

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*



БОГДАНОВ ДМИТРИЙ ВАЛЕРИЕВИЧ

**НУЛИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ  
МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

01.01.01 — вещественный, комплексный  
и функциональный анализ

*Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель  
д-р физ.-мат. наук, доцент  
Садыков Тимур Мрадович

Красноярск — 2022

# Содержание

Введение . . . . .	3
1 Амёбы гипергеометрических полиномов . . . . .	20
1.1 Гипергеометрические системы дифференциальных уравнений и амёбы их полиномиальных решений . . . . .	20
1.2 Оптимальность гипергеометрических полиномов многих переменных . . . . .	28
1.3 Классические гипергеометрические полиномы двух переменных и их амёбы . . . . .	50
1.4 Примеры . . . . .	52
2 Аффинные и компактифицированные амёбы и их контуры . . . . .	57
2.1 Амёбы полиномов двух переменных . . . . .	59
2.2 Оптимальные полиномы и их амёбы . . . . .	61
2.3 Контур амёб полиномов двух переменных . . . . .	66
2.4 Компактифицированные амёбы полиномов двух переменных . . . . .	69
2.5 Многомерный случай . . . . .	69
Заключение . . . . .	73
Указатель обозначений . . . . .	74
Список использованных источников . . . . .	76
Работы автора по теме диссертации . . . . .	82
Приложения . . . . .	83
Приложение А. Алгоритмы вычисления амёб . . . . .	83
Приложение Б. Фрагменты исходного кода программ . . . . .	87
Приложение В. Амёбы гипергеометрических полиномов . . . . .	89

# Введение

Задача нахождения нулей полиномов одного и нескольких переменных над различными множествами аргументов и изучения их свойств является одной из наиболее фундаментальных в математике. Аналитическое и численное решение алгебраических уравнений и их систем играет важную роль в многочисленных разделах математической науки и её приложений.

В свою очередь, задача построения алгебраического многообразия с заданными свойствами также лежит в основе многих ключевых проблем современной математики. К их числу относятся 16-я проблема Гильберта, а также многочисленные открытые вопросы вещественной алгебраической геометрии и теории аппроксимации.

Наиболее глубоко изученным является классический одномерный случай, в котором аргумент полинома принимает значения в поле вещественных или в поле комплексных чисел. Хорошо известно, что интерполяционный полином Лагранжа даёт явный вид полинома одного переменного с графиком, проходящим через заданные точки. А именно, пусть имеется набор из  $d + 1$  точек  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_d, y_d)$  вещественной плоскости  $\mathbb{R}^2$ , где все  $x_i$  попарно различны. Тогда полином минимальной степени  $d$ , график которого проходит через все заданные точки, имеет вид  $L(x) = \sum_{i=0}^d y_i l_i(x)$ , где базисные полиномы  $l_i(x)$  определяются по формуле

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_d}{x_i - x_d}.$$

В многомерном случае построение алгебраического многообразия с заданными алгебро-геометрическими свойствами является, как правило, задачей трудной и часто неразрешимой.

Вместе с тем, задача определения кратностей корней полиномов является одной из центральных в теории особенностей. В одномерном случае ответ на вопрос о наличии у полинома кратных корней даётся с использованием понятия *дискриминанта*. Напомним, что для любого полинома  $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  одного переменного существует полином  $\mathcal{D}(p) = a_d^{2d-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  — корни полинома  $p(x)$  с учётом их кратностей, называемый дискриминантом. Дискриминант зависит от коэффициентов  $a_0, \dots, a_d$  полинома  $p(x)$ , однозначно определён (с точностью до знака), имеет целые коэффициенты и равен нулю, если  $p(x)$  имеет кратный корень. Также дискриминант полинома равен (с точностью до знака) результанту данного полинома и его производной, поделённому на его старший коэффициент:  $\mathcal{D}(p) = \frac{(-1)^{d(d-1)/2}}{a_d} \cdot \mathcal{R}(p, p')$ . Здесь через  $\mathcal{R}(p, p')$  обозначен определитель матрицы Сильвестра

$$\begin{vmatrix} a_d & a_{d-1} & a_{d-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_d & a_{d-1} & a_{d-2} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_d & a_{d-1} & a_{d-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ da_d & (d-1)a_{d-1} & (d-2)a_{d-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & da_d & (d-1)a_{d-1} & (d-2)a_{d-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & da_d & (d-1)a_{d-1} & (d-2)a_{d-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

В многомерном случае под кратным корнем полинома понимается точка, в которой этот полином обращается в нуль вместе со своим градиентом. Задача о нахождении алгебраического условия наличия кратных кор-

ней у полинома нескольких (комплексных) переменных приводит к понятию  $A$ -дискриминанта [1, 31, глава 9].

Классическим методом изучения и способом визуализации алгебраического многообразия в многомерном комплексном пространстве является обращение к его диаграмме Рейнхардта.

**Определение 0.1.** *Диаграммой Рейнхардта* [14] множества  $M \subset \mathbb{C}^n$  называется его образ относительно отображения

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Напомним, что неотрицательная функция  $f(x)$  называется *логарифмически выпуклой* в некоторой области, если для любых  $t = (t_1, \dots, t_n)$  и  $s = (s_1, \dots, s_n)$  из этой области и  $\xi_i > 0$ ,  $\eta_i > 0$ ,  $\xi_i + \eta_i = 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$  выполняется неравенство

$$f(\xi_1 t_1 + \eta_1 s_1, \dots, \xi_n t_n + \eta_n s_n) \leq f^{\xi_1 + \dots + \xi_n}(t_1, \dots, t_n) \cdot f^{\eta_1 + \dots + \eta_n}(s_1, \dots, s_n).$$

Если функция логарифмически выпукла, то она либо тождественно равна нулю, либо строго положительна и  $\ln f(x)$  — выпуклая функция. Из классического курса комплексного анализа известно, что область сходимости степенного ряда

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} (x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_n - a_n)^{k_n}$$

является логарифмически выпуклой.

Как было впервые замечено в [31, глава 6], рассмотрение диаграммы Рейнхардта алгебраического многообразия в логарифмических координатах даёт существенные преимущества с точки зрения многих задач анализа, а также комплексной и выпуклой геометрии. Известно, что комплексная прямая изображается на диаграмме Рейнхардта неограниченным полиэд-

ром (рисунок 1 (а)). Логарифмическая замена переменных  $(|x_1|, \dots, |x_n|) \mapsto (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_n|)$  преобразует данный полиэдр в фигуру, называемую *амёбой* комплексной прямой (рисунок 1 (б)). В книге [31, глава 6] предложены два конкурирующих определения амёбы полинома: аффинная и компактифицированная версии.

**Определение 0.2.** (Аффинная) амёба  $\mathcal{A}_p$  полинома Лорана  $p(x)$  (или алгебраической гиперповерхности  $\{p(x) = 0\}$ ) есть образ гиперповерхности  $p(x) = 0$  относительно отображения

$$\text{Log} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_n|).$$

Важную роль в дальнейшем играет выпуклый многогранник, однозначным образом сопоставляемый заданному полиному.

**Определение 0.3.** Многогранник Ньютона  $\mathcal{N}_{p(x)}$  полинома Лорана  $p(x)$  определяется как выпуклая оболочка множества  $S$  показателей мономов  $p(x)$ .

**Определение 0.4.** Компактифицированная амёба  $\overline{\mathcal{A}}_p$  полинома Лорана  $p(x)$  (или алгебраической гиперповерхности  $\{p(x) = 0\}$ ) есть образ гиперповерхности  $p^{-1}(0)$  относительно моментного отображения [32] в многогранник Ньютона  $\mathcal{N}_p$ :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{\sum_{\alpha \in S} \alpha \cdot |x^\alpha|}{\sum_{\alpha \in S} |x^\alpha|} = \frac{\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot |x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}|}{\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S} |x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}|}.$$

Определения 0.2 и 0.4 представляют интерес только в размерности два и выше, поскольку амёба полинома одного переменного является конечным множеством, которое можно исследовать с помощью различных классических методов локализации корней полиномов.

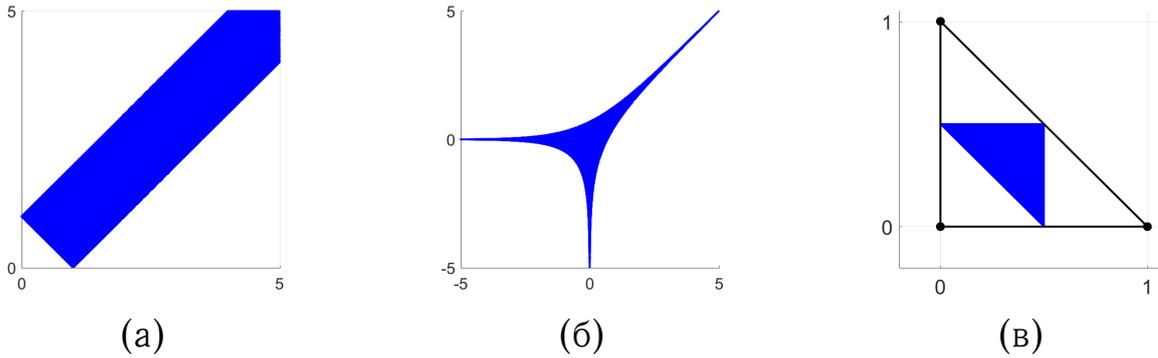


Рисунок 1 — Диаграмма Рейнхардта, амёба и компактифицированная амёба комплексной прямой  $f(x, y) = 1 + x + y$

Физическая интерпретация амёбы  $\mathcal{A}_p$  и её *дополнения*  ${}^c\mathcal{A}_p$  дана в работе [38]. Агрегатное состояние вещества в каждой точке модели зависит от её расположения: «замороженное» в неограниченной компоненте дополнения, «жидкое» внутри амёбы и «газообразное» в ограниченной компоненте дополнения. В этой же работе теория амёб используется для анализа граней кристаллов и случайных поверхностей. Кроме этого, теория амёб применяется к исследованию асимптотик многомерных разностных уравнений, играющих важную роль в теории обработки цифровых сигналов [7].

Изучение амёб комплексных многообразий естественным образом приводит к понятиям относительно новой области математики — тропической геометрии [5, 35]. Простейшим объектом тропической геометрии является *тропическая прямая* (рисунок 2), представляющая собой объединение трёх лучей на вещественной плоскости  $\mathbb{R}^2$ , выходящих из одной точки. Как и в евклидовой геометрии, две тропические прямые общего положения пересекаются в единственной точке, и через любые две точки общего положения проходит единственная тропическая прямая.

Всякое комплексное число  $X$  представимо в виде  $X = \varphi r$ , где  $|\varphi| = 1$ ,  $\varphi \in \mathbb{C}$  называется фазой и  $r \geq 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$  — амплитудой соответственно. Предполагая, что  $r > 0$ , положим  $r = t^x$ , где  $t > 1$  — фиксированное вещественное число и  $x \in \mathbb{R}$ . Далее рассмотрим отображение  $\text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , заданное в координатах в виде  $(x, y) \mapsto (\log_t |x|, \log_t |y|)$ . Образ прямой  $L(t)$  при отоб-

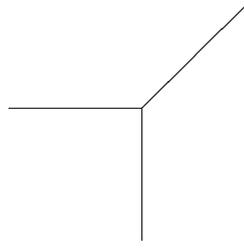


Рисунок 2 — Тропическая прямая

ражении  $\text{Log}_t$  содержится при больших  $t$  в  $\varepsilon$ -окрестности некоторой тропической прямой. Величина  $\varepsilon$  этой окрестности тем меньше, чем больше  $t$ , и при  $t \rightarrow \infty$  данная величина  $\varepsilon$  стремится к нулю. Таким образом, тропическую прямую можно рассматривать как вырождение комплексной прямой  $L(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Соответственно, *тропическим полиномом* степени  $d$  называют кусочно-линейную функцию

$$p(x, y) = \left\langle \sum_{i+j \leq d} \alpha_{i,j} x^i y^j \right\rangle = \max_{i+j \leq d} (ix + jy + \alpha_{i,j}),$$

где  $\alpha_{i,j}$  — вещественные постоянные. Каждый тропический полином однозначно определяет некоторую *тропическую кривую* — граф на тропической плоскости, являющийся множеством негладкости этого полинома и снабжённый кратностями всех его рёбер [35, 59].

Напомним, что *16-я проблема Гильберта* связана с исследованием взаимного расположения овалов вещественных алгебраических кривых степени  $d$  (аналогичный вопрос имеет место для алгебраических поверхностей). Как было доказано Харнаком, число компонент связности кривой не может превосходить  $g + 1$ , где  $g = (d - 1)(d - 2)/2$  — её род.

Вещественная алгебраическая кривая степени  $d$  задаётся полиномом  $\sum_{i+j \leq d} A_{i,j} x^i y^j$  от двух переменных степени  $d$  с вещественными коэффициентами. Данная кривая состоит из некоторого количества овалов и гладких

ветвей, «уходящих на бесконечность». Если рассмотреть замыкание кривой на вещественной проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$ , то каждая из компонент замыкания окажется замкнутой (овалом). Определить расположение этих овалов в общем случае достаточно сложно. Задача упростится, если рассмотреть предельную кривую при тропическом вырождении. А именно, рассмотрим семейство кривых  $C(t)$ , зависящих от вещественного параметра  $t > 0$ , и предположим, что коэффициенты уравнения кривой  $C(t)$  имеют при  $t \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение вида  $A_{i,j}(t) \sim a_{i,j}t^{\alpha_{i,j}}$  (например, можно положить  $A_{i,j}(t) = a_{i,j}t^{\alpha_{i,j}}$ ,  $a_{i,j} \neq 0$ ). Тогда количество овалов кривой  $C(t)$  и их взаимное расположение при  $t \gg 0$  однозначно определяются формой предельной тропической кривой (задаваемой показателями  $\alpha_{i,j}$ ) и знаками коэффициентов  $a_{i,j}$  [70].

Указанную процедуру построения кривой  $C(t)$  удобно переформулировать на двойственном языке диаграмм Ньютона. Эта процедура, носящая название «склейка Виро» [34, 70], состоит в последовательном выполнении следующих шагов. Выбирается произвольная триангуляция диаграммы Ньютона  $\mathcal{N}$  с вершинами в целых точках, которым сопоставляются произвольным образом знаки  $+$  или  $-$ . Отражением диаграммы Ньютона и её триангуляции относительно координатных осей строится триангуляция квадрата  $|i| + |j| \leq d$ , называемого *расширенной диаграммой Ньютона*. Дальнейшее сопоставление вершин расширенной диаграммы Ньютона и их знаков производится по следующему правилу: знак вершины  $(\varepsilon_1 i, \varepsilon_2 j)$  отличается от знака вершины  $(i, j)$  множителем  $\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Затем в построенной триангуляции расширенной диаграммы Ньютона в каждом из треугольников середины сторон, концы которых окрашены в разные цвета (если таковые имеются), соединяются отрезками. Объединение всех построенных отрезков задает ломаную линию на расширенной диаграмме Ньютона. Эта линия и является комбинаторной моделью строящейся алгебраической кривой на аффинной плоскости  $\mathbb{R}^2$ . После отождествления противоположных точек

границы расширенной диаграммы Ньютона получается поверхность, гомеоморфная проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$ , а образ построенной ломаной является комбинаторной моделью строящейся проективной кривой.

В настоящей диссертации понятия и методы тропической геометрии и теории амёб комплексных гиперповерхностей применяются для описания множества нулей гипергеометрических полиномов нескольких комплексных переменных. Всюду в дальнейшем будут использоваться следующие определения.

**Определение 0.5.** *Дифференциальным уравнением Гаусса* называется уравнение вида

$$x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} + (c - (a+b+1)x) \frac{du}{dx} - abu = 0, \quad (1)$$

где параметры  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Данное уравнение имеет три особые точки: 0, 1 и  $\infty$ .

Если параметр  $c$  не равен неположительному целому числу ( $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ), то регулярное в нуле решение уравнения Гаусса можно разложить в ряд, называемый *гипергеометрическим*:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; x) \equiv F(a, b; c; x) &= 1 + \frac{abx}{c1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1)2!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}, \end{aligned}$$

где функция  $F(a, b; c; x)$  — *гипергеометрическая* функция и  $(p)_n = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$  — символ Похгаммера.

Второе линейно независимое решение дифференциального уравнения Гаусса при всех целых неположительных  $c$  ( $c = 0, -1, -2, \dots$ ) имеет вид  $x^{1-c} F(b-c+1, a-c+1; 2-c; x)$  и особую точку при  $x = 0$ .

Интегральное представление гипергеометрической функции при  $c - a - b > 0$  может быть записано следующим образом:

$$F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} dt.$$

Важным свойством гипергеометрической функции является то, что многие специальные и элементарные функции можно получить, как её частный случай, выбором подходящих значений параметров и преобразования независимого аргумента.

Классическим примером семейства ортогональных полиномов является семейство полиномов *Чебышёва первого рода*, которые задаются соотношением

$$T_d(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{d}{2k} (x^2 - 1)^k x^{d-2k},$$

(см. рисунок 3), определены на отрезке  $[-1; 1]$  и имеют корни  $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2d}\pi\right)$ ,  $k = 1, \dots, d$ , являющиеся оптимальными узлами в различных интерполяционных схемах. Каждый полином  $T_d(x)$  характеризуется как полином степени  $d$  со старшим коэффициентом  $2^{d-1}$ , который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ . Полиномы Чебышёва первого рода  $T_d(x)$  могут быть также определены с помощью рекуррентного соотношения

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{d+1}(x) = 2xT_d(x) - T_{d-1}(x).$$

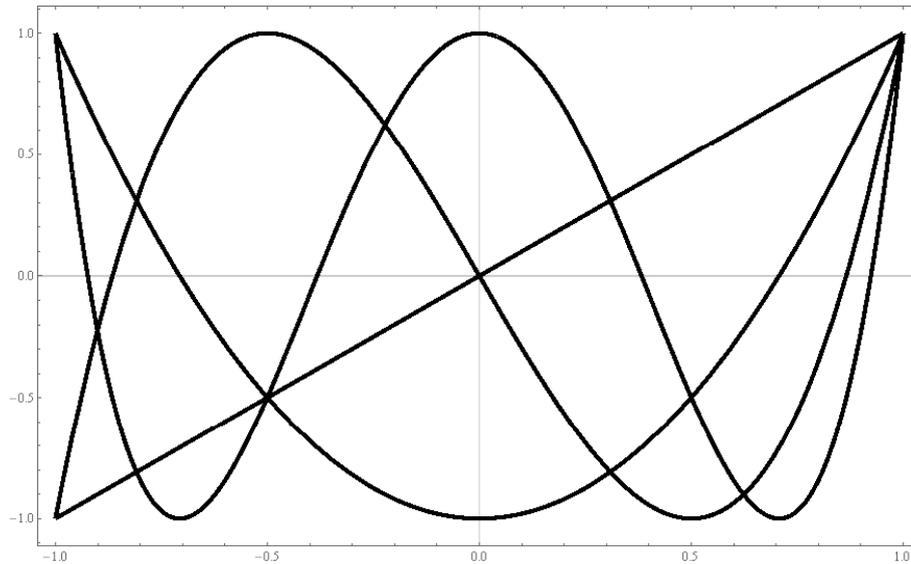


Рисунок 3 — Полиномы Чебышёва  $T_1(x), \dots, T_4(x)$

**Целью настоящей диссертации** является изучение тропико-геометрических свойств нулей гипергеометрических полиномов нескольких комплексных переменных и их амёб.

**Первая глава** посвящена исследованию оптимального свойства множества нулей гипергеометрических полиномов нескольких переменных. Как известно, структура множества нулей гипергеометрической функции может быть весьма сложной [8]. Этот вопрос тщательно изучался как в классических (см., например, [40, 53]), так и в недавних работах (см. [22, 23, 72] и ссылки в них). Тем не менее, полное описание множества нулей полиномиальных случаев даже простейшей неэлементарной гипергеометрической функции  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  представляет серьёзную проблему. Варьируя значения параметров  $a, b, c$  в различных диапазонах, можно получить очень разнообразные множества нулей. Некоторые из них являются достаточно регулярными (см., например, рисунок 4), тогда как другие практически хаотичны [15, 22, 23].

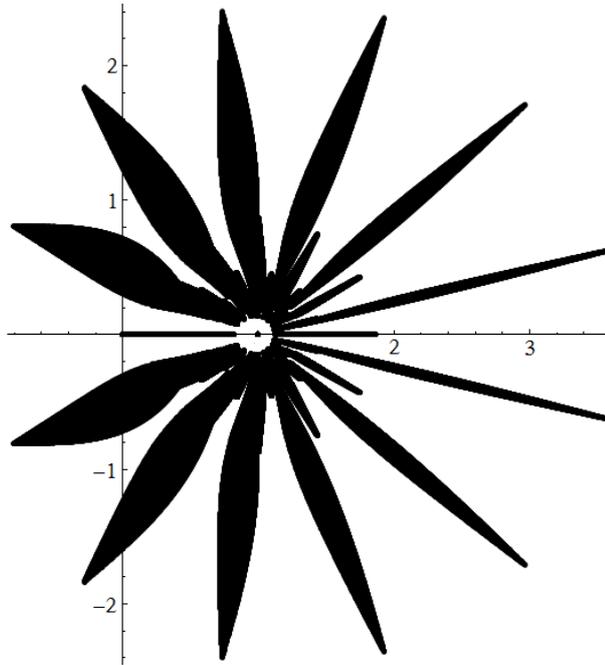


Рисунок 4 — «Гипергеометрическая астра»: нули полиномов  ${}_2F_1(-12, b; c; x)$  при  $b, c \in \left\{ \frac{k}{1000} : k = 100, \dots, 4000 \right\}$

Полиномиальные случаи гипергеометрических функций одного и многих переменных весьма разнообразны. Они включают в себя: классические полиномы Чебышёва первого и второго рода, Гегенбауэра, Эрмита, Якоби, Лагерра и Лежандра, а также их многочисленные многомерные аналоги [24].

Несмотря на разнообразие семейств гипергеометрических полиномов одного и многих переменных, большинство из них имеют следующие ключевые свойства, которые описываются термином «гипергеометрические» [22, 23, 24]:

1. Полиномы плотны (возможно, после соответствующего мономиального преобразования переменных). Напомним, что полином Лорана  $p(x)$  называется *плотным*, если  $\text{supp } p(x) = \mathcal{N}_{p(x)} \cap \mathbb{Z}^n$ .

2. Коэффициенты гипергеометрического полинома удовлетворяют рекуррентным соотношениям с полиномиальными коэффициентами.

3. Для полиномов одного переменного, как правило, имеется один представитель (с точностью до подходящей нормализации) данной степени в семействе гипергеометрических полиномов.

4. Все полиномы в семействе удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению фиксированного порядка с полиномиальными коэффициентами (или системе таких уравнений), параметры которого кодируют степень полинома.

5. В одномерном случае модули всех значений корней классических гипергеометрических полиномов различны (возможно, после соответствующего мономиального преобразования переменных).

6. Многие из гипергеометрических полиномов обладают экстремальными свойствами.

В диссертации дано определение многомерного гипергеометрического полинома с  $n \geq 2$  комплексными переменными, которое согласовано со свойствами 1–6, перечисленными выше. А именно, с любым целым выпуклым многогранником  $P \subset \mathbb{R}^n$  связан гипергеометрический полином многих переменных, множеством показателей которого является  $\mathbb{Z}^n \cap P$ . Для того, чтобы этот полином был «истинно гипергеометрическим» в том смысле, который пояснён далее в диссертации (см. определение 1.20), предполагается, что любая пара точек в  $\mathbb{Z}^n \cap P$  может быть связана ломаной с единичными сторонами и целыми вершинами. Это предположение не влияет на общность результатов, так как любой многогранник, который не удовлетворяет этому условию, порождает конечное число гипергеометрических полиномов, которые можно рассматривать независимо. Тогда предположение о выпуклости многогранника  $P$  автоматически выполняется, как установлено в лемме 1.17.

Гипергеометрический полином, связанный с многогранником  $P$ , определён однозначно (с точностью до постоянного множителя) и удовлетворяет голономной системе уравнений в частных производных типа Горна [9, 11]. В первой главе доказано (см. теорему 1.23), что при некоторых условиях невырожденности множество нулей любого такого полинома является оптимальным в смысле [27]. Это означает, что топология амёбы [27, 46] такого полинома максимально сложна из всех возможных случаев (см. определе-

ние 1.10). Данное свойство является многомерным аналогом случая, когда все значения корней полинома одного переменного различны по модулю.

Кроме того, рассмотрены некоторые семейства известных классических полиномов многих переменных, являющихся оптимальными: биортогональный базис в единичном шаре, некоторые полиномиальные представители функции Аппеля  $F_1$ , полиномы Чебышёва второго рода двух переменных и т. д. Также используется полиэдральный комплекс [52], который кодирует существенные комбинаторные свойства алгебраического многообразия и обладает ключевыми свойствами его компактифицированной амёбы.

**Во второй главе** предложены алгоритмы для вычисления и визуализации полиномиальных амёб, их контуров, компактифицированных амёб и сечений амёб полиномов трёх переменных двумерными плоскостями. Здесь же представлены метод и алгоритм для вычисления полиномов, амёбы которых обладают наиболее сложной топологией среди всех полиномов с фиксированным многогранником Ньютона (см. определение на стр. 6).

Геометрия амёбы полинома содержит важную информацию о нулях этого полинома и тесно связана с комбинаторной структурой его многогранника Ньютона (см. теорему 1.9). Несмотря на потерю половины вещественных размерностей, изображение множества нулей полинома в пространстве амёбы отражает относительный размер некоторых его коэффициентов.

