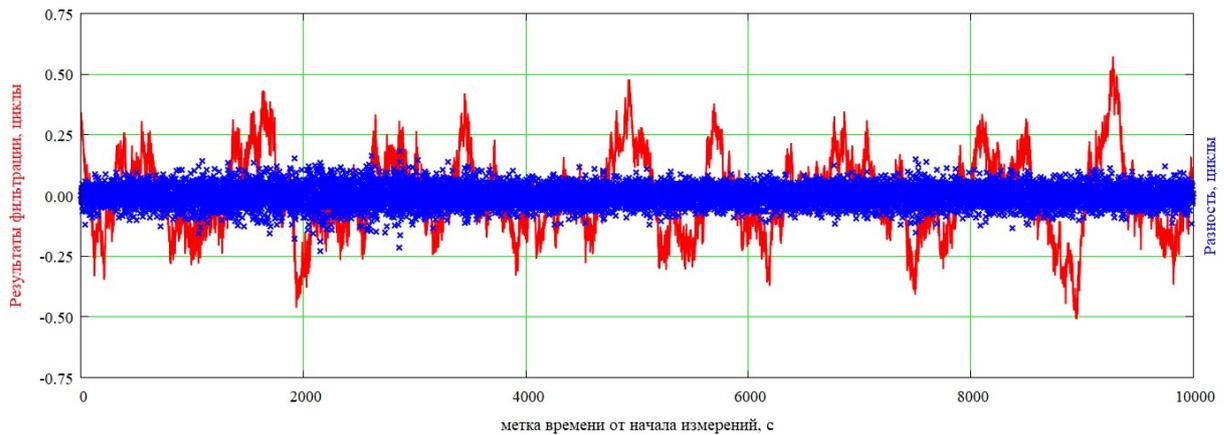


Рисунок 3.27 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 15) к измерениям спутника R07 станции ОНІЗ 19 мая 2019 г.

Для НП с высокостабильными опорными генераторами полиномиальный фильтр подбирается такой степени, чтобы СКО шумовой составляющей после фильтрации составляло приблизительно 0.1 цикла. После этого по результатам фильтрации вычисляются разности между соседними измерениями, как показано синим цветом на графике (Рисунок 3.27).

Обнаружение скачка в фазовых измерениях без пропусков. Для этого внесем в рассмотренные выше измерения модельный скачок величиной 1 цикл в середину интервала измерений и выполним повторно процедуру фильтрации (Рисунок 3.28).

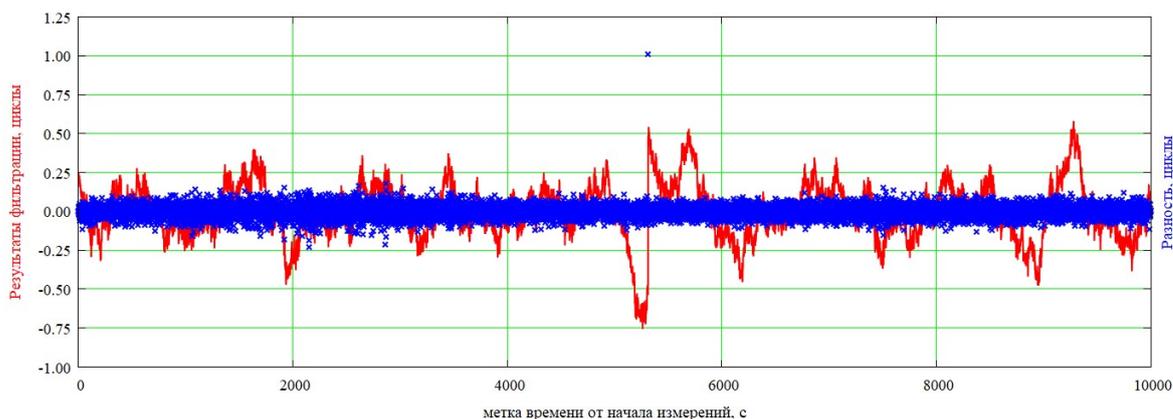


Рисунок 3.28 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 15) к измерениям спутника R07 станции ОНІЗ 19 мая 2019 г. (с модельным скачком)

Затем вычисляются разности по времени. На синем графике (Рисунок 3.28) виден явный пик в месте, где находится моделируемый скачок, величина которого совпадает с величиной моделируемого скачка.

Обнаружение скачка в фазовых измерениях с пропусками. Для этого внесем в измерения с вырезанными выше данными модельный скачок величиной 1 цикл в середину интервала измерений и выполним повторно процедуру фильтрации. Обратимся к красному графику (Рисунок 3.29).

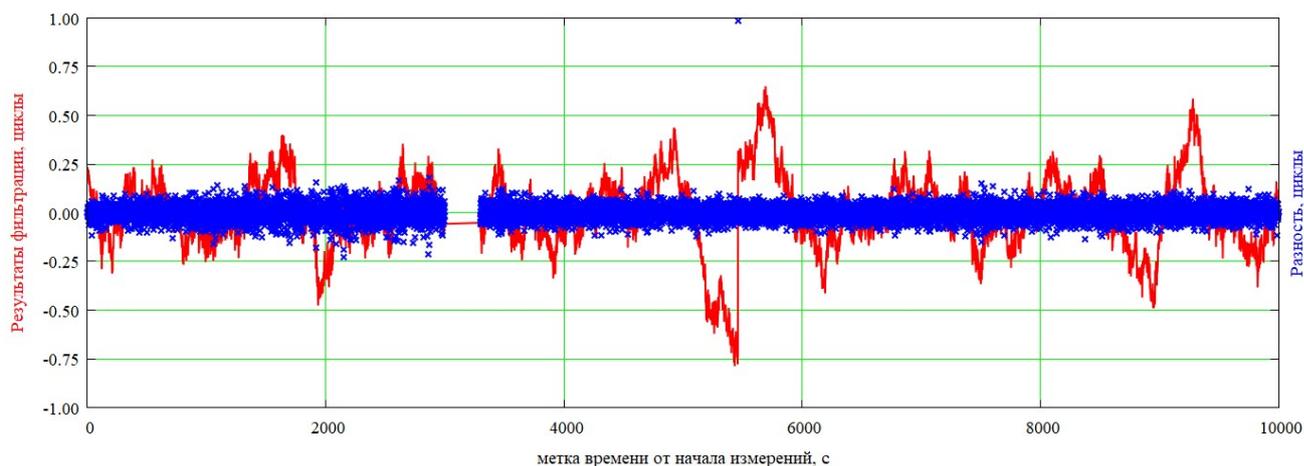


Рисунок 3.29 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 15) к измерениям спутника R07 станции ОНІЗ 19 мая 2019 г. (с модельным скачком и пропуском длительностью 300 секунд)

Затем вычисляются разности по времени. На синем графике (Рисунок 3.29) виден явный пик в месте, где находится моделируемый скачок, величина которого

совпадает с величиной моделируемого скачка, а также показано, что рассматриваемый алгоритм устойчив к пропускам в измерениях.

Наибольший интерес представляет определение присутствия скачка в момент пропуска измерений. Такое определение будет зависеть от длительности интервала пропуска и величины скачка. В исходных данных (Рисунок 3.27) вырежем участок в 1 минуту с 3000 по 3060 секунду и добавим скачок величиной в 1 цикл в момент начала второго интервала, после чего выполним процедуру фильтрации. Обратимся к красному графику (Рисунок 3.30).

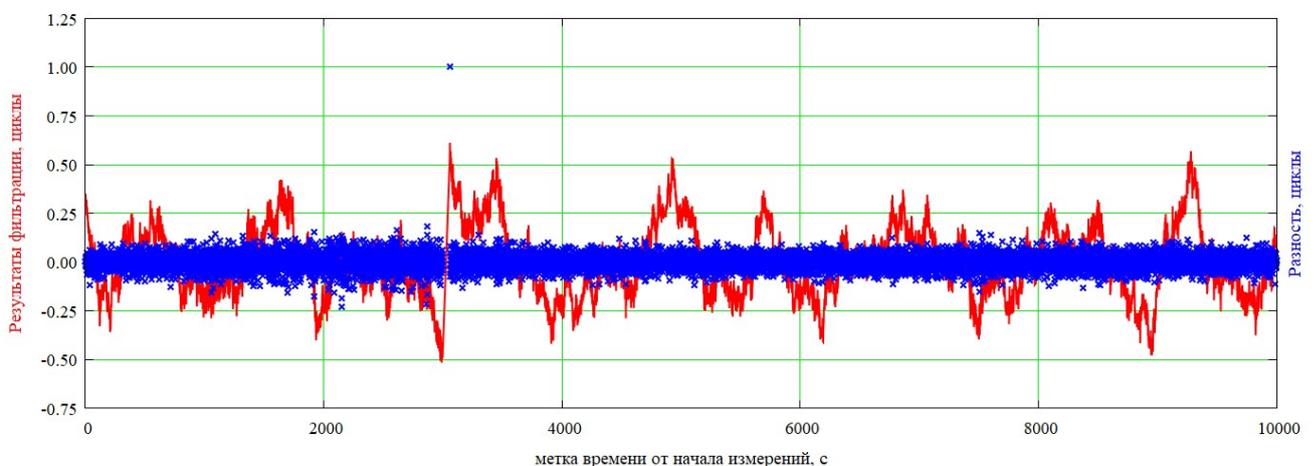


Рисунок 3.30 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 15) к измерениям спутника R07 станции ОНІЗ 19 мая 2019 г. (с модельным скачком в момент пропуска длительностью 60 секунд)

После этого вычисляются разности по времени. На синем графике (Рисунок 3.30) виден явный пик, положение и величина которого совпадают с модельным скачком, что показывает устойчивость алгоритма к малым пропускам в измерениях при условии присутствия скачка в момент пропуска.

