УДК 519.145

Полуполевые плоскости, допускающие группу кватернионов Q_8[1]

О. В. Кравцова (г. Красноярск)

Аннотация

Обсуждается известная гипотеза о разрешимости полной группы автоморфизмов конечной проективной плоскости, координатизируемой полуполем. Для полуполевой плоскости порядка p^N ($p > 2$ – простое, $4|p-1$), допускающей подгруппу автотопизмов H, изоморфную группе кватернионов Q_8, построено матричное представление подгруппы H и регулярного множества плоскости. Найдены все неизоморфные полуполевые плоскости порядков 5^4 и 13^4, допускающие Q_8 в группе автотопизмов. Показано, что полуполевая плоскость порядка p^4, $4|p-1$, не допускает $SL(2,5)$ в группе автотопизмов.

Ключевые слова: полуполевая плоскость, группа автотопизмов, группа кватернионов, бэровская инволюция, гомология, регулярное множество.

1 Введение

Необходимые понятия, термины и обозначения введены в [1], более подробно полуполевые плоскости описаны в [2] и [3].

Координатизация точек и прямых проективной плоскости элементами алгебраической системы ведет к установлению связи между геометрическими свойствами плоскости и алгебраическими свойствами координатизирующего множества. Конечная дезаргова (классическая) плоскость координатизируется полем, плоскость трансляций – квазиполем. Полуполе (квазитело, в терминологии А. Г. Куроша [4]) координатизирует полуполевую плоскость, одновременно являющуюся плоскостью трансляций и дуальную плоскости трансляций.

Известная гипотеза о разрешимости полной группы коллинеаций (автоморфизмов) всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка ([2], см. также [5], вопрос 11.76, 1990 г.) не имеет опровергающих контрпримеров, но до сих пор не получила общего подхода к доказательству. Некоторые результаты о разрешимости приведены в [6, 7, 8] и др. Обсуждая эту гипотезу, предлагаем рассмотреть полуполевые плоскости, группа автотопизмов которых имеет подгруппу либо фактор-группу, изоморфную знакопеременной группе A_5 как подгруппе значительного количества простых неабелевых групп.

Матричное представление подгруппы автотопизмов, изоморфной A_5, полученное в [1], позволило доказать, что полуполевая плоскость произвольного нечетного порядка p^N ($p > 2$ – простое) не допускает A_5 в группе автотопизмов [9]. Рассмотрим фактор-группу $SL(2,5)$ по центру, изоморфную A_5, и силовскую 2-подгруппу в $SL(2,5)$, изоморфную группе кватернионов Q_8, при условии $4|(p-1)$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

Для плоскостей трансляций, в отличие от полуполевых, опубликован ряд результатов ([10, 11, 12, 13, 14] и др.) о существовании $SL(2,q)$ в полной группе коллинеаций. Они связаны, главным образом, с плоскостями ограниченного порядка n (например, $n \leq q$, $n=q^2$, $n=q^3$) и неприменимы в изучаемой нами ситуации.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть π – полуполевая плоскость π порядка p^N, допускающая подгруппу автотопизмов H, изоморфную группе кватернионов Q_8, $p>2$ – простое число, $p-1$ делится на 4. Тогда $N=2n>2$, элемент порядка 2 в H является гомологией с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$. Базис линейного пространства над $\mathbb{Z}_p$ может быть выбран так, что регулярное множество $R \subset GL_{2n}(p) \cup \{0\}$ плоскости π состоит из матриц вида*

$$\theta(V,U)=\begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $V \in Q$, $U \in K$, множества $Q, K \subset GL_n(p) \cup \{0\}$ замкнуты по сложению, содержат нулевую и единичную матрицы. Аддитивные взаимно однозначные отображения $m: K \to K$ и $f: Q \to Q$ не тождественны, инволютивны и удовлетворяют условиям $m(E)=E$, $f(E) \neq \pm E$. Два элемента порядка 4, порождающих H, в том же базисе определяются матрицами

$$\alpha=\begin{pmatrix} -iE & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iE \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $i \in \mathbb{Z}_p$, $i^2=-1$. Плоскость π допускает бэровскую инволюцию, координатизирующее полуполе допускает автоморфизм порядка 2.