С вычислительной точки зрения задача полного геометрического или комбинаторного описания амёбы полинома является задачей высокой сложности [39, 58], несмотря на недавний существенный прогресс в этом направлении [60, 65, 66]. Зависимость числа связных компонент дополнения к амёбе от коэффициентов исследуемого полинома ещё предстоит изучить с помощью современных методов компьютерной алгебры. В частности, гипотеза М. Пассаре о сплошном свойстве амёб максимально разреженных полиномов (см. определение 1.11) остаётся недоказанной в течение длительного времени.

Амёбы можно вычислить и изобразить с помощью различных подходов и методов (см. [26, 36, 48, 58, 65, 66] и ссылки в них). В данной диссертации предложены методы и алгоритмы для вычисления и визуализации амёб полиномов двух переменных, их контуров и компактифицированных версий. Разработанные алгоритмы используются в более высоких размерностях для изображения сечений амёб полиномов трёх переменных. Большое внимание уделено полиномам, амёбы которых имеют наиболее сложную топологическую структуру среди всех полиномов с заданным многогранником Ньютона (см. определение 1.10). Дается алгоритм явного построения таких полиномов.

Представленные алгоритмы реализованы в системах компьютерной алгебры Matlab 9 (64-bit) и Wolfram Mathematica 11 (64-bit). Все примеры в диссертации были рассчитаны на компьютере Intel Core i5-4440 CPU с тактовой частотой 3.10 GHz и объёмом 16 Gb RAM под управлением MS Windows 10.

### **Перейдём к описанию результатов диссертации.**

В первой главе даны формулировка и доказательство леммы о числе связных компонент дополнения к амёбе полинома  $x^a p(t_1 x^{v_1}, \dots, t_n x^{v_n})^\ell$ .

**Лемма 0.6.** *Число связных компонент дополнения к амёбе полинома Лорана  $p(x_1, \dots, x_n)$  такое же, как и для полинома  $x^a p(t_1 x^{v_1}, \dots, t_n x^{v_n})^\ell$  при всех  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  и любой невырожденной целочисленной матрицы  $v$  со строками  $v_1, \dots, v_n$ . То есть, между связными компонентами дополнений двух данных амёб существует биекция. Кроме того, порядки [27] и конусы рецессии [56] соответствующих компонент преобразуются друг в друга линейным преобразованием с матрицей  $v$ .*

Также доказано, что каждый полином является решением некоторой голономной системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа.

**Теорема 0.7.** *Для любого полинома  $p(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  существует неконфлюэнтная [56] голономная гипергеометрическая система вида (1.3), одним из решений которой является  $p(x)$ . Кроме того, она может быть выбрана таким образом, что гипергеометрический идеал в алгебре Вейля, определяющий эту систему, допускает базис, состоящий из коммутативного семейства дифференциальных операторов.*

Сформулирована и доказана теорема о существовании гипергеометрической системы вида (1.3) с полиномиальным решением, имеющим заданный неприводимый носитель.

**Теорема 0.8.** *Для любого выпуклого целочисленного многогранника  $P \subset \mathbb{R}^n$  такого, что  $P \cap \mathbb{Z}^n$  является  $\mathbb{Z}^n$ -связным, существует гипергеометрическая система вида (1.3) и её полиномиальное решение  $p(x)$  с неприводимым носителем, таким, что  $\mathcal{N}_{p(x)} = P$ .*

Дано определение гипергеометрического полинома многих переменных, и доказана теорема об его оптимальности в том смысле (см. определение 1.10 на с. 25, также см. [27, определение 2.9]), что число связных компонент дополнения его амёбы максимально и равно числу целых точек в его многограннике Ньютона.

**Теорема 0.9.** *Пусть*

$$p(x) = \sum_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \psi_P(s) x^s$$

— гипергеометрический полином с носителем в выпуклом целочисленном многограннике  $P \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  (см. определение 1.20). Предположим, что

разбиение многогранника  $P$ , двойственное тропической гиперповерхности, заданной тропическим полиномом

$$p_{trop}(\zeta) := \max_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \{\ln |\psi_P(s)| + \langle s, \zeta \rangle\}, \quad (2)$$

является триангуляцией. Тогда гипергеометрический полином  $p(x)$  оптимален.

Во второй главе предложены алгоритмы для вычисления аффинных и компактифицированных амёб полиномов двух переменных, их контуров и сечений амёб полиномов трёх переменных двумерными плоскостями. Также предложен алгоритм генерации оптимальных гипергеометрических полиномов с заданным носителем.

Результаты исследований были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- международная научная конференция «Современные проблемы математики и естественнонаучного знания» в Северном (Арктическом) федеральном университете им. М. В. Ломоносова, г. Коряжма, 2014 год;
- V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России в Северном (Арктическом) федеральном университете им. М. В. Ломоносова, г. Коряжма, 2015 год;
- научный семинар по многомерному комплексному анализу им. А. Г. Витушкина в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, г. Москва, 2015 год;
- международная конференция «Computer Algebra» в Вычислительном центре Российской академии наук им. А. А. Дородницына, г. Москва, 2016, 2017 и 2021 год;

- международная конференция «Computer Algebra in Scientific Computing» в Бухарестском университете, г. Бухарест, Румыния, 2016 год и в математическом центре «Сириус», г. Сочи, 2021 год;
- семинар по комплексной геометрии в Корейском институте перспективных исследований (KIAS), г. Сеул, Республика Корея, 2016 год;
- Красноярский городской семинар по многомерному комплексному анализу и алгебраической геометрии в Сибирском федеральном университете, 2021 год;
- семинар «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН, г. Москва, 2021 год;
- 22-й семинар по компьютерной алгебре памяти профессора В. Гердта в Объединённом институте ядерных исследований, г. Дубна, 2021 год.

Разработанный автором общедоступный сетевой ресурс для автоматической генерации кода в среде MatLab R2017a размещён по адресу <http://dvvbogdanov.ru/atomеba>. С его помощью были получены используемые в диссертации изображения аффинных и компактифицированных амёб, а также их контуров. В дальнейшем разработанные алгоритмы и указанный ресурс нашли применение для создания изображений различных амёб и их контуров в работах других авторов, например, в [52] и [42].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

# Глава 1

## Амёбы гипергеометрических полиномов

### 1.1 Гипергеометрические системы дифференциальных уравнений и амёбы их полиномиальных решений

Обозначим через  $n$  размерность пространства переменных  $x \in \mathbb{C}^n$ . Для  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $x = (x_1, \dots, x_n)$  будем использовать запись  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  и обозначим через  $x^\alpha$  моном  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

**Определение 1.1.** Формальный ряд Лорана

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \varphi(s) x^s \tag{1.1}$$

называется *гипергеометрическим*, если для любого  $j = 1, \dots, n$  отношение  $\varphi(s + e_j)/\varphi(s)$  является рациональной функцией для  $s = (s_1, \dots, s_n)$ . На протяжении всей диссертации будем обозначать эту рациональную функцию как  $P_j(s)/Q_j(s + e_j)$ , где  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — стандартный базис решётки  $\mathbb{Z}^n$ . Под *носителем* такого ряда подразумевается подмножество из  $\mathbb{Z}^n$ , на котором  $\varphi(s) \neq 0$ .

*Гипергеометрической функцией* называется (как правило, многозначная) аналитическая функция, полученная с помощью аналитического продолжения гипергеометрических рядов с непустой областью сходимости вдоль всех возможных путей.

**Теорема 1.2.** (Оре, Сато, см. [2]) *Коэффициенты гипергеометрического ряда задаются формулой*

$$\varphi(s) = t^s U(s) \prod_{i=1}^m \Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s \rangle + c_i), \quad (1.2)$$

где  $t^s = t_1^{s_1} \dots t_n^{s_n}$ ,  $t_i, c_i \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{A}_i = (A_{i,1}, \dots, A_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  и  $U(s)$  — произведение некоторой рациональной функции и периодической функции  $\phi(s)$  такой, что  $\phi(s + e_j) = \phi(s)$  для всех  $j = 1, \dots, n$ .

Отметим, что в (1.2) вектор переменных  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ . Выбор подходящего сужения функции вида (1.2) на правильно выбранное подмножество решётки  $\mathbb{Z}^n$  лежит в основе процедуры построения полиномиальных решений гипергеометрических систем уравнений (см. [62]).

Используя данные  $(t_i, c_i, \mathbf{A}_i, U(s))$ , задающие коэффициент гипергеометрического ряда, и определение  $\Gamma$ -функции, несложно вычислить рациональные функции  $P_i(s)/Q_i(s + e_i)$ . Восстановление коэффициента Оре-Сато по набору рациональных функций требует решения системы разностных уравнений, которая разрешима только при некоторых условиях совместности для  $P_i$  и  $Q_i$ . Тщательный анализ такой системы разностных уравнений выполнен в [9].

Будем называть любую функцию вида (1.2) *коэффициентом Оре-Сато гипергеометрического ряда*. В диссертации коэффициент Оре-Сато (1.2) играет роль основного объекта, который формирует всё остальное: ряды, гипергеометрическую систему дифференциальных уравнений, её полиномиальные решения (если таковые имеются) и их амёбы. Также будем предполагать, что  $m \geq n$ , поскольку в противном случае соответствующий гипергеометрический ряд (1.1) является линейной комбинацией гипергеометрических рядов меньшего числа переменных (умноженных на произвольную функцию остальных переменных, что делает систему неголономной) и значение  $n$  можно выбрать меньшим так, чтобы неравенство выполнялось.

**Определение 1.3.** Система Горна, определяемая коэффициентом Оре-Сато. Формальный ряд Лорана  $\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \varphi(s) x^s$  с коэффициентом, удовлетворяющим соотношениям  $\varphi(s + e_j) / \varphi(s) = P_j(s) / Q_j(s + e_j)$ , является (формальным) решением следующей системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа (см. [2]):

$$x_j P_j(\theta) f(x) = Q_j(\theta) f(x), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Здесь  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $\theta_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Система (1.3) называется *гипергеометрической системой, определяемой коэффициентом Оре-Сато  $\varphi(s)$*  (см. [2]) и обозначается  $\text{Horn}(\varphi)$ . В диссертации изучаются только голономные гипергеометрические системы Горна, то есть  $\text{rank}(\text{Horn}(\varphi))$  всегда предполагается конечным. Напомним, что идеал  $J$  в алгебре Вейля (равно как и соответствующая система дифференциальных уравнений (1.3)) называется *голономным*, если комплексная размерность его характеристического многообразия

$$\text{char}(J) = \{(x, z) \in \mathbb{C}^{2n} : \sigma(P)(x, z) = 0, \text{ для всех } P \in J\},$$

где  $\sigma(P)$  обозначает главный символ дифференциального оператора  $P$ , равна размерности пространства переменных  $n$ . Кроме того, система (1.3) называется *неконфлюэнтной*, если для всех  $i = 1, \dots, n$  выполняются равенства  $\deg P_i = \deg Q_i$ .

Значительный интерес представляет важный частный случай коэффициента Оре-Сато (1.2), при котором  $t_i = 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$  и  $U(s) \equiv 1$  (см. также [21]). Система Горна, связанная с коэффициентом Оре-Сато, будет обозначаться  $\text{Horn}(A, c)$ , где  $A$  — матрица со строками  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m \in \mathbb{Z}^n$  и  $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$ . В этом случае следующие операторы  $P_j(\theta)$  и  $Q_j(\theta)$

определяют систему (1.3):

$$P_j(s) = \prod_{i:A_{i,j}>0} \prod_{\ell_j^{(i)}=0}^{A_{i,j}-1} \left( \langle \mathbf{A}_i, s \rangle + c_i + \ell_j^{(i)} \right),$$

$$Q_j(s) = \prod_{i:A_{i,j}<0} \prod_{\ell_j^{(i)}=0}^{|A_{i,j}|-1} \left( \langle \mathbf{A}_i, s \rangle + c_i + \ell_j^{(i)} \right).$$

**Определение 1.4.** Носитель решения системы уравнений (1.3) называется *неприводимым*, если не существует решения системы уравнений (1.3) с носителем в его собственном непустом подмножестве.

**Определение 1.5.** *Конусом рецессии* выпуклого множества  $M$  называется теоретико-множественный максимальный элемент в семействе выпуклых конусов, сдвиги которых содержатся в  $M$ .

**Определение 1.6.** (Аффинная) *амёба*  $\mathcal{A}_p$  полинома Лорана  $p(x)$  (или алгебраической гиперповерхности  $\{p(x) = 0\}$ ) есть образ гиперповерхности  $p(x) = 0$  относительно отображения

$$\text{Log} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_n|).$$

**Определение 1.7.** *Компактифицированная амёба*  $\overline{\mathcal{A}}_p$  полинома Лорана  $p(x)$  (или алгебраической гиперповерхности  $\{p(x) = 0\}$ ) есть образ гиперповерхности  $p^{-1}(0)$  относительно моментного отображения в многогранник Ньютона  $\mathcal{N}_p$ :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{\sum_{\alpha \in S} \alpha \cdot |x^\alpha|}{\sum_{\alpha \in S} |x^\alpha|} = \frac{\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot |x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}|}{\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S} |x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}|}. \quad (1.4)$$

Несмотря на потерю  $n$  вещественных размерностей, амёба алгебраической гиперповерхности кодирует её важные свойства [27, 30, 58, 66]. Ос-

новные результаты этой главы описывают топологические свойства амёб гипергеометрических полиномов. Следующая лемма показывает, что некоторые преобразования полинома не влияют на топологию его амёбы.

**Лемма 1.8.** *Число связных компонент дополнения к амёбе полинома Лорана  $p(x_1, \dots, x_n)$  такое же, как и для полинома  $x^a p(t_1 x^{v_1}, \dots, t_n x^{v_n})^\ell$  при всех  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  и любой невырожденной целочисленной матрицы  $v$  со строками  $v_1, \dots, v_n$ . То есть, между связными компонентами дополнений двух данных амёб существует биекция. Кроме того, порядки [27] и конусы рецессии [56] соответствующих компонент преобразуются друг в друга линейным преобразованием с матрицей  $v$ .*

*Доказательство.* Мономиальный множитель может обращаться в нуль только на объединении координатных гиперплоскостей, которые отображаются в бесконечность в логарифмическом пространстве. Амёба не отражает кратность нулей полинома и, следовательно, кратность может быть увеличена до любой положительной степени. Преобразование  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (t_1 x_1, \dots, t_n x_n)$  соответствует сдвигу амёбы в пространстве на векторы  $\ln |t_1|, \dots, \ln |t_n|$ . Наконец, невырожденное мономиальное преобразование переменных в комплексном торе  $(\mathbb{C}^*)^n$  соответствует линейному преобразованию амёбы в пространстве, образованном матрицей показателей мономов. Очевидно, что невырожденное линейное преобразование сохраняет топологию амёб и обеспечивает биекцию конусов рецессии компонент дополнения. Последнее утверждение леммы является непосредственным следствием определения порядка компоненты в дополнении к амёбе.  $\square$

Следующий результат показывает, что многогранник Ньютона  $\mathcal{N}_{p(x)}$  отражает структуру амёбы  $\mathcal{A}_{p(x)}$  [27, теорема 2.8 и утверждение 2.6].

**Теорема 1.9.** (см. [27]) *Пусть  $p(x)$  — полином Лорана и пусть  $\{M\}$  обозначает множество всех связных компонент дополнения к амёбе  ${}^c\mathcal{A}_{p(x)}$ .*

Тогда существует инъективная функция  $\nu : \{M\} \rightarrow \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{N}_{p(x)}$  такая, что конус, двойственный к  $\mathcal{N}_{p(x)}$  в точке  $\nu(M)$ , совпадает с конусом рецессии в множестве  $M$ . В частности, число связных компонент  ${}^c\mathcal{A}_{p(x)}$  не может быть меньше, чем количество вершин  $\mathcal{N}_{p(x)}$ , и не может превышать количество целых точек в  $\mathcal{N}_{p(x)}$ .

Два экстремальных значения числа связных компонент дополнения к амёбе представляют особый интерес [56].

**Определение 1.10.** (см. также [27, определение 2.9]) Алгебраическая гиперповерхность  $\mathcal{H} \subset (\mathbb{C}^*)^n$ ,  $n \geq 2$ , называется *оптимальной*, если число связных компонент её дополнения амёбы  ${}^c\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$  равно числу целых точек в многограннике Ньютона определяющего полинома  $\mathcal{H}$ . Будем говорить, что полином (а также его амёба) является *оптимальным*, если множество его нулей является оптимальной алгебраической гиперповерхностью.

Так как амёба полинома не несёт никакой информации о кратности его корней, любая одномерная амёба (которая является лишь конечным множеством различных точек  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ ) может рассматриваться как амёба полинома  $\prod_{j=1}^k (x - e^{a_j})$ , все корни которого положительны и различны. Таким образом, определение 1.10 тривиально в одномерном случае. Правильное распространение определения 1.10 на одномерный случай состоит в требовании, чтобы все корни полинома имели разные абсолютные значения.

Алгебраическая гиперповерхность является оптимальной, если топология её амёбы наиболее сложна среди всех возможных в силу теоремы 1.9 (то есть число связных компонент дополнения амёбы является максимальным). Другой крайний случай топологически простейшей амёбы определяется следующим образом.

**Определение 1.11.** (см. [56]) Алгебраическая гиперповерхность  $\mathcal{H} \subset (\mathbb{C}^*)^n$ ,  $n \geq 2$ , называется *сплошной*, если число связных компонент её дополнения

к амёбе  ${}^c\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$  равно числу вершин многогранника Ньютона определяющего полинома  $\mathcal{H}$ .

Таким образом, сплошная амёба является противоположностью оптимальной. В двумерном случае амёба является сплошной, если и только если все связные компоненты её дополнения являются неограниченными и её «щупалца» непараллельны. Оптимальная амёба имеет, наоборот, максимально возможное число ограниченных связных компонент в своём дополнении и максимальное число параллельных «щупалец».

**Пример 1.12.** Согласно определению 1.3, коэффициент Оре-Сато

$$\varphi(s, t) = \Gamma(-s - t + 1) \Gamma(2s - t - 2) \Gamma(-s + 2t - 2)$$

задаёт полиномы

$$P_1(s, t) = (2s - t - 2)(2s - t - 1), \quad Q_1(s, t) = (s - 2t + 2)(s + t - 1),$$

$$P_2(s, t) = (s - 2t + 1)(s - 2t + 2), \quad Q_2(s, t) = -(2s - t - 2)(s + t - 1).$$

Соответствующая гипергеометрическая система Горна определяется линейными дифференциальными операторами

$$\begin{cases} x(2\theta_x - \theta_y - 2)(2\theta_x - \theta_y - 1) - (\theta_x - 2\theta_y + 2)(\theta_x + \theta_y - 1), \\ y(\theta_x - 2\theta_y + 1)(\theta_x - 2\theta_y + 2) + (2\theta_x - \theta_y - 2)(\theta_x + \theta_y - 1). \end{cases} \quad (1.5)$$

Несложно проверить, что полином  $p(x, y) = x + y + 6xy + x^2y^2$  удовлетворяет системе дифференциальных операторов (1.5).

Амёба полинома  $p(x, y)$  вместе с компактифицированной версией [46] изображены на рисунке 1.1. Заметим, что фактический вид амёбы и компактифицированной амёбы  $p(x, y)$  (как в части асимптотических направлений

«щупалец», так и в части дополнения компактифицированной амёбы) значительно отличаются от приведённых в [46].

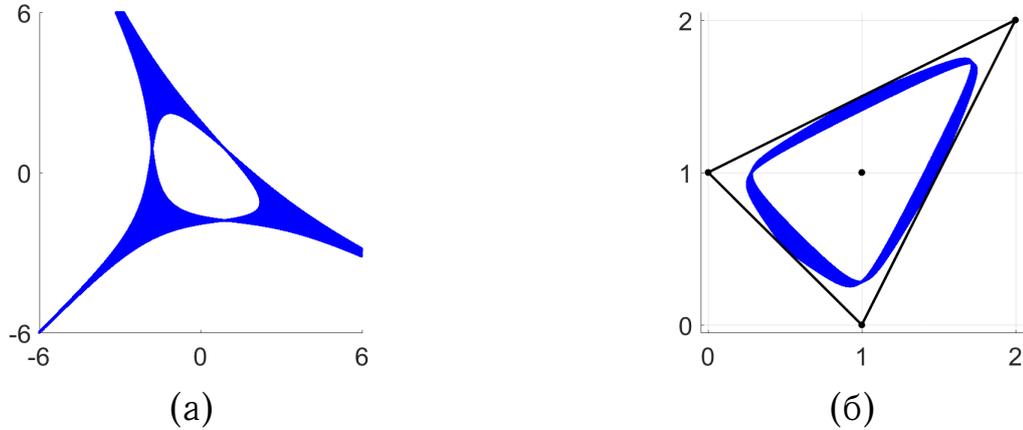


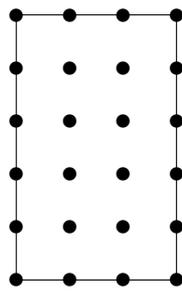
Рисунок 1.1 — Амёба и компактифицированная амёба полинома [46]  $p(x, y)$

В силу леммы 1.8 не будем различать полиномы, чьи множества нулей в  $(\mathbb{C}^*)^n$  могут быть преобразованы друг в друга с помощью невырожденного мономиального преобразования переменных. Причина этого иллюстрируется на следующем примере.

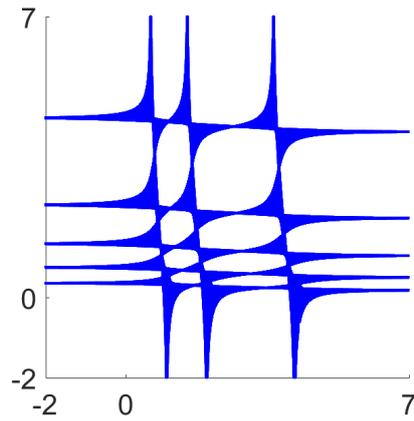
**Пример 1.13.** Типичный пример семейства оптимальных полиномов задаётся биортогональным семейством в единичном шаре  $\{V_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$ . Данные полиномы определяются через их производящие функции (см. [24, раздел 2.3]):

$$(1 - 2 \langle a, x \rangle + \|a\|^2)^{\frac{1-n}{2}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a^\alpha V_\alpha(x).$$

Пренебрегая несущественным мономиальным множителем полинома  $V_\alpha(x)$  (множество нулей которого содержится в объединении координатных гиперплоскостей и, следовательно, не влияет на амёбу, см. лемму 1.8), представим  $V_\alpha(x)$  в виде  $V_\alpha(x) = \tilde{V}_\alpha(\xi)$ , где  $\tilde{V}_\alpha$  является полиномом переменных  $\xi_j = x_j^2$ . Можно проверить, что множество нулей  $\tilde{V}_\alpha(\xi)$  является оптимальной алгебраической гиперповерхностью в  $\mathbb{C}^n$ . Многоугольник Ньютона и амёба полинома двух переменных  $V_{(6,10)}$  изображены на рисунке 1.2.



(a)



(б)

Рисунок 1.2 — Многоугольник Ньютона полинома  $V_{(6,10)}(x, y)$  из [24, раздел 2.3] и его амёба

Другие многочисленные семейства оптимальных полиномов многих переменных приведены в [24, часть 2].

## 1.2 Оптимальность гипергеометрических полиномов многих переменных

Существует несколько хорошо известных и важных семейств гипергеометрических полиномов [24, 72]. Общим для них является то, что они удовлетворяют некоторым линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами, которые являются частными случаями (1.3). Однако семейство всех голономных систем дифференциальных уравнений в частных производных вида (1.3) слишком велико, чтобы служить в качестве определения гипергеометрического полинома. В самом деле, с точки зрения общего определения 1.1, всякий полином любого числа переменных является гипергеометрической функцией, что проясняется в следующей теореме.

**Теорема 1.14.** *Для любого полинома  $p(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  существует неконфлюэнтная [56] голономная гипергеометрическая система вида (1.3), одним из решений которой является  $p(x)$ . Кроме того, она*

может быть выбрана таким образом, что гипергеометрический идеал в алгебре Вейля (то есть алгебры линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами), определяющий эту систему, допускает базис, состоящий из коммутативного семейства дифференциальных операторов.

*Доказательство.* В действительности имеет место более сильное утверждение: любой заданный полином лежит в ядре континуального семейства множества гипергеометрических идеалов. Чтобы доказать теорему, приведём пример явного представителя с заданными свойствами.

Пусть  $p(x) = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha x^\alpha$  является полиномом с носителем  $S$ . Здесь и далее в доказательстве будем предполагать  $S$  конечным. Обозначим через  $\#S$  мощность  $S$  и положим  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Для  $s \in \mathbb{C}^n$  зададим коэффициент Оре-Сато  $\varphi(s)$  как

$$\varphi(s) = \frac{\prod_{\alpha \in S} (s_1 + \dots + s_n - |\alpha|)}{\prod_{j=1}^n \prod_{\alpha \in S} (s_j - \alpha_j)}. \quad (1.6)$$

По определению 1.3, в системе, определённой коэффициентом Оре-Сато, действие  $j$ -го гипергеометрического дифференциального оператора на  $p(x)$ , задаётся как

$$\begin{aligned} & \left( x_j \prod_{\alpha \in S} (\theta_1 + \dots + \theta_n - |\alpha|) - \prod_{\alpha \in S} (\theta_j - \alpha_j) \right) \sum_{\beta \in S} c_\beta x^\beta = \\ & = \sum_{\beta \in S} c_\beta \left( \left( x_j \prod_{\alpha \in S} (\theta_1 + \dots + \theta_n - |\alpha|) \right) x^\beta - \left( \prod_{\alpha \in S} (\theta_j - \alpha_j) \right) x^\beta \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

поскольку  $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$  является коммутативным подкольцом в алгебре Вейля линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами и  $(\theta_1 + \dots + \theta_n - |\alpha|)x^\alpha = (\theta_j - \alpha_j)x^\alpha \equiv 0$  для любого  $j = 1, \dots, n$ .