Далее рассмотрим ситуацию, когда в исходных данных (Рисунок 3.27) вырежем участок в 5 минут с 3000 по 3300 секунду и добавим скачок величиной в 1 цикл в момент начала второго интервала, после чего выполним процедуру фильтрации. Обратимся к красному графику (Рисунок 3.31).

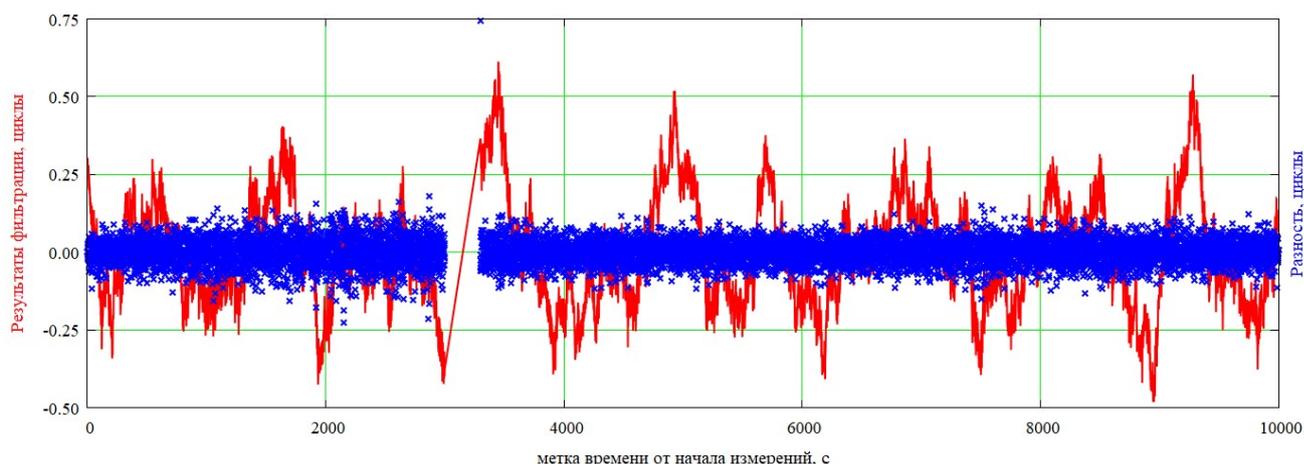


Рисунок 3.31 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 15) к измерениям спутника R07 станции ОНЗ 19 мая 2019 г. (с модельным скачком в момент пропуска длительностью 300 секунд)

Затем вычисляются разности по времени. На синем графике (Рисунок 3.31) виден пик в месте, где находится моделируемый скачок, величина которого меньше величины моделируемого скачка, что говорит о том, что с увеличением длительности интервала пропуска в измерениях величина определяемого скачка будет уменьшаться.

Последняя рассматриваемая ситуация: в исходных данных (Рисунок 3.27) вырежем участок в 15 минут с 3000 по 3900 секунду и добавим скачок величиной в 1 цикл в момент начала второго интервала, после чего выполним процедуру фильтрации. Отразим данную ситуацию на красном графике (Рисунок 3.32).

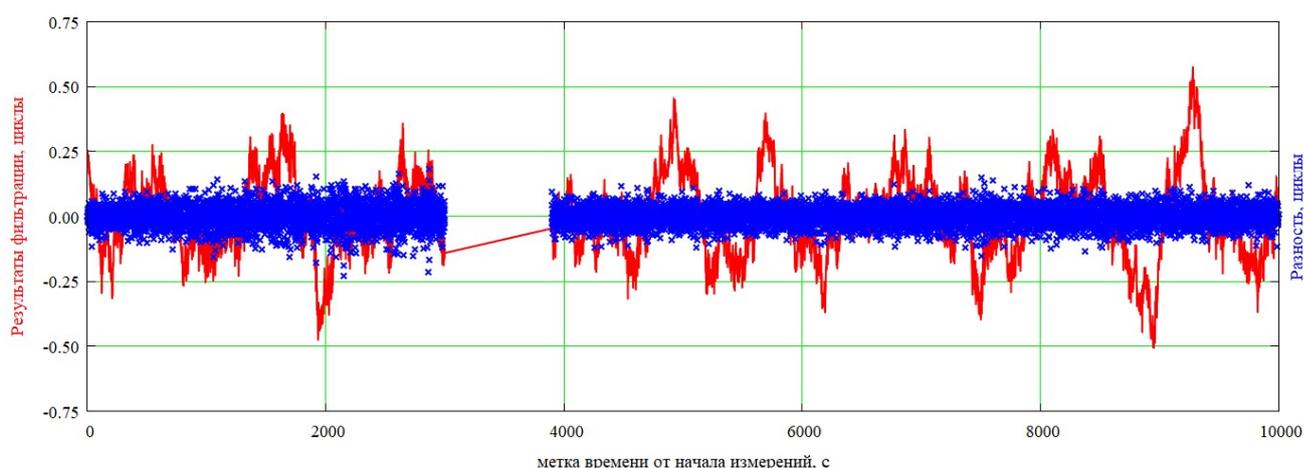


Рисунок 3.32 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 15) к измерениям спутника R07 станции ОНЗ 19 мая 2019 г. (с модельным скачком в момент пропуска длительностью 900 секунд)

После этого вычисляются разности по времени. На синем графике (Рисунок 3.32) не виден пик в месте, где находится моделируемый скачок, что показывает, что для длительных интервалов пропусков данный алгоритм не позволяет обнаруживать малые (величиной в 1 цикл) скачки. Это согласуется с результатами, показанными в подразделе 3.4.5.

Примеры применения алгоритма к реальным измерениям

На графиках (Рисунок 3.33, Рисунок 3.34, Рисунок 3.35) показаны результаты применения алгоритма обнаружения скачков в фазовых измерениях к данным станции ОНЗ, красным цветом на графиках выделены результаты фильтрации, синим – разности по времени.

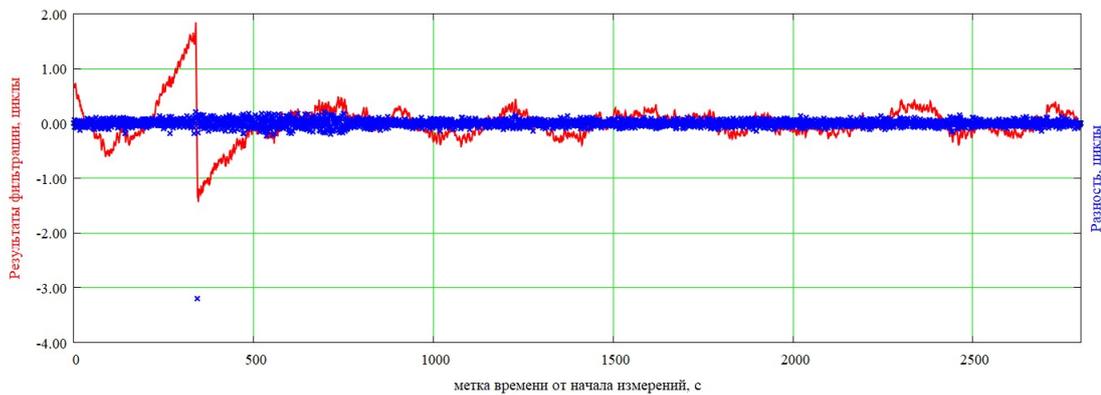


Рисунок 3.33 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 9) к измерениям спутника R02 станции ОНЗ 28 мая 2019 г.

На графике (Рисунок 3.33) обнаруживается целочисленный скачок величиной в 3 цикла.

