

DOI: 10.17516/1999-494X-0376

УДК 62-83:621.313.333

Mathematical Model of Frequency Inverter with Autonomous Voltage Inverter

Aleksandr A. Fedorenko and Aleksandr N. Pakhomov*
Siberian Federal University
Krasnoyarsk, Russian Federation

Received 11.10.2021, received in revised form 15.01.2022, accepted 06.02.2022

Abstract. An analytical analysis of the processes occurring in the systems of an electric drive with a frequency converter, which are characterized by discrete, nonlinear properties, is practically impossible. This predetermines the need to use methods of mathematical modeling and mathematical experiment to study the properties of such systems. Purpose of the work: building a model of a frequency converter with formalization in the form of mathematical relationships of the relationships between the variables characterizing its functioning, based on the analysis of physical processes in each of its elements. Mathematical models of each element must be represented by structural diagrams, which are subsequently combined into a common block diagram of the frequency converter in accordance with the method of structural modeling. Research methods: to solve the set tasks, the methods of the theory of electronics and electrical engineering, induction devices and the concept of switching functions were used. Software implementations of the proposed mathematical models and numerical studies of the processes reproduced by them were performed in the MATLAB computing environment (SIMULINK application software package). Results: the method of structural modeling made it possible to create a fairly universal and flexible version of a complete mathematical model of a frequency converter, due to the possibility of a fairly simple inclusion in it of various options for mathematical models of elements included in a specific real frequency converter. In this case, the resulting model preserves the topology of a real frequency converter and the observability of all its real physical variables. The use of the theory of induction devices and the concept of switching functions made it possible, on a single methodological basis, to create physically and mathematically grounded mathematical models of all the main elements of the frequency converter. The constructed model makes it possible to clarify the relationship between the physical variables of the individual elements of the frequency converter and their mutual influence.

Keywords: frequency converter, autonomous voltage inverter, rectifier, mathematical model, switching function.

Citation: Fedorenko, A. A., Pakhomov, A. N. Mathematical model of frequency inverter with autonomous voltage inverter. J. Sib. Fed. Univ. Eng. & Technol., 2022, 15(1), 90–100. DOI: 10.17516/1999-494X-0376

© Siberian Federal University. All rights reserved

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0).

* Corresponding author E-mail address: APahomov@sfu-kras.ru

Математическая модель преобразователя частоты с автономным инвертором напряжения

А. А. Федоренко, А. Н. Пахомов
Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, Красноярск

Аннотация. Аналитический анализ процессов, протекающих в системах электропривода с преобразователем частоты, которые характеризуются дискретными, нелинейными свойствами, практически невозможен. Это предопределяет необходимость использования для изучения свойств таких систем методов математического моделирования и математического эксперимента. Цель работы – построение модели преобразователя частоты с формализацией в виде математических соотношений взаимосвязей между переменными, характеризующими его функционирование, на основе анализа физических процессов в каждом его элементе. Математические модели каждого элемента необходимо представить структурными схемами, которые в дальнейшем объединяются в общую структурную схему преобразователя частоты в соответствии с методом структурного моделирования. Для решения поставленных задач использовались методы теории электроники и электротехники, индукционных устройств и понятия коммутационных функций. Программные реализации предлагаемых математических моделей и численные исследования воспроизводимых ими процессов выполнены в вычислительной среде MATLAB (пакет прикладных программ SIMULINK). Метод структурного моделирования позволил создать достаточно универсальный и гибкий вариант полной математической модели преобразователя частоты благодаря возможности достаточно простого включения в нее различных вариантов математических моделей элементов, входящих в конкретный реальный преобразователь частоты. При этом полученная модель сохраняет топологию реального преобразователя частоты и наблюдаемость всех его реальных физических переменных. Использование теории индукционных устройств и понятия коммутационных функций дало возможность на единой методологической основе создать физически и математически обоснованные математические модели всех основных элементов преобразователя частоты. Построенная модель позволяет прояснить взаимосвязи между физическими переменными отдельных элементов преобразователя частоты и их взаимное влияние.

Ключевые слова: преобразователь частоты, автономный инвертор напряжения, выпрямитель, математическая модель, коммутационная функция.