Гипергеометрическая система, определённая этим коэффициентом Оре-Сато (1.6), неконфлюэнтна, так как  $\deg P_j = \deg Q_j$  для всех  $j = 1, \dots, n$ , где  $P_j = \prod_{\alpha \in S} (\theta_1 + \dots + \theta_n - |\alpha|)$  и  $Q_j = \prod_{\alpha \in S} (\theta_j - \alpha_j)$ .

Голономный ранг гипергеометрической системы по определению равен количеству её линейно независимых решений. При выполнении условия, что для каждого  $j = 1, \dots, n$  полином  $Q_j(s)$  зависит только от  $s_j$ , по теореме 2.8 в [62] голономный ранг равен произведению степеней  $Q_j$ . Следовательно, гипергеометрическая система, определённая коэффициентом Оре-Сато (1.6), голономна с голономным рангом  $(\#S)^n$ .

Согласно лемме 2.5 в [62], операторы коммутируют друг с другом тогда и только тогда, когда для всех  $i, j = 1, \dots, n$  выполняются условия совместности

$$R_i(s + e_j) R_j(s) = R_j(s + e_i) R_i(s),$$

где  $R_i(s) = \frac{P_i(s)}{Q_i(s+e_i)}$  и для каждого  $j = 1, \dots, n$  полином  $Q_j(s)$  зависит только от  $s_j$ . Отсюда следует, что гипергеометрическая система, определённая коэффициентом Оре-Сато (1.6), порождается коммутативным семейством гипергеометрических операторов.  $\square$

Так как всякий моном из  $p(x)$  лежит в ядре каждого оператора гипергеометрической системы, определённой (1.6), эти же рассуждения используются для любого полинома Пюизо с произвольными векторами показателей из  $\mathbb{C}^n$ . Хотя  $p(x)$  и находится в ядрах дифференциальных операторов, образующих голономную гипергеометрическую систему, мономы из  $p(x)$  оказываются никак не связанными друг с другом. Для получения корректного определения гипергеометрического полинома на основе (1.3) наложим дополнительные ограничения на коэффициент Оре-Сато, который определяет систему.

Мы рассматриваем только полиномы  $n$  переменных, чьи многогранники Ньютона имеют ненулевые  $n$ -мерные объёмы. Действительно, если объём

многогранника Ньютона равен нулю, подходящая мономиальная замена переменных может быть использована для уменьшения их числа.

**Определение 1.15.** Множество  $S \subset \mathbb{Z}^n$  называется  $\mathbb{Z}^n$ -выпуклым, если условие  $\{\lambda s^{(0)} + (1 - \lambda) s^{(1)} : \lambda \in [0, 1]\} \cap \mathbb{Z}^n \subset S$  выполняется для всех  $s^{(0)}, s^{(1)} \in S$ .

**Определение 1.16.** Множество  $S \subset \mathbb{Z}^n$  является  $\mathbb{Z}^n$ -связным, если любые две точки этого множества могут быть соединены ломаной с единичными сторонами и вершинами в  $S$ .

Например, носитель гипергеометрического полинома двух переменных  $x + y + 6xy + x^2y^2$  в примере 1.12 — это  $\mathbb{Z}^2$ -выпуклое, но не  $\mathbb{Z}^2$ -связное множество. Действительно, оно состоит из двух  $\mathbb{Z}^2$ -связных компонент:  $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$  и  $\{(2, 2)\}$ .

Напомним, что носитель  $S$  решения гипергеометрической системы (1.3) называется *неприводимым*, если нет ненулевого решения для (1.3), содержащегося в его собственном непустом подмножестве  $S$ . Любой неприводимый носитель решения (1.3) всегда является  $\mathbb{Z}^n$ -связным множеством. Действительно, если  $S$  не является  $\mathbb{Z}^n$ -связным множеством, то существует непустое собственное подмножество  $S_1 \subset S$ , которое является носителем некоторого ненулевого решения для (1.3), что противоречит определению неприводимости для  $S$ . Например, рассмотрим  $S = S_1 \cup S_2$  такое, что  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ,  $S_1, S_2 \neq \emptyset$  и  $f(x) = \sum_{s \in S} \varphi(s) x^s$  является решением (1.3). Покажем, что  $f_1(x) = \sum_{s \in S_1} \varphi(s) x^s$  также удовлетворяет (1.3). Так как  $f(x)$  — решение (1.3), то

$$\varphi(s + e_j) Q_j(s + e_j) = \varphi(s) P_j(s), \quad j = 1, \dots, n, \quad \forall s \in \mathbb{Z}^n. \quad (1.7)$$

В частности,  $\varphi(s + e_j) = 0$ ,  $\forall s \in S_1$  такого, что  $s + e_j \notin S_1$  и  $\forall j = 1, \dots, n$ . Следовательно, функция

$$\varphi_1(s) = \begin{cases} \varphi(s), & s \in S_1, \\ 0, & s \notin S_1 \end{cases}$$

также удовлетворяет (1.7), а значит,  $f_1$  удовлетворяет (1.3).

Следующее утверждение было доказано в [62].

**Лемма 1.17.** (см. [62]) *Если носитель  $S$  полиномиального решения системы (1.3) неприводим, то  $S$  является  $\mathbb{Z}^n$ -выпуклым множеством.*

Покажем, что носитель любого выпуклого целочисленного многогранника является неприводимым решением подходящего частного случая гипергеометрической системы (1.3).

**Теорема 1.18.** *Для любого выпуклого целочисленного многогранника  $P \subset \mathbb{R}^n$  такого, что  $P \cap \mathbb{Z}^n$  является  $\mathbb{Z}^n$ -связным, существует гипергеометрическая система вида (1.3) и её полиномиальное решение  $p(x)$  с неприводимым носителем, таким, что  $\mathcal{N}_{p(x)} = P$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\langle B_j, s \rangle + c_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$  являются уравнениями гиперповерхностей, содержащих грани  $P$ , где  $B_j$  — внешняя нормаль к  $P$  в соответствующей грани. Поскольку  $P$  является целочисленным многогранником, без потери общности можно считать, что компоненты вектора  $B_j$  являются целыми и взаимно простыми.

Рассмотрим коэффициент Оре-Сато

$$\varphi(s) = \prod_{j=1}^q \Gamma(\langle B_j, s \rangle + c_j).$$

По определению 1.3 гипергеометрическая система задаётся коэффициентом  $\varphi(s)$ , который зависит лишь от частных  $R_j(s) := \varphi(s + e_j)/\varphi(s)$ , явля-

ющихся рациональными функциями переменного  $s$ . Используя определение гамма-функции  $\Gamma(z) = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)\sin(\pi z)}$  вместе с тем фактом, что мероморфная функция  $\frac{e^{\sqrt{-1}\pi z}}{\sin(\pi z)}$  является периодической с периодом 1, заключаем, что частные  $R_j(s)$  совпадают с таковыми для всей функции

$$\frac{\exp\left(\sqrt{-1}\pi\left(\sum_{j=1}^q\langle B_j, s\rangle + c_j\right)\right)}{\prod_{j=1}^q\Gamma(1 - \langle B_j, s\rangle - c_j)}. \quad (1.8)$$

Носитель полинома с коэффициентом (1.8) не изменится, если заменить числитель (1.8) на 1. Действительно, числитель является экспоненциальной частью  $t^s$  (для  $t = (t_1, \dots, t_n)$ ,  $t_k = \exp\left(\sum_{j=1}^q B_{jk}\right)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ) коэффициента Оре-Сато (1.2) и согласно лемме 1.8 не влияет ни на носители полиномиальных решений соответствующей гипергеометрической системы, ни на топологию их амёб. По этим причинам определим коэффициент гипергеометрического полинома, который необходимо построить, следующим образом:

$$\psi_P(s) := \frac{1}{\prod_{j=1}^q\Gamma(1 - \langle B_j, s\rangle - c_j)}. \quad (1.9)$$

Функция  $\psi_P(s)$  полностью определяется целочисленным многогранником  $P$  и обращается в нуль в каждой точке решётки, которая не принадлежит  $P$ . Помимо этого,  $\psi_P(s)$  положительна в  $P$ . Зададим полином  $p(x)$  как

$$p(x) = \sum_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \psi_P(s) x^s.$$

Полином  $p(x)$  с носителем в  $P \cap \mathbb{Z}^n$  удовлетворяет гипергеометрической системе  $\text{Hom}(\psi_P(s))$  (см. определение 1.3). Его носитель неприводим, так как множество  $P \cap \mathbb{Z}^n$  является  $\mathbb{Z}^n$ -связным и  $\psi_P(s)$  не обращается в нуль в  $P$ .  $\square$

Утверждение теоремы имеет место и без условия  $\mathbb{Z}^n$ -связности множества целых точек в определяющем полиноме. Однако носитель полинома, полученного на основе конструирования в доказательстве теоремы, не является, вообще говоря, неприводимым. Такой полином не может рассматриваться как «истинно гипергеометрический», так как является линейной комбинацией двух или более полиномов, удовлетворяющих той же гипергеометрической системе (см. пример 1.12). Свойства амёбы такого полинома в общем случае существенно зависят от коэффициентов линейной комбинации. Тем не менее, всегда можно выбрать эти коэффициенты таким образом, чтобы гипергеометрический полином с (приводимым) носителем  $P \cap \mathbb{Z}^n$  был оптимальным. Таким образом, без ограничения общности далее предполагается, что множество  $P \cap \mathbb{Z}^n$  является  $\mathbb{Z}^n$ -связным.

**Замечание 1.19.** Отметим, что гипергеометрический полином *нельзя* определить как полиномиальное решение (1.3) с  $\mathbb{Z}^n$ -выпуклым неприводимым носителем  $S$ , так как любой полиномиальный носитель в  $S$  будет удовлетворять этому условию. Это можно заметить, вводя больше сомножителей в коэффициент Оре-Сато, которые будут влиять на коэффициенты полиномиального решения, но не будут искажать его носитель. Для решения данной проблемы построим однозначно определённый полином с носителем  $S$ , который удовлетворяет гипергеометрической системе наименьшего возможного голономного ранга.

Следующее определение является центральным в данной главе и объединяет важные свойства классических семейств гипергеометрических полиномов: плотность носителя, неприводимость носителя и свойство «быть решением некоторой системы линейных дифференциальных уравнений».

**Определение 1.20.** Под *гипергеометрическим полиномом многих переменных* с носителем в выпуклом целочисленном многограннике  $P \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,

подразумевается полином

$$\sum_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \psi_P(s) x^s \quad (1.10)$$

с коэффициентом  $\psi_P(s)$ , заданным формулой (1.9).

**Замечание 1.21.** Гипергеометрический полином, введённый в определении 1.20, удовлетворяет гипергеометрической системе наименьшего возможного голономного ранга среди всех гипергеометрических систем, допускающих неприводимое полиномиальное решение с носителем  $P$ . Это свойство может быть использовано как определение гипергеометрического полинома с носителем  $P$ .

В одномерном случае определение 1.20 даёт слишком узкий класс полиномов, чтобы представлять интерес. А именно, для отрезка  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  с целыми граничными точками  $a, b$  полином  $x^a(x+1)^{b-a}$  является гипергеометрическим в смысле определения 1.20 и удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению (частный случай (1.3)) наименьшего возможного голономного ранга 1, обращаясь в нуль на оптимальном алгебраическом множестве. Поэтому далее остановимся на многомерном случае.

**Пример 1.22.** Вычислим гипергеометрические полиномы, связанные с некоторыми семействами целочисленных выпуклых многогранников, и исследуем их свойства.

1) *Прямое произведение отрезков.* Если многогранник  $P$  в определении 1.20 является прямым произведением отрезков, можно без потери общности считать, что  $P = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$  для  $a_j \in \mathbb{N}$ . В этом случае коэффициент Оре-Сато (1.9) задаётся как

$$\prod_{j=1}^n (\Gamma(s_j + 1) \Gamma(a_j - s_j + 1))^{-1}.$$

Соответствующий гипергеометрический полином есть произведение постоянного множителя и  $\prod_{j=1}^n (x_j + 1)^{a_j}$ . Его амёба является объединением координатных гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^n$  и оптимальна в смысле определения 1.10.

2) *Симплекс*. Пусть многогранник  $P \subset \mathbb{R}^n$  задан как выпуклая оболочка начала координат и точек  $(0, \dots, k, \dots, 0)$  ( $k$  в  $j$ -ой позиции) для  $j = 1, \dots, n$ . Соответствующий коэффициент Оре-Сато задаётся как

$$\left( \Gamma \left( k + 1 - \sum_{j=1}^n s_j \right) \prod_{j=1}^n \Gamma(s_j + 1) \right)^{-1}.$$

Гипергеометрический полином, определяемый этим коэффициентом, есть произведение постоянного множителя и  $(x_1 + \dots + x_n + 1)^k$ . Он оптимален в смысле определения 1.10, его амёба является амёбой гиперплоскости [27].

3) *Кросс-политопы (гипероктаэдры)*. Напомним, что  $n$ -мерным гипероктаэдром является выпуклый многогранник, вершины которого суть всех перестановок  $(\pm 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Единственной целой точкой гипероктаэдра, которая не является его вершиной, является начало координат. Коэффициент Оре-Сато для такого  $n$ -мерного гипероктаэдра задаётся как

$$\left( \prod_{\varepsilon_j = \pm 1, j=1, \dots, n} \Gamma(\varepsilon_1 s_1 + \dots + \varepsilon_n s_n + 2) \right)^{-1}.$$

Может случиться так, что алгебраическая гиперповерхность определяется полиномом, который неприводим в  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , но может быть факторизован в кольце полиномов Пюизо  $\mathbb{C}[x_1^{1/d}, \dots, x_n^{1/d}]$  для некоторых  $d \in \mathbb{N}$  (см. определение сильной неприводимости на стр. 38). Если оба множителя представляют собой ветви одной и той же гиперповерхности, то полином не может быть оптимальным. Оказывается, что такой полином может быть гипергеометрическим в смысле определения 1.20. Например, пусть  $n = 2$ , и многогранник  $P$  является многоугольником с вершинами

$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ . Коэффициент Оре-Сато, связанный с этим многоугольником, имеет вид:

$$(\Gamma(2 - s - t)\Gamma(2 - s + t)\Gamma(2 + s - t)\Gamma(2 + s + t))^{-1}$$

и соответствующий гипергеометрический полином задаётся (с точностью до мономиального множителя, что несущественно в силу леммы 1.8) как  $p(x, y) = x + y + 4xy + x^2y + xy^2$ . Этот полином *не* является оптимальным, что можно проверить непосредственным вычислением его амёбы. Альтернативный способ доказать это — заметить, что начало координат должно принадлежать компоненте порядка  $(1, 1)$ , если она лежит в дополнении к амёбе полинома  $x + y + axy + x^2y + xy^2$ . Однако,  $p(-1, -1) = 0$  в то время, как точка  $(-1, -1)$  отображается в начало координат преобразованием  $\text{Log}$ . Можно сказать, что  $p(x, y)$  находится «на границе» множества оптимальных полиномов с носителем  $P$ .

Вышеизложенное становится ясным с учётом следующей факторизации  $p(x, y)$  в  $\mathbb{C}[\sqrt{x}, \sqrt{y}]$ :

$$p(x, y) = (\sqrt{x}(1 + y) + \sqrt{-1}\sqrt{y}(1 + x)) (\sqrt{x}(1 + y) - \sqrt{-1}\sqrt{y}(1 + x)).$$

Оба множителя представляют собой ветви одной и той же алгебраической гиперповерхности  $\{p(x, y) = 0\}$ , поэтому она *не* может быть оптимальной.

Заметим, что общий полином  $p(x_1, \dots, x_n) = c + \sum_{j=1}^n \left( a_j x_j + \frac{b_j}{x_j} \right)$  с носителем, который является  $n$ -мерным гипероктаэдром, и имеющий положительные коэффициенты  $a_j, b_j, c$ , оптимален тогда и только тогда, когда  $\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j b_j} < \frac{c}{2}$ . Таким образом, гипергеометрический полином, определяемый  $n$ -мерным гипероктаэдром, оптимален тогда и только тогда, когда  $n > 2$ .

4) *Поверхность Хирцебруха*. Напомним, что поверхность Хирцебруха  $\mathbb{F}_1$  определяется веером с порождающими  $(1, 0), (0, 1), (-1, 1)$  и  $(0, -1)$ .

Гипергеометрический полином с носителем в (сдвиге) выпуклой оболочки этих векторов, определяется коэффициентом Оре-Сато

$$(\Gamma(3-t)\Gamma(4-s-t)\Gamma(t-s+2)\Gamma(2s+t-1))^{-1}.$$

Этот полином есть произведение постоянного множителя и оптимального полинома  $h(x, y) = 3x + 12xy + 2x^2y + 2y^2 + 3xy^2$ .

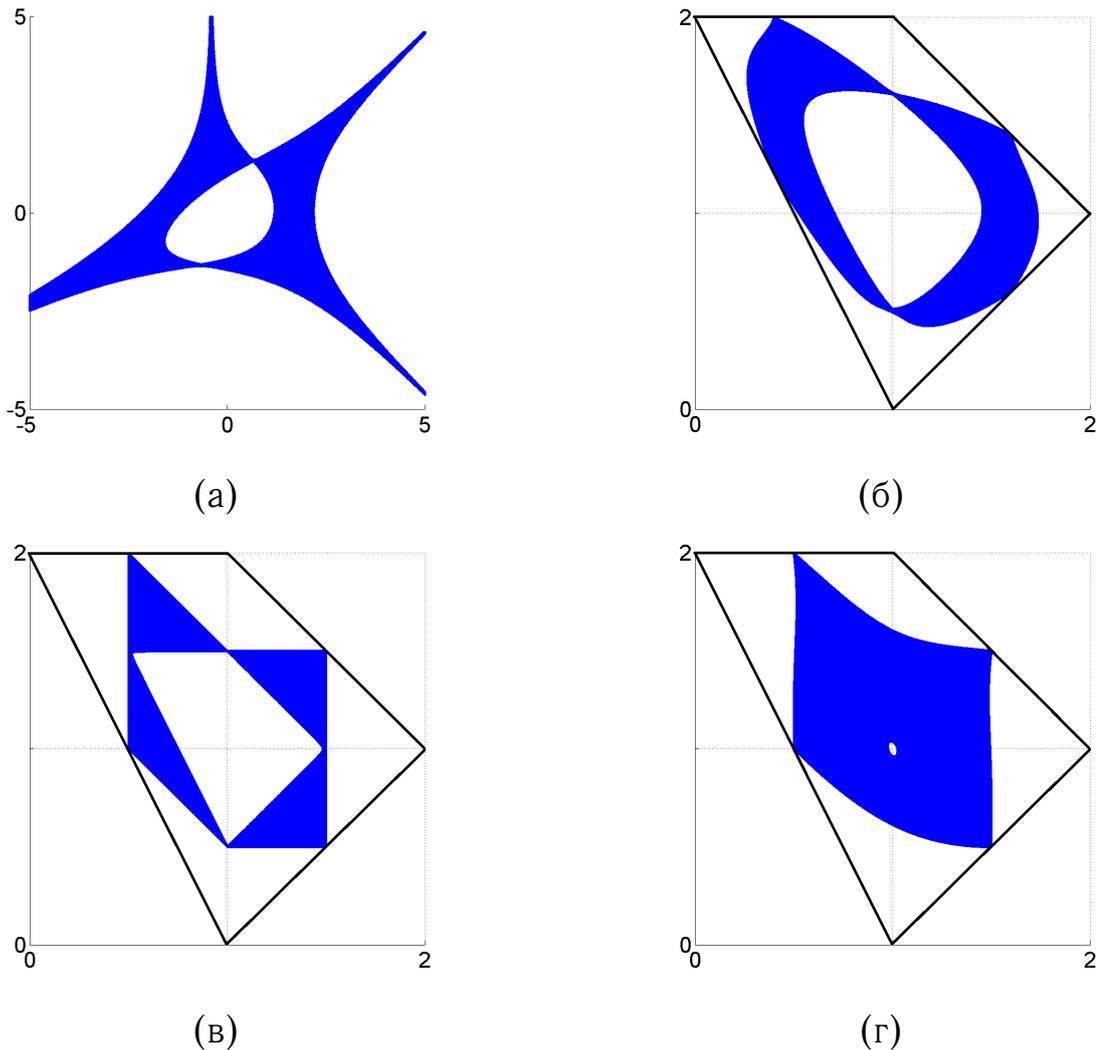


Рисунок 1.3 — Амёба, компактифицированная амёба, взвешенная компактифицированная амёба шестой степени Адамара  $h(x, y)$  и исчезающая связная компонента дополнения деформации  $\mathcal{WCA}(h(x, y))$  (см. определение 1.25)

Напомним, что полином Лорана  $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  называется *сильно неприводимым*, если для любой невырожденной целочислен-

ной матрицы  $v$  полином  $p(x^{v_1}, \dots, x^{v_n})$  неприводим над  $\mathbb{C}$ . Здесь  $v_j$  является  $j$ -ой строкой матрицы  $v$ . Это определение имеет смысл только в случае  $n \geq 2$  переменных, так как не существует сильно неприводимых полиномов одного переменного. Свойство сильной неприводимости полинома в кольце  $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  является условием общего положения в топологии Зарисского. В примере 1.22 3) представлен полином, который неприводим, но не сильно неприводим.

Согласно лемме 1.8, амёба полинома, не являющегося сильно неприводимым, является объединением амёб его полиномиальных множителей Пюизо. Таким образом, без ограничения общности можем ограничиться рассмотрением сильно неприводимых гипергеометрических полиномов.

Гипергеометрические полиномы, введённые в определении 1.20, обладают свойствами, аналогичными свойствам 1–6 классических гипергеометрических полиномов, перечисленных на стр. 13 во введении. Действительно, для любого целочисленного выпуклого многогранника существует только один (с точностью до постоянного множителя) гипергеометрический полином вида (1.10) с носителем в этом многограннике; этот полином плотный; он удовлетворяет гипергеометрической системе  $\text{Horn}(\psi_P(s))$ . Аналог свойства корней для (1.10) определяется следующей теоремой, которая является основным результатом первой главы диссертации.

**Теорема 1.23.** *Пусть*

$$p(x) = \sum_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \psi_P(s) x^s$$

— гипергеометрический полином с носителем в выпуклом целочисленном многограннике  $P \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  (определение 1.20). Предположим, что разбиение многогранника  $P$ , двойственное тропической гиперповерхности, заданной тропическим полиномом

$$p_{\text{trop}}(\zeta) := \max_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \{\ln |\psi_P(s)| + \langle s, \zeta \rangle\}, \quad (1.11)$$

является триангуляцией. Тогда гипергеометрический полином  $p(x)$  оптимален.

*Доказательство.* Умножение полинома на ненулевую константу не влияет на его амёбу. Таким образом, можно без потери общности предположить, что (возможно, после подходящей нормализации)  $|\psi_P(s)| \geq 1$  для всех вершин  $s \in \text{vert}(P)$ . По определению функция  $\psi_P(s)$  корректно определена, конечна и положительна на  $P$ . Кроме того, по теореме Бора-Моллерупа [17], она является строго логарифмически вогнутой функцией на  $P$ .

В дальнейшем нам потребуется понятие взвешенной компактифицированной амёбы полинома.

**Определение 1.24.** Следуя идеям из [71], зададим *взвешенное моментное отображение*, связанное с алгебраической гиперповерхностью  $\{x \in \mathbb{C}^n : p(x) := \sum_{s \in S} a_s x^s = 0\}$  следующим образом:

$$\mu_p(x) := \frac{\sum_{s \in S} s \cdot |a_s| |x^s|}{\sum_{s \in S} |a_s| |x^s|}. \quad (1.12)$$

Из общей теории моментных отображений [32] следует, что  $\mu_p(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{N}_p$ .

**Определение 1.25.** Под *взвешенной компактифицированной амёбой* алгебраической гиперповерхности  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{C}^n : p(x) = 0\}$  будем понимать множество  $\mu_p(\mathcal{H})$  и использовать обозначение  $\mathcal{WCA}(p)$ .

Напомним, что *степень Адамара* порядка  $r \in \mathbb{R}$  полинома  $p(x) = \sum_{s \in S} a_s x^s$  определяется как  $p^{[r]}(x) := \sum_{s \in S} a_s^r x^s$ . Тогда топология теоретико-множественного предела  $\mathcal{WCA}(p^{[r]})$  при  $r \rightarrow \infty$  определяется следующей теоремой.

**Теорема 1.26.** (см. [52]) Пусть имеется полином  $p \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  с многогранником Ньютона  $\mathcal{N}$ , для каждой вершины  $\alpha \in \text{vert}(\mathcal{N})$  которого

справедливо  $|a_\alpha| \geq 1$ . Предположим, что функция, сопоставляющая каждой вершине  $\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n$  вещественное число  $\ln |a_\alpha|$ , вогнутая, а разбиение многогранника  $\mathcal{N}$  двойственное тропической гиперповерхности, заданной тропическим полиномом

$$p_{trop}(\zeta) := \max_{\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n} \{\ln |a_\alpha| + \langle \alpha, \zeta \rangle\},$$

является триангуляцией. Тогда теоретико-множественный предел

$$\mathcal{P}_p^\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} \text{WCA}(p^{[r]}) \subset \mathcal{N}_p$$

представляет собой полиэдральный комплекс, такой, что его дополнение в  $\mathcal{N}$  имеет ту же топологию, что и дополнение к амёбе  $\mathcal{A}_p$ , то есть,  $\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_p) = \pi_0(\mathcal{N} \setminus \mathcal{P}_p^\infty)$ .

Полиэдральный комплекс  $\mathcal{P}_{p(x)}^\infty$  для полинома Хирцебруха изображён на рисунке 1.3 (в) внутри многоугольника Ньютона этого полинома. Аппроксимация полиэдрального комплекса  $\mathcal{P}_{p_3(x,y)}^\infty$  показана на рисунке 1.9 (в). Геометрия  $\mathcal{P}_{p(x)}^\infty$  связана с амёбой  $\mathcal{A}_{p(x)}$ , в то время как комбинаторика  $\mathcal{P}_{p(x)}^\infty$  отражает алгебраические свойства этого полинома.

