О знакопеременной подгруппе A_5 в группе автотопизмов конечной полуполевой плоскости[1]

О. В. Кравцова (г. Красноярск)

Аннотация

Статья посвящена обсуждению известной гипотезы о разрешимости полной группы автоморфизмов конечной проективной плоскости, координатизируемой полуполем. Продолжая предыдущее исследование полуполевых плоскостей нечетного порядка, допускающих подгруппу автотопизмов, изоморфную знакопеременной группе A_5, автор доказал, что таких полуполевых плоскостей не существует.

Ключевые слова: полуполевая плоскость, группа автотопизмов, знакопеременная группа.

On alternating subgroup A_5 in autotopism group of finite semifield plane

O. V. Kravtsova (Krasnoyarsk)

Abstract

We discuss well-known hypothesis that the full collineation group of any finite non-Desarguesian semifield plane is solvable. We continue to investigate the semifield planes of odd order which admit an autotopism subgroup isomorphic to alternating group A_5. It is proved that a semifield plane of any odd order does not admit A_5 in autotopism group.

Keywords: semifield plane, autotopism group, alternating group.

Настоящая статья продолжает исследования конечных полуполевых проективных плоскостей, начатые в [1, 2, 3]. Для более подробного ознакомления рекомендуются монография [4] и обзор [5].

Полуполем, в соответствии с [4], называют множество S, на котором определены две бинарные алгебраические операции $+$ и $*$, при выполнении условий:

1) $\langle S,+\rangle$ – абелева группа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S^*,*\rangle$ – лупа ($S^*=S\setminus\{0\}$);

3) выполняются дистрибутивные законы $a*(b+c)=a*b+a*c$, $(b+c)*a=b*a+c*a$ для любых $a,b,c\in S$.

Конечная проективная плоскость, координатизируемая полуполем, обладает большими группами центральных *коллинеаций* (автоморфизмов) – как плоскость трансляций и дуальная к плоскости трансляций. Как и всякая конечная плоскость трансляций, она может быть задана с использованием линейного пространства над конечным полем и специального семейства линейных преобразований – так называемого *регулярного множества*. Мы будем рассматривать координатизирующее полуполе порядка p^n (p – простое) как линейное пространство W размерности n над полем $\mathbb{Z}_p$. Регулярным множеством (spread set, [4]) назовем подмножество линейных преобразований

$$R=\{\theta(y)\mid y\in W\}\subset GL_n(p)\cup\{0\},$$

где θ – инъективное отображение со свойствами:

1) $\theta(0)=0$ – нулевая матрица;

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

2) единичная матрица E имеет прообраз $e \in W$;

3) отображение аддитивно, $\theta(x+y)=\theta(x)+\theta(y)$ для всех $x, y \in W$.

Тогда пространство W с умножением

$$x * y = x \cdot \theta(y), \qquad x, y \in W,$$

является полуполем и координатизирует полуполевую проективную плоскость π порядка p^n. Заметим, что если регулярное множество является полем $R \simeq GF(p^n)$, то плоскость π дезаргова (классическая), ее строение и свойства хорошо известны (см. [4]).

Пусть π – (собственно) полуполевая плоскость порядка p^n. Ее полная группа коллинеаций имеет вид $Aut\,\pi = T \leftthreetimes G$, где $T = \{\tau_{a,b} \mid a, b \in W\}$ – группа трансляций,

$$\tau_{a,b} : (x, y) \to (x+a, y+b), \quad x, y \in W,$$

G – трансляционное дополнение, стабилизатор точки $(0,0)$. Автоморфизмы из G задаются линейными преобразованиями пространства $W \oplus W$:

$$\alpha : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Lambda < G$ – группа *автотопизмов*, т.е. коллинеаций, фиксирующих треугольник, одна из сторон которого – трансляционная прямая $[\infty]$, одна из вершин – трансляционная точка (∞). Тогда $G = \Omega \leftthreetimes \Lambda$, где группа Ω всех элаций с центром (∞) изоморфна подгруппе в группе трансляций T. Таким образом, строение полной группы коллинеаций конечной полуполевой плоскости определяется строением группы автотопизмов.

Известна гипотеза ([4], с. 178) о разрешимости полной группы коллинеаций всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка (см. также [6], вопрос 11.76, 1990 г.). К настоящему моменту для некоторых классов полуполевых плоскостей эта гипотеза подтверждена, но отсутствует общий подход к решению проблемы. Ясно, что эта гипотеза редуцируется к разрешимости группы автотопизмов [4]. С учетом теоремы Фейта–Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка, изучать следует прежде всего подгруппы автотопизмов четного порядка.

В предположении неразрешимости группы автотопизмов простые композиционные факторы должны быть изоморфны известным простым группам. Непосредственный перебор всех вариантов из списка простых неабелевых групп приводит к очень большому количеству исследований. В статье [3] обсуждается существование подгруппы в группе автотопизмов, изоморфной знакопеременной группе A_5 (подгруппе значительного количества простых неабелевых групп). Получено матричное представление регулярного множества такой полуполевой плоскости произвольного нечетного порядка p^N.