Построены все неизоморфные примеры плоскостей описанного вида при $p=5$ и $p=13$. Также доказана

Теорема 2. *Полуполевая плоскость порядка p^4, где $p>2$ – простое число и $p-1$ делится на 4, не допускает подгруппы автотопизмов, изоморфной $SL(2,5)$.*

Напомним, что полная группа коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости разрешима в том и только в том случае[2], когда разрешима ее группа автотопизмов Λ, образованная коллинеациями, фиксирующими треугольник $(0,0)$, (0), (∞), $[0,0]$, $[0]$, $[\infty]$. Каждый автотопизм $\lambda \in \Lambda$ определяется блочно-диагональной матрицей,

$$(x,y)^\lambda=(x,y)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

здесь x, y – векторы N-мерного линейного пространства над $\mathbb{Z}_p$, $A, B \in GL_N(p)$. При этом сохранение инцидентности в полуполевой плоскости с регулярным множеством $R \subset GL_N(p) \cup \{0\}$ требует выполнения условия $A^{-1}\theta(m)B \in R$ для всех матриц регулярного множества $\theta(m) \in R$.

Теорема Фейта–Томпсона о группах нечетного порядка позволяет далее изучать лишь случаи, когда группа автотопизмов содержит инволюции. Как известно, всякая коллинеация порядка два является либо центральной, либо бэровской коллинеацией [2].

Коллинеация проективной плоскости π порядка m называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно максимальную подплоскость порядка $\sqrt{|\pi|}=\sqrt{m}$ (бэровскую подплоскость). Коллинеация называется *центральной* (или перспективностью), если она фиксирует поточечно некоторую прямую (ось), некоторую точку (центр) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется *элацией*, в противном случае – *гомологией*.

Центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов три циклические подгруппы [7], состоящие из гомологий с осью $[0,0]$ и центром (∞), либо гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$, либо гомологий с осью $[0]$ и центром (0).

Пусть π – полуполевая плоскость порядка p^N, где $p>2$ – простое число, $4|p-1$, и группа автотопизмов Λ содержит подгруппу H, изоморфную группе кватернионов Q_8. Тогда

$$H=\langle\alpha,\beta \mid \alpha^4=1,\ \beta^4=1,\ \alpha^2=\beta^2,\ \alpha\beta\alpha=\beta\rangle. \tag{3}$$

Для доказательства основной теоремы 1 обозначим $\tau=\alpha^2=\beta^2$, тогда автотопизм τ может быть либо бэровской инволюцией, либо гомологией порядка 2. Рассмотрим все возможные случаи.

2 Случай 1: H содержит бэровскую инволюцию

Лемма 1. *Пусть полуполевая плоскость π порядка p^N ($p>2$ – простое число, $p-1$ делится на 4) допускает подгруппу автотопизмов H, изоморфную группе кватернионов Q_8. Тогда инволюция в H не может быть бэровской.*

Доказательство. Если τ – бэровская инволюция, то, как показано в [15], N делится на 2 и в некотором подходящем базисе $2N$-мерного линейного пространства над полем $\mathbb{Z}_p$ инволюция задается матрицей $\tau=\begin{pmatrix} L & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}$, где $L=\begin{pmatrix} -E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$, E – единичная матрица. Отметим, что здесь и далее при записи матрицы каждый элемент представляет собой блок-подматрицу, причем все блоки имеют одну и ту же размерность. Обозначим $\alpha=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix}$, или, подробнее,

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0\\ A_3 & A_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_5 & A_6\\ 0 & 0 & A_7 & A_8\end{pmatrix}, \qquad \beta=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & 0 & 0\\ B_3 & B_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_5 & B_6\\ 0 & 0 & B_7 & B_8\end{pmatrix},$$

тогда $A^2=A'^2=B^2=B'^2=L$, $ABA=B$, $A'B'A'=B'$, $AL=LA$, $A'L=LA'$, $BL=LB$, $B'L=LB'$, поэтому

$$A_2=A_3=A_6=A_7=0, \qquad B_2=B_3=B_6=B_7=0,$$
$$A_1^2=A_5^2=B_1^2=B_5^2=-E, \quad A_4^2=A_8^2=B_4^2=B_8^2=E.$$