Пусть  $\lambda$  — некоторое положительное вещественное число. Из определения (1.11) тропического полинома  $p_{trop}(\zeta)$  следует, что  $p_{trop}^{[\lambda]}(\lambda\zeta) = \lambda p_{trop}(\zeta)$ , а значит и для любого  $\lambda > 0$  полином  $p^{[\lambda]}(x)$  удовлетворяет утверждениям теоремы 1.26. Используя эту теорему, приходим к выводу, что

$$\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_{p^{[\lambda]}(x)}) = \pi_0(P \setminus \mathcal{P}_{p^{[\lambda]}(x)}^\infty).$$

Кроме того, из определения  $\mathcal{P}_{p(x)}^\infty$  имеем равенство  $\mathcal{P}_{p(x)}^\infty = \mathcal{P}_{p^{[\lambda]}(x)}^\infty$ .

Покажем, что для достаточно большого значения  $\lambda$  полином  $p^{[\lambda]}(x)$  является оптимальным. Для  $p(x) = \sum_{s \in S} a_s x^s$  определим (см. [60, с. 357])

$$m_s(p) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{s' \neq s} |a_{s'}| \exp \langle x, s' \rangle}{|a_s| \exp \langle x, s \rangle}. \quad (1.13)$$

Из принципа аргумента следует, что амёба полинома  $p$  имеет компоненту порядка  $s$  в своём дополнении при  $m_s(p) < 1$  [60]. Полином оптимален, если дополнение его амёбы имеет компоненты всех возможных порядков.

Далее изучим более подробно одномерный случай. Пусть  $a_0, \dots, a_d$  — положительные вещественные числа, такие, что их можно трактовать как значения строго вогнутой функции на  $\{0, \dots, d\}$ , то есть, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{tg} \alpha_0 > \dots > \operatorname{tg} \alpha_{s-1} > \operatorname{tg} (\pi - \alpha_{s+1}) \dots > \operatorname{tg} (\pi - \alpha_d)$$

при некотором *фиксированном* значении  $s \in \{0, \dots, d\}$  в обозначениях, представленных на рисунке 1.4.

Рассмотрим полином  $p(x)$  с логарифмически строго вогнутым коэффициентом

$$p(x) = \sum_{k=0}^d e^{a_k} x^k = e^{a_0} + e^{a_1} x + \dots + e^{a_d} x^d.$$

Для наличия связной компоненты порядка  $s \in \{0, \dots, d\}$  в дополнении к амёбе  $\mathcal{A}_{p^{[\lambda]}}$  достаточно сходимости геометрического ряда, в который раскладывается функция  $\frac{1}{p^{[\lambda]}(x)}$  в окрестностях некоторой точки. Это условие выполняется, если при некотором значении  $x$  справедливо неравенство  $m_s(p^{[\lambda]}) < 1$ , где функция

$$m_s(p^{[\lambda]}) = \frac{\sum_{k \neq s} e^{a_k \lambda + kx}}{e^{a_s \lambda + sx}}$$

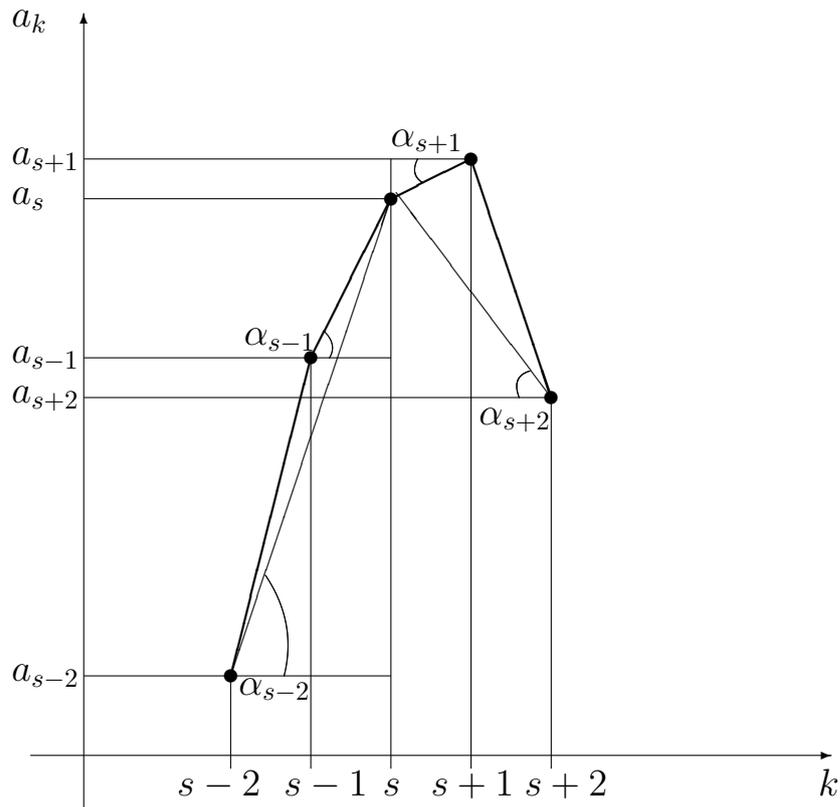


Рисунок 1.4 — Углы  $\alpha_k$ , заданные значениями строго вогнутой положительной функции

строго выпукла вниз и достигает своей нижней грани на вещественной оси.

Покажем, что при замене  $x = t\lambda$  для  $\forall s \in \{0, \dots, d\}$  найдутся подходящие значения  $t$  и  $\lambda$ , при которых

$$m_s \left( p^{[\lambda]}(t\lambda) \right) = \frac{e^{a_0\lambda} + \dots + e^{(a_{s-1}+(s-1)t)\lambda} + e^{(a_{s+1}+(s+1)t)\lambda} + \dots + e^{(a_d+dt)\lambda}}{e^{(a_s+st)\lambda}} < 1.$$

Для выполнения условия  $m_s(p^{[\lambda]}(t\lambda)) < 1$  при некотором достаточно большом значении  $\lambda$  достаточно, чтобы следующая система относительно  $t$  имела решения (поскольку все показатели экспонент будут отрицательными):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 < a_s + st, \\ a_1 + t < a_s + st, \\ \dots \\ a_{s-1} + (s-1)t < a_s + st, \\ a_{s+1} + (s+1)t < a_s + st, \\ \dots \\ a_d + dt < a_s + st \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t > \frac{a_0 - a_s}{s} = -\frac{a_s - a_0}{s}, \\ t > \frac{a_1 - a_s}{s-1} = -\frac{a_s - a_1}{s-1}, \\ \dots \\ t > \frac{a_{s-1} - a_s}{s-(s-1)} = -\frac{a_s - a_{s-1}}{1}, \\ t < \frac{a_s - a_{s+1}}{(s+1)-s} = -\frac{a_{s+1} - a_s}{1}, \\ \dots \\ t < \frac{a_d - a_s}{d-s} = -\frac{a_d - a_s}{d-s} \end{array} \right.$$

Отметим, что правые части неравенств  $\frac{a_k - a_s}{s-k} = \operatorname{tg} \alpha_k$  при  $k < s$  и  $\frac{a_k - a_s}{s-k} = \operatorname{tg}(\pi - \alpha_k)$  при  $k > s$ . Таким образом, приходим к выводу, что для наличия решений системы

$$\left\{ \begin{array}{l} t > -\operatorname{tg} \alpha_0, \\ \dots \\ t > -\operatorname{tg} \alpha_{s-1}, \\ t < -\operatorname{tg} \alpha_{s+1}, \\ \dots \\ t < -\operatorname{tg} \alpha_d. \end{array} \right.$$

достаточно выполнения условия строгой вогнутости коэффициентов  $a_0, \dots, a_d$ , то есть  $\operatorname{tg} \alpha_0 > \dots > \operatorname{tg} \alpha_{s-1} > \operatorname{tg}(\pi - \alpha_{s+1}) \dots > \operatorname{tg}(\pi - \alpha_d)$ .

Ввиду того, что значение  $s$  было выбрано произвольно, можно утверждать о существовании всех связных компонент в дополнении к амёбе  $\mathcal{A}_{p^{[\lambda]}}$  при достаточно больших значениях  $\lambda$ .

Используя утверждение [60, с. 358] о стремлении к нулю  $m_s$  при стремлении  $\lambda$  к бесконечности, приходим к выводу, что  $m_s(p^{[\lambda]}) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$  для любых  $s \in P \cap \mathbb{Z}^n$ . Следовательно, полином  $p^{[\lambda]}(x)$  является оптимальным при условии, что  $\lambda$  достаточно велико. Данное утверждение вытекает из Следствия 5 на стр. 38 работы [61] в случае, когда  $A = B = \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n$  и  $C$  — пустое множество. Для полноты доказательства приведём следующий

аргумент, предложенный Ю. В. Элияшевым, использующий понятие преобразования Лежандра и методы тропической геометрии.

Пусть  $\ln |a_\alpha|$  задают строго вогнутую функцию. Обозначим преобразование Лежандра тропического полинома

$$p_{trop}(\xi) = \max_{\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n} \{\ln |a_\alpha| + \langle \alpha, \xi \rangle\}$$

через  $p^*(x)$ . Можно проверить, что носитель преобразования Лежандра — это многогранник  $\mathcal{N}$ . При этом  $p^*(x)$  — выпуклая функция и её надграфик является выпуклой линейной оболочкой множества  $\{\alpha \times [-\ln |a_\alpha|, +\infty)\}_{\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Линейная функция  $\ln |a_\alpha| + \langle \alpha, \xi \rangle$  совпадает с  $p_{trop}(\xi)$  на некотором открытом множестве (при условии, что в дополнении к тропическому многообразию, заданному  $p_{trop}$ , есть компонента порядка  $\alpha \in \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n$ ), если функция  $p^*(x)$  «строго выпуклая» в  $x = \alpha$ .

Предположим, что  $p^*(x)$  «строго выпукла» в каждой точке  $x \in \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n$ . Тогда  $m_s(p^{[\lambda]}) < 1 \forall s \in \mathcal{N} \cap \mathbb{Z}^n$  при достаточно большом  $\lambda$ . Из (1.13) следует, что

$$m_s(p^{[\lambda]}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{s' \neq s} \exp(\lambda \ln |a_{s'}| + \langle x, s' \rangle)}{\exp(\lambda \ln |a_s| + \langle x, s \rangle)}.$$

Делая замену  $x = \lambda t$ , получим

$$\begin{aligned} m_s(p^{[\lambda]}) &= \inf_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{s' \neq s} \exp(\lambda \ln |a_{s'}| + \lambda \langle t, s' \rangle)}{\exp(\lambda \ln |a_s| + \lambda \langle t, s \rangle)} = \\ &= \inf_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{s' \neq s} \exp(\ln |a_{s'}| + \langle t, s' \rangle)^\lambda}{\exp(\ln |a_s| + \langle t, s \rangle)^\lambda}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если функция  $\ln |a_s| + \langle t, s \rangle$  совпадает с полиномом  $p_{trop}$  на некотором открытом множестве  $v$ , то  $\ln |a_s| + \langle t, s \rangle > \ln |a_{s'}| + \langle t, s' \rangle \forall t \in v$ . Из этого

следует, что для достаточно большого  $\lambda$  выражение (1.14) меньше 1, что и требовалось доказать.

Таким образом, для всех достаточно больших значений  $\lambda$  имеют место равенства

$$\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_{p(x)}) = \pi_0(P \setminus \mathcal{P}_{p(x)}^\infty) = \pi_0(P \setminus \mathcal{P}_{p^{[\lambda]}(x)}^\infty) = \pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_{p^{[\lambda]}(x)}),$$

и, следовательно, для всех таких значений  $\lambda$  компоненты всех порядков присутствуют в дополнении амёбы  $\mathcal{A}_{p(x)}$ , то есть, полином  $p(x)$  является оптимальным.  $\square$

Далее рассмотрим несколько простых примеров, иллюстрирующих в частных случаях доказательство утверждения об оптимальности достаточно высокой степени Адамара плотного полинома с положительным строго логарифмически вогнутым коэффициентом.

**Пример 1.27.** Пусть  $p(x) = 1 + 3x + 2x^2 + x^3$  и, соответственно,

$$p^{[\lambda]}(x) = 1 + 3^\lambda x + 2^\lambda x^2 + x^3.$$

Несложно убедиться, что для  $m_1(p^{[\lambda]})$ , соответствующей наибольшему коэффициенту  $a_1 = 3^\lambda$ , неравенство

$$m_1(p^{[\lambda]}) = \frac{1 + 2^\lambda e^{2x} + e^{3x}}{3^\lambda e^x} < 1$$

выполняется, например, при  $x = -1$  и  $\lambda = 2$ . Это легко показать, учитывая, что при  $x = -1$ ,  $a_s = \max_k \{a_k\}$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливо

$$\begin{aligned}
m_s \left( p^{[\lambda]}(-1) \right) &= \frac{1}{a_s^\lambda} \sum_{k=0, k \neq s}^d a_k^\lambda e^{-(k-s)} < \frac{\max_{k, k \neq s} \{a_k^\lambda\}}{a_s^\lambda} \sum_{k=0, k \neq s}^d e^{-(k-s)} < \\
&< \frac{\max_{k, k \neq s} \{a_k^\lambda\}}{a_s^\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k-s)} = \frac{\max_{k, k \neq s} \{a_k^\lambda\}}{a_s^\lambda} \cdot \frac{e^{s+1}}{e-1} < 1.
\end{aligned}$$

Докажем утверждение при произвольном значении  $s$ , например, при  $s = 2$ . Таким образом,

$$m_2 \left( p^{[\lambda]} \right) = \frac{1 + 3^\lambda e^x + e^{3x}}{2^\lambda e^{2x}} = \frac{1}{2^\lambda} e^{-2x} + \left( \frac{3}{2} \right)^\lambda e^{-x} + \frac{1}{2^\lambda} e^x.$$

Будем искать  $x$  в виде  $x = t\lambda$ . Тогда имеем:

$$m_2 \left( p^{[\lambda]}(t\lambda) \right) = e^{(-\ln 2 - 2t)\lambda} + e^{(\ln(3/2) - t)\lambda} + e^{(-\ln 2 + t)\lambda}.$$

Выберем  $t$  таким образом, чтобы выполнялись неравенства:

$$-\ln 2 - 2t < 0, \quad \ln(3/2) - t < 0, \quad -\ln 2 + t < 0.$$

Это возможно при  $\ln(3/2) < t < \ln 2$ .

Для остальных  $s \in \{0, \dots, d\}$  доказательство производится аналогичным образом.

**Пример 1.28.** Рассмотрим простейший двумерный случай, а именно полином  $p^{[\lambda]}(x, y) = x^2 + ex + y^2 + ey + exy + e^2$  и, соответственно,

$$p^{[\lambda]}(x, y) = x^2 + e^\lambda x + y^2 + e^\lambda y + e^\lambda xy + e^{2\lambda}.$$

Следуя идеям доказательства из предыдущего примера, рассмотрим, например, функцию

$$\begin{aligned} m_{1,1} \left( p^{[\lambda]} \right) &= \frac{e^{2x} + e^{\lambda+x} + e^{\lambda+2y} + e^{\lambda+y} + e^{2\lambda}}{e^{\lambda+x+y}} = \\ &= e^{-\lambda+x-y} + e^{-y} + e^{y-x} + e^{-x} + e^{\lambda-x-y}. \end{aligned}$$

Будем искать  $x$  и  $y$  в виде  $x = t\lambda$  и  $y = r\lambda$  соответственно. Тогда имеем:

$$m_{1,1} \left( p^{[\lambda]} \right) = e^{\lambda(-1+t-r)} + e^{-\lambda r} + e^{\lambda(r-t)} + e^{-\lambda t} + e^{\lambda(1-t-r)}.$$

Выберем  $t$  и  $r$  таким образом, чтобы выполнялись неравенства:

$$-1 + t - r < 0, \quad -r < 0, \quad r - t < 0, \quad -t < 0, \quad 1 - t - r < 0.$$

Это возможно при

$$\begin{cases} r > \frac{1}{2}, \\ r < t < r + 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - r < t < r + 1. \end{cases}$$

Заметим, что гипергеометрический полином в примере 1.22 п. 3 не удовлетворяет предположению теоремы 1.23, так как тропический полином (1.11) тождественно равен нулю в этом случае.

Многочисленные компьютерные эксперименты показывают, что условие невырожденности может быть нарушено только для нескольких гипергеометрических полиномов низкой степени при условии, что комбинаторная структура определяющего многогранника достаточно богата. Все рассмотренные гипергеометрические полиномы достаточно высокой степени оказались оптимальными. Однако предоставить исчерпывающий список всех вырожденных многогранников во всех размерностях, которые могут привести к неопти-

мальным гипергеометрическим полиномам, представляется задачей огромной комбинаторной сложности.

Подчеркнём ещё раз, что по определению 1.20 оптимальность является свойством множества нулей, а не самого полинома. Например, гипергеометрический полином двух переменных  $(1 - x - y)^2$  является оптимальным в том смысле, что его нули образуют оптимальную алгебраическую гиперповерхность  $\{x + y = 1\}$ .

Множество плотных оптимальных полиномов, зависящих от нескольких переменных и имеющих  $\mathbb{Z}^n$ -выпуклый носитель, намного обширнее множества гипергеометрических полиномов. Согласно [60], коэффициент полинома должен быть лишь «достаточно логарифмически вогнутым» для того, чтобы сам полином был оптимальным.

**Пример 1.29.** Двумерный коэффициент Оре-Сато

$$\varphi(s, t) = (\Gamma(t + 1)\Gamma(1 + 6s - 3t)\Gamma(31 - 6s - 2t))^{-1}$$

определяет конфлюэнтную голономную гипергеометрическую систему с полиномиальным решением

$$\begin{aligned} p_0(x, y) = & 1 + 593775x + 86493225x^2 + 86493225x^3 + 593775x^4 + x^5 + \\ & + 39331656000xy + 34936343442000x^2y + 55898149507200x^3y + \\ & + 216324108000x^4y + 54513675216000xy^2 + 2112950051372160000x^2y^2 + \\ & + 6867087666959520000x^3y^2 + 10357598291040000x^4y^2 + \\ & + 15382276373989324800000x^2y^3 + 169205040113882572800000x^3y^3 + \\ & + 33807200821954560000x^4y^3 + 3045690722049886310400000x^2y^4 + \\ & + 639595051630476125184000000x^3y^4 + 184203374869577124052992000000x^3y^5 + \\ & + 368406749739154248105984000000x^3y^6. \end{aligned}$$

Носитель этого гипергеометрического полинома является  $\mathbb{Z}^2$ -выпуклым и имеет треугольную выпуклую оболочку. Амёба  $p_0(x, y)$  является оптимальной, см. рисунок 1.5.

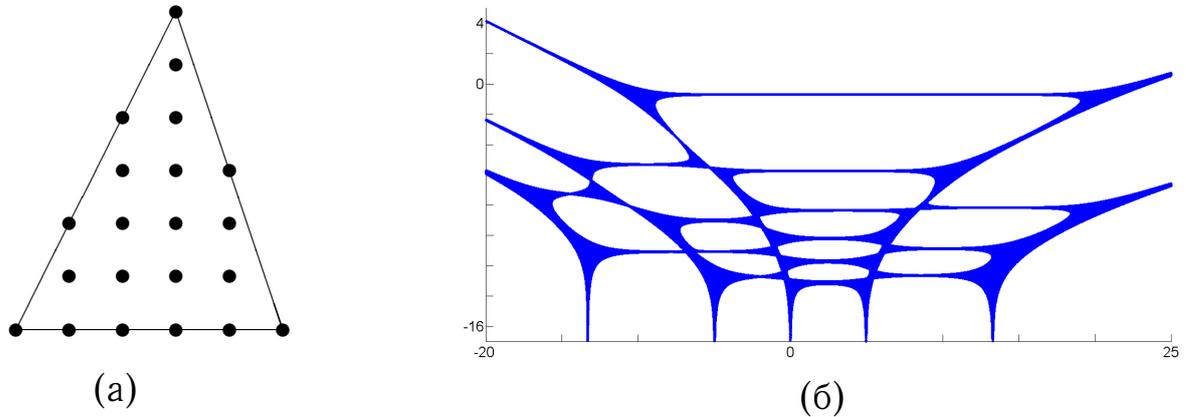


Рисунок 1.5 — Многоугольник Ньютона и амёба  $p_0(x, y)$

**Замечание 1.30.** Напомним, что ядро Бергмана комплексной эллипсоидальной области задаётся рациональной гипергеометрической функцией [56]. Можно проверить, что числители таких рациональных функций необязательно являются оптимальными полиномами. Известно, что амёбы сингулярных дивизоров гипергеометрических функций в смысле Гельфанда-Капранова-Зелевинского [19] являются сплошными [56]. Таким образом, оптимальное свойство нулей гипергеометрических полиномов не может быть распространено на классы рациональных или алгебраических гипергеометрических функций.

### 1.3 Классические гипергеометрические полиномы двух переменных и их амёбы

Несмотря на различную терминологию, классические гипергеометрические ряды  $F_1, \dots, F_4$ ,  $G_1, \dots, G_3$ ,  $H_1, \dots, H_7$ , а также другие ряды в списке Горна [25], по общему мнению являются «истинно гипергеометрическими».

Для резонансных параметров [11] многие из этих рядов конечны и оказываются гипергеометрическими полиномами двух переменных.

Функция Аппеля  $F_1$  является одним из важнейших классических гипергеометрических рядов, так как, согласно результатам [25], любая двумерная гипергеометрическая система дифференциальных уравнений второго порядка и голономного ранга 3 может быть преобразована в систему для  $F_1$  или предельный частный случай этой системы. Следующее утверждение следует из теоремы 1.23.

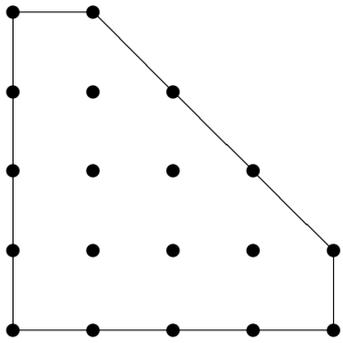
**Следствие 1.31.** *Полиномиальные случаи гипергеометрической функции Аппеля  $F_1(a, b_1, b_2, c; x, y)$  оптимальны при  $a, b_1, b_2, -c < 0$  и  $a > b_1 + b_2$ .*

*Доказательство.* Наложённые условия на параметры  $F_1(a, b_1, b_2, c; x, y)$  обеспечивают взаимно однозначное соответствие между  $\Gamma$ -множителями, в коэффициенте разложения  $F_1$  в степенной ряд, и сторонами многоугольника Ньютона полинома, в который данный ряд превращается в рассматриваемом частном случае. Поэтому данный полином является гипергеометрическим в смысле определения 1.20. □

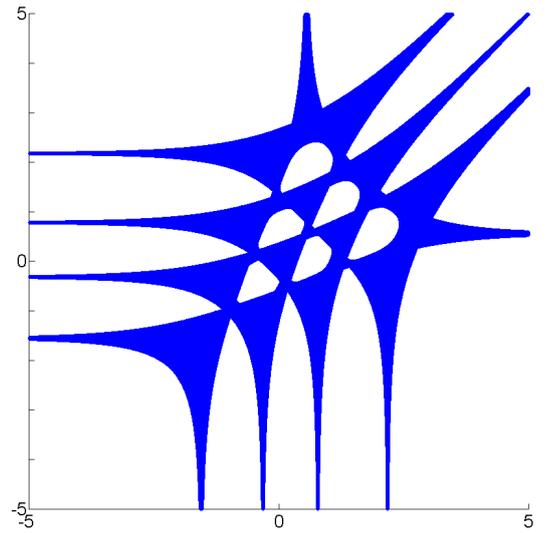
На рисунке 1.6 изображена амёба оптимального гипергеометрического полинома  $F_1(-5, -4, -4, 3; x, y)$ .

Заметим, однако, что не все полиномиальные частные случаи гипергеометрической функции Аппеля  $F_1(a, b_1, b_2, c; x, y)$  являются оптимальными. Оптимальным свойством в общем случае не обладают те полиномы, у которых многогранники Ньютона не имеют сторон, ортогональных градиентам линейных форм в определяющем коэффициенте Оре-Сато. К примеру,  $F_1(-4, 5, -7, 9; x, y)$  не является оптимальным полиномом, его многоугольник Ньютона является всего лишь треугольником.

Заметим, что множество нулей рационального случая классической гипергеометрической функции не обязательно должно быть опти-



(a)



(б)

Рисунок 1.6 — Многоугольник Ньютона и амёба полинома Аппеля  $F_1(-5, -4, -4, 3; x, y)$

мальной гиперповерхностью. Например, числитель рациональной функции  $F_2(5; 3/2, 1; -1/2, 2; x, y)$  не является оптимальным полиномом.

## 1.4 Примеры

В настоящем разделе собраны примеры гипергеометрических полиномов многих переменных вместе с их многогранниками Ньютона и амёбами.

**Пример 1.32.** Гипергеометрическая система Горна, заданная коэффициентом Оре-Сато

$$\varphi(s, t) = \Gamma(s-6)\Gamma(s+t-10)\Gamma(t-6)\Gamma(-s+t-4)\Gamma(-s)\Gamma(-s-t+2)\Gamma(-t)\Gamma(s-t-4),$$

допускает следующее полиномиальное решение:

$$\begin{aligned}
 p_1(x, y) = & 21x^2 + 64x^3 + 21x^4 + 126xy + 2016x^2y + 4704x^3y + 2016x^4y + 126x^5y + \\
 & + 21y^2 + 2016xy^2 + 22050x^2y^2 + 47040x^3y^2 + 22050x^4y^2 + 2016x^5y^2 + 21x^6y^2 + \\
 & + 64y^3 + 4704xy^3 + 47040x^2y^3 + 98000x^3y^3 + 47040x^4y^3 + 4704x^5y^3 + 64x^6y^3 + \\
 & + 21y^4 + 2016xy^4 + 22050x^2y^4 + 47040x^3y^4 + 22050x^4y^4 + 2016x^5y^4 + 21x^6y^4 + \\
 & + 126xy^5 + 2016x^2y^5 + 4704x^3y^5 + 2016x^4y^5 + 126x^5y^5 + 21x^2y^6 + 64x^3y^6 + 21x^4y^6.
 \end{aligned}$$

(Сама система является слишком громоздкой и потому не приводится.) Многоугольник Ньютона и амёба  $p_1(x, y)$  представлены на рисунке 1.7. Эта амёба является оптимальной.