Цитирование: Федоренко, А. А. Математическая модель преобразователя частоты с автономным инвертором напряжения / А. А. Федоренко, А. Н. Пахомов // Журн. Сиб. федер. ун-та. Техника и технологии, 2022, 15(1). С. 90–100. DOI: 10.17516/1999-494X-0376

Силовой основой большинства современных технологических процессов является автоматизированный частотно-управляемый электропривод. Современный частотно-управляемый электропривод представляет собой весьма сложную систему, включающую в себя силовой трансформатор, согласующий выходные параметры преобразователя частоты (ПЧ) с сетью, неуправляемый выпрямитель, силовой фильтр, автономный инвертор с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), исполнительный двигатель.

Аналитически оценить процессы в таких системах, особенно с учетом отмеченных факторов, практически невозможно. Это предопределяет необходимость широкого использования для изучения их свойств методов математического моделирования и математического экспе-

римента. Таким образом, существует задача создания достаточно универсальных, наиболее полно учитывающих особенности и позволяющих проводить широкий спектр исследований математических моделей таких систем. В настоящей работе предложен вариант такой модели и представлены некоторые результаты выполненных с её помощью исследований.

Применение виртуальных моделей [1, 2], получивших распространение в практике моделирования, удобно для анализа процессов в системе электропривода в целом, однако они не позволяют проследить физическую природу протекаемых в них процессов и увидеть функциональные связи между переменными каждого отдельного элемента ПЧ в процессе их взаимодействия. Более универсальным представляется подход, принятый в настоящей работе, – построение модели ПЧ с формализацией в виде математических соотношений взаимосвязей между переменными, характеризующими его функционирование, на основе анализа физических процессов в каждом его элементе. Далее математические модели каждого элемента представляются структурными схемами, которые объединяют в общую структурную схему ПЧ согласно его схеме в соответствии с методом структурного моделирования. Такой подход позволяет создать достаточно универсальный и гибкий вариант полной математической модели объекта исследования, поскольку здесь имеется возможность достаточно просто включать в нее различные варианты математических моделей элементов, входящих в конкретный реальный ПЧ.

Разработанная на основе такого подхода структурная схема ПЧ с автономным инвертором напряжения (АИН) с ШИМ показана на рис. 1. Эта схема включает в себя структурные схемы трехфазного входного трансформатора, трехфазного мостового диодного выпрямителя, силового LC-фильтра звена постоянного тока, АИН с ШИМ и нагрузки АИН в виде трехфазной RL -цепи.

В основу построения математической модели трансформатора положена T -образная схема замещения его фазы, учитывающая потери на перемагничивание его сердечника [3].

Уравнения баланса напряжений для этой схемы замещения при построении структурной схемы трансформатора удобно привести к следующему виду:

$$\frac{di_1}{dt} = (u_1 - (R_1 + R_m)i_1 + L_m \frac{di_2}{dt} + R_m i_2') / (L_1 + L_m), \quad (1)$$

$$u_2 = (L_2' + L_m) \frac{di_2}{dt} + (R_2' + R_m) i_2' - R_m i_1 - L_m \frac{di_1}{dt}, \quad (2)$$

где u_1, i_1, u_2, i_2' – мгновенные значения фазных напряжений и токов первичной и вторичной обмоток трансформатора соответственно; R_1, L_1, R_2', L_2' – активные сопротивления и индуктивности рассеяния первичной и вторичной обмоток трансформатора соответственно; L_m, R_m – индуктивность намагничивания и фиктивное сопротивление, учитывающее потери на гистерезис и на перемагничивание сердечника.

Все переменные и параметры приведены к вторичной обмотке трансформатора.

Уравнения (1) и (2) легко позволяют составить структурную схему для одной фазы трансформатора. Полная модель трансформатора представляет собой комплект из трех таких схем (см. рис. 1). Особенностью структурной схемы является то, что здесь физически не реализуемая операция чистого дифференцирования тока i_2' вторичной обмотки трансформатора заменена