Как доказано в [15], матрицы регулярного множества полуполевой плоскости, допускающей бэровскую инволюцию, могут быть записаны в виде (1), где $V\in Q$, $U\in K$, $Q,K\subset GL_{N/2}(p)\cup\{0\}$. Множества Q и K замкнуты по сложению, $0,E\in Q,K$, т.е. Q и K являются регулярными множествами подходящих полуполевых плоскостей порядка $p^{N/2}$. Отображения m и f из Q и K соответственно в $GL_{N/2}(p)\cup\{0\}$ аддитивны (линейны), $m(E)=E$, $f(E)\neq E$. Более того, из условия

$4|p-1$ следует $f(E)\neq -E$, иначе регулярное множество содержит вырожденную матрицу $\theta(iE,E)=\begin{pmatrix} E & -iE \\ iE & E\end{pmatrix}$, где $i\in\mathbb{Z}_p^*$, $i^2=-1$.

Выясним, какой вид могут иметь матрицы A_1, A_5, B_1, B_5. Ясно, что матрицы A_1 и B_1 не могут одновременно являться скалярными. Пусть матрица A_1 не скалярна и $A_1^2=-E$, тогда λ^2+1 – минимальный многочлен этой матрицы. Жорданова нормальная форма матрицы A_1 – диагональная матрица с диагональными элементами $\pm i$. Докажем, что их равное количество. Если это не так, то в жордановом базисе матрица A_1 примет вид (для определенности) $A_1'=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & iE\end{pmatrix}$, где $D\neq \pm iE$ диагональна с диагональными элементами $\pm i$. Тогда из равенства $A_1B_1A_1=B_1$ в жордановом базисе для матрицы $B_1'=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4\end{pmatrix}$ имеем

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & iE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & iE\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} DX_1D & iDX_2 \\ iX_3D & i^2X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4\end{pmatrix},$$

тогда $-X_4=X_4$, $X_4=0$, поэтому матрица X_2, например, невырожденная. Имеем $iDX_2=X_2$, $iD=E$, что противоречит предположению. Таким образом, для матрицы A_1 жорданова нормальная форма $\begin{pmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE\end{pmatrix}=iL$.

Определим теперь вид матриц B_1 и B_5. Из условий $A_1B_1A_1=B_1$ и $B_1^2=-E$ получим $B_1=\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0\end{pmatrix}$. Упростим B_1 за счет выбора базиса: для матрицы перехода $T=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & X\end{pmatrix}$ имеем $TA_1T^{-1}=A_1$, $TB_1T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}=S$. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $A_1=iL$, $B_1=S$. Рассуждая для A_5, B_5 аналогично, получим

$$\alpha=\begin{pmatrix} iL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iL & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_8\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_8\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим действие коллинеаций α и β на бэровской подплоскости $\pi_0=\{(0,x,0,y)\mid x,y\in W\}$, поточечно фиксируемой инволюцией τ (W – линейное пространство размерности $N/2$ над $\mathcal{Z}_p$) . Так как $(0,x,0,y)^\alpha=(0,xA_4,0,yA_8)\in\pi_0$, $(0,x,0,y)^\beta=(0,xB_4,0,yB_8)\in\pi_0$, то матрицы $\alpha_0=\begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & A_8\end{pmatrix}$, $\beta_0=\begin{pmatrix} B_4 & 0 \\ 0 & B_8\end{pmatrix}$ задают автотопизмы порядка 2 подплоскости π_0 либо действуют на π_0 тождественно.

Если α_0 действует тождественно на π_0 либо является гомологией, то $A_4, A_8\in\{E,-E\}$. В этом случае, поскольку

$$\alpha=\begin{pmatrix} iL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^kE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iL & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^mE\end{pmatrix}$$

является коллинеацией, то произведение

$$\begin{pmatrix} -iL & 0 \\ 0 & (-1)^kE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U\end{pmatrix}\begin{pmatrix} iL & 0 \\ 0 & (-1)^mE\end{pmatrix}$$

принадлежит регулярному множеству для всех $V \in Q$, $U \in K$. Тогда при $V = (-1)^{k+1} iE$ имеем $L \in Q$, что невозможно, поскольку $L+E$ – вырожденная ненулевая матрица в Q.