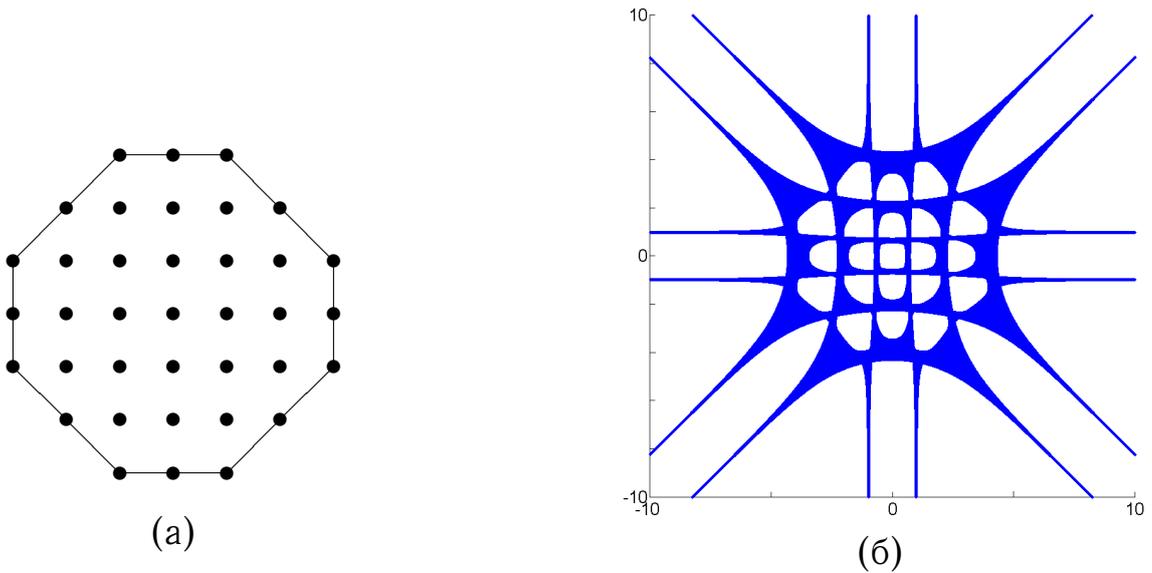


Рисунок 1.7 — Многоугольник Ньютона и амёба  $p_1(x, y)$

**Пример 1.33.** Следующий пример показывает, что число  $\Gamma$ -множителей в коэффициенте Оре-Сато оптимального гипергеометрического полинома может быть строго меньше числа граней его многогранника Ньютона. Гипергеометрическая система, определяемая коэффициентом Оре-Сато

$$\varphi(s, t) = \Gamma(s + 2t - 5) \Gamma(-2s - t - 4) \Gamma(-s - 5t + 1), \quad (1.15)$$

имеет следующее полиномиальное решение:

$$\begin{aligned}
 p_2(x, y) = & 2421619200x^5 + 172972800x^6 + 2882880x^7 + 14560x^8 + 20x^9 + \\
 & + 174356582400x^2y + 48432384000x^3y + 2421619200x^4y + 34594560x^5y + \\
 & + 160160x^6y + 208x^7y + 2421619200xy^2 + 691891200x^2y^2 + 21621600x^3y^2 + \\
 & + 160160x^4y^2 + 286x^5y^2 + 524160xy^3 + 14560x^2y^3 + 56x^3y^3 + 32y^4 + xy^4.
 \end{aligned}$$

Носитель  $p_2(x, y)$  (ограниченный сингулярными дивизорами соответствующего коэффициента Оре-Сато) и его амёба изображены на рисунке 1.8.

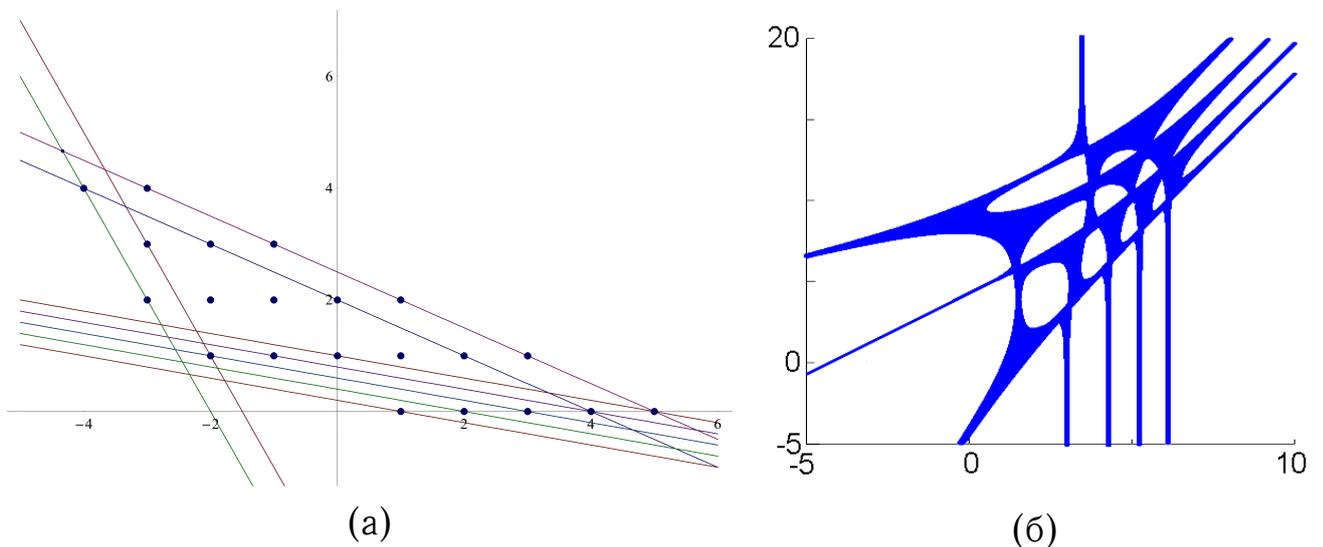


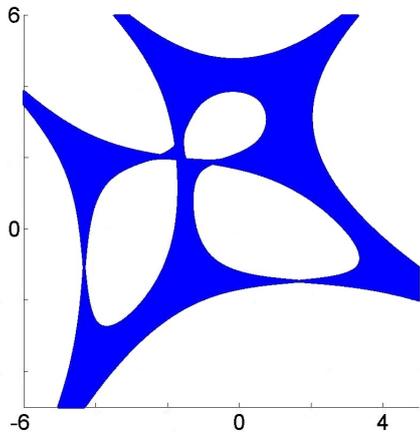
Рисунок 1.8 — Носитель  $p_2(x, y)$  (ограниченный сингулярными дивизорами (1.15)) и его амёба

**Пример 1.34.** Гипергеометрический полином двух переменных с носителем в четырёхугольнике с вершинами  $(2, 0)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(2, 3)$  и  $(0, 1)$  задаётся формулой

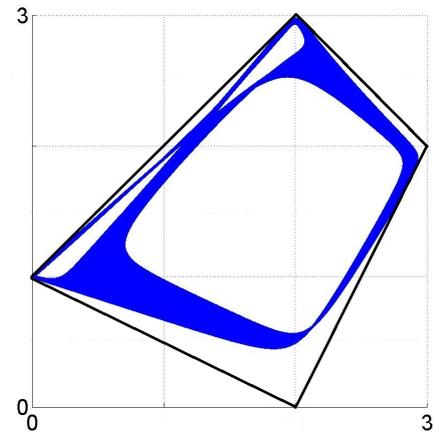
$$p_3(x, y) = 240x^2 + 3y + 240xy + 1080x^2y + 30xy^2 + 180x^2y^2 + 36x^3y^2 + 2x^2y^3.$$

На рисунках 1.9 (а-в) изображены амёба  $\mathcal{A}_{p_3}$ , компактифицированная амёба  $\overline{\mathcal{A}}_{p_3}$ , взвешенная компактифицированная амёба шестой степени Адамара полинома  $p_3(x, y)$ . На рисунке 1.9 (г) показана исчезающая связная компонента порядка  $(2, 2)$  в дополнении к взвешенной компактифицированной амёбе де-

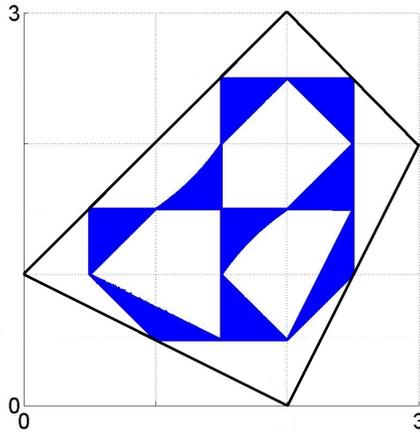
формированного варианта  $p_3(x, y)$ . Заметим, что малая компонента исчезает точно в точке с координатами  $(2, 2)$ , то есть в порядке этой компоненты.



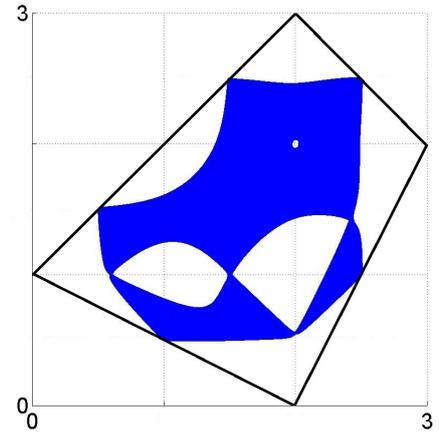
(a)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 1.9 — Амёба, компактифицированная амёба, взвешенная компактифицированная амёба шестой степени Адамара полинома  $p_3(x, y)$  и исчезающая связная компонента дополнения деформации  $\mathcal{WCA}(p_3(x, y))$

**Пример 1.35.** Первый максимальный минор матрицы Тёплица

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix}$$

является полиномом Чебышёва второго рода степени 6 с двумя переменными [16]. Этот полином оптимален в координатах  $\xi = xy$ ,  $\eta = y^2/x$ , в которых он является плотным, то есть имеет место равенство  $\text{supp } p(\xi, \eta) = \mathcal{N}_{p(\xi, \eta)} \cap \mathbb{Z}^2$ .

## Глава 2

# Аффинные и компактифицированные амёбы и их контуры

Пусть  $p(x)$  является полиномом  $n$  комплексных переменных:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha \in S} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

где  $S \subset \mathbb{Z}^n$  является конечным множеством.

Согласно теореме 1.9, амёба полинома  $n \geq 2$  переменных является замкнутым связным неограниченным подмножеством  $\mathbb{R}^n$ , дополнение к которому состоит из конечного числа выпуклых связных компонент. Кроме того, в двумерном случае амёба имеет «щупальца», которые уходят в бесконечность в направлениях, ортогональных сторонам многоугольника  $\mathcal{N}_{p(x)}$  (см. рисунки 2.2, 2.4).

Особый интерес представляют два экстремальных значения для числа связных компонент дополнения, соответствующие сплошной (см. определение 1.11) и оптимальной (см. определение 1.10) амёбе. Таким образом, сплошные и оптимальные амёбы являются конечными точками спектра амёб полиномов с заданным многогранником Ньютона. Конечно, существует континуальное семейство оптимальных (равно как и сплошных) амёб, соответствующих полиномам с заданным многогранником Ньютона. Действительно, оба набора амёб, рассматриваемых как подмножества в комплексном пространстве коэффициентов определяющих полиномов, не являются пустыми.

В двумерном случае амёба является сплошной тогда и только тогда, когда все связные компоненты её дополнения неограниченны, и никакие её «щупальца» не параллельны. Оптимальная амёба, напротив, имеет макси-

мально возможное число ограниченных связных компонент в своем дополнении и максимально возможное число параллельных «щупалец».

Функциональная зависимость топологического типа амёбы  $\mathcal{A}_{p(x)}$  от коэффициентов определяющего полинома  $p(x)$  сложна и в настоящее время мало изучена. Достаточное условие оптимальности амёбы полинома сформулировано в теореме 1.23, согласно которой соответствующий полином должен удовлетворять «истинной» системе дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа [3, 4], в то время как носитель полинома достаточно сложен [12]. В разделе 2.2 предложен алгоритм для вычисления гипергеометрического полинома (см. определение 1.20) с заданным многогранником Ньютона.

**Пример 2.1.** Пусть  $\mathcal{N}$  обозначает выпуклую оболочку множества точек решётки  $\{(0, 0), (1, 0), (0, 2), (2, 1)\}$ , см. рисунок 2.1. Этот многоугольник используется в нескольких дальнейших примерах и выбран как один из простейших многоугольников, которые содержат внутреннюю целую точку, а также целую точку в относительной внутренней части его стороны.

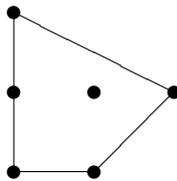


Рисунок 2.1 — Носитель полиномов в примере 2.1

На рисунке 2.2 показаны амёбы четырёх полиномов двух переменных

$$p_1(x, y) = 1 + x + y + xy + y^2 + x^2y,$$

$$p_2(x, y) = 1 + x + 3y + xy + y^2 + x^2y,$$

$$p_3(x, y) = 1 + x + y + 4xy + y^2 + x^2y,$$

$$p_4(x, y) = 1 + x + 3y + 4xy + y^2 + x^2y,$$

чь многоугольники Ньютона совпадают с  $\mathcal{N}$ . Дополнение к сплошной амёбе на рисунке 2.2 (а) состоит из четырёх неограниченных связных компонент

с двумерными конусами рецессии. Дополнение к оптимальной амёбе на рисунке 2.2 (г) содержит шесть связных компонент: четыре неограниченные компоненты с двумерными конусами рецессии, одну неограниченную компоненту между параллельными «щупальцами» с одномерным конусом рецессии и одну ограниченную компоненту. Две другие амёбы, изображённые на рисунке 2.2 (б) и 2.2 (в) имеют пять связных компонент в своих дополнениях и топологически занимают промежуточное положение между сплошной и оптимальной амёбами, определяемыми полиномами с многоугольником Ньютона  $\mathcal{N}$ .

Существующие аналитические методы [27, 60], вообще говоря, не позволяют предсказать топологический тип амёбы полинома с коэффициентами общего положения. С вычислительной точки зрения задачи изображения амёб на рисунке 2.2 (а) и 2.2 (г) довольно схожи. Тем не менее, обнаружение ограниченной связной компоненты данного порядка [27] в дополнении к амёбе с помощью аналитических методов является задачей большой сложности [58].

## 2.1 Амёбы полиномов двух переменных

**Определение 2.2.** Будем называть «тушкой» амёбы  $\hat{A} := A \cap B$  пересечение амёбы  $A$  и некоторого шара  $B$  такое, что количество связных компонент дополнения к  $\hat{A}$  настолько велико, насколько это может быть (то есть равным числу связных компонент в дополнении к  $A$  в  $\mathbb{R}^n$ ).

Заметим, что тушка амёбы определена неоднозначно. Однако топология её дополнения в достаточно большом шаре определена корректно и настолько сложна, насколько это возможно. Говоря об изображении амёбы, будем подразумевать её подходящую тушку.

В данном разделе рассмотрены полиномы двух переменных вида  $p(x, y) = \sum c_{ij}x^i y^j$ , и предложен алгоритм для вычисления их амёб.

Согласно теореме 1.9, геометрия амёбы  $\mathcal{A}_p$  тесно связана со свойствами многогранника Ньютона  $\mathcal{N}_p$  полинома  $p$ . Тем не менее, коэффициенты полинома  $p$  также играют существенную роль и определяют размер тушки рассматриваемой амёбы. В дальнейшем границы области, где изображена тушка амёбы, определяются экспериментально.

Представленный в приложении А алгоритм вычисления амёбы полиномов двух переменных использовался многими авторами в различных формах [26, 36, 48]. Ссылки в [39] могут также использоваться для более подробного изучения вычислительной сложности алгоритмов поиска корней полиномов.

Чтобы получить изображение хорошего качества, шаги алгоритма 1 необходимо повторить, поменяв местами переменные  $x$  и  $y$  и отобразив вычисленные точки на том же рисунке.

**Пример 2.3.** Для полинома  $p_4(x, y)$  в примере 2.1 списки полиномиальных коэффициентов для переменных  $x$  и  $y$  определены следующим образом:  $cx\_list = \{1, 3 + 4x + x^2, 1 + x\}$  и  $cy\_list = \{y, 1 + 4y, 1 + 3y + y^2\}$ . Амёба (точнее, её тушка) изображена в прямоугольнике  $[-5, 5] \times [-5, 5]$ . Число значений абсолютного значения переменной равно  $n_r = 2000$ , при этом число значений её аргумента равно  $n_\varphi = 180$ .

Рисунок 2.2 содержит амёбы полиномов из примера 2.1, вычисленных при помощи алгоритма 1. Топологически более сложная амёба полинома в примере 2.5 вычисляется аналогичным образом.

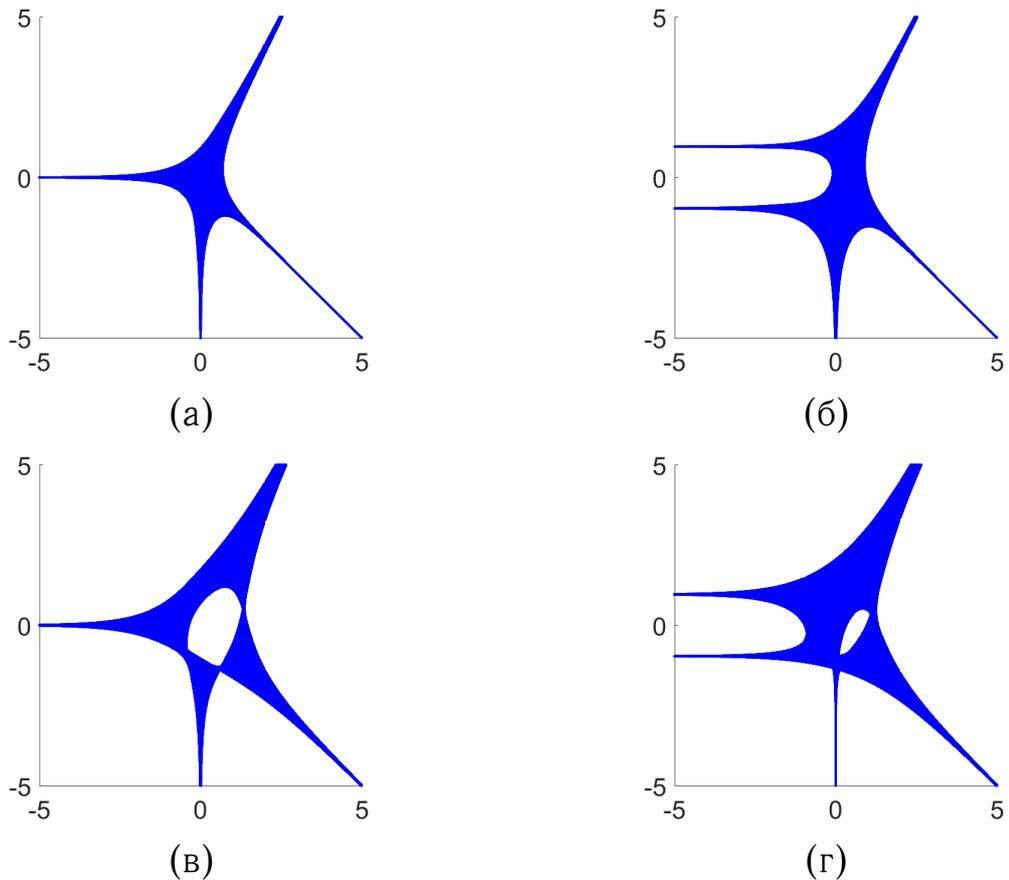


Рисунок 2.2 — Амёбы полиномов  $p_1(x, y)$ ,  $p_2(x, y)$ ,  $p_3(x, y)$  и  $p_4(x, y)$

## 2.2 Оптимальные полиномы и их амёбы

В данном разделе используется понятие гипергеометрического полинома (см. определение 1.20) с целью конструктивной генерации оптимальных амёб.

Для выпуклого целочисленного многогранника  $\mathcal{N}$  формируется список  $B$  внешних нормалей к граням  $\mathcal{N}$ . Длину этого списка обозначим через  $q$ . Предположим, что векторы из  $B$  нормированы таким образом, что координаты каждой внешней нормали являются целыми и взаимно простыми. Определим коэффициент Оре-Сато (1.9). Гипергеометрическая система (1.3), определяемая коэффициентом Оре-Сато  $\varphi(s)$ , допускает полиномиальное решение с несколькими интересными свойствами. В дальнейшем будем использовать алгоритм 2 для генерации оптимальных полиномов гипергеометрического типа.

**Пример 2.4.** Внешние нормали (нормированные, как объяснено в начале данного раздела) к сторонам показанного на рисунке 2.1 многоугольника имеют следующий вид:  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, -1)$ . Используя (1.9), получаем

$$\varphi(s, t) = (\Gamma(s+1)\Gamma(t+1)\Gamma(-s-2t+5)\Gamma(-s+t+2))^{-1}.$$

По определению 1.3, указанный коэффициент Оре-Сато  $\varphi(s, t)$  порождает полиномы

$$\begin{aligned} P_1(s, t) &= (-s-2t+4)(-s+t+1), & Q_1(s, t) &= s+2, \\ P_2(s, t) &= (s+2t-4)(s+2t-3), & Q_2(s, t) &= (t+2)(-s+t+3). \end{aligned}$$

Соответствующая гипергеометрическая система определяется линейными дифференциальными операторами с частными производными

$$\begin{cases} x(-\theta_x - 2\theta_y + 4)(-\theta_x + \theta_y + 1) - (\theta_x + 2), \\ y(\theta_x + 2\theta_y - 4)(\theta_x + 2\theta_y - 3) - (\theta_y + 2)(-\theta_x + \theta_y + 3). \end{cases} \quad (2.1)$$

Нетрудно проверить, что гипергеометрический полином

$$p(x, y) = 1 + 4x + 6y + 24xy + 12x^2y + 2y^2$$

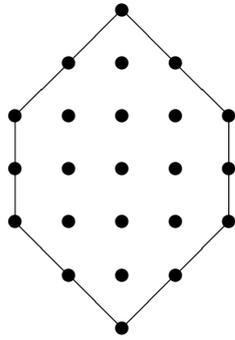
(взаимно простые коэффициенты которого находятся в соответствии с шагом 3 алгоритма 2) принадлежит ядрам операторов (2.1).

**Пример 2.5.** Используя алгоритмы 1 и 2, вычислим коэффициенты гипергеометрического полинома с носителем в многоугольнике  $\mathcal{N}_{p_h(x,y)}$ , изображённом

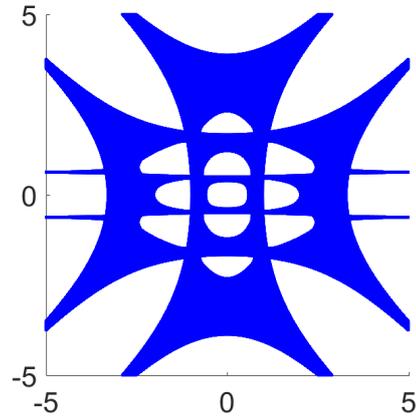
на рисунке 2.3 (а):

$$\begin{aligned}
 p_h(x, y) = & 2x^2 + 20xy + 72x^2y + 20x^3y + 5y^2 + 160xy^2 + 450x^2y^2 + 160x^3y^2 + \\
 & + 5x^4y^2 + 12y^3 + 300xy^3 + 800x^2y^3 + 300x^3y^3 + 12x^4y^3 + 5y^4 + 160xy^4 + \\
 & + 450x^2y^4 + 160x^3y^4 + 5x^4y^4 + 20xy^5 + 72x^2y^5 + 20x^3y^5 + 2x^2y^6.
 \end{aligned}$$

Амёба  $\mathcal{A}_{p_h(x,y)}$  изображена на рисунке 2.3 (б).



(а)



(б)

Рисунок 2.3 — Многогранник Ньютона и амёба гипергеометрического полинома  $p_h(x, y)$

Более сложный гипергеометрический полином задаётся формулой

$$\begin{aligned}
 p_{h2}(x, y) = & -456456x^3 + 488864376x^2y - 28756728x^3y + 25420947552x^2y^2 - \\
 & - 244432188x^3y^2 + 3003x^4y^2 - 119841609888xy^3 + 127104737760x^2y^3 - \\
 & - 465585120x^3y^3 + 6006x^4y^3 + 1396755360y^4 - 508418951040xy^4 + \\
 & + 139815211536x^2y^4 - 232792560x^3y^4 + 1729x^4y^4 + 4190266080y^5 - \\
 & - 355893265728xy^5 + 41611670100x^2y^5 - 29628144x^3y^5 + 57x^4y^5 + \\
 & + 698377680y^6 - 58663725120xy^6 + 3328933608x^2y^6 - 705432x^3y^6 - \\
 & - 2327925600xy^7 + 55023696x^2y^7 - 16930368xy^8.
 \end{aligned}$$

Его определяющий коэффициент Оре-Сато равен

$$\varphi(s, t) = \Gamma(s + t - 4)\Gamma(-4s + t - 16)\Gamma(-3s - 2t - 5)\Gamma(3s - t - 3)\Gamma(2s + t - 5).$$

Амёба этого полинома изображена на рисунке 2.4 (б).