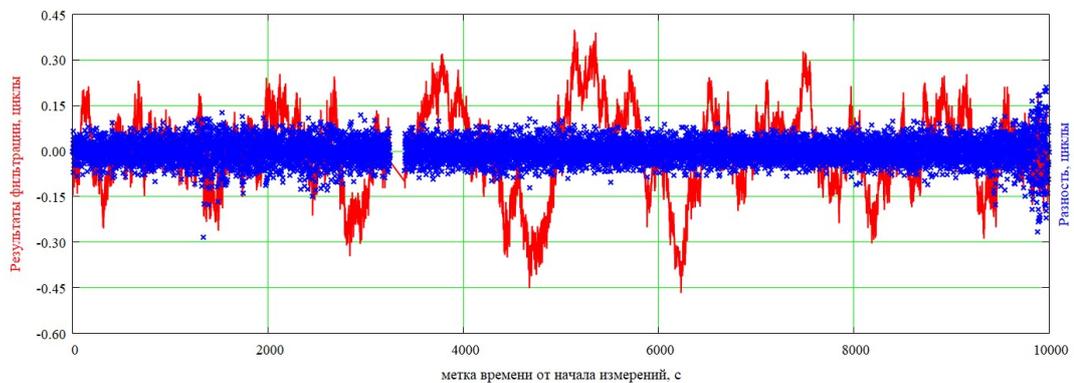


Рисунок 3.34 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 15) к измерениям спутника R03 станции ОНЗ 30 августа 2019 г.

На графике (Рисунок 3.34) наблюдается пропуск в данных, но учитывая его длительность и результаты, полученные в разделе 3.4.5, делается вывод о том, что в данных измерениях скачки отсутствуют.

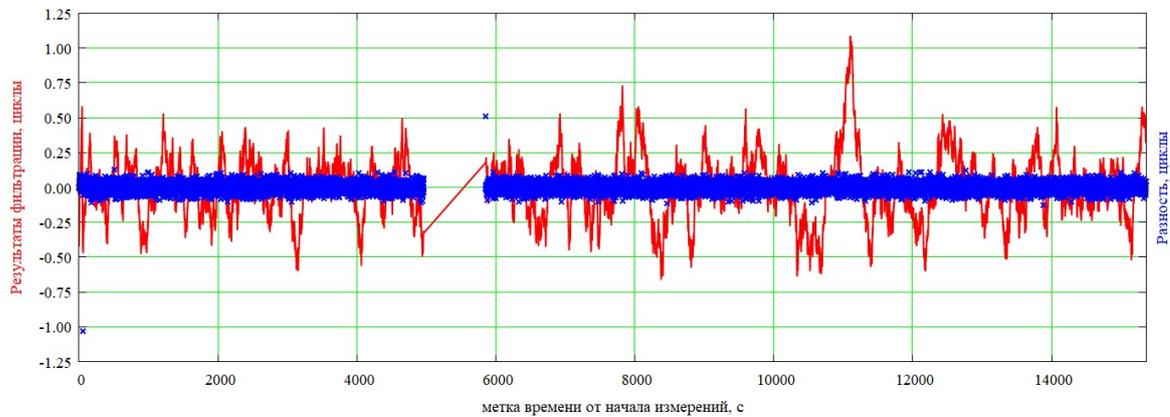


Рисунок 3.35 – Результаты применения алгоритма поиска скачков (размер базиса 25) к измерениям спутника R06 станции ОНЗ 30 августа 2019 г.

На графике (Рисунок 3.35) алгоритм обнаруживает целочисленный скачок в самом начале измерений, а также скачок после пропуска данных величиной в 0,5 цикла, что говорит о наличии скачка, и, согласно разделу 3.4.5, его величина ~ 2 цикла.

3.5.5 Апробация алгоритма поиска скачков в одночастотных разностях кодовых и фазовых измерений

В разделе 3.3 были предложены и рассмотрены алгоритмы для обнаружения скачков в одночастотных фазовых измерениях, для которых были проведены модельные эксперименты (показанные в разделе 3.4) по оценке вероятности обнаружения скачков в зависимости от отношения величины скачка к СКО шума. В данном разделе будет рассмотрено применение алгоритма CPNATV-LP к моделируемым скачкам, добавленным к реальным измерениям. Для экспериментов использовались измерения двухчастотных приемников, в которых на основании анализа разностей фазовых измерений L1L2 после полиномиального фильтра отсутствуют скачки в фазовых измерениях. Как было показано в разделе 3.5.2, для навигационных приемников с высокостабильными стандартами частоты СКО остаточного шума после линейной фильтрации фазовых измерений не превышает

0.05 цикла, что позволяет выполнять поиск скачков фазовых измерений вычислением разностей по времени после линейной фильтрации. В экспериментах по апробации алгоритмов CPNATV-LP будут использоваться данные в виде разности кодовых и фазовых измерений.

Моделирование одиночного скачка в фазовых измерениях

Для апробации работы алгоритма было выбрано 11 интервалов измерений длительностью от 4000 до 8000 секунд. Для увеличения числа экспериментов и набора статистики эксперимент по обнаружению модельного скачка в данных выполнялся на интервалах в 1000 секунд, которые выделялись из отобранных интервалов с шагом в 150 секунд; далее на каждом выбранном интервале моделировались скачки величиной от 1 до 5 циклов (величина скачка в метрах равна произведению числа циклов на длину волны для данного диапазона), на каждую величину скачка 25 раз моделировалось случайное (равномерно распределенное) положение скачка. Таким образом, было сформировано более 40000 интервалов, в которых, используя алгоритм CPNATV-LP, выполняли поиск положения скачка и величины скачка.

Все эксперименты обнаружения были распределены на группы для различного значения отношения величины скачка к СКО шума, общее число экспериментов в каждой группе приведено в Таблице 3.15.

Таблица 3.15 – Количество экспериментов обнаружения скачков

Интервал значений отношения величины скачка к СКО шума	Количество экспериментов по обнаружению
от 0.40 до 0.54	3504
от 0.54 до 0.62	3628
от 0.62 до 0.95	3612
от 0.95 до 1.08	3566
от 1.09 до 1.22	3458
от 1.22 до 1.55	3615
от 1.55 до 1.65	3358
от 1.65 до 2.00	3406
от 2.00 до 2.18	3506
от 2.18 до 2.50	3478
от 2.50 до 2.75	3577
от 2.75 до 4.00	3575

В качестве критерия правильного обнаружения скачка будем считать, что обнаружен только один скачок; отклонение обнаруженного скачка от моделируемого положения не более 60 секунд. Результаты правильного обнаружения приведены в Таблице 3.16.

Таблица 3.16 – Количество правильных обнаружений скачков

Интервал значений отношения величины скачка к СКО шума	Количество правильно обнаруженных скачков	Процент правильного обнаружения
от 0.40 до 0.54	1188	33,90
от 0.54 до 0.62	1325	36,52
от 0.62 до 0.95	2045	56,62
от 0.95 до 1.08	2883	80,85
от 1.09 до 1.22	2805	81,12
от 1.22 до 1.55	3219	89,05
от 1.55 до 1.65	3260	97,08
от 1.65 до 2.00	3254	95,54
от 2.00 до 2.18	3490	99,54
от 2.18 до 2.50	3464	99,60
от 2.50 до 2.75	3573	99,89
от 2.75 до 4.00	3575	100,00

Как видно из Таблицы 3.16, алгоритмы СРНATV-LP позволяют обнаруживать скачки в 1-2 цикла в фазовых измерениях в шуме, соизмеримом с величиной скачка по одночастотной разности фазовых и кодовых измерений. Для оценки точности определения положения скачка рассмотрим двумерную гистограмму (Рисунок 3.36) распределения ошибки определения положения скачка от отношения величины скачка к СКО шума измерений. График (Рисунок 3.36) нормирован по интервалам отношения величины скачка к СКО шума, приведенным в Таблице 3.15 и Таблице 3.16, так что суммарная вероятность для каждого интервала равна 1.