Итак, коллинеации α и β порядка 4 действуют на бэровской подплоскости π_0 как бэровские инволюции, и число N делится на 4. Следовательно, приводя матрицы A_4 и A_8 к жордановой нормальной форме, мы можем считать, что $A = A' = \begin{pmatrix} iL & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} -iL & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iL & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lm(U)L & -iLf(V)L \\ iLVL & LUL \end{pmatrix} \in R$$

для всех $V \in Q$, $U \in K$. Поэтому Q и K также представляют собой регулярные множества полуполевых плоскостей, допускающих бэровскую инволюцию, и состоят из матриц вида

$$V = \begin{pmatrix} \psi(U_1) & \nu(V_1) \\ V_1 & U_1 \end{pmatrix} \in Q, \quad U = \begin{pmatrix} \mu(U_2) & \varphi(V_2) \\ V_2 & U_2 \end{pmatrix} \in K,$$

здесь $V_1 \in Q_1$, $U_1 \in K_1$, $V_2 \in Q_2$, $U_2 \in K_2$, множества Q_1, K_1, Q_2, K_2 замкнуты по сложению, содержат нулевую и единичную матрицы. Далее, $\psi(E) = E$, $\mu(E) = E$, $\nu(E) \neq \pm E$, $\varphi(E) \neq \pm E$.

Приводя матрицы B_1 и B_4 к жордановой нормальной форме, с учетом условий $B_4^2 = E$, $B_8^2 = E$, $B_4 \neq \pm E$, $B_8 \neq \pm E$, $LB_4L = B_4$, $LB_8L = B_8$, считаем далее, что B_4 и B_8 – диагональные матрицы с ± 1 на главной диагонали. Поскольку β является коллинеацией, то

$$\begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & B_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Sm(U)S & -Sf(V)B_8 \\ B_4VS & B_4UB_8 \end{pmatrix} \in R,$$

$B_4VS \in Q$, $B_4UB_8 \in K$ для всех $V \in Q$, $U \in K$. При $U = E$ имеем $B_4B_8 \in K$, поэтому возможно только $B_8 = \pm B_4$. Рассмотрим произведение B_4VS, где $B_4 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(U_1) & \nu(V_1) \\ V_1 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_1\nu(V_1) & X_1\psi(U_1) \\ -X_4U_1 & X_4V_1 \end{pmatrix} \in Q,$$

отсюда при $V_1 = E$ имеем $X_4 \in K_1$. Тогда диагональная матрица X_4 не может содержать одновременно элементы -1 и 1, т.е. $X_4 = \pm E$. Пусть, например, $X_4 = E$, тогда при $V_1 = U_1 = E$ получим:

$$B_4VS = \begin{pmatrix} -X_1\nu(E) & -X_1 \\ E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -X_1 \\ E & E \end{pmatrix},$$

эта матрица является вырожденной для всех диагональных матриц X_1 с диагональными элементами ± 1. Для случая $X_4 = -E$ рассуждения аналогичны. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 1.

Отметим, что похожий результат доказан в 1989 г. для произвольных проективных плоскостей при другом ограничении на их порядок [10]:

Лемма 2. *Пусть* Π *– проективная плоскость порядка* n^2*, где* $n \equiv 2$ *или 3 (mod 4), и пусть* G *– группа коллинеаций.*

(i) Если $Fix(G) \neq \varnothing$*, то каждая инволюция в производной подгруппе* G' *является перспективностью.*

(ii) Если G *– циклическая порядка 4, то инволюция в* G *является перспективностью.*

3 Случай 2: H содержит гомологию порядка 2

Лемма 3. *Пусть полуполевая плоскость π порядка p^N ($p>2$ – простое число, $p-1$ делится на 4) допускает подгруппу автотопизмов H, изоморфную группе кватернионов Q_8. Тогда инволюция в H не может быть гомологией с осью $[0]$ и центром (0) или гомологией с осью $[0,0]$ и центром (∞).*

Доказательство. Рассуждения, в-основном, будут аналогичны приведенным выше, поэтому записаны со значительными сокращениями.

Пусть τ – гомология порядка 2 с осью $[0]$ и центром (0), т.е. $\tau=\begin{pmatrix}-E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, имеем $A=iL$ и $B=S$. Приводя матрицу A' к жордановой нормальной форме, получим $\alpha=\begin{pmatrix}iL & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}$. Из условия $A'B'A'=B'$ получим $B'=\begin{pmatrix}B_5 & 0\\ 0 & B_8\end{pmatrix}$, где $B_5^2=B_8^2=E$. Переходя к жордановой нормальной форме (замена базиса не меняет α), можем считать далее, что B_5 и B_8 – диагональные матрицы с диагональными элементами ± 1.