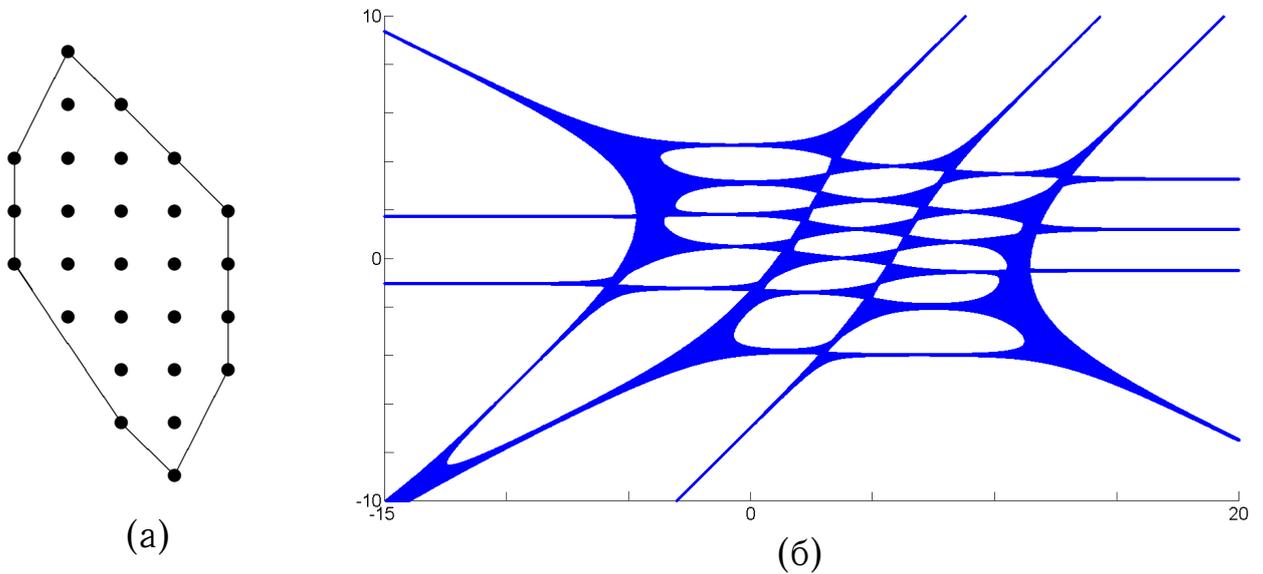


Рисунок 2.4 — Многогранник Ньютона и амёба гипергеометрического полинома  $p_{h2}(x, y)$

**Пример 2.6.** Используя алгоритмы 1 и 2, можно получать в высоком разрешении изображения амёб гипергеометрических полиномов больших размерностей (например, рисунок 2.5). Другие нетривиальные примеры изображения амёб гипергеометрических полиномов представлены в приложении В.

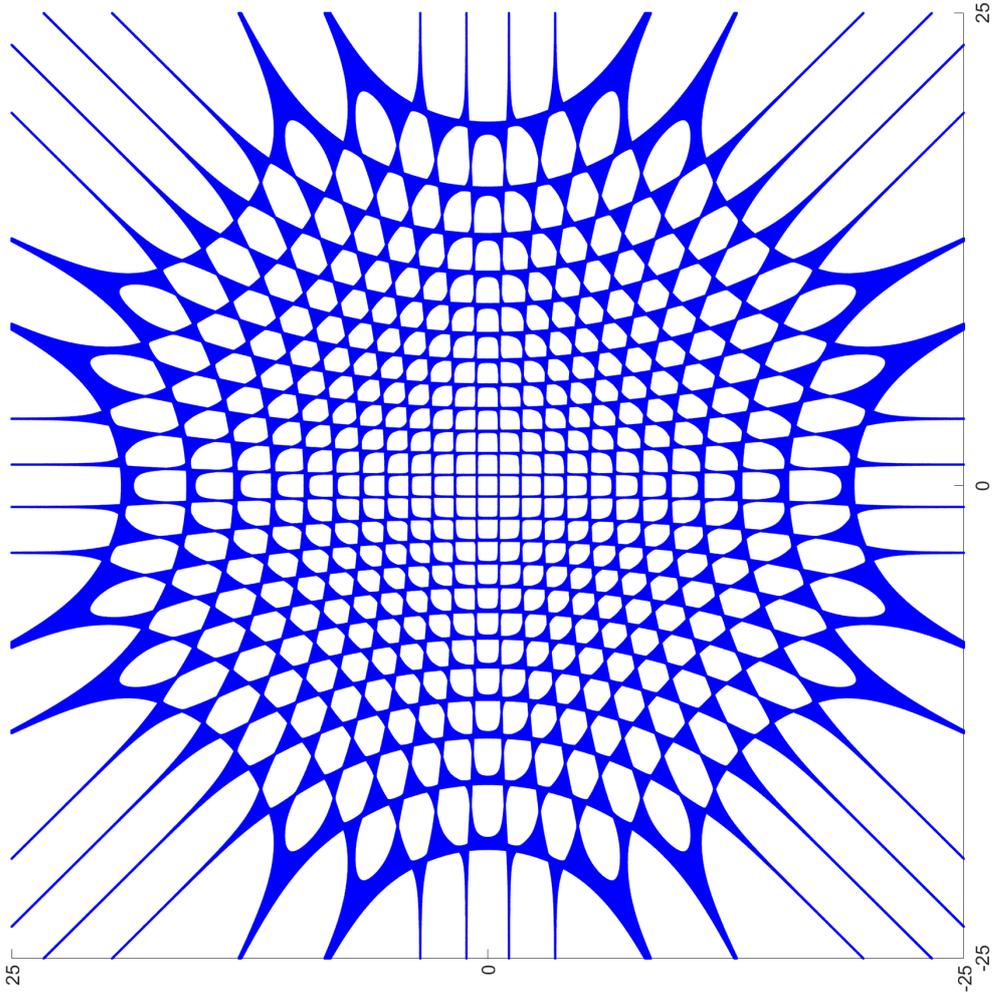


Рисунок 2.5 — Амёба гипергеометрического полинома, заданного коэффициентом Оре-Саго

$$\varphi(s, t) = \frac{\Gamma(13-s)\Gamma(13+s)\Gamma(27-s-2t)\Gamma(27+s-2t)\Gamma(13-t)\Gamma(27-2s-t)\Gamma(17-s-t)\Gamma(17+s-t)\Gamma(27+2s-t)\Gamma(13+t)\Gamma(27-2s+t)\Gamma(17-s+t)\Gamma(17+s+t)\Gamma(27+2s+t)\Gamma(27-s+2t)\Gamma(27+s+2t))^{-1}}{\Gamma(13-t)\Gamma(27-2s-t)\Gamma(17-s-t)\Gamma(17+s-t)\Gamma(27+2s-t)\Gamma(13+t)\Gamma(27-2s+t)\Gamma(17-s+t)\Gamma(17+s+t)\Gamma(27+2s+t)\Gamma(27-s+2t)\Gamma(27+s+2t))^{-1}}.$$

## 2.3 Контур амёб полиномов двух переменных

Граница амёбы допускает задавать на ней аналитическую структуру в смысле следующего определения.

**Определение 2.7.** *Контуром* амёбы  $\mathcal{A}_n$  называется множество  $\mathcal{C}_n$  критических точек логарифмического отображения  $\text{Log}$ , суженного на  $V$ :

$$\text{Log} : V \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Структура контура амёбы может быть описана в терминах логарифмического отображения Гаусса, которое определяется следующим образом.

**Определение 2.8.** *Логарифмическим отображением Гаусса* [37, 43] для гиперповерхности  $V$  чистой размерности  $m - k$  называется отображение  $\gamma_V : V \rightarrow \text{Gr}(m, k)$ , которое каждой неособой точке  $x \in V$  ставит в соответствие комплексную нормальную плоскость к образу  $\ln V$  в точке  $\ln x$ .

Если  $V = \{x \in \mathbb{T}^n : p(x) = 0\}$ , то логарифмическое отображение Гаусса  $\gamma : V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  имеет следующий аналитический вид [46]:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( x_1 \frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial p}{\partial x_n} \right).$$

Условия на контур амёбы гиперповерхности дает следующая теорема.

**Теорема 2.9.** (см. [46, 65]) *Точка гиперповерхности  $V$  является критической для отображения  $\text{Log}V$  тогда и только тогда, когда её образ при логарифмическом отображении Гаусса лежит в действительном проективном подпространстве  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ .*

Таким образом, контур амёбы гиперповерхности есть множество  $\text{Log}(\gamma^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}))$ . Граница амёбы  $\partial\mathcal{A}_{p(x)}$  обязательно является подмножеством контура  $\mathcal{C}_{p(x)}$ , но в общем случае отличается от него. Знание структуры контура амёбы важно для описания топологической структуры амёбного

дополнения. Эксперименты показывают, что точка возврата контура внутри «тела» соответствующей амёбы является аналогом недостающей связной компоненты в её дополнении.

Одним из способов построения контура амёбы является отображение решений системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} p(x, y) = 0, \\ x \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} - uy \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь  $u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  является вещественным параметром, который кодирует наклон нормали к контуру амёбы.

Исключая переменные  $x$  и  $y$  из системы (2.2), получим полиномы  $s(y, u)$  и  $t(x, u)$ , которые могут быть использованы для изображения контура амёбы посредством алгоритма 3.

**Замечание 2.10.** Списки координат, которые получаются на каждой итерации цикла в алгоритме 3, могут содержать дополнительные элементы, которые не соответствуют контуру амёбы. Они исключаются, если не удовлетворяют системе уравнений (2.2). Все алгоритмы визуализации являются линейными по параметрам решётки  $h_r, h_\varphi, h_u$ .

**Пример 2.11.** Система уравнений (2.2), соответствующая первому полиному в примере 2.1, имеет вид

$$\begin{cases} 1 + x + y + xy + y^2 + x^2y = 0, \\ x - uy + xy - xuy + 2x^2y - ux^2y - 2uy^2 = 0. \end{cases}$$

Исключая переменные  $x$  и  $y$ , получим, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned} u - 2uy + u^2y - 4uy^2 + 2u^2y^2 - 2uy^3 - u^2y^3 + 3uy^4 + 4uy^5 + u^2y^5 = \\ = 1 - y - 4y^2 - 9y^3 - 7y^4 - 4y^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -3u^2 - 3ux - 5u^2x - 2ux^2 + u^2x^2 + 3ux^3 + 5u^2x^3 + 2ux^4 + 3u^2x^4 + ux^5 + u^2x^5 &= \\
 &= x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 2x^5.
 \end{aligned}$$

Списки коэффициентов, зависящих от  $u$ , определены как

$$cx\_list = \{-1 + u, 1 - 2u + u^2, 4 - 4u + 2u^2, 9 - 2u - u^2, 7 + 3u, 4 + 4u + u^2\},$$

$$\begin{aligned}
 cy\_list = \{-3u^2, -3u - 5u^2, -1 - 2u + u^2, -2 + 3u + 5u^2, \\
 -5 + 2u + 3u^2, -2 + u + u^2\}.
 \end{aligned}$$

Параметр  $u$  принимает значения в интервале  $[-120, 120]$  с шагом  $h_u = 0,001$ . Полученные контуры амёб полиномов из примера 2.1 имеют нетривиальную структуру и представлены на рисунке 2.6.

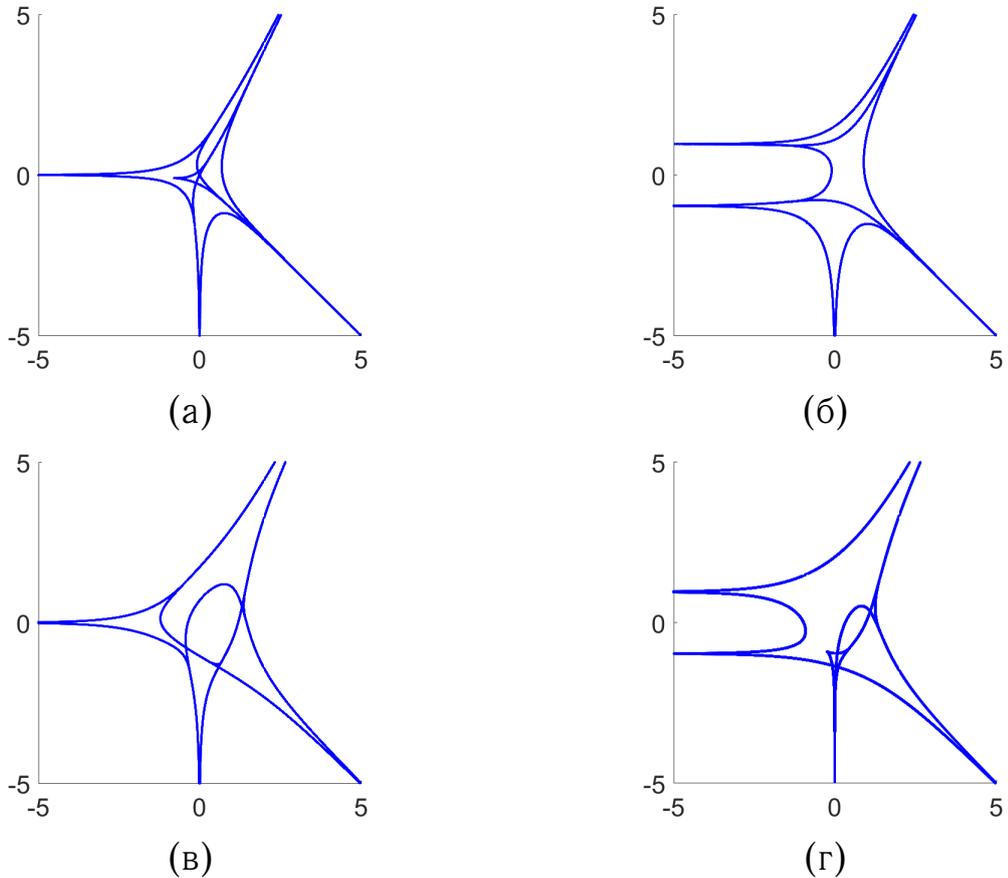


Рисунок 2.6 — Контурсы амёб полиномов  $p_1(x, y)$ ,  $p_2(x, y)$ ,  $p_3(x, y)$  и  $p_4(x, y)$

## 2.4 Компактифицированные амёбы полиномов двух переменных

Численный расчёт компактифицированных (см. определение 1.7) и взвешенных компактифицированных (см. определение 1.25) амёб полиномов двух переменных аналогично вычислению их аффинных аналогов (см. алгоритм 1). Основной вычислительной задачей является моментное отображение (1.4) или (1.12) вместо логарифмического отображения в аффинном случае.

**Пример 2.12.** Применение (1.4) к полиномам из примера 2.1 даёт отображение

$$\begin{aligned} & \frac{(1 \cdot (0, 0) + |x| \cdot (1, 0) + |y| \cdot (0, 1) + |xy| \cdot (1, 1) + |y^2| \cdot (0, 2) + |x^2y| \cdot (2, 1))}{(|1| + |x| + |y| + |xy| + |y^2| + |x^2y|)} = \\ & = \frac{(|x| + |xy| + 2|x^2y|, |y| + |xy| + 2|y^2| + |x^2y|)}{(|1| + |x| + |y| + |xy| + |y^2| + |x^2y|)}. \end{aligned}$$

Соответствующие компактифицированные амёбы внутри многоугольника Ньютона определяющих их полиномов показаны на рисунке 2.7.

## 2.5 Многомерный случай

Изображение трёхмерных амёб представляет собой существенный вычислительный вызов из-за сложной геометрии их формы. Рассмотрим задачу вычисления сечений амёб полиномов трёх переменных двумерными плоскостями.

Пусть задан полином трёх комплексных переменных

$$p(x, y, z) = \sum c_{ijk} x^i y^j z^k.$$

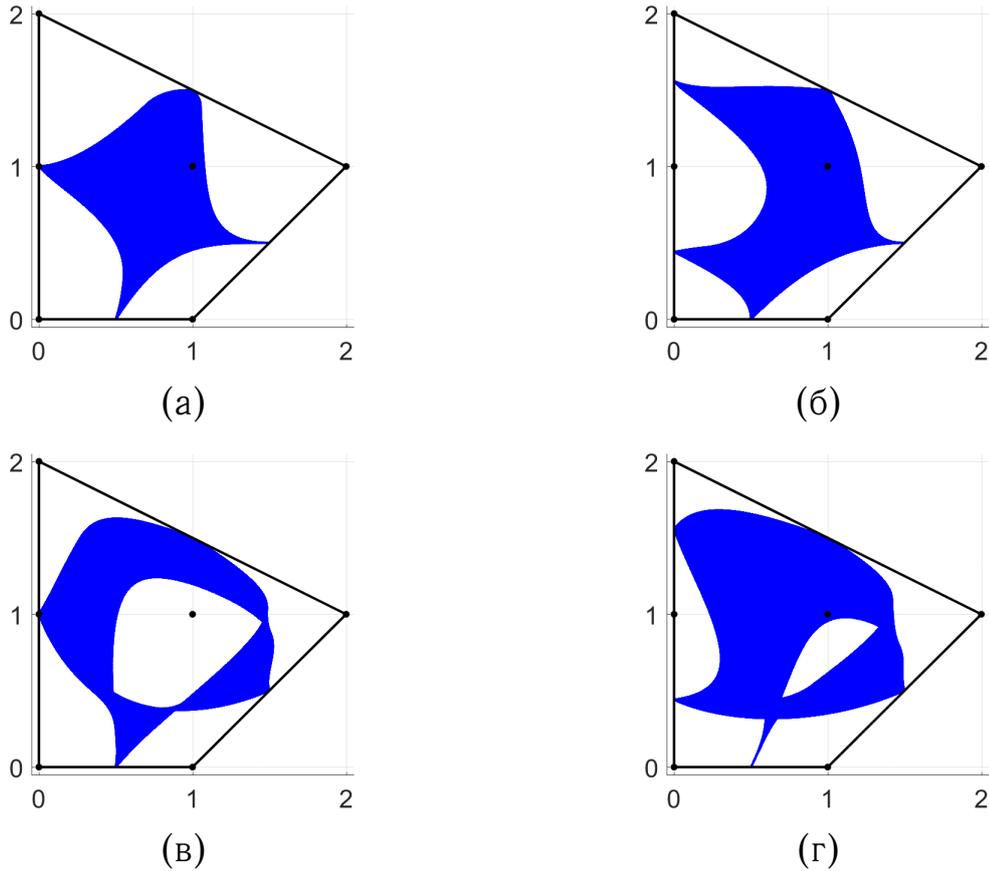


Рисунок 2.7 — Компактифицированные амёбы полиномов  $p_1(x, y)$ ,  $p_2(x, y)$ ,  $p_3(x, y)$  и  $p_4(x, y)$  внутри их многоугольника Ньютона

Чтобы вычислить сечение его амёбы плоскостью  $|z| = \text{const}$ , зафиксируем абсолютное значение  $\rho = |z|$  и модифицируем алгоритм 1, добавив цикл по значениям аргумента  $\xi \in [0, 2\pi]$  комплексной переменной  $z$ .

**Пример 2.13.** Используя алгоритм 4, вычислим сечение амёбы полинома

$$p(x, y, z) = 1 + 3y + y^2 + 6xy + x^2y + xyz + xyz^2.$$

Этот полином является одним из простейших полиномов с тетраэдрическими многогранниками Ньютона, которые содержат целые точки как внутри, так и в относительном внутреннем пространстве граней всех положительных размерностей (см. рисунок 2.8). Сечение амёбы  $\mathcal{A}_{p(x,y,z)}$  плоскостью  $\ln |z| = 5$  показано на рисунке 2.8 (б).

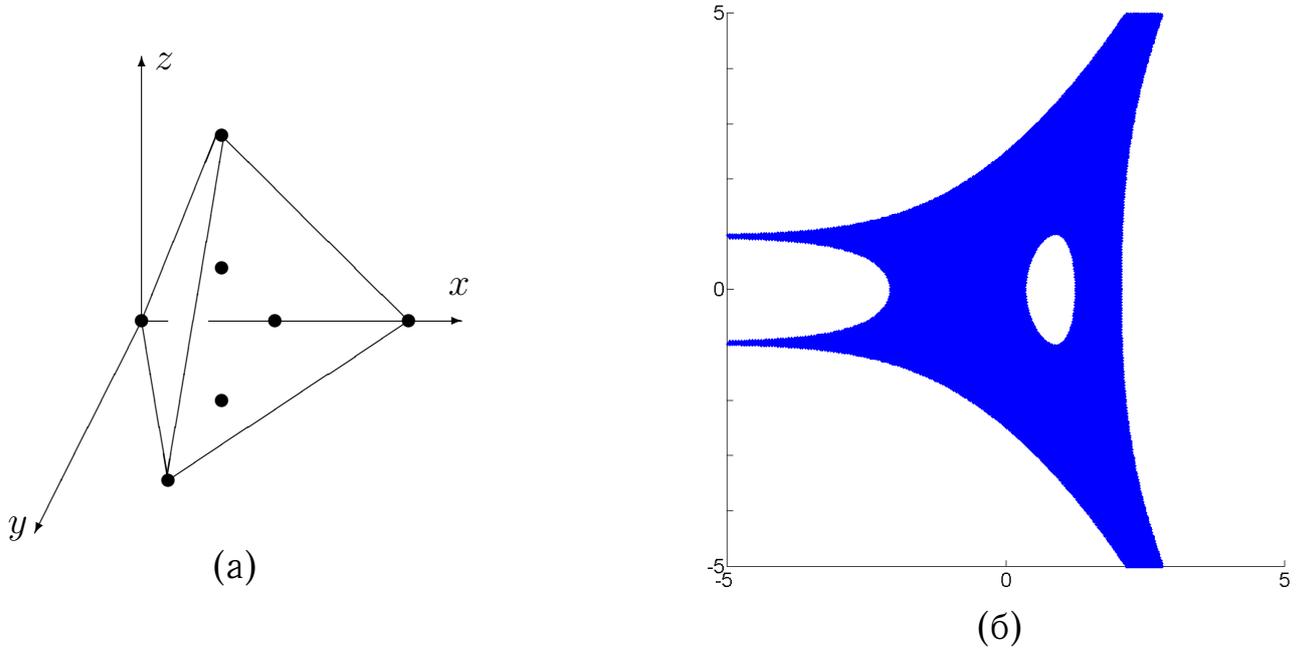


Рисунок 2.8 — Многогранник Ньютона  $\mathcal{N}_{p(x,y,z)}$  и сечение амёбы  $\mathcal{A}_{p(x,y,z)}$  плоскостью  $\ln |z| = 5$

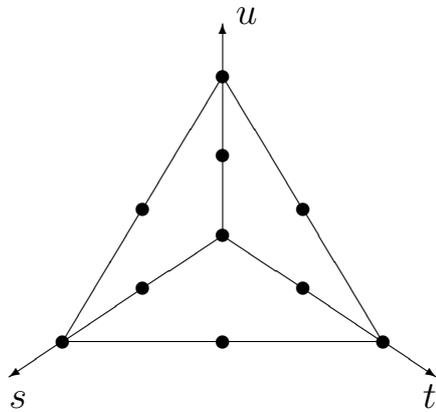
**Пример 2.14.** Теперь рассмотрим вычислительно более сложный оптимальный гипергеометрический полином трёх переменных с носителем в регулярном целочисленном октаэдре. В силу симметрии достаточно рассмотреть лишь ту его часть, которая принадлежит положительному октанту и показана на рисунке 2.9 (а). Применим трёхмерную версию алгоритма 2 для вычисления соответствующего (однозначно определяется до мономиального множителя) гипергеометрического полинома:

$$\begin{aligned}
 p_h(x, y, z) = & x^2y^2 + 36x^2yz + 36xy^2z + 256x^2y^2z + 36x^3y^2z + 36x^2y^3z + \\
 & + x^2z^2 + 36xyz^2 + 256x^2yz^2 + 36x^3yz^2 + y^2z^2 + 256xy^2z^2 + 1296x^2y^2z^2 + \\
 & + 256x^3y^2z^2 + x^4y^2z^2 + 36xy^3z^2 + 256x^2y^3z^2 + 36x^3y^3z^2 + x^2y^4z^2 + \\
 & + 36x^2yz^3 + 36xy^2z^3 + 256x^2y^2z^3 + 36x^3y^2z^3 + 36x^2y^3z^3 + x^2y^2z^4.
 \end{aligned}$$

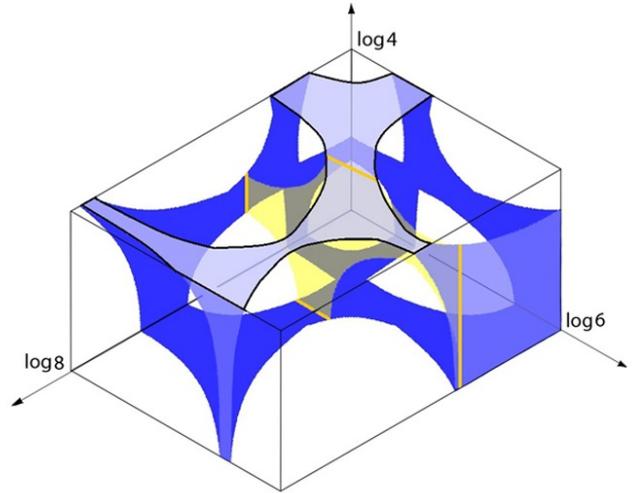
На рисунке 2.9 (б) показано пересечение амёбы  $\mathcal{A}_{p_h(x,y,z)}$  с тремя координатными плоскостями, а также плоскостями  $|x| = 3$ ,  $|x| = 8$ ,  $|y| = 6$ ,  $|z| = 4$  в логарифмическом пространстве амёбы. Пространство рисунка ортогонально вектору  $(1, 1, 1)$  и получено с использованием линейного преобразования

координат

$$\left( x - \frac{x+y+z}{3}; y - \frac{x+y+z}{3}; z - \frac{x+y+z}{3} \right).$$



(a)



(б)

Рисунок 2.9 — Часть носителя полинома  $p_h(x, y, z)$ , которая принадлежит положительному октанту и тушке соответствующей части амёбы

Обозначим через  $(s, t, u)$  координаты в пространстве амёбы на рисунке 2.9 (б). Утолщённые линии соединяют сечения амёбы плоскостями  $t = 0$ ,  $t = \ln 6$ ,  $u = 0$ ,  $u = \ln 4$  и сечение амёбы плоскостью  $s = \ln 3$ . Насыщенным чёрным цветом изображено пересечение амёбы с верхней гранью параллелепипеда, лежащей в плоскости  $u = \ln 4$ .

# Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Доказана теорема о существовании неконфлюэнтной голономной гипергеометрической системы Горна, одним из решений которой является заранее заданный полином  $p(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Кроме того, она может быть выбрана таким образом, что гипергеометрический идеал в алгебре Вейля, определяющий эту систему, допускает базис, состоящий из коммутативного семейства дифференциальных операторов.
2. Доказана теорема о существовании гипергеометрической системы Горна, имеющей полиномиальное решение с неприводимым носителем, таким, что его многогранник Ньютона равен заранее заданному выпуклому целочисленному многограннику  $P \subset \mathbb{R}^n$ , для которого  $P \cap \mathbb{Z}^n$  является  $\mathbb{Z}^n$ -связным.
3. Доказана теорема об оптимальности множества нулей (при некоторых ограничениях) гипергеометрического полинома в смысле [27]. Таким образом, число связных компонент дополнения амёбы гипергеометрического полинома равно числу целых точек в его многограннике Ньютона.

# Указатель обозначений

$\mathbb{N}$  — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{Z}$  — множество целых чисел;

$\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел;

$\mathbb{C}^* \equiv \mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;

$\mathbb{Z}^n$  — целочисленное пространство размерности  $n$ ;

$\mathbb{R}^n$  — вещественное пространство размерности  $n$ ;

$\mathbb{C}^n$  — комплексное пространство размерности  $n$ ;

$\#(M)$  — число элементов в конечном множестве  $M$ ;

$\text{conv}(M)$  — выпуклая оболочка множества  $M$ ;

$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$  — скалярное произведение векторов  $a = (a_1, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)$ ;

$x^s = x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$  — моном с вектором оснований  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и вектором показателей  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ;

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  — норма мультииндекса  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ;

$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  — кольцо полиномов с комплексными переменными  $x_1, \dots, x_n$ ;

$\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера;

$\text{Horn}(\varphi)$  — гипергеометрическая система Горна, определяемая коэффициентом Оре-Сато (см. определение 1.3 на стр. 22);

$P_i, Q_i$  — полиномы, определяющие гипергеометрическую систему уравнений Горна (1.3), см. стр. 22;

$e_1, \dots, e_n$  — стандартный базис решётки  $\mathbb{Z}^n$ ;

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $\theta_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ;

$\mathcal{D}_n$  — алгебра Вейля линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами и порождающими  $x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ ;

○ — композиция дифференциальных операторов из алгебры Вейля;

● — действие оператора из алгебры Вейля на некоторую функцию;

$\deg p$  — степень полинома Лорана  $p(x)$ ;

$\text{supp}(p)$  — носитель ряда (в частности, полинома) Пюизо, то есть, для  $p = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$  его носитель  $\text{supp}(p) := \{\alpha : c_{\alpha} \neq 0\}$ ;

$\mathcal{N}_p = \text{conv}(\text{supp}(p))$  — многогранник Ньютона полинома Лорана  $p(x)$ , см. стр. 6;

$\text{vert}(\mathcal{N})$  — множество вершин многогранника Ньютона  $\mathcal{N}$ ;

$\mathcal{A}_p$  — амёба полинома Лорана  $p(x)$  (или алгебраической гиперповерхности  $\{p(x) = 0\}$ ), см. определение 1.6 на стр. 23;

$\overline{\mathcal{A}}_p$  — компактифицированная амёба полинома Лорана  $p(x)$  (или алгебраической гиперповерхности  $\{p(x) = 0\}$ ), см. определение 1.7 на стр. 23;

$\mathcal{WCA}(p)$  — взвешенная компактифицированная амёба полинома Лорана  $p(x)$  (или алгебраической гиперповерхности  $\{p(x) = 0\}$ ), см. определение 1.25 на стр. 40;

${}^c\mathcal{A}_p$  — дополнение к амёбе  $\mathcal{A}_p$ ;

$\partial\mathcal{A}_p$  — граница амёбы  $\mathcal{A}_p$ ;

$\mathcal{C}_p$  — контур амёбы  $\mathcal{A}_p$ , см. определение 2.7 на стр. 66.

# Литература

- [1] Антипова, И. А. *Дискриминантное множество системы  $n$  полиномов Лорана от  $n$  переменных* / И. А. Антипова, А. К. Цих // Изв. РАН. Сер. матем. — 2012. — Т. 76, №5. — С. 29-56.
- [2] Гельфанд, И. М. *Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа* / И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах // УМН. — 1992. — Т. 47, №4(286). — С. 3-82.
- [3] Дикенштейн, А. *Алгебраичность решений системы уравнений Меллина и ее монодромия* / А. Дикенштейн, Т. М. Садыков // Докл. РАН. — 2007. — Т. 412, №4. — С. 448-450.
- [4] Дикенштейн, А. *Базисы в пространстве решений системы уравнений Меллина* / А. Дикенштейн, Т. М. Садыков // Матем. сб. — 2007. — Т. 198, №9. — С. 59-80.
- [5] Казарян, М. Э. *Тропическая геометрия* / М. Э. Казарян. — М.: МЦНМО, 2012. — 43 с. — ISBN: 978-5-94057-966-3.
- [6] Красиков, В. А. *Об аналитической сложности дискриминантов* / В. А. Красиков, Т. М. Садыков // Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа, Сб. статей. Тр. МИАН. — 2012. — Т. 279. — С. 86-101.
- [7] Лейнартас, Е. К. *Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений* / Е. К. Лейнартас, М. Пассаре, А. К. Цих // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, №10. — С. 87-104.
- [8] Седлецкий, А. М. *Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции* / А. М. Седлецкий // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, №2. — С. 262-271.
- [9] Садыков, Т. М. *О многомерной системе дифференциальных гипергеометрических уравнений* / Т. М. Садыков // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39, №5. — С. 1141-1153.

- [10] Садыков, Т. М. *Гипергеометрические системы уравнений с максимально приводимой монодромией* / Т. М. Садыков // Докл. РАН. — 2008. — Т. 423, №4. — С. 455-457.
- [11] Садыков, Т. М. *Максимально приводимая монодромия двумерных гипергеометрических систем* / Т. М. Садыков, С. Танабэ // Изв. РАН. Сер. матем. — 2016. — Т. 80, №1. — С. 235-280.
- [12] Садыков, Т. М. *Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных* / Т. М. Садыков, А. К. Цих. — М.: Наука, 2014. — 408 с. — ISBN: 978-5-02-039082-9.
- [13] Садыков, Т. М. *Об аналитической сложности гипергеометрических функций* / Т. М. Садыков // Комплексный анализ и его приложения, Сб. статей. Тр. МИАН. — 2017. — Т. 298. — С. 267-275.
- [14] Шабат, Б. В. *Введение в комплексный анализ. В 2 частях. Часть 1. Функции одного переменного* / Б. В. Шабат. — М.: Ленанд, 2015. — 336 с. — ISBN: 978-5-9710-1358-7.
- [15] Abathun, A. *Asymptotic distribution of zeros of a certain class of hypergeometric polynomials* / A. Abathun, R. Bøgvad // Computational Methods and Function Theory. — 2016. — Vol. 16. — P. 167-185.
- [16] Alexandersson, P. *Around a multivariate Schmidt-Spitzer theorem* / P. Alexandersson, B. Shapiro // Linear Alg. Appl. — 2014. — Vol. 446. — P. 356-368.
- [17] Artin, E. *The gamma function* / E. Artin.— New York: Holt, Rinehart & Winston, 1964. — 39 p.
- [18] Berkesch Zamaere, C. *Hypergeometric functions for projective toric curves* / C. Berkesch Zamaere, J. Forsgård, L. F. Matusevich // Advances in Mathematics. — 2016. — Vol. 300. — P. 835-867.
- [19] Beukers, F. *Algebraic A-hypergeometric functions* / F. Beukers // Invent. Math. — 2010. — Vol. 180. — P. 589-610.
- [20] Dereziński, J. *Exactly solvable Schrödinger operators* / J. Dereziński, M. Wrochna // Annales Henri Poincaré. — 2011. — Vol. 12, №2. — P. 397-418.
- [21] Dickenstein, A. *Bivariate Hypergeometric D-modules* / A. Dickenstein, L. Matusevich, T. M. Sadykov // Advances in Mathematics. — 2005. — Vol. 196. — P. 78-123.

- [22] Dominici, D. *Real zeros of  ${}_2F_1$  hypergeometric polynomials* / D. Dominici, S. J. Johnston, K. Jordaan // *Journal of Comput. and Appl. Math.* — 2013. — №247. — P. 152-161.
- [23] Driver, K. A. *Asymptotic zero distribution of a class of hypergeometric polynomials* / K. A. Driver, S. J. Johnston // *Quaestiones Mathematicae.* — 2007. — Vol. 30, №2. — P. 219-230.
- [24] Dunkl, C. F. *Orthogonal polynomials of several variables* / C. F. Dunkl, Y. Xu. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014. — 450 p. — ISBN 978-1-107-07189-6.
- [25] Erdelyi, A. *Hypergeometric functions of two variables* / A. Erdelyi // *Acta Math.* — 1950. — №83. — P. 131-164.
- [26] Forsberg, M. *Amoebas and Laurent series*: Ph.D. thesis / M. Forsberg. — Stockholm: Royal Institute of Technology, 1998.
- [27] Forsberg, M. *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas* / M. Forsberg, M. Passare, A. K. Tsikh // *Adv. Math.* — 2000. — Vol. 151, №1. — P. 45-70.
- [28] Forsgård, J. *Coamoebas and line arrangements in dimension two* / J. Forsgård, P. Johansson // *Mathematische Zeitschrift.* — 2014. — Vol. 278, №1-2. — P. 25-38.
- [29] Forsgård, J. *On the order map for hypersurface coamoebas* / J. Forsgård, P. Johansson // *Arkiv för Matematik.* — 2015. — Vol. 53, №1. — P. 79-104.
- [30] Forsgård, J. *Lopsided approximation of amoebas* / J. Forsgård, L. F. Matusevich, N. Mehlhop, T. de Wolff // *Mathematics of Computation.* — 2019. — Vol. 88, №315. — P. 485-500.
- [31] Gelfand, I. M. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants* / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. — Boston: Birkhäuser, 1994. — 523 p. — ISBN 978-0-8176-4771-1.
- [32] Guillemin, V. *Convexity properties of the moment mapping* / V. Guillemin, S. Sternberg // *Invent. Math.* — 1982. — Vol. 67, №3. — P. 491-513.
- [33] Itenberg, I. *Amibes de variétés algébriques et dénombrement de courbes* / I. Itenberg // *Séminaire Bourbaki.* — 2002-2003. — Vol. 45, №921. — P. 335-362.

- [34] Itenberg, I. *Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture* / I. Itenberg, O. Viro // The Mathematical Intelligencer. — 1996. — Vol. 18, №4. — P. 19-28.
- [35] Itenberg, I. *Tropical algebraic geometry* / I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. Shustin. — 2nd ed. — Basel: Birkhäuser Basel, 2009. — 104 p. — ISBN 978-3-0346-0047-7.
- [36] Johansson, P. *On the topology of the coamoeba*: Ph.D. thesis / P. Johansson. — Stockholm: Stockholm University, 2014. — ISBN 978-91-7447-933-1.
- [37] Kapranov, M. M. *A characterization of  $A$ -discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map* / M. M. Kapranov // Math. Ann. — 1991. — №290. — P. 277-285.
- [38] Kenyon, R. *Dimers and amoebae* / R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield // Math. Ann. — 2006. — Vol. 163. — P. 1019-1056.
- [39] Kim, M. H. *Computational complexity of the Euler type algorithms for the roots of complex polynomials*: Ph.D. thesis / M. H. Kim. — New York: City University of New York, 1985.
- [40] Klein, F. *Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe* / F. Klein // Math. Ann. — 1890. — Vol. 37, №4. — P. 573-590.
- [41] Lárusson, F. *Dessins d'enfants and differential equations* / F. Lárusson, T. Sadykov // Алгебра и анализ. — 2007. — Т. 19, №6. — С. 184-199.
- [42] Lang, L. *On the number of intersection points of the contour of an amoeba with a line* / L. Lang, B. Shapiro, E. Shustin // Indiana University Mathematics Journal. — 2021. — Vol. 70, №4. — P. 1335-1353.
- [43] Madani, F. *Generalized logarithmic Gauss map and its relation to (co)amoebas* / F. Madani, M. Nisse // Mathematische Nachrichten. — 2013. — Vol. 286, №14-15. — P. 1510-1513.
- [44] Madani, F. *On the volume of complex amoebas* / F. Madani, M. Nisse // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2013. — Vol. 141, №4. — P. 1113-1123.
- [45] Madani, F. *Analytic varieties with finite volume amoebas are algebraic* / F. Madani, M. Nisse // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 2015. — Vol. 2015, №706. — P. 67-81.

- [46] Mikhalkin, G. *Real algebraic curves, the moment map and amoebas* / G. Mikhalkin // Ann. Math.: Second Series — 2000. — Vol. 151, №1. — P. 309-326.
- [47] Mikhalkin, G. *Amoebas of maximal area* / G. Mikhalkin, H. Rullgård // Int. Math. Res. Notices. — 2001. — Vol. 2001, №9. — P. 441-451.
- [48] Nilsson, L. *Amoebas, discriminants and hypergeometric functions*: Ph.D. thesis / L. Nilsson. — Stockholm: Stockholm University, 2009. — ISBN 978-91-7155-889-3.
- [49] Nisse, M. *The phase limit set of a variety* / M. Nisse, F. Sottile // Algebra and Number Theory. — 2013. — Vol. 7, №2. — P. 339-352.
- [50] Nisse, M. *Higher convexity of coamoeba complements* / M. Nisse, F. Sottile // Bulletin of the London Mathematical Society. — 2015. — Vol. 47, №5. — P. 853-865.
- [51] Nisse, M. *Amoeba basis of zero-dimensional varieties* / M. Nisse // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2016. — Vol. 220, №3. — P. 1252-1257.
- [52] Nisse, M. *Amoeba-shaped polyhedral complex of an algebraic hypersurface* / M. Nisse, T. Sadykov // The Journal of Geometric Analysis. — 2019. — Vol. 29, №2. — P. 1356-1368.
- [53] Nørlund, N. E. *Hypergeometric functions* / N. E. Nørlund // Acta Math. — 1955. — Vol. 94. — P. 289-349.
- [54] Passare, M. *Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope* / M. Passare, H. Rullgård // Duke Math. J. — 2004. — Vol. 121, №3. — P. 481-507.
- [55] Passare, M. *Amoebas: their spines and contours* / M. Passare, A.K. Tsikh // Contemporary maths. — 2005. — Vol. 377. — P. 275-288.
- [56] Passare, M. *Singularities of hypergeometric functions in several variables* / M. Passare, T.M. Sadykov, A.K. Tsikh // Compos. Math. — 2005. — Vol. 141, №3. — P. 787-810.
- [57] Passare, M. *Amoebas of complex hypersurfaces in statistical thermodynamics* / M. Passare, D. Pochekutov, A. Tsikh // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. — 2012. — Vol. 16, №1. — P. 89-108.
- [58] Purbhoo, K. *A Nullstellensatz for amoebas* / K. Purbhoo // Duke Math. J. — 2008. — Vol. 141, №3. — P. 407-445.

- [59] Richter-Gebert, J. *First steps in tropical geometry* / J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald // Idempotent mathematics and mathematical physics, Contemp. Math. — 2005. — Vol. 377. — P. 289-317.
- [60] Rullgård, H. *Stratification des espaces de polynômes de Laurent et la structure de leurs amibes* / H. Rullgård // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Series I: Mathematics. — 2000. — Vol. 331, №5. — P. 355-358.
- [61] Rullgård, H. *Topics in geometry, analysis and inverse problems*. Doctoral dissertation / H. Rullgård. — Stockholm: Stockholm University, 2003.
- [62] Sadykov, T. *On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type* / T. Sadykov // Math. Scand. — 2002. — Vol. 91, №1. — P. 127-149.
- [63] Sadykov, T. *The Hadamard product of hypergeometric series* / T. Sadykov // Bull. Sci. Math. — 2002. — Vol. 126, №1. — P. 31-43.
- [64] Shapiro, B. *Root asymptotics of spectral polynomials* / B. Shapiro, M. Tater // Acta Polytechnica. — 2007. — Vol. 47, №2-3. — P. 32-35.
- [65] Theobald, T. *Computing amoebas* / T. Theobald // Experiment. Math. — 2002. — Vol. 11, №4. — P. 513-526.
- [66] Theobald, T. *Amoebas of genus at most one* / T. Theobald, T. de Wolff // Adv. Math. — 2013. — Vol. 239. — P. 190-213.
- [67] Theobald, T. *Approximating amoebas and coamoebas by sums of squares* / T. Theobald, T. de Wolff // Math. of Computation. — 2015. — Vol. 84. — P. 455-473.
- [68] Theobald, T. *Norms of roots of trinomials* / T. Theobald, T. de Wolff // Mathematische Annalen. — 2016. — Vol. 366, №1. — P. 219-247.
- [69] Viro, O. *What is an amoeba?* / O. Viro // Notices of the AMS. — 2002. — Vol. 49, №8. — P. 916-917.
- [70] Viro, O. *From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry* / O. Viro // Japanese Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 3. — P. 185-214.
- [71] Zharkov, I. *Torus fibrations of Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties* / I. Zharkov // Duke Math. J. — 2000. — Vol. 101, №2. — P. 237-257.

- [72] Zhou, J.-R. *Asymptotic distributions of the zeros of a family of hypergeometric polynomials* / J.-R. Zhou, H. M. Srivastava, Z.-G. Wang // Proc. of the AMS. — 2012. — Vol. 140, №7. — P. 2333-2346.

### Работы автора по теме диссертации

- [73] Bogdanov, D. V. *Hypergeometric polynomials are optimal* / D. V. Bogdanov, T. M. Sadykov // Mathematische Zeitschrift — 2020. — Vol. 296. — P. 373-390.
- [74] Bogdanov, D. V. *Algorithmic computation of polynomial amoebas* / D. V. Bogdanov, A. A. Kytmanov, T. M. Sadykov // Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer. Cham. — 2016. — Vol. 9890. — P. 87-100.
- [75] Богданов, Д. В. *Тропико-геометрические свойства нулей гипергеометрических многочленов нескольких комплексных переменных* / Д. В. Богданов, Т. М. Садыков // V шк.-конф. по алгебр. геометрии и комплексн. анализу для молодых математиков России: мат-лы науч. конф. (Коряжма, 17 — 22 августа 2015 г.) / сост. И. В. Кузнецова, Вик. С. Куликов, Д. В. Осипов, С. А. Тихомиров. — Коряжма, 2015. — С. 39-40. — ISBN 978-5-906619-18-1.
- [76] Богданов, Д. В. *Вычисление полиномиальных решений гипергеометрических систем* / Д. В. Богданов, Т. М. Садыков // Компьютер. алгебра: мат-лы междунар. конф. «Компьютерная алгебра» (Москва, 29 июня — 2 июля 2016 г.) / под ред. С. А. Абрамова и Л. А. Севастьянова. — М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016. — С. 39-40. — ISBN 978-5-91993-061-7.
- [77] Богданов, Д. В. *Вычисление амёб полиномов двух переменных* / Д. В. Богданов // Компьютер. алгебра: мат-лы междунар. конф. «Компьютерная алгебра» (Москва, 30 октября — 3 ноября 2017 г.) / под ред. С. А. Абрамова и Т. М. Садыкова. — М.: ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2017. — С. 68-73. — ISBN 978-5-7307-1266-9.

# Приложения

## Приложение А

### Алгоритмы вычисления амёб

---

**Алгоритм 1.** Алгоритм вычисления амёбы  $\mathcal{A}_p$  полинома двух переменных

---

**Input:** Список коэффициентов полинома  $cx\_list$ , зависящих от  $x$ , для всех мономов  $y^k$ ,  $k = 0, \dots, \deg_y p$ ; границы прямоугольной области в логарифмическом пространстве амёбы  $a, b$ ; количество значений  $n_r$  и угла  $n_\varphi$  модуля  $r$  и аргумента  $\varphi$  переменной  $x \in \mathbb{C}$ .

**Output:** Список координат точек, принадлежащих тушке амёбы  $z\_list, w\_list$ .

```
1: procedure АМОЕВА2D( $cx\_list, a, b, n_r, n_\varphi$ )
2:    $z\_list \leftarrow empty$  ▷ пустой список
3:    $w\_list \leftarrow empty$  ▷ пустой список
4:    $d \leftarrow \text{length}(cx\_list) - 1$  ▷ длина списка
5:    $1d \leftarrow (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$  ▷ вектор с  $d$  единицами
6:    $h_r \leftarrow (\exp(b) - \exp(a)) / (n_r - 1)$ 
7:    $h_\varphi \leftarrow 2\pi / (n_\varphi - 1)$ 
8:   for  $r \leftarrow \exp(a)$  to  $\exp(b)$  step  $h_r$  do
9:     for  $\varphi \leftarrow 0$  to  $2\pi$  step  $h_\varphi$  do
10:       $x \leftarrow r * \exp(\sqrt{-1} * \varphi)$ 
11:       $y \leftarrow \text{roots}(cx\_list)$  ▷ нули полинома с коэф. из  $cx\_list$ 
12:       $z\_list.\text{push}(\ln(|x| * 1d))$  ▷ добавить  $\ln(|x| * 1d)$  в  $z\_list$ 
13:       $w\_list.\text{push}(\ln(|y|))$  ▷ добавить  $\ln(|y|)$  в  $w\_list$ 
14:     end for
15:   end for
16:   return  $\{z\_list, w\_list\}$ 
17: end procedure
```

---

---

**Алгоритм 2.** Построение гипергеометрического полинома двух переменных и определяющей его системы уравнений

---

**Input:** Список вершин  $N\_list$  выпуклого целочисленного многоугольника  $P$ .

**Output:** Список коэффициентов  $c\_list$  гипергеометрического полинома  $p(x, y)$ , для которого многоугольником Ньютона является  $P$ .

```

1: procedure HYPERPOLY2D( $N\_list$ )
2:    $B \leftarrow \text{NormalList}(P)$            ▷ список внешних нормалей к сторонам  $P$ 
3:    $\varphi(s, t) \leftarrow 1 / \prod_{j=1}^q \Gamma(1 - \langle B_j, (s, t) \rangle - c_j)$ 
4:    $c\_list \leftarrow \text{CoeffList}(\varphi)$    ▷ список коэффициентов гипергеометрического
      полинома
5:    $R_1 \leftarrow \text{FunctionExpand}(\varphi(s + 1, t) / \varphi(s, t))$ 
6:    $R_2 \leftarrow \text{FunctionExpand}(\varphi(s, t + 1) / \varphi(s, t))$ 
7:    $P_1 \leftarrow \text{Numerator}(R_1)$            ▷ Числитель  $R_1$ 
8:    $P_2 \leftarrow \text{Numerator}(R_2)$            ▷ Числитель  $R_2$ 
9:    $Q_1 \leftarrow \text{Denominator}(R_1)$        ▷ Знаменатель  $R_1$ 
10:   $Q_2 \leftarrow \text{Denominator}(R_2)$        ▷ Знаменатель  $R_2$ 
11:   $\theta_x \leftarrow x * p'_x$ 
12:   $\theta_y \leftarrow y * p'_y$ 
13:   $p \leftarrow \text{Polynomial}(c\_list)$          ▷ полином, определяемый  $c\_list$ 
14:  if  $x * P_1(\theta) \bullet p = Q_1(\theta) \bullet p$  and  $y * P_2(\theta) \bullet p = Q_2(\theta) \bullet p$  then
15:    return  $\{c\_list\}$ 
16:  else
17:    return  $empty$ 
18:  end if
19: end procedure

```

---

---

**Алгоритм 3.** Вычисление контура  $\mathcal{C}_p$  амёбы полинома двух переменных

---

**Input:** Список коэффициентов полинома  $cx\_list$  и  $cy\_list$ , зависящих от  $u$ , для всех мономов  $x^k$ ,  $k = 0, \dots, \deg_x t$ ,  $y^m$ ,  $m = 0, \dots, \deg_y s$ ; начальное значение  $u_1$ , конечное значение  $u_n$  и шаг  $h_u$  изменения переменной  $u$ .