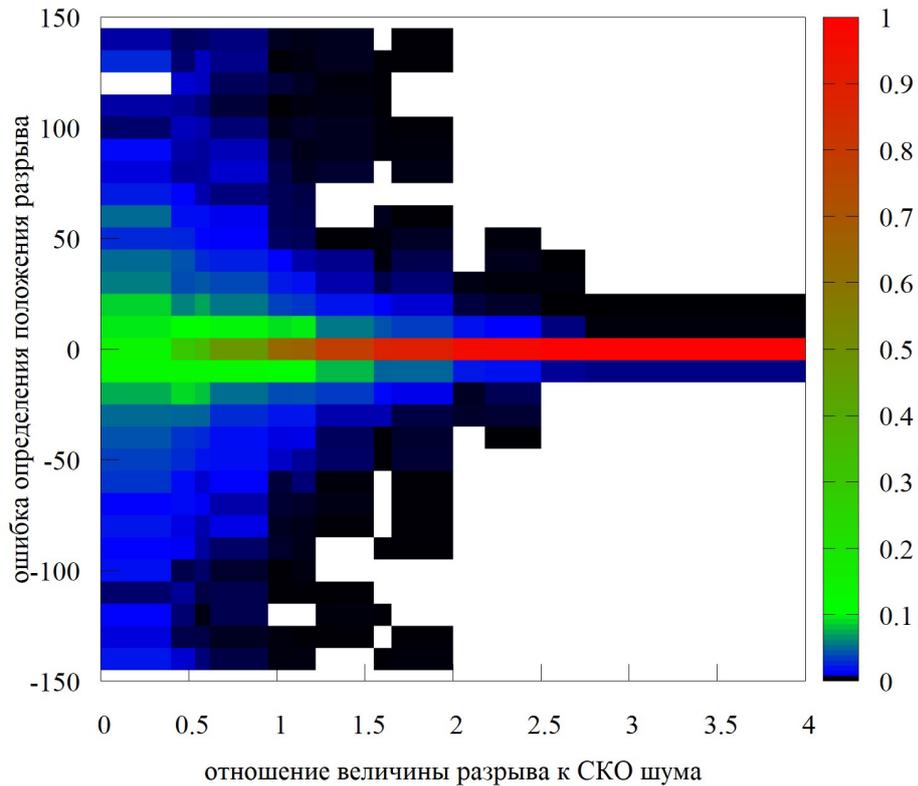


Рисунок 3.36 – Распределение ошибки определения положения скачка от отношения величины скачка к СКО шума

Как видно из двумерной гистограммы (Рисунок 3.36), при отношении скачок/шум более 0.5 выше вероятность правильного определения скачка в пределах ± 5 секунд (составляет более 0.5), а при отношении скачок/шум выше 1.5 – более 0.95, что говорит о том, что алгоритм SRHATV-LP позволяет с высокой точностью обнаруживать положения скачка.

Моделирование множественных скачков в фазовых измерениях

В реальных измерениях встречаются не только одиночные скачки, но также и множественные скачки фазовых измерений. На интервалах, отобранных для проведения моделирования одиночных скачков фазовых измерений, выделялись интервалы длительностью 2000 секунд со сдвигом 150 секунд. На каждом интервале формировалось от 2 до 5 скачков величинами от -6 до 6 циклов, выраженных в метрах. Было сформировано 1000 интервалов с модельными скачками. Для по-

иска скачков был применен алгоритм СРНАТV-LP, по результатам которого была вычислена вероятность правильной идентификации скачков.

На графиках (Рисунок 3.37 – Рисунок 3.41) показаны примеры смоделированных скачков (синим), суммы смоделированных скачков с разностями кодовых и фазовых измерений (верхний красный график), а также результаты обнаружения скачков алгоритмом СРНАТV-LP (нижний красный график).

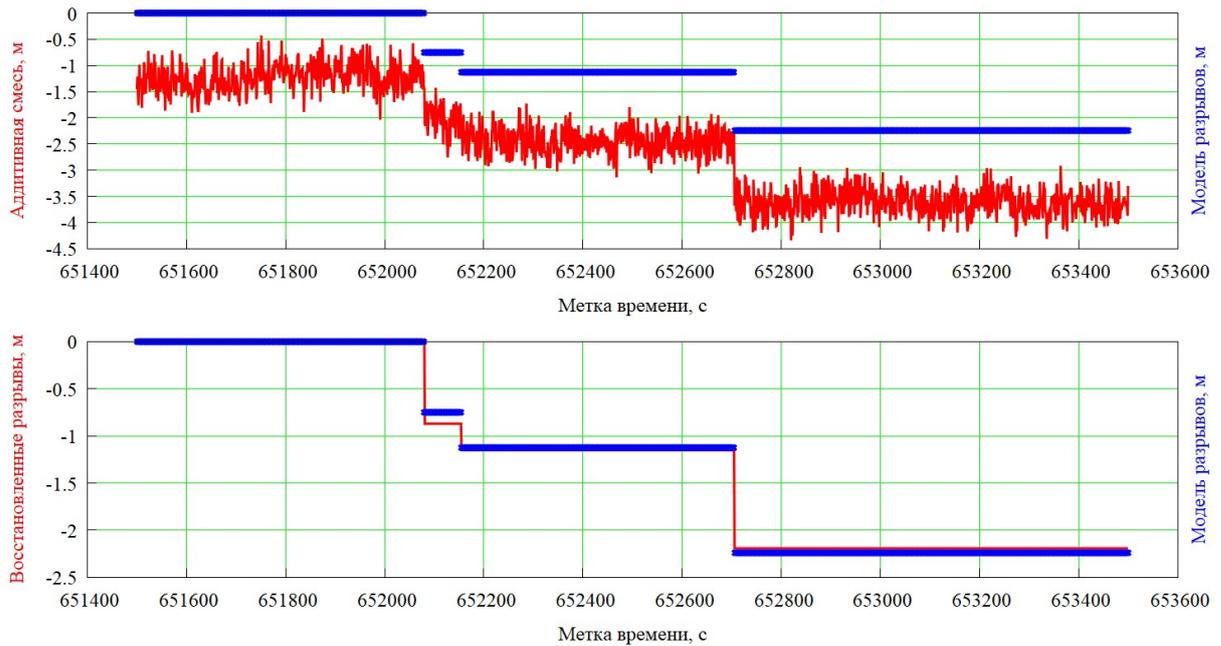


Рисунок 3.37 – Модель скачков на интервале и результаты восстановления кусочно-постоянной функции алгоритмом СРНАТV-LP

На графике (Рисунок 3.37) видно, что алгоритм обнаруживает как большие (отношение величины скачка к величине СКО шума больше единицы), так и малые (отношение величины скачка к величине СКО шума меньше единицы) скачки.

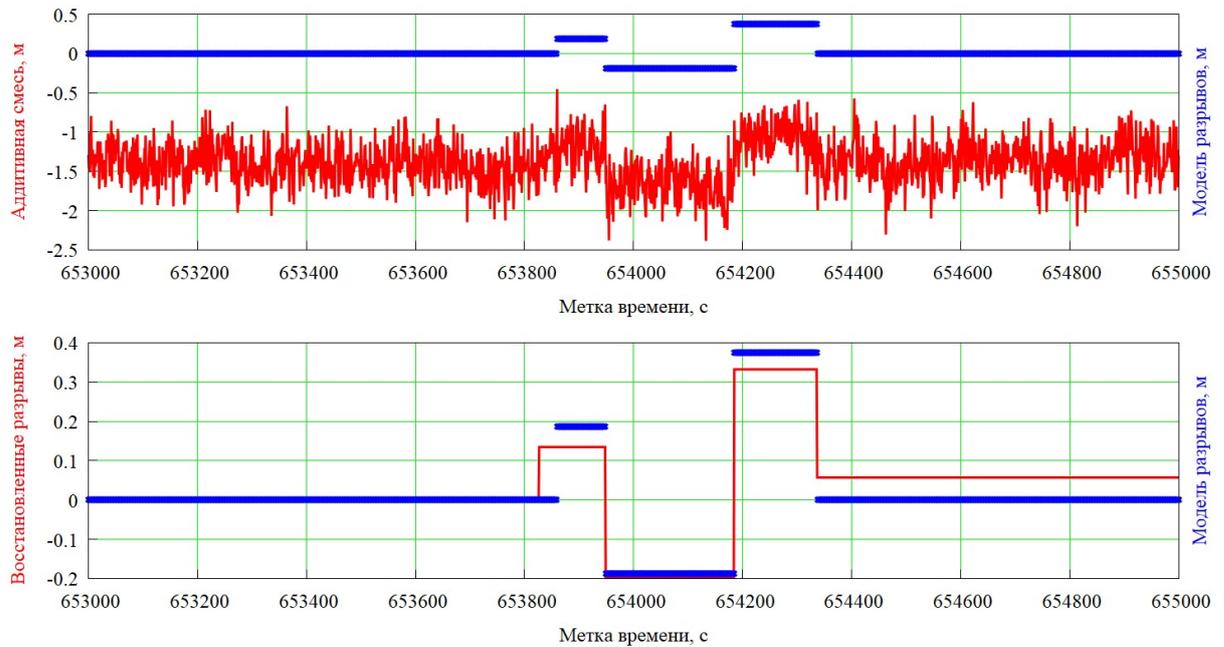


Рисунок 3.38 – Модель скачков на интервале и результаты восстановления кусочно-постоянной функции алгоритмом SRNATV-LP

На графике (Рисунок 3.38) показан случай, когда алгоритм обнаруживает малые скачки, однако не все положения скачков были определены правильно.