Теорема 1. *Пусть π – полуполевая плоскость нечетного порядка p^N (p – простое), группа автотопизмов Λ которой содержит подгруппу $H \simeq A_5$. Тогда $N = 4n$ и плоскость π может быть задана $8n$-мерным векторным пространством над $\mathbb{Z}_p$ так, что регулярное множество плоскости $R \subset GL_{4n}(p) \cup \{0\}$ образовано $(4n \times 4n)$-матрицами вида*

$$\theta(V_1, U_1, V_2, U_2) = \begin{pmatrix} \mu(U_2) & -\psi(V_2) & \psi(U_1) & \varphi(V_1) \\ \psi(V_2) & \mu(U_2) & -\psi(V_1) & \varphi(U_1) \\ -\psi(U_1) & \psi(V_1) & \mu(U_2) & \varphi(V_2) \\ V_1 & U_1 & V_2 & U_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $V_1, U_1, V_2 \in Q_1$, $U_2 \in Q_2$, Q_1, Q_2 *– регулярные множества в* $GL_n(p) \cup \{0\}$; ψ, μ, φ *– инъективные линейные отображения из* Q_1, Q_2 *соответственно в* $GL_n(p) \cup \{0\}$, *причем*

$$\mu(E) = E, \quad \varphi(E) \neq E, \quad \psi(E) = -E$$

(E *– единичная матрица).*

Полуполевая плоскость с регулярным множеством (1) существует в том и только в том случае, когда все ненулевые матрицы регулярного множества являются невырожденными. В [3] показано: если $p-1$ делится на 4, то регулярное множество (1) содержит ненулевую вырожденную матрицу, поэтому при такой характеристике p полуполевая плоскость не допускает A_5 в группе автотопизмов. В [7] анонсирован подобный результат для $N=4$ и $N=8$. Настоящая статья завершает обсуждение этого вопроса.

Теорема 2. *Недезаргова полуполевая плоскость порядка* p^N, *где* $p>2$ *– простое число, не может содержать в группе автотопизмов подгруппы, изоморфной знакопеременной группе* A_5.

Доказательство. В обозначениях теоремы 1, пусть $\varphi(E) = P$. В силу линейности отображений μ, φ, ψ, для любого $t \in \mathbb{Z}_p$ имеем $\mu(tE) = tE$, $\psi(tE) = -tE$, $\varphi(tE) = tP$. Рассмотрим матрицу $\theta(xE, yE, E, 0)$ $(x, y \in \mathbb{Z}_p)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & E & -yE & xP \\ -E & 0 & xE & yP \\ yE & -xE & 0 & P \\ xE & yE & E & 0 \end{pmatrix},$$

прибавим к ее третьей «строке» вторую «строку», умноженную на y:

$$\begin{pmatrix} 0 & E & -yE & xP \\ -E & 0 & xE & yP \\ 0 & -xE & xyE & (1+y^2)P \\ xE & yE & E & 0 \end{pmatrix},$$

теперь прибавим к третьей «строке» первую «строку», умноженную на x:

$$\begin{pmatrix} 0 & E & -yE & xP \\ -E & 0 & xE & yP \\ 0 & 0 & 0 & (1+x^2+y^2)P \\ xE & yE & E & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно [4], что каждый элемент конечного поля представим в виде суммы двух квадратов, поэтому найдутся такие $x, y \in \mathbb{Z}_p$, что $x^2 + y^2 = -1$, тогда матрица $\theta(xE, yE, E, 0)$ вырожденная. Теорема 2 доказана.

Подчеркнем, что доказательство теоремы 2 опирается на результат теоремы 1, потребовавшей очень трудоемких вычислений. Подводя итог, обратим внимание, что вместе со знакопеременной группой A_5 в группе автотопизмов полуполевой плоскости произвольного нечетного порядка исключаются и все другие конечные группы, содержащие A_5 в качестве подгруппы.

В заключение приведем результаты о полуполевых плоскостях, полученные автором с применением описанного метода и представленные на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ.

Теорема 3. *Недезаргова полуполевая плоскость порядка p^4, где $p>2$ – простое и $p-1$ делится на 4, не может содержать в группе автотопизмов подгруппы, изоморфной $SL(2,5)$.*

Теорема 4. *Недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N, где $p>2$ – простое и N не делится на 8, не может содержать в группе автотопизмов подгруппы, изоморфной $Sz(8)$.*

Список литературы

[1] O.V. Kravtsova, *Semifield planes of even order that admit the Baer involution*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **6**:2 (2013), 26-–37.

[2] O.V. Kravtsova, *Semifield planes of odd order that admit a subgroup of autotopisms isomorphic to A_4*, Russian Mathematics, **60**:9 (2016), 7–22.

[3] O.V. Kravtsova, B.K. Durakov, *A semifield plane of odd order admitting an autotopism subgroup isomorphic to A_5*, Sib. Math. J., **59**:2 (2018), 309–322.

[4] D.R. Hughes, F.C. Piper, *Projective planes*, Springer–Verlag New–York Inc., 1973. 292 p.

[5] N.L. Johnson, V. Jha, M. Biliotti, *Handbook of finite translation planes*, London New York, Chapman Hall/CRC, 2007, 888 p.

[6] V.D. Mazurov, E.I. Khukhro (eds.), *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory, 16th ed.*, Sobolev Inst. Math., Novosibirsk, 2006.

[7] N.D. Podufalov, O.V. Kravtsova, *On collineation groups of finite semifield projective planes*, International Conference dedicated to the 90th anniversary of the Higher Algebra Department of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University: Abstracts of talks (2019), 54.