Поскольку α – коллинеация, то матрица $\begin{pmatrix}L & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}$ задает бэровскую инволюцию. В соответствии с [15], получаем вид матриц регулярного множества (1). Далее, поскольку β – коллинеация, то $S^{-1}\theta(V,U)B'\in R$ для всех $V\in Q$, $U\in K$. В частности, при $U=0$ и $V=E$ имеем $\begin{pmatrix}-B_5 & 0\\ 0 & f(E)B_8\end{pmatrix}\in R$. Складывая с $\pm E$, делаем вывод: матрица B_5 может быть только скалярной, $B_5=\pm E$, иначе результат сложения является ненулевой вырожденной матрицей. Кроме того, $f(E)B_8=-B_5=\mp E$, $f(E)=\mp B_8$. Тогда матрица $\theta(E,E)=\begin{pmatrix}E & \mp B_8\\ E & E\end{pmatrix}$ содержит одинаковые строки и является вырожденной.

Пусть теперь τ – гомология порядка 2 с осью $[0,0]$ и центром (∞), $\tau=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & -E\end{pmatrix}$. Повторяя предыдущие рассуждения, приводим коллинеации α и β к виду $\alpha=\begin{pmatrix}L & 0\\ 0 & iL\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & S\end{pmatrix}$, где B – диагональная матрица с ± 1 на главной диагонали, регулярное множество R состоит из матриц (1). Отображение β – коллинеация, поэтому $B^{-1}\theta(V,U)S\in R$ для всех $V\in Q$, $U\in K$. Это условие не выполняется, в частности, для $B^{-1}S$. Лемма 3 доказана.

Осталось рассмотреть случай, когда $\tau=\begin{pmatrix}-E & 0\\ 0 & -E\end{pmatrix}$ – гомология с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$. В этом случае можем записать элементы α и β в виде (2), и так как плоскость допускает бэровскую инволюцию $\begin{pmatrix}L & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}=-i\alpha$, то она имеет регулярное множество из матриц вида (1). Поскольку β – коллинеация, получим условие $S^{-1}\theta(V,U)S=\begin{pmatrix}U & -V\\ -f(V) & m(U)\end{pmatrix}\in R$ для всех $V\in Q$, $U\in K$, тогда $m\colon K\to K$, $f\colon Q\to Q$, $m(m(U))=U$, $f(f(V))=V$, т.е. отображения m и f инволютивны, причем отображение f не тождественно, так как $f(E)\neq E$.

Рассмотрим собственные подпространства

$$K_+=\{U\in K\mid m(U)=U\},\qquad K_-=\{U\in K\mid m(U)=-U\},\tag{4}$$

$$Q_+ = \{V \in Q \mid f(V) = V\}, \qquad Q_- = \{V \in Q \mid f(V) = -V\}, \tag{5}$$

линейных преобразований m и f соответственно. Покажем, что m не тождественно. Действительно, если $m(U)=U$ для всех $U\in K$, выберем ненулевой элемент $V_0\in Q_+$ и матрицу $U_0\in K$ с такой же нижней строкой, что и V_0 (такой выбор возможен, т.к. Q и K – регулярные множества). Тогда в ненулевой матрице $\theta(V_0,U_0)=\begin{pmatrix} U_0 & V_0 \\ V_0 & U_0 \end{pmatrix}$ строки с номерами n и $2n$ одинаковы, матрица вырожденная.

Заметим, что при $N=2$ из линейности и инволютивности функции $f(x)$ имеем $f(x)=\pm x$ $(x\in\mathbb{Z}_p)$, противоречие условию. Теорема 1 полностью доказана.