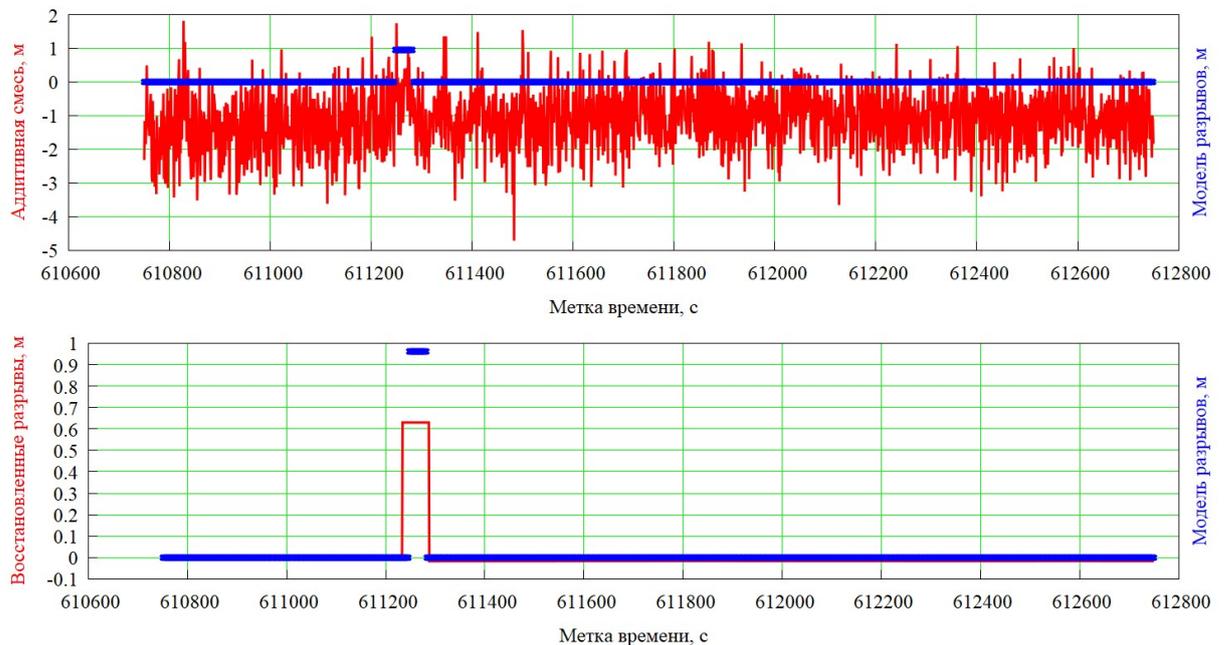


Рисунок 3.39 – Модель скачков на интервале и результаты восстановления кусочно-постоянной функции алгоритмом SRNATV-LP

При этом, как видно на графике (Рисунок 3.39), алгоритм обнаруживает даже близко стоящие скачки, которые в смеси реальных измерений и моделируемых скачков не видны.

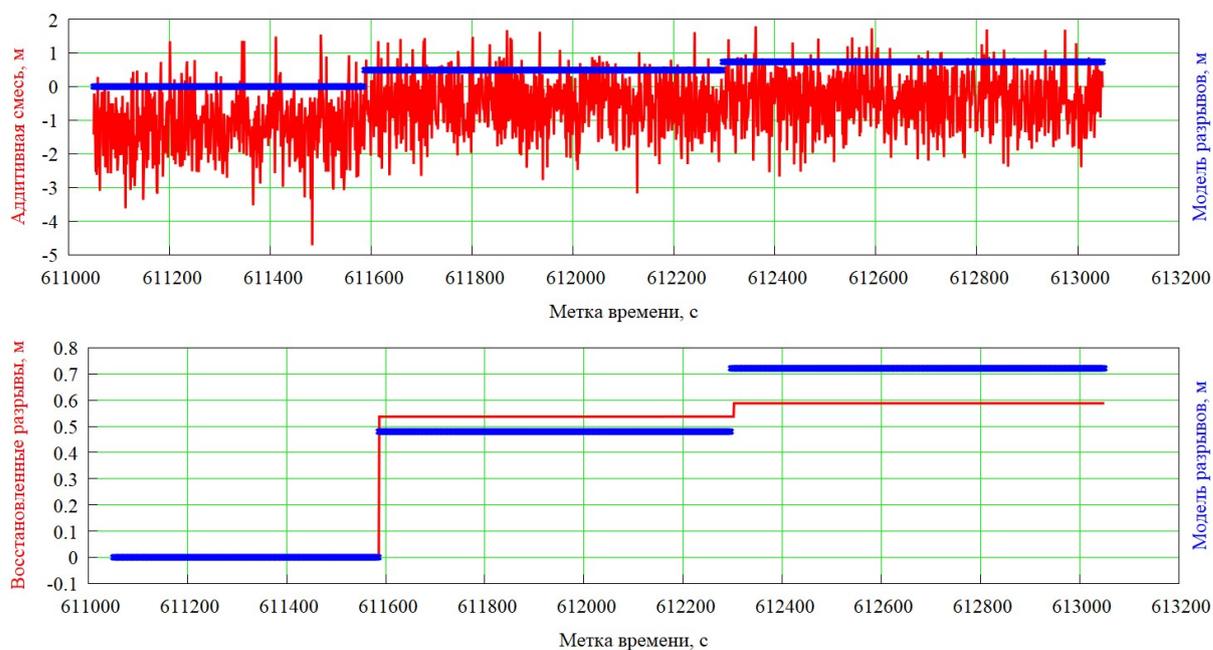


Рисунок 3.40 – Модель скачков на интервале и результаты восстановления кусочно-постоянной функции алгоритмом SRHATV-LP

На графике (Рисунок 3.40) показано обнаружение малых скачков.

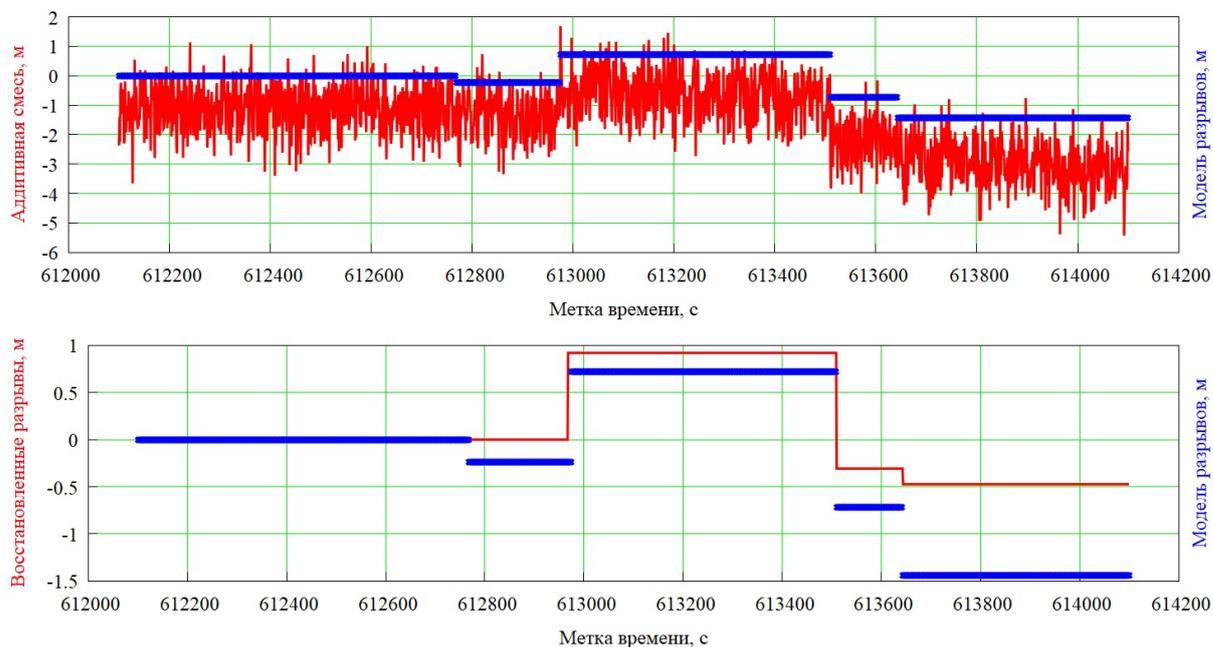


Рисунок 3.41 – Модель скачков на интервале и результаты восстановления кусочно-постоянной функции алгоритмом SRHATV-LP

Помимо этого, бывают ситуации, когда алгоритм пропускает малые скачки, как это продемонстрировано на графике (Рисунок 3.41).

Как видно из графиков (Рисунок 3.37 – Рисунок 3.41), алгоритмы SRHATV-LP позволяют восстанавливать множество скачков в фазовых измерениях, однако

при этом может возникать ошибка с положением и величинами обнаруженных скачков. Общее число успешно обнаруженных множественных скачков составляет приблизительно 70 % на 1000 экспериментов обнаружения.