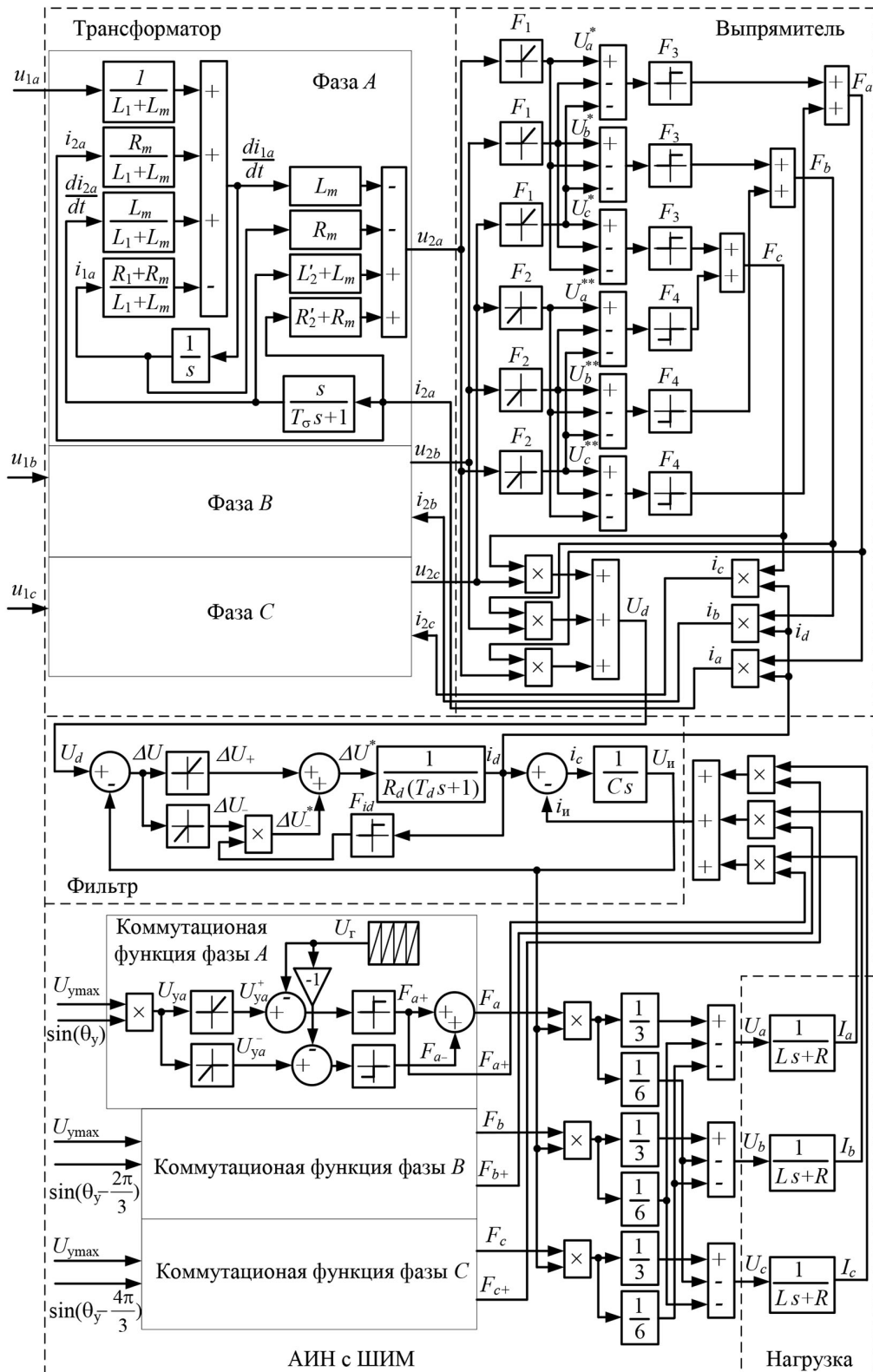


Рис. 1. Структурная схема преобразователя частоты

Fig. 1. Structural scheme of frequency converter

операцией дифференцирования со сглаживанием. Такая замена физически обоснована тем, что ток из одной фазы трансформатора в другую при коммутации вентилей выпрямителя переходит не мгновенно, а за время коммутации, определяемое индуктивностью рассеяния вторичной обмотки.

При математическом описании трехфазного мостового выпрямителя [4] принято, что диоды вентильного коммутатора обладают нулевым сопротивлением в открытом и бесконечно большим сопротивлением в закрытом состоянии, а также мгновенным переключением из одного состояния в другое.