4 Подгруппа $Q_8 \rightthreetimes \mathbb{Z}_3$

Решая задачу о существовании в группе автотопизмов подгруппы, изоморфной $SL(2,5)$, мы должны далее, опираясь на полученные результаты, предположить существование автотопизма порядка 3, переставляющего циклические подгруппы $\langle\alpha\rangle$, $\langle\beta\rangle$, $\langle\alpha\beta\rangle$ в группе H. Если $\sigma\in N_\Lambda(H)$ – такой автотопизм порядка 3, что $\sigma^{-1}\alpha\sigma=\beta$, то возможны варианты:

1) $\sigma^{-1}\beta\sigma=\alpha\beta$, $\sigma^{-1}\alpha\beta\sigma=\alpha$;

2) $\sigma^{-1}\beta\sigma=\beta\alpha$, $\sigma^{-1}\beta\alpha\sigma=\alpha$.

Очевидно, если коллинеация σ удовлетворяет условиям 1, то $\alpha\sigma$ удовлетворяет 2, и наоборот. Поэтому далее, без ограничения общности, рассмотрим матрицу $\sigma=\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ при условии 1. Из этого условия получим $C=\begin{pmatrix} C_1 & iC_1 \\ C_1 & -iC_1 \end{pmatrix}$ и $D=\begin{pmatrix} D_1 & iD_1 \\ D_1 & -iD_1 \end{pmatrix}$, где $C_1^3=D_1^3=\frac{1-i}{4}E$. Поскольку σ – коллинеация, то для всех $\theta(V,U)\in R$ верно $C^{-1}\theta(V,U)D\in R$. Рассмотрим сначала $V=0$:

$$C^2\theta(0,U)D = m_1\begin{pmatrix} C_1^{-1}(m(U)+U)D_1 & 0 \\ 0 & C_1^{-1}(m(U)+U)D_1 \end{pmatrix} +$$

$$+m_2\begin{pmatrix} 0 & -C_1^{-1}(m(U)-U)D_1 \\ C_1^{-1}(m(U)-U)D_1 & 0 \end{pmatrix} = m_1T_1+m_2T_2\in R,$$

значения скаляров $m_1,m_2\in\mathbb{Z}_p$ не уточняем. Далее в качестве $U\in K$ достаточно рассматривать элементы собственных подпространств K_+ и K_-. Пусть $U\in K_+$, тогда $m(U)=U$, $T_2=0$, отсюда $C_1^{-1}UD_1\in K_+$ для всех $U\in K_+$. Пусть $U\in K_-$, тогда $m(U)=-U$, $T_1=0$, поэтому $C_1^{-1}UD_1\in Q_-$ для всех $U\in K_-$. Поскольку отображение $U\to C_1^{-1}UD_1$ является инъективным, то подпространства Q_- и K_- имеют одинаковую размерность над $\mathbb{Z}_p$, также $\dim Q_+=\dim K_+$.

Пусть теперь $U=0$, тогда, рассуждая аналогично, имеем $C_1^{-1}VD_1\in K_-$ для всех $V\in Q_+$, $C_1^{-1}VD_1\in Q_+$ для всех $V\in Q_-$. Проведенные вычисления доказывают лемму.

Лемма 4. *Пусть полуполевая плоскость π порядка p^N ($p>2$ – простое, $p-1$ делится на 4) допускает подгруппу автотопизмов $H\simeq Q_8$, причем нормализатор H в группе автотопизмов Λ содержит элемент σ порядка 3, $\sigma^{-1}\alpha\sigma=\beta$. Тогда N делится на 4, подпространства K_+, K_- (4), Q_+, Q_- (5) имеют одинаковую размерность $N/4$.*

Лемма 5. *Пусть полуполевая плоскость π порядка p^4 ($p>2$ – простое, $p-1$ делится на 4) допускает подгруппу автотопизмов $H\simeq Q_8$. Тогда $N_\Lambda(H)\setminus C_\Lambda(H)$ не содержит элементов порядка 3.*

Доказательство. Так как $N=4$, то $|K|=|Q|=p^2$, K и Q – поля в $GL_2(p)\cup\{0\}$, подпространства K_+, K_-, Q_+, Q_- одномерны и $K_+=\{kE\mid k\in\mathbb{Z}_p\}$ – множество скалярных матриц.