3.6 Выводы по главе 3

В данной главе была решена задача поиска скачков в фазовых измерениях одночастотного навигационного приемника с использованием как высокостабильного, так и низкостабильного опорного генератора.

Для одночастотных навигационных приемников с высокостабильным опорным генератором поиск скачков фазовых измерений выполняется непосредственно по фазовым измерениям с исключением медленно меняющегося тренда линейным адаптивным фильтром. Скачки в фазовых измерениях, в таком случае, непосредственно видны в разностях по времени в фильтрованных фазовых измерениях. Данный алгоритм устойчив к пропускам в измерениях.

Для одночастотных навигационных приемников с низкостабильным опорным генератором было показано, что на шумовую составляющую фазовых измерений большое влияние оказывает шкала времени НП, для исключения которой предлагается использовать разность фазовых и кодовых измерений. Поиск скачков в фазовых измерениях в таком случае выполняется разработанными алгоритмами CPNAV-LP или CFATV-LP с вероятностью не менее 80 % при отношении величины скачка к СКО остаточного шума измерений, равным 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование было посвящено повышению точности обработки данных ГНСС, а именно, обработки фазовых измерений одночастотных НП и высокоточных финальных орбит НС, рассчитанных аналитическими центрами.

В первой главе диссертации была разработана и исследована методика использования полиномиальной аппроксимации для обнаружения малых аномалий в финальных орбитах НС и определения их типа. Исследованные в данной главе методы полиномиальной аппроксимации были применены в третьей главе для построения линейного фильтра, исключаяющего медленноменяющийся тренд в фазовых измерениях.

Во второй главе была исследована и разработана новая концепция адаптивной (свободной) интерполяции. Разработанная концепция успешно исследована на решении задачи интерполяции и экстраполяции орбит НС. С помощью данной концепции разработаны способы интерполяции кинематических параметров НС: *линейный* по 6 SP3-точкам и *нелинейный* по 2 SP3-точкам с точностью в несколько миллиметров. Данная концепция используется в третьей главе для построения линейного фильтра медленноменяющегося тренда измерений на основе адаптивного базиса, что позволяет сократить его размер по сравнению с полиномиальным базисом. Концепция свободной интерполяции, разработанная в данной главе, имеет большой спектр применения в задачах обработки данных ГНСС, в частности, уже нашла применение в задачах моделирования ионосферы, о чем написано в выводах по главе.

В третьей главе диссертации разработаны и исследованы методы поиска скачков в фазовых измерениях НП с использованием алгоритмов из семейства sparse recovery, а также полиномиальных (проработанных в первой главе) и адаптивных (проработанных во второй главе) методов.

Полученные результаты были успешно применены автором при решении задач обработки данных ГНСС, при выполнении работ, выполняемых СФУ по заказу АО «ИСС», что подтверждается актами внедрения.

В ходе проведения диссертационного исследования были достигнуты следующие результаты:

1. Разработана методика применения ортогональных полиномов высокой степени для обнаружения и идентификации аномалий в SP3-данных путем аппроксимации этих данных. Настоящая методика позволяет обнаруживать аномалии величиной 5 мм и более в SP3-данных;
2. Выполнен поиск аномалий в орбитах, рассчитанных аналитическими центрами IGS, CODE, ESA, ИАЦ ГЛОНАСС с использованием разработанной в рамках диссертации методики. Показаны результаты анализа обнаруженных в орбитах аномалий, приведена статистика таких аномалий с 2010 по 2018 годы. Наименьшее количество аномалий было обнаружено в SP3-данных, предоставляемых аналитическим центром CODE. Наибольшее число аномалий было обнаружено у аналитического центра ESA;
3. Разработан линейный метод свободной интерполяции, позволяющий с СКО не более 5 мм восстанавливать орбиту НС по 6 SP3-точкам без использования дополнительной информации;
4. Разработан нелинейный метод свободной интерполяции, который по двум SP3-точкам (используя все три координаты) и с привлечением дополнительной информации о векторе лунно-солнечных ускорений позволяет восстанавливать орбиту НС с СКО не более 2 мм;
5. Разработан линейный фильтр для исключения медленно меняющегося тренда из измерений НП на основе полиномиального и адаптивного базиса;
6. Линейная фильтрация фазовых измерений позволяет обнаруживать скачки в фазовых измерениях НП с высокостабильным опорным генератором;
7. Разработан алгоритм CFATV-LP для поиска скачков в фазовых измерениях, который позволяет обнаруживать одиночные скачки с вероятностью 0,8 и множественные скачки с вероятностью 0,7 по разности кодовых и фазовых измерений даже при низкостабильном опорном генераторе НП.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

CODE	–	Center for Orbit Determination in Europe (Центр определения орбит в Европе)
ESA	–	European Space Agency (Европейское космическое агентство)
IGS	–	International GNSS Service (Международная служба ГНСС)
ИАЦ КВНО	–	информационно-аналитический центр координатно-временного и навигационного обеспечения
НС	–	Навигационный спутник
НП	–	Навигационный приемник
ЭВО	–	Эфемеридно-временное обеспечение
SP3	–	Standard Product 3
SP3-данные	–	Данные об орбите навигационного спутника
SP3-точка	–	Эфемериды навигационного спутника на определенный момент времени из SP3-данных
СКО	–	Среднеквадратичное отклонение
ЦНИИ	–	Центральный научно-исследовательский институт
ГЛОНАСС	–	ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система
ГНСС	–	Глобальные навигационные спутниковые системы
RINEX	–	Receiver independent exchange
SINEX	–	Solution independent exchange
СОЗ	–	Солнце-объект-Земля
NANU	–	Notice Advisory to Navstar Users
IAU	–	International Astronomical Union
IERS	–	International Earth Rotation and Reference Systems Service
SOFA	–	Standards of Fundamental Astronomy
ПЗ.90	–	Параметры Земли 90.11
ATV	–	Approximation – Total Variation
CPHATV	–	Constrained Polynomial Hahn Approximation – Total Variation
ШВ	–	Шкала времени
СШВ	–	Системная шкала времени
SVD	–	singular value decomposition
LASSO	–	least absolute shrinkage and selection operator
CPATV	–	Constrained Polynomial Approximation – Total Variation
CFATV	–	Constrained Free Approximation – Total Variation

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2010 г., 800 с.
2. Teunissen P., Montenbruck O. (ed.). Springer handbook of global navigation satellite systems. – Springer, 2017.
3. Описание формата передачи данных SP3с [Электронный ресурс] – Режим доступа: <ftp://igs.org/pub/data/format/sp3c.txt> (дата обращения: 24.05.2020)
4. Официальный сайт IGS [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://www.igs.org/> (дата обращения: 02.09.2019)
5. Официальный сайт ИАЦ КВНО [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://www.glonass-iac.ru/> (дата обращения: 02.09.2019)
6. Официальный сайт CODE [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.aiub.unibe.ch/research/code___analysis_center/index_eng.html (дата обращения: 02.09.2019)
7. Официальный сайт ESA [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.esa.int/> (дата обращения: 02.09.2019)
8. Бартнев В., Гречкосеев А. Комбинированный алгоритм определения и прогнозирования параметров движения ИСЗ с использованием адаптации // Космические исследования. – 1986. – Т. 24. – №. 4. – С. 564–574.
9. Безменов И.В., Пасынок С.Л. Формирование опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС // Альманах современной метрологии. – 2015. – №. 2. – С. 143–158.
10. Schenewerk M. A brief review of basic GPS orbit interpolation strategies // GPS solutions. – 2003. – Vol. 6. – №. 4. – PP. 265–267.
11. Griffiths J., Ray J. R. On the precision and accuracy of IGS orbits // Journal of Geodesy. – 2009. – Vol. 83. – №. 3–4. – PP. 277–287. DOI 10.1007/s00190-008-0237-6

12. Ray J. Precision, accuracy, and consistency of GNSS products // *Encyclopedia of geodesy*. Springer, Cham. – 2016. – PP. 1–5.
13. Feng Y., Zheng Y. Efficient interpolations to GPS orbits for precise wide area applications // *GPS Solutions*. – 2005. – Vol. 9. – №. 4. – PP. 273–282.
14. Horemuz M., Andersson J. V. Polynomial interpolation of GPS satellite coordinates // *GPS solutions*. – 2006. – Vol. 10. – №. 1. – PP. 67–72.
15. Feng Y., Zheng Y. Efficient interpolations to GPS orbits for precise wide area applications // *GPS Solutions*. – 2005. – Vol. 9. – №. 4. – PP. 273–282.
16. Yousif H., El-Rabbany A. Assessment of several interpolation methods for precise GPS orbit // *The journal of navigation*. – 2007. – Vol. 60. – №. 3. – PP. 443–455.
17. Xue S., Yang Y. Recursive algorithm for fast GNSS orbit fitting // *GPS solutions*. – 2016. – Vol. 20. – №. 2. – PP. 151–157.
18. Prešeren P. P., Stopar B. Wavelet neural network employment for continuous GNSS orbit function construction: application for the assisted-GNSS principle // *Applied Soft Computing*. – 2013. – Vol. 13. – №. 5. – PP. 2526–2536.
19. Рекомендации для использования продуктов IGS [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://kb.igs.org/hc/en-us/articles/202102366-Analysis-Coordinator-tips-for-using-IGS-products> (дата обращения: 01.09.2017)
20. Blewitt G. An automatic editing algorithm for GPS data. *Geophysical research letters*. – 1990. – Т. 17. – № 3. – PP. 199–202.
21. Безменов И.В., Блинов И.Ю., Наумов А.В., Пасынок С.Л. Алгоритм определения скачков в комбинации Мельбурна-Вуббена, образованной из кодовых и фазовых данных измерений в глобальных навигационных спутниковых системах. *Измерительная техника*. – 2019. – № 5. – С. 25–30.
22. Farooq S. Z., Yang D., Jin T., Ada E. N. J. Survey of Cycle Slip Detection & Correction Techniques for Single Frequency Receivers. *2018 IEEE 18th International Conference on Communication Technology (ICCT)*. – 2018. – PP. 957–961, doi:10.1109/ICCT.2018.8599879.