Тогда для математической формализации процессов в трехфазной схеме выпрямления удобно использовать понятие фазных коммутационных функций F_a, F_b, F_c [5], которые можно определить следующим образом: коммутационная функция соответствующей фазы равна +1 – если открыт четный вентиль; – 1 – если открыт нечетный вентиль; 0 – если оба вентиля закрыты.

Анализ схемы выпрямителя с учетом данного выше определения фазных коммутационных функций показывает, что математическая связь между фазными напряжениями u_a, u_b, u_c , токами i_a, i_b, i_c сети и выпрямленным напряжением U_d и током i_d с помощью фазных коммутационных функций F_a, F_b, F_c определяется следующими соотношениями:

$$U_d = u_a \cdot F_a + u_b \cdot F_b + u_c \cdot F_c \quad (3)$$

$$i_a = F_a \cdot i_d, i_b = F_b \cdot i_d, i_c = F_c \cdot i_d \quad (4)$$

Следует уточнить, что в уравнениях (3) и (4) фигурируют мгновенные значения соответствующих напряжений и токов, а пара диодов каждой фазы моста выпрямителя изоморфна соответствующая операция перемножения. Кроме силового коммутатора полная математическая модель неуправляемого выпрямителя должна содержать элемент формирования коммутационных функций.

Одним из возможных вариантов является их формирование путем сравнения аргумента $\alpha = \omega \cdot t$ сетевого трехфазного напряжения с его теоретическим значением в точке естественной коммутации – $\alpha_{ек}$.

Второй вариант – это формирование фазных коммутационных функций путем сравнения мгновенных значений фазных напряжений U_a, U_b, U_c с расчетным значением напряжения $U_{ек}$ в точке естественной коммутации.

Основное достоинство получаемых при этом моделей – их простота. Однако они не учитывают особенностей работы диодного выпрямителя при отклонении трехфазного напряжения от стандартных параметров (отклонение формы напряжений от синусоидальной, перекося напряжений по фазам и т. д.), когда $U_{ек}$ и точка естественной коммутации $\alpha_{ек}$ смещаются относительно расчетного значения. Эти недостатки можно исключить, если фазные коммутационные функции формировать путем непосредственного сравнения мгновенных значений фазных напряжений. Очевидно, что в этом случае схема будет несколько сложнее, но это усложнение окупается точностью воспроизведения процессов выпрямления при всех реально возможных отклонениях параметров напряжения питающей сети от идеальных значений.

Если фазные коммутационные функции формировать путем непосредственного сравнения мгновенных значений фазных напряжений, каждое из них полезно разделить на два сигнала, состоящих только из положительных

$$U_a^* = u_a \cdot F_1, U_b^* = u_b \cdot F_1, U_c^* = u_c \cdot F_1 \quad (5)$$

или отрицательных полувольт

$$U_a^{**} = u_a \cdot F_2, U_b^{**} = u_b \cdot F_2, U_c^{**} = u_c \cdot F_2, \quad (6)$$

где $F_1 = 1$ и $F_2 = 0$ при $u_i > 0$, $F_1 = 0$ и $F_2 = 1$ при $u_i < 0$. Здесь вместо индекса i принимается a, b, c для соответствующей фазы.

Такое разделение позволяет непосредственно использовать сигналы U_a^*, U_b^*, U_c^* и $U_a^{**}, U_b^{**}, U_c^{**}$ для вычисления коммутационных функций:

$$F_a = F_3(U_a^* - U_b^* - U_c^*) + F_4(U_a^{**} - U_b^{**} - U_c^{**}), \quad (7)$$

$$F_b = F_3(U_b^* - U_a^* - U_c^*) + F_4(U_b^{**} - U_a^{**} - U_c^{**}), \quad (8)$$

$$F_c = F_3(U_c^* - U_b^* - U_a^*) + F_4(U_c^{**} - U_b^{**} - U_a^{**}), \quad (9)$$

где $F_3 = 1$ и $F_4 = 0$, если выражение в скобках больше 0, $F_3 = 0$ и $F_4 = -1$, если выражение в скобках меньше 0.

Совокупность уравнений (2)-(9) полностью характеризует процессы в неуправляемом трехфазном мостовом выпрямителе. Соответствующая им структурная схема показана на рис. 1.