**Output:** Список координат точек  $z\_list$ ,  $w\_list$ , принадлежащих контуру амёбы.

```

1: procedure CONTOUR2D( $cx\_list, cy\_list, u_1, u_n, h_u$ )
2:    $z\_list \leftarrow empty$  ▷ пустой список
3:    $w\_list \leftarrow empty$  ▷ пустой список
4:    $dx \leftarrow length[cx\_list] - 1$  ▷ длина списка  $cx\_list$ 
5:    $dy \leftarrow length[cy\_list] - 1$  ▷ длина списка  $cy\_list$ 
6:   for  $u \leftarrow u_1$  to  $u_n$  step  $h_u$  do
7:      $x \leftarrow roots(cx\_list)$  ▷ Нули полинома с коэффициентами  $cx\_list$ 
8:      $y \leftarrow roots(cy\_list)$  ▷ Нули полинома с коэффициентами  $cy\_list$ 
9:      $z\_list.push(\ln(|x|))$  ▷ добавить  $\ln(|x|)$  в  $z\_list$ 
10:     $w\_list.push(\ln(|y|))$  ▷ добавить  $\ln(|y|)$  в  $w\_list$ 
11:   end for
12:   return  $\{z\_list, w\_list\}$ 
13: end procedure

```

---

---

**Алгоритм 4.** Вычисление сечения амёбы  $\mathcal{A}_p$  полинома трёх переменных двумерной плоскостью

---

**Input:** Список полиномиальных коэффициентов  $cxz\_list$ , зависящих от  $x$  и  $z$ , для всех мономов  $y^k$ ,  $k = 0, \dots, \deg_y p$ ; границы  $a, b$  прямоугольной области в пространстве амёбы, где изображено сечение амёбы; количество  $n_r$  и  $n_\varphi$  значений модуля  $r$  и аргумента  $\varphi$  переменной  $x \in \mathbb{C}$ ; модуль  $\rho$  и количество значений аргумента  $n_\xi$  переменной  $z \in \mathbb{C}$ .

**Output:** Список точек, содержащихся в сечении амёбы  $z\_list, w\_list$ .

```

1: procedure АМОЕВА3D( $cxz\_list, a, b, n_r, n_\varphi, \rho, n_\xi$ )
2:    $z\_list \leftarrow empty$  ▷ пустой список
3:    $w\_list \leftarrow empty$  ▷ пустой список
4:    $d \leftarrow \text{length}(cx\_list) - 1$  ▷ длина списка  $cx\_list$ 
5:    $1d \leftarrow (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$  ▷ Вектор из  $d$  единиц
6:    $h_r \leftarrow (\exp(b) - \exp(a)) / (n_r - 1)$ 
7:    $h_\varphi \leftarrow 2\pi / (n_\varphi - 1)$ 
8:    $h_\xi \leftarrow 2\pi / (n_\xi - 1)$ 
9:   for  $r \leftarrow \exp(a)$  to  $\exp(b)$  step  $h_r$  do
10:    for  $\varphi \leftarrow 0$  to  $2\pi$  step  $h_\varphi$  do
11:     for  $\xi \leftarrow 0$  to  $2\pi$  step  $h_\xi$  do
12:       $z \leftarrow \rho * \exp(\sqrt{-1} * \xi)$ 
13:       $x \leftarrow r * \exp(\sqrt{-1} * \varphi)$ 
14:       $y \leftarrow \text{roots}(cxz\_list)$  ▷ Нули полинома с коэффициентами
       $cxz\_list$ 
15:       $z\_list.\text{push}(\ln(|x| * 1d))$  ▷ добавить  $\ln(|x| * 1d)$  в  $z\_list$ 
16:       $w\_list.\text{push}(\ln(|y|))$  ▷ добавить  $\ln(|y|)$  в  $w\_list$ 
17:     end for
18:    end for
19:  end for
20:  return  $\{z\_list, w\_list\}$ 
21: end procedure

```

---

## Приложение Б

### Фрагменты исходного кода программ

Листинг 2.1 — Вычисление коэффициентов

```

1 function main_f()
2   %  $f(x, y) = x + y + 6*x*y + x^2*y^2$ 
3   figure(1); clf; hold on;
4   axis equal; axis on; grid off;
5   axis([-6, 6, -6, 6]);
6   fs = 20; set(gca, 'fontsize', fs);
7   set(gca, 'XTick', [-6:6:12], 'YTick', [-6:6:12])
8
9   ii=sqrt(-1);
10  tiny = 100*eps;
11  Ntheta = 1000;
12  NR= Ntheta;
13  A = -10; B = 10;
14
15  LogR = linspace(A, B, NR);
16  R = exp(LogR);
17  Theta = linspace(0, 2*pi, Ntheta);
18  degree = [2; 2];
19  for type=1:2
20    Rho = zeros(1, degree(type)*Ntheta);
21    One = ones(1, degree(type)*Ntheta);
22    for count_r = 1:NR
23      r = R(count_r);
24      for count_t = 1:Ntheta
25        theta = Theta(count_t);
26        if type == 1
27          z=r*exp(ii*theta);
28          Coeffs=[z^2, 1 + 6*z, z];
29        else
30          w=r*exp(ii*theta);

```

```
31     Coeffs=[w^2, 1 + 6*w, w];
32     end
33     Roots = roots(Coeffs);
34     Rho((degree(type)*(count_t-1)+1):(degree(type)*count_t)) =
        log(max(abs(Roots), tiny));
35     end
36     if type == 1
37         plot(LogR(count_r)*One, Rho, 'b. ');
38     else
39         plot(Rho, LogR(count_r)*One, 'b. ');
40     end
41     end
42     end
43     saveas(gcf, 'simplestMikhalkinAmoeba.png', 'png');
44 end
```

Разработанный автором общедоступный сетевой ресурс для автоматической генерации кода в среде MatLab R2017a размещён по адресу <http://dvvogdanov.ru/amoeba>.

## Приложение В

### Амёбы гипергеометрических полиномов

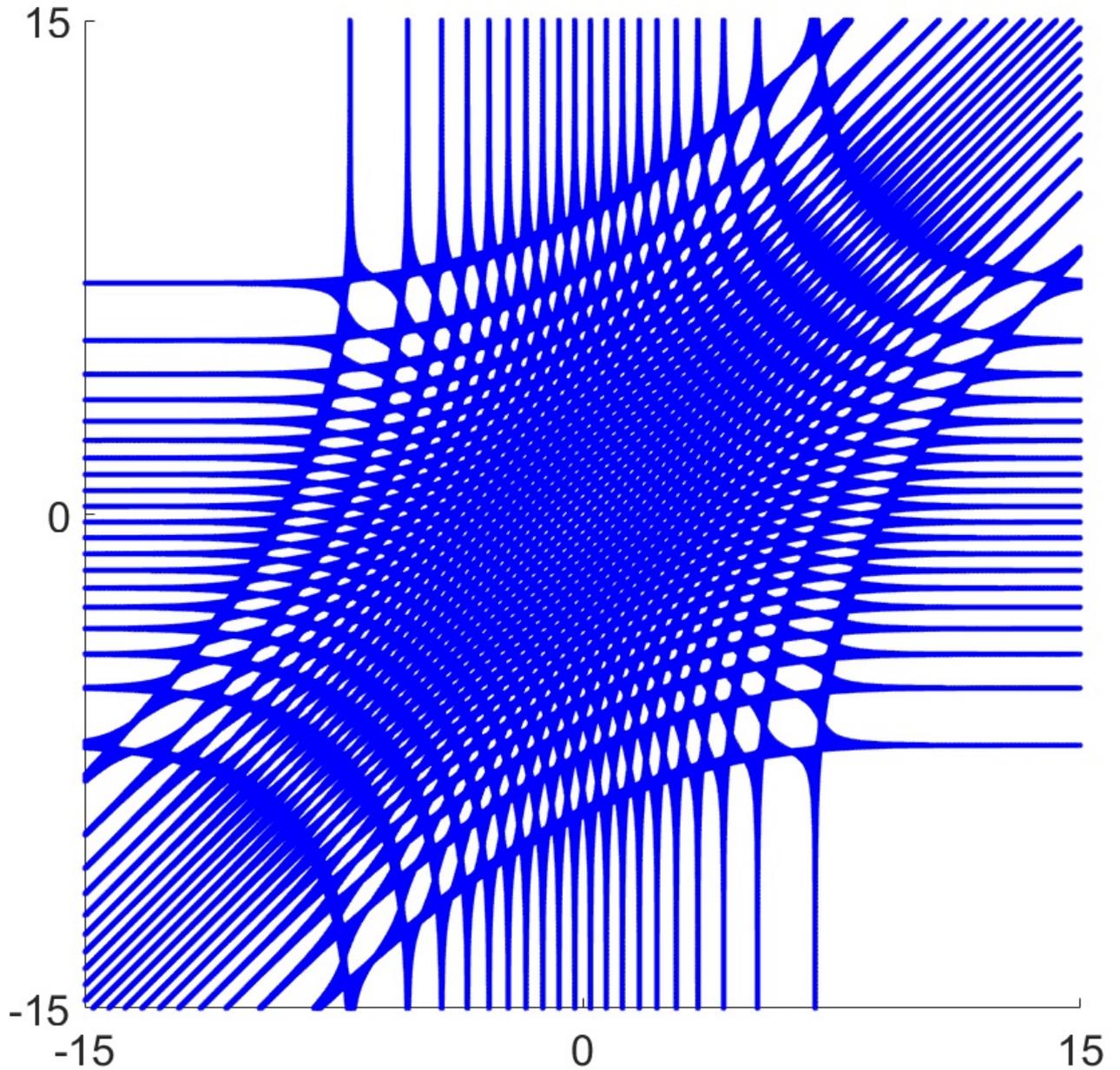


Рисунок 2.10 — Амёба гипергеометрического полинома, заданного коэффициентом Оре-Сато  $\varphi(s, t) = \left( \Gamma(21 - s)^2 \Gamma(21 + s)^2 \Gamma(21 - t)^2 \Gamma(21 - s - t)^2 \Gamma(21 + t)^2 \Gamma(21 + s + t)^2 \right)^{-1}$ .

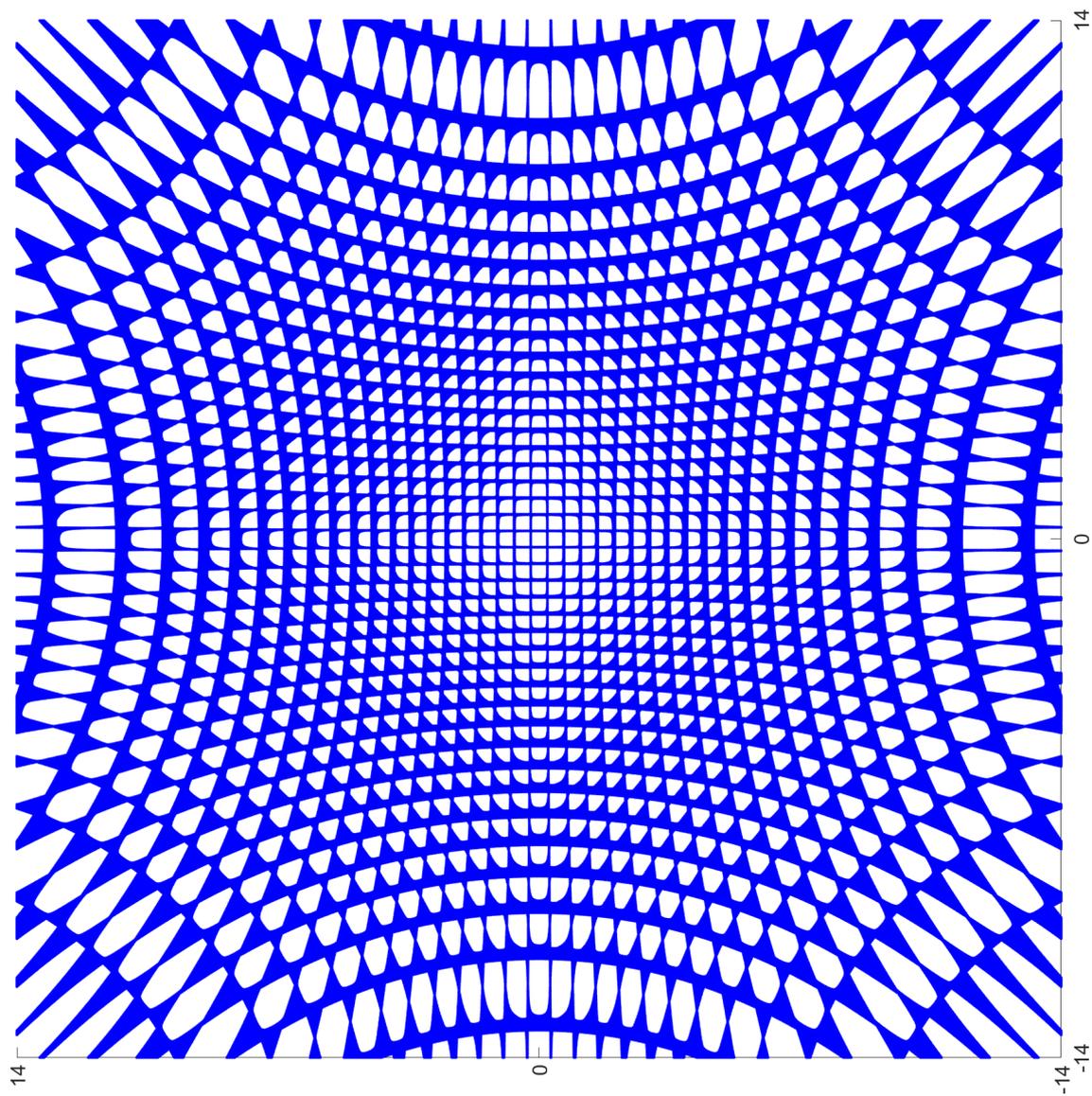


Рисунок 2.11 — Амёба гипергеометрического полинома, заданного коэффициентом Оре-Саго

$$\varphi(s, t) = \left( \Gamma(21-s)^2 \Gamma(21+s)^2 \Gamma(21-t)^2 \Gamma(31-s-t)^2 \Gamma(31+s-t)^2 \Gamma(21+t)^2 \Gamma(31-s+t)^2 \Gamma(31+s+t)^2 \right)^{-1}.$$

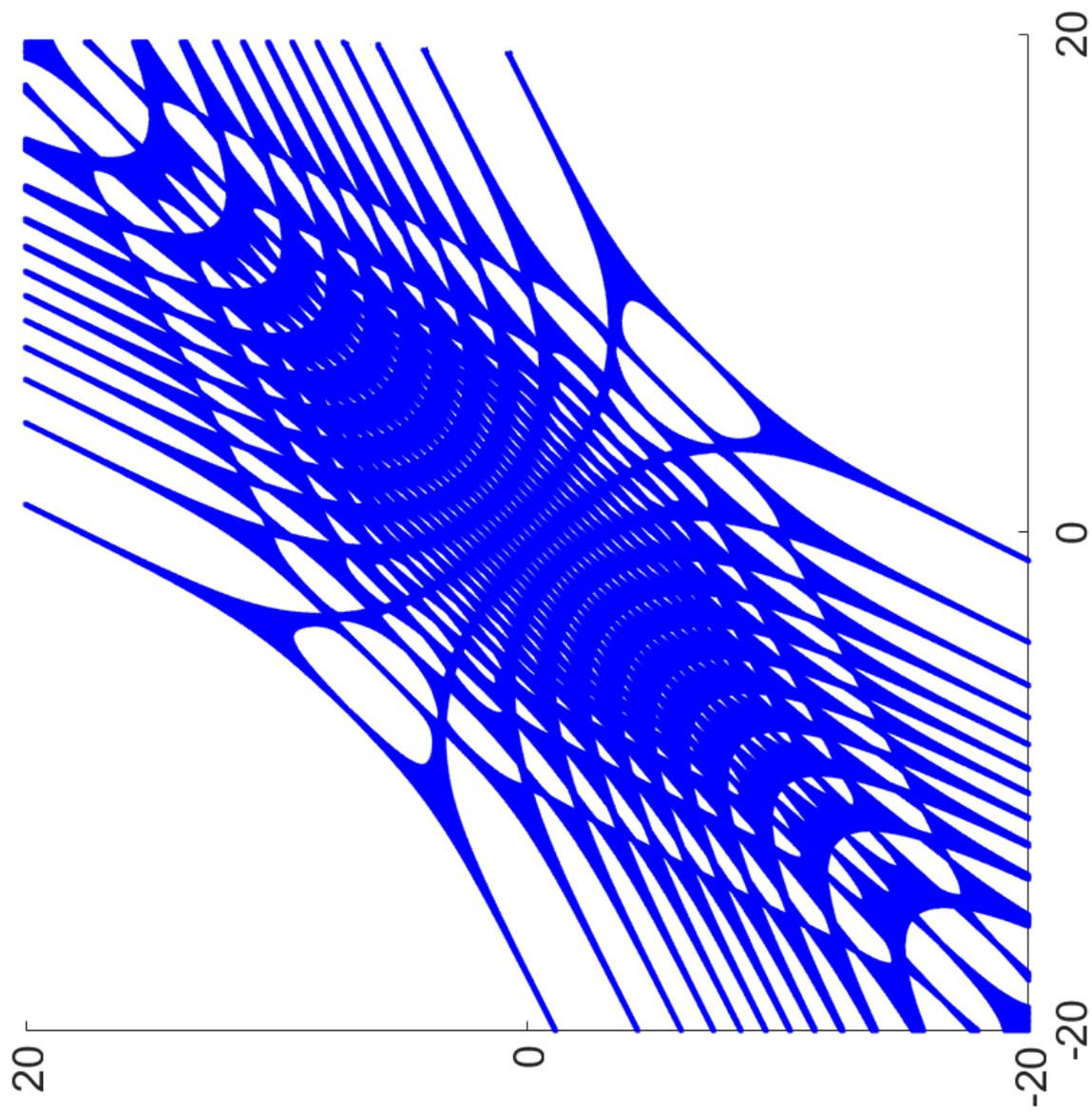


Рисунок 2.12 — Амёба гипергеометрического полинома, заданного коэффициентом Оре-Саго  $\varphi(s, t) = \left( \Gamma(19 - s - 2t)^2 \Gamma(19 - 2s - t)^2 \Gamma(19 + 2s + t)^2 \Gamma(19 + s + 2t)^2 \right)^{-1}$ .

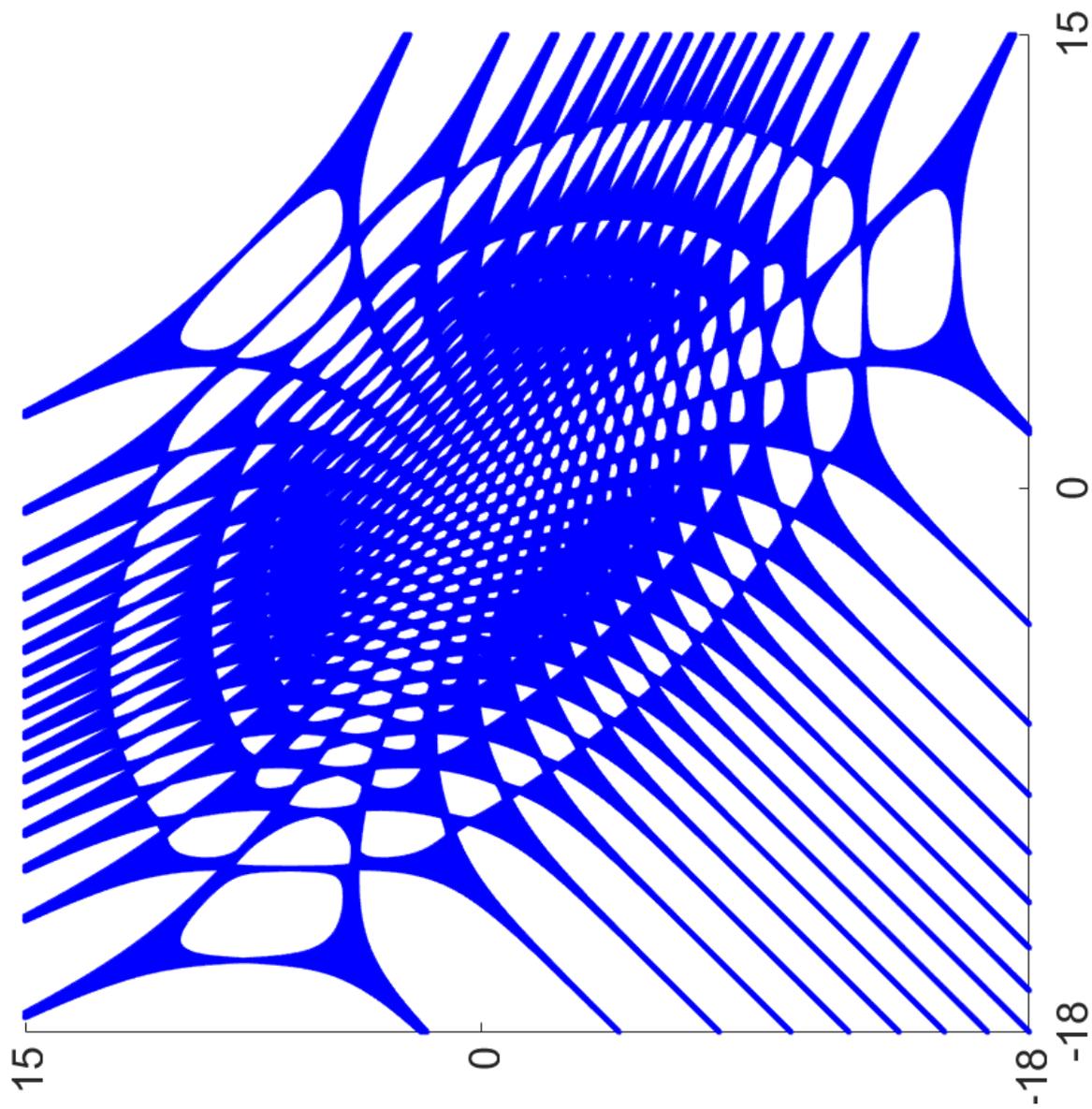


Рисунок 2.13 — Амёба гипергеометрического полинома, заданного коэффициентом Оре-Сато

$$\varphi(s, t) = \left( \Gamma(18 + s - 2t)^2 \Gamma(18 - 2s + t)^2 \Gamma(18 + s + t)^2 \right)^{-1}.$$

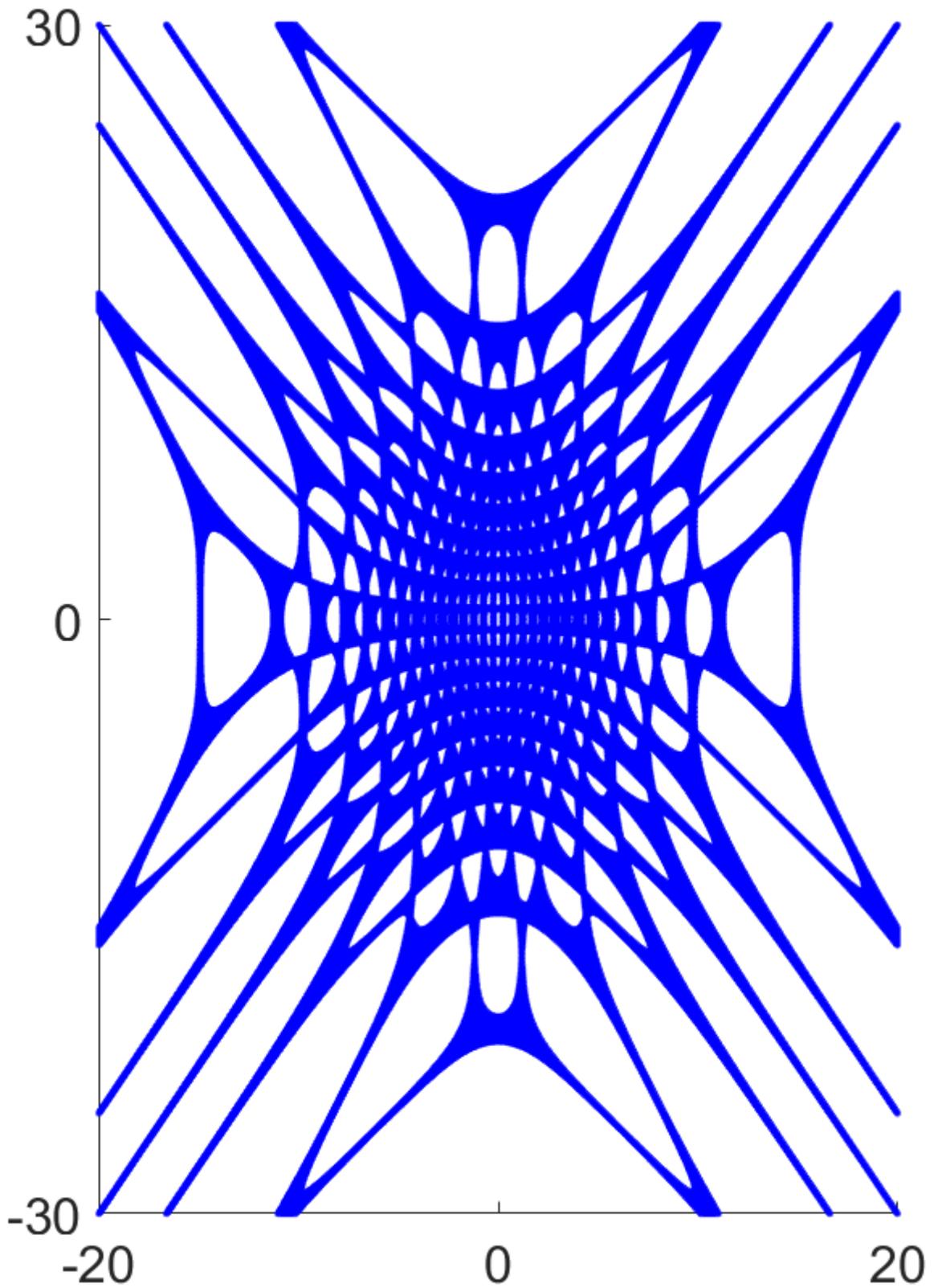


Рисунок 2.14 — Амёба гипергеометрического полинома, заданного коэффициентом Оре-Сато  
 $\varphi(s, t) = (\Gamma(21 - 2s - 3t) \Gamma(21 + 2s - 3t) \Gamma(21 - 2s + 3t) \Gamma(21 + 2s + 3t))^{-1}$ .