23. Cederholm P., Plausinaitis. D. Cycle Slip Detection in Single Frequency GPS Carrier Observations Using Expected Doppler Shift. *Nordic Journal of Surveying and Real Estate Research*. – 2014. – Vol. 10. – №. 1. – PP. 63–79.
24. Zhao X., Niu Z., Li G., Shuai Q., Zhu B. A New Cycle Slip Detection and Repair Method Using a Single Receiver's Single Station B1 and L1 Frequencies in Ground-Based Positioning Systems. *Sensors*. – 2020. – Vol. 20. – № 2:346. doi:10.3390/s20020346.
25. Rapoport L. B. Compressive sensing approach for the cycle slips detection, isolation, and correction // Proceedings of the 27th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS+ 2014). – 2014. – PP. 2602–2610.
26. Farooq S. Z., Yang D., Jin T., Ada E. N. J. CS detection and correction techniques for RTK positioning using single-frequency GNSS receivers: trends and comparison, *Radar Sonar & Navigation IET*. – 2019. – Vol. 13. – №. 11. – PP. 1857–1866. doi:10.1049/iet-rsn.2019.0084
27. Li B., Liu T., Nie L., Qin Y. Single-frequency GNSS cycle slip estimation with positional polynomial constraint. *Journal of Geodesy*. – 2019. – Vol. 93. – № 9, PP. 1781–1803.
28. Пустошилов, А. Высокоточное восстановление орбит спутников ГНСС методом обучения по расширенным SP3-данным / А.С. Пустошилов и С.П. Царев // Успехи современной радиоэлектроники. – 2017. – № 12. – С. 48–52.
29. Пустошилов, А. Двухточечная свободная нелинейная интерполяция координат и скоростей навигационных спутников по SP3-данным / А.С. Пустошилов, Ю.Ю. Ушаков, С.П. Царев // Успехи современной радиоэлектроники. – 2018. – № 12. – С. 151–155.
30. Пустошилов, А. Метод обнаружения малых аномалий в финальных орбитах навигационных спутников ГЛОНАСС / А.С. Пустошилов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2019. – № 12. – С. 142–147.
31. Пустошилов, А.С. Обнаружение разрывов в фазовых измерениях одноканальных навигационных приемников при различной нестабильности

- опорных генераторов / А.С. Пустошилов и С.П. Царев // Ural Radio Engineering Journal. – 2021. – № 5(2). – С. 144–161.
32. Pustoshilov A.S., Tsarev S.P. Universal coefficients for precise interpolation of GNSS orbits from final IGS SP3 data // 2017 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). – IEEE, 2017. – PP. 1–6.
33. Пустошилов, А.С., Царев С.П. Высокоточное восстановление орбит спутников ГНСС методом обучения по расширенным SP3-данным / А.С. Пустошилов и С.П. Царев // Системы связи и радионавигации: сб. трудов. Красноярск: АО «НПП «Радиосвязь», 2017. – 416 с.
34. Пустошилов А.С., Царев С.П. Повышение точности интерполяции и экстраполяции орбит ГНСС // Современные проблемы радиоэлектроники: сб. науч. тр. Красноярск: СФУ. – 2018. – С. 91–94.
35. Пустошилов, А.С. Двухточечная свободная нелинейная интерполяция координат и скоростей навигационных спутников по SP3-данным / А.С. Пустошилов, Ю.Ю. Ушаков, С.П. Царев // Системы связи и радионавигации: сб. трудов. Красноярск: АО «НПП «Радиосвязь», 2018. – 272 с.
36. Пустошилов, А.С. Аномалии эфемеридных и временных продуктов IGS и метод их обнаружения // Решетневские чтения: сб. трудов. Красноярск: СибГУ им. М. Ф. Решетнева. – 2020. – с. 31–32.
37. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018615384 «Программа вычисления универсальных коэффициентов для интерполяции орбит спутников» / С.П. Царев (RU) и А.С. Пустошилов (RU); правообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский Федеральный Университет» (СФУ) (RU) – заявка № 2018612832 от 22.03.2018 г.; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 08.05.2018 г.
38. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018664238 «Программа вычисления аппроксимации одномерного ряда данных полиномами высоких степеней» / С.П. Царев (RU) и А.С. Пустошилов (RU); правообладатель Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования «Сибирский Федеральный Университет» (СФУ) (RU) – заявка № 2018661293 от 16.10.2018 г.; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 13.11.2018 г.

39. Царев С.П., Лобанов С.А. Оценка разрывов и аномальных выбросов в финальных орбитах обрабатывающих центров IGS // Решетневские чтения. – 2013. – Т. 2. – №. 17. – С. 120–122.
40. Beutler G., Rothacher M., Schaer, S., Springer T. A., Kouba J., Neilan R. E. The International GPS Service (IGS): An interdisciplinary service in support of Earth sciences. *Advances in Space Research*. – 1999. – Vol. 23. – № 4. – PP. 631–653.
41. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Государственное издательство Физматлит, 1962, С. 362.
42. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985.
43. Никифоров А.Ф., Скачков М.В. Методы вычисления q-полиномов // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13. – №. 8. – С. 85–94.
44. Никифоров А.Ф., Скачков М.В. Ортогональные полиномы Хана в моделях регрессии // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – №. 4. – С. 125–128.
45. Tsarev S.P., Kytmanov A.A. Discrete orthogonal polynomials as a tool for detection of small anomalies of time series: a case study of GPS final orbits // arXiv preprint arXiv:2004.00414. – 2020.
46. Interface Control Document ICD-GPS-240 [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://navcen.uscg.gov/pdf/gps/ICD_GPS_240C.pdf (дата обращения: 02.09.2019)
47. Petit G., Luzum B. IERS conventions (2010). – Bureau International des Poids et mesures sevres (france), 2010.
48. Ushakov Y. Evaluation of acceleration and motion model parameters from IGS final orbits // 2013 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). – IEEE, 2013. – PP. 1–2.

49. Beutler G. et al. Extended orbit modeling techniques at the CODE processing center of the international GPS service for geodynamics (IGS): theory and initial results // *Manuscripta geodetica*. – 1994. – Vol. 19. – №. 6. – PP. 367–386.
50. Рекомендации для использования продуктов IGS [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://kb.igs.org/hc/en-us/articles/202102366-AnalysisCoordinator-tips-for-using-IGS-products> (дата обращения: 01.09.2017)
51. Center I. A. U. S. SOFA: Standards of Fundamental Astronomy // *Astrophysics Source Code Library*. – 2014. – С. ascl: 1403.026. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.iausofa.org/> (дата обращения: 01.09.2018)
52. РД 50-25645.325-89 Методические указания. Спутники Земли искусственные. Основные системы координат для баллистического обеспечения полетов и методика расчета звездного времени. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://docs.cntd.ru/document/1200050152> (дата обращения: 01.09.2018)
53. Валиханов М.М., Денисенко В.В., Царев С.П. Высокоточная модель ионосферной задержки сигналов ГНСС на основе многомерной свободной интерполяции // *Успехи современной радиоэлектроники*. – 2018. – №. 12. – С. 90–94.
54. Царев С.П., Денисенко В.В., Валиханов М.М. Многомерная свободная интерполяция в задаче высокоточного моделирования ионосферной задержки сигналов в средних широтах и вблизи экватора // *Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика*. – 2018. – Т. 11. – №. 6. – С. 781–791.
55. Kim H.S., Lee H.K. Elimination of clock jump effects in low-quality differential GPS measurements // *Journal of Electrical Engineering and Technology*. – 2012. – Vol. 7. – №. 4. – PP. 626–635.
56. Fath-Allah T.F. A new approach for cycle slips repairing using GPS single frequency data // *World applied sciences journal*. – 2010. – Vol. 8. – №. 3. – PP. 315–325.