На рис. 2 приведена структурная схема LC -фильтра звена постоянного тока ПЧ [5].

Здесь U_d, U_n – входное и выходное напряжения фильтра; i_d, i_c, i_n – токи дросселя, конденсатора и нагрузки фильтра; R_d, T_d, C – параметры фильтра [5].

Эта схема справедлива, если источник напряжения U_d имеет двустороннюю проводимость тока. Диодный выпрямитель таким свойством не обладает. Он может проводить ток только в одном направлении. Следовательно, при разработке математической модели звена постоянного тока это свойство источника напряжения U_d необходимо учесть, обеспечив соответствие воспроизводимых моделью процессов процессам реальным.

В реальной схеме при положительном значении $\Delta U = U_d - U_n$ ток i_d будет иметь положительное значение. При уменьшении ΔU вплоть до смещения в отрицательную область ток i_d также будет уменьшаться, приобретая нулевое значение со сдвигом (запаздыванием) во вре-

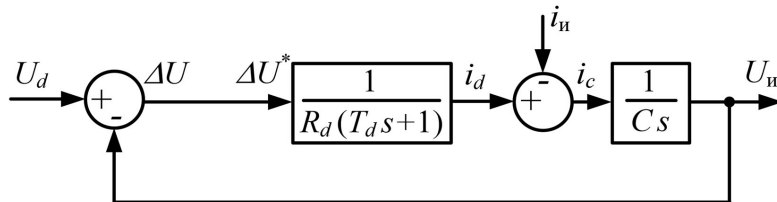


Рис. 2. Структурная схема LC -фильтра

Fig. 2. Structural scheme LC -filter

мени относительно момента, когда ΔU изменит знак. В дальнейшем i_d остается равным нулю вплоть до момента, пока ΔU не вернется в положительную область.

Математически и структурно формализовать описанный алгоритм можно следующим образом. Будем различать (см. рис. 2) сигнал ΔU на выходе узла сравнения и сигнал на входе аperiodического звена, обозначив последний ΔU^* .

Сигнал ΔU^* , в свою очередь, будем рассматривать как сумму двух сигналов:

$$\Delta U^* = \Delta U_+ + \Delta U_-, \quad (10)$$

где $\Delta U_+ = \Delta U$ при $\Delta U > 0$, $\Delta U_+ = 0$ при $\Delta U < 0$.

Напряжение ΔU_-^* определим выражением

$$\Delta U_-^* = \Delta U_- \cdot F(i_d), \quad (11)$$

где $\Delta U_- = 0$ при $\Delta U > 0$, $\Delta U_- = \Delta U$ при $\Delta U < 0$.

Функция $F(i_d)$ учитывает знак i_d – $F(i_d) = 1$ при $i_d > 0$, $F(i_d) = 0$ при $i_d < 0$.

Доработанная с учетом уравнений (10) и (11) структурная схема силового фильтра показана на рис. 1. Она полностью учитывает специфику процессов в фильтре звена постоянного тока при включении его на выход диодного выпрямителя.

Вентильный коммутатор автономного инвертора напряжения при представлении вентилей идеальными ключами – это обращенный вентильный коммутатор трехфазного выпрямительного моста [5], у которого входное постоянное напряжение питания $U_{и}$ поступает на клеммы постоянного тока, а выходными являются фазные переменные напряжения U_a , U_b , U_c .

Воспользовавшись введенным ранее для выпрямителя понятием фазной коммутационной функции, связь между переменными вентильного коммутатора АИН можно выразить следующими соотношениями [5]:

$$U_a = U_{и} (2F_a / 3 - F_b / 3 - F_c / 3) / 2,$$

$$U_b = U_{и} (2F_b / 3 - F_a / 3 - F_c / 3) / 2,$$

$$U_c = U_{и} (2F_c / 3 - F_b / 3 - F_a / 3) / 2,$$

$$i_u = i_a F_{a+} + i_b F_{b+} + i_c F_{c+},$$

где $U_{и}$, $i_{и}$ – входное напряжение и ток вентильного коммутатора АИН; U_a , U_b , U_c , i_a , i_b , i_c – фазные выходные напряжения и токи вентильного коммутатора; F_{a+} , F_{b+} , F_{c+} – положительная полуволна соответствующих фазных коммутационных функций F_a , F_b , F_c .