Рассмотрим равенство $C_1^3=D_1^3=\frac{1-i}{4}E$ и перепишем $C_1=\frac{-1-i}{2}C_0$, $D_1=\frac{-1-i}{2}D_0$, тогда $C_0^3=D_0^3=E$. Из условия $C_0^{-1}K_+D_0=K_+$ получим $C_0^{-1}ED_0=kE$, т.е. $D_0=kC_0$, далее можно рассматривать условия

$$C_0^{-1}K_+C_0=K_+,\quad C_0^{-1}K_-C_0=Q_-,\quad C_0^{-1}Q_-C_0=Q_+,\quad C_0^{-1}Q_+C_0=K_-$$

и отображение $\varphi:U\to C_0^{-1}UC_0$. Очевидно, $K_+\oplus Q_-=Q$, поэтому $K^\varphi=Q$. Далее, $Q^\varphi=Q$, отсюда $Q=K$, $\varphi\in Aut\,K$. Так как $|Aut\ K|=2$ и $\varphi^3=\varepsilon$, то φ тождественно, что противоречит условию $Q_-^\varphi=Q_+$, лемма доказана.

В качестве следствия, с учетом [1], получаем теорему 2.

5 Построение примеров

Построим примеры полуполевых плоскостей порядка p^4, допускающих подгруппу автотопизмов $H\simeq Q_8$. Для $N=4$ регулярное множество образовано матрицами (1), где Q и K – поля порядка p^2 в $GL_2(p)\cup\{0\}$. Дальнейшие вычисления будем проводить для случаев $p=5$ и $p=13$. Без потери общности можно считать, что

$$\theta(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} m_2z+t & 2m_1z & f_2x+f_4y & 2f_1x+2f_3y\\ m_1z & m_2z+t & f_1x+f_3y & f_2x+f_4y\\ y & 2x & t & 2z\\ x & y & z & t\end{pmatrix},\quad x,y,z,t\in\mathbb{Z}_p,$$

где m_1,m_2,f_1,f_2,f_3,f_4 – фиксированные коэффициенты из $\mathbb{Z}_p$. Эти коэффициенты выбираются из условий невырожденности каждой ненулевой матрицы $\theta(x,y,z,t)$ и инволютивности m и f. Компьютерные вычисления приводят к следующему результату: существует 36 наборов коэффициентов для $p=5$, и 396 наборов для $p=13$.

Решая вопрос о разбиении множества построенных плоскостей на классы изоморфизма, определим вид матриц перехода $\delta=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ к новому базису 8-мерного линейного пространства, сохраняющих подгруппу H. Возможны случаи:

$$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&k_1A_1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&A_1\\k_2A_1&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}A_1&k_1A_1\\k_2A_1&-k_1k_2A_1\end{pmatrix},$$

где $k_1,k_2\in\{1,-1,i,-i\}$, $A_1\in N_{GL_2(p)}(K^*)$, для матрицы B аналогично. Окончательный список неизоморфных плоскостей порядка 13^4 приведен в Табл. 1, где строка коэффициентов $(m_1,m_2,f_1,f_2,f_3,f_4)$ обозначена (m,f). Для порядка 5^4 получено три набора коэффициентов:

$$(4,0,2,1,2,3),\quad (4,0,2,2,1,3)\quad (4,1,2,3,4,3),$$

задающих все попарно неизоморфные плоскости. В случае, когда матрица δ задает переход к исходной плоскости, в качестве дополнительного результата компьютерных вычислений мы получаем нормализатор и централизатор подгруппы H в группе автотопизмов Λ. Итогом всех расчетов служит теорема.

Теорема 3. *1. Существуют ровно три, с точностью до изоморфизма, полуполевых плоскости порядка 5^4, группа автотопизмов Λ которых содержит подгруппу H, изоморфную группе кватернионов Q_8. При этом $C_\Lambda(H)=\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_4$, $|N_\Lambda(H)|=384$.*

2. Существуют ровно 33, с точностью до изоморфизма, полуполевых плоскости порядка 13^4, группа автотопизмов Λ которых содержит подгруппу H, изоморфную группе кватернионов Q_8. При этом $C_\Lambda(H)=\mathbb{Z}_{168}\times\mathbb{Z}_{12}$, $|N_\Lambda(H)|=8064$.

Таблица 1. Наборы коэффициентов при $p=13$

№	(m,f)	№	(m,f)	№	(m,f)
1	(12,0,3, 1, 5,10)	**2**	(12,0,3, 2, 9,10)	**3**	(12,0,3, 3, 6,10)
4	(12,0,3, 4,11,10)	**5**	(12,0,3, 5, 1,10)	**6**	(12,0,3, 6, 