57. Momoh J.A., Bhattarai S., Ziebart M. Receiver clock jump and cycle slip correction algorithm for single-frequency GNSS receivers // *GPS Solutions*. – 2019. – Vol. 23. – №. 2. – PP. 1–11.
58. Markovsky I., Usevich K. Low rank approximation. – London : Springer, 2019. – Vol. 139.
59. Lyu Q. et al. A comparison of typical ℓ_p minimization algorithms // *Neurocomputing*. – 2013. – Vol. 119. – PP. 413–424.
60. Rapin J. et al. Sparse and non-negative BSS for noisy data // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2013. – Vol. 61. – №. 22. – PP. 5620–5632.
61. Rudin L.I., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // *Physica D: nonlinear phenomena*. – 1992. – Vol. 60. – №. 1–4. – PP. 259–268.
62. Condat L. A direct algorithm for 1-D total variation denoising // *IEEE Signal Processing Letters*. – 2013. – Vol. 20. – №. 11. – PP. 1054–1057.
63. Selesnick I.W., Arnold S., Dantham V.R. Polynomial smoothing of time series with additive step discontinuities // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2012. – Vol. 60. – №. 12. – PP. 6305–6318.
64. Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*. – 1996. – Vol. 58. – №. 1. – PP. 267–288.
65. Wainwright M. *Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations*. – Chapman and Hall/CRC, 2015.
66. Donoho D.L. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal ℓ_1 -norm solution is also the sparsest solution // *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*. – 2006. – Vol. 59. – №. 6. – PP. 797–829.
67. Candes E.J., Romberg J.K., Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements // *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*. – 2006. – Vol. 59. – №. 8. – PP. 1207–1223.

68. Donoho D.L. Compressed sensing: IEEE Transactions on Information Theory, 52, no. 4, 1289–1306. – 2006.
69. De Maio A., Eldar Y.C., Haimovich A.M. (ed.). Compressed sensing in radar signal processing. – Cambridge University Press, 2019.
70. Yang Z. et al. Sparse methods for direction-of-arrival estimation // Academic Press Library in Signal Processing. – Vol. 7. – Academic Press, 2018. – PP. 509–581.
71. Luo J. et al. Sparse Reconstruction for Synthetic Aperture Radar based on Split SPICE // 2020 IEEE Radar Conference (RadarConf20). – IEEE, 2020. – PP. 1–5.
72. Eldar Y.C. Sampling theory: Beyond bandlimited systems. – Cambridge University Press, 2015.
73. Candes E.J., Fernandez-Granda C. Super-resolution from noisy data // Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 19. – №. 6. – PP. 1229–1254.
74. Lustig M. et al. Compressed sensing MRI // IEEE signal processing magazine. – 2008. – Vol. 25. – №. 2. – PP. 72–82.
75. Eldar Y.C., Kutyniok G. (ed.). Compressed sensing: theory and applications. – Cambridge university press, 2012.
76. Boche H. et al. (ed.). Compressed Sensing and Its Applications: Second International MATHEON Conference 2015. – Birkhäuser, 2018.
77. Patel V.M., Chellappa R. Sparse representations and compressive sensing for imaging and vision. – Springer Science & Business Media, 2013.
78. Hochbaum D.S. An efficient and effective tool for image segmentation, total variations and regularization // International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. – PP. 338–349.
79. Chambolle A. et al. An introduction to total variation for image analysis // Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery. – de Gruyter, 2010. – PP. 263–340.

80. Polissano K. et al. A convex approach to superresolution and regularization of lines in images // *SIAM Journal on Imaging Sciences*. – 2019. – Vol. 12. – №. 1. – PP. 211–258.
81. Genzel M., März M., Seidel R. Compressed Sensing with 1D Total Variation: Breaking Sample Complexity Barriers via Non-Uniform Recovery // *arXiv preprint arXiv:2001.09952*. – 2020.
82. Liu Z. et al. Revisit 1D Total Variation restoration problem with new real-time algorithms for signal and hyper-parameter estimations // *arXiv preprint arXiv:2012.09481*. – 2020.
83. Storath M., Weinmann A., Unser M. Exact algorithms for L^1 -TV regularization of real-valued or circle-valued signals // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2016. – Vol. 38. – №. 1. – PP. A614–A630.
84. Li D. et al. BDS Cycle Slips Detection and Repair Based on Compressive Sensing // *China Satellite Navigation Conference*. – Springer, Singapore, 2018. – PP. 597–607.
85. Li X., Eldar Y.C., Scaglione A. Low complexity acquisition of GPS signals // *2011 IEEE 12th International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*. – IEEE, 2011. – PP. 56–60.
86. Chang C.L. Modified compressive sensing approach for GNSS signal reception in the presence of interference // *GPS solutions*. – 2016. – Vol. 20. – №. 2. – PP. 201–213.
87. He G. et al. GPS signal acquisition based on compressive sensing and modified greedy acquisition algorithm // *IEEE Access*. – 2019. – Vol. 7. – PP. 40445–40453.
88. He G. et al. Sparse GLONASS signal acquisition based on compressive sensing and multiple measurement vectors // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2020. – Vol. 2020.
89. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова Российской Академии наук [Электронный ресурс] – Режим досту-

- па: <https://izmiran.ru/services/iweather/storm/index.shtml> (дата обращения: 15.12.2020)
90. Crustal Dynamics Data Information System NASA's Archive of Space Geodesy Data [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://cdis.nasa.gov/Data_and_Derived_Products/CDDIS_Archive_Access.html 1 (дата обращения: 01.06.2020)
 91. Gurtner W., Estey L. RINEX: The receiver independent exchange format version 2.11. – 2007.
 92. Harris R. B., Mach R. G. The GPSTk: an open source GPS toolkit // GPS Solutions. – 2007. – Vol. 11. – №. 2. – PP. 145–150.
 93. Dougherty D., Robbins A. sed & awk: UNIX Power Tools. – " O'Reilly Media, Inc.", 1997.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. АКТ ВНЕДРЕНИЯ СФУ



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по науке ФГАОУ ВО
«Сибирский Федеральный университет»

Барышев Р. А.

2021 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Пустошилова А. С.

«Повышение точности обработки данных ГНСС

с использованием полиномиальных и адаптивных методов»

Настоящим актом подтверждается использование результатов диссертационной работы Пустошилова Александра Сергеевича в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Пустошиловым А.С. разработана усовершенствованная методика аппроксимации орбит навигационных спутников, для выявления малых аномалий. Разработан линейный фильтр, позволяющий исключать медленно меняющийся тренд в фазовых и кодовых измерениях навигационных приемников.

Результаты, полученные в рамках выполнения диссертационной работы, использовались на кафедре радиотехники ИИФиРЭ СФУ при подготовке исходных данных для опытно-конструкторской работы «Разработка программных компонент информационно-логического взаимодействия из состава специального программного обеспечения системы контроля и закладки признака недостоверности навигационного сигнала» в рамках договора №1220187114842010128001698/722-28/18 от 21.03.2019.

Руководитель департамента науки
и инновационной деятельности СФУ

Казиков В. С.

Руководитель темы

Валиханов М.М.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ ВНЕДРЕНИЯ АО «ИСС»

УТВЕРЖДАЮ

АО «Информационные спутниковые системы»

им. академика М.Ф. Решетнёва»

Заместитель генерального конструктора по разработке

космических систем, общему проектированию и

управлению космическими аппаратами

Кузовников Александр Витальевич



_____ 2021 г.

АКТ**об использовании результатов диссертационной работы****«Повышение точности обработки данных ГНСС****с использованием полиномиальных и адаптивных методов»****Пустошилова Александра Сергеевича****в НИОКР АО «Информационные спутниковые системы»****им. Академика М. Ф. Решетнёва**

Настоящим Актом подтверждается использование результатов диссертационной работы Пустошилова А.С. в ОКР «Разработка технического проекта и макета беззапросной измерительной системы помехоустойчивой (БИС-НП)» АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнёва.

При выполнении раздела ОКР «Обоснование достижимости требования по уровню остаточного рассогласования ШВ БИС-НП с ШВ ГЛОНАСС» (документ ФЕИТ.461351.011ПЗ) использована усовершенствованная методика аппроксимации орбит навигационных спутников, для выявления малых аномалий.

Методика поиска и обнаружения аномалий в орбитах навигационных спутников, разработанная в диссертации, позволила обнаружить аномалии величиной более 5 мм, а также определить тип наблюдаемой аномалии. В

методике приведены возможные типы аномалий, а также их влияние на результаты аппроксимации, дается оценка величины аномалии по результатам оценки невязки аппроксимации.

Начальник лаборатории 105 Марарескул Д.И.