В отличие от диодного выпрямителя, где коммутационные функции формируются естественным образом за счет непрерывного сравнения мгновенных значений фазных напряжений и включения диодов в точках естественной коммутации, в автономных инверторах для формирования коммутационных функций требуется специальная система управления ключами инвертора, позволяющая формировать желаемые амплитуду и частоту выходного напряжения. Возможность одновременно формировать амплитуду и частоту выходного напряжения достигается использованием широтно-импульсной модуляции входного напряжения автоном-

ного инвертора. Существует достаточно много законов и алгоритмов реализации широтно-импульсной модуляции.

Положив, что на входе системы управления силовыми ключами инвертора действуют сигнал $U_{y\max}$, определяющий амплитуду первой гармоники выходных напряжений АИН, и гар-

монические сигналы (координатные функции [6, 7]) $\sin(\theta_y)$, $\sin\left(\theta_y - \frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\theta_y - \frac{4\pi}{3}\right)$, свя-

занные с мгновенным значением частоты первых гармоник этих напряжений соотношением $\theta_y = \int_0^t \omega(t) dt$, фазные коммутационные функции F_a, F_b, F_c , определяющие алгоритм работы ключей каждой фазы коммутатора АИН, формируются путем сравнения соответствующих сигналов управления

$$\begin{aligned} U_{ya} &= U_{y\max} \sin(\theta_y), \\ U_{yb} &= U_{y\max} \sin\left(\theta_y - \frac{2\pi}{3}\right), \\ U_{yc} &= U_{y\max} \sin\left(\theta_y - \frac{4\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

с опорным сигналом U_r генератора пилообразного напряжения.

Структурная схема АИН с ШИМ, состоящая из структурных схем вентильного коммутатора и описанной выше системы формирования коммутационных функций, приведена на рис. 1.

Разработанная математическая модель ПЧ реализована в пакете *Simulink MATLAB*.

Для численных расчетов приняты следующие параметры питающей сети: действующее фазное напряжение $U_\phi = 220$ В, частота напряжения $f = 50$ Гц.

Использованы параметры разделительного трехфазного трансформатора ТСЗР-10380/380, приведенные к вторичной обмотке: $R_1 = 0.2$ Ом, $R_2' = 0.6$ Ом, $R_m = 78$ Ом, $L_1 = 6 \cdot 10^{-6}$ Гн, $L_2' = 9 \cdot 10^{-6}$ Гн, $L_m = 1.9$ Гн. Параметры нагрузки: $R_n = 22$ Ом, $L_n = 0.01$ Гн. Генератором пилообразного опорного напряжения U_r задан период дискретизации ШИМ 0.001 с.

Результаты исследований свидетельствуют о том, что разработанная модель как качественно, так и количественно отображает процессы, протекающие в реальном ПЧ. Это иллюстрируют графики изменения переменных в звене постоянного тока (рис. 3, 4) и переменных в нагрузке (рис. 5) при моделировании режима прямого подключения преобразователя с активно-индуктивной нагрузкой к сети.

Как видно на графиках, в начальный момент включения наблюдается значительная просадка напряжения U_d (рис. 3) на выходе выпрямителя, обусловленная ограниченной мощностью питающей сети (трансформатора), и бросок тока дросселя (рис. 4), значительно превышающий установившееся значение. Для ограничения броска тока необходимо применение специальных мер, например предварительный заряд конденсатора фильтра от внешнего источника с большим внутренним сопротивлением.

В установившемся режиме во всех переменных звена постоянного тока наблюдаются низкочастотные колебания с тройной частотой тока нагрузки (рис. 5) преобразователя частоты. Это также объясняется потерями в трансформаторе и дросселе силового фильтра.

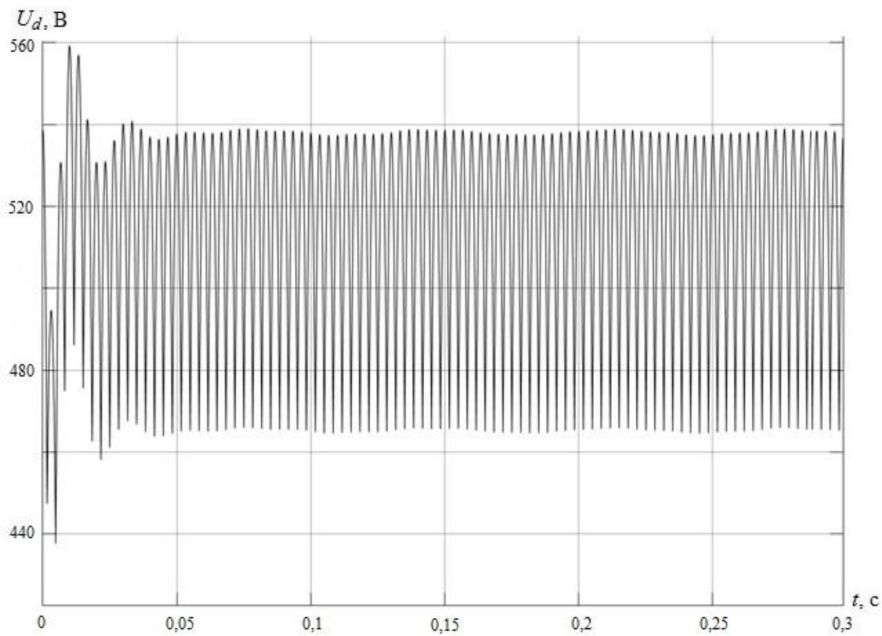


Рис. 3. Графики изменения выпрямленного напряжения U_d

Fig. 3. Graphs change straightened voltage U_d

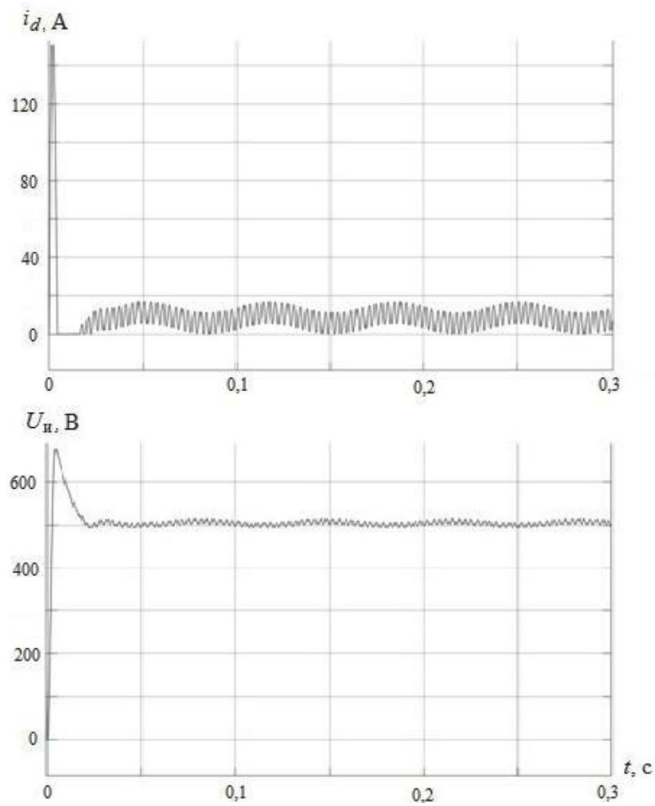


Рис. 4 Графики изменения тока дросселя i_d и напряжения инвертора U_n

Fig. 4. Graphs change throttle current i_d and inverter voltage U_n

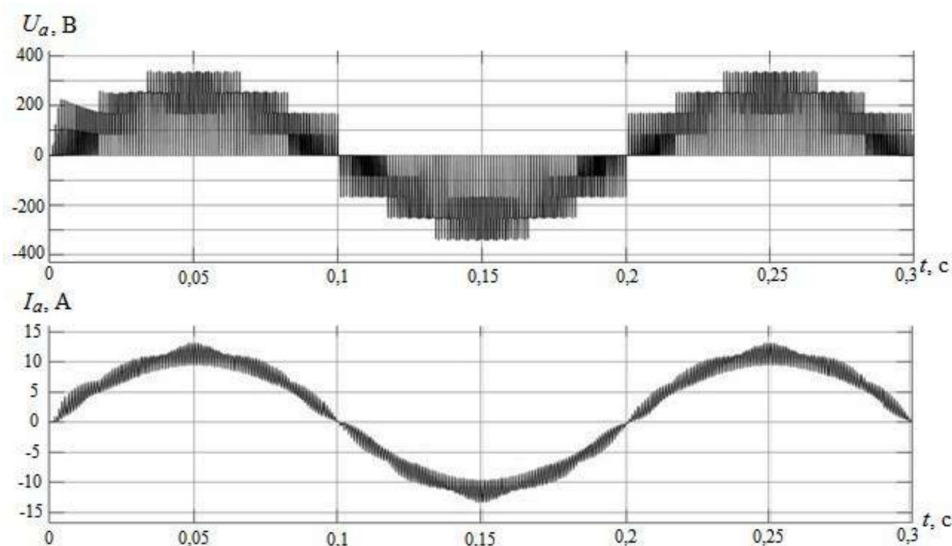


Рис. 5. Графики изменения напряжения U_a и тока I_a в нагрузке фазы А

Fig. 5. Graphs change voltage U_a and current I_a in phase load A

Все графики получены при задании амплитуды и частоты первой гармоники выходного напряжения ПЧ 220 В и 5 Гц соответственно.

В заключение следует отметить, что использование теории индукционных устройств и понятия коммутационных функций позволило на единой методологической основе создать физически и математически обоснованные математические модели всех основных элементов преобразователя частоты.

Кроме того, применение метода структурного моделирования дало возможность получить достаточно универсальную гибкую модель ПЧ в целом, сохранив топологию реального преобразователя частоты и наблюдаемость всех его реальных физических переменных. Построенная модель ПЧ позволяет прояснить взаимосвязи между физическими переменными отдельных элементов ПЧ и их взаимное влияние.

Применение при построении моделей натуральных систем координат помогло сохранить соответствие (изоморфность) наблюдаемых модельных переменных их реальным аналогам и, как следствие, наблюдать их без дополнительных координатных преобразований. При этом прояснилась математическая сущность выпрямителя и автономного инвертора как прямого и обратного координатных преобразователей.

Список литературы / References

[1] Герман-Галкин С.Г. *Matlab&Simulink, Проектирование мехатронных систем на ПК*. СПб.: Корона. Век, 2014. 368 с. [German-Galkin S.G. *Matlab&Simulink, Design of mechatronic systems on PC*. St. Petersburg.: Korona. Vek, 2014. 368 p. (in Russian)]

[2] Гуляев И.В., Тутаев Г.М.. *Моделирование электромеханических процессов обобщенной электромеханической системы на основе асинхронизированного вентильного двигателя*. Саранск, 2004. 108 с. [Gulyaev I. V., Tutaev G. M. *Modeling the electromechanical processes of the*

generalized electromechanical system based on asynchronized valve engine. Saransk, 2004. 108 p. (in Russian)]

[3] Лурье А. И. Процесс включения трансформатора на холостой ход и короткое замыкание. *Электротехника*, 2008, 2, 2–18 [Lurye A. I. The process of incorporating a transformer for idling and short circuit. *Electrical engineering*, 2008, 2, 2–18 (in Russian)]

[4] Дунаев М. П., Дунаева Я. О., Дунаев А. М. Моделирование управляемого выпрямителя. *Вестник Ангарского государственного технического университета*, 2018, 12, 43–46 [Dunaev M. P., Dunaeva Ya. O., Dunaev A. M. Modeling managed rectifier. *Bulletin of the Angarsk Gosademic Technical University*, 2018, 12, 43–46 (in Russian)]

[5] Карагодин М. С., Федоренко А. А. *Уравнения динамики частотноуправляемых электроприводов*. Красноярск: КрПИ, 1985. 92 с. [Karagodin M. S., Fedorenko A. A. *Equations of the dynamics of frequency-controlled electric drives*. Krasnoyarsk: KrPI, 1985. 92 p. (in Russian)]

[6] Blaschke F. Das Prinzip der Feldorientierung, für die Transvektor – Regelung von Drehfeldmaschinen. *Siemens-Z*, 1971, 45(10), 757–760.

[7] Floter W., Ripperger H. Die Transvektor – Regelung für die feldorientierten Betriebeiner Asynchronmaschine. *Siemens-Z*, 1971, 45(10), 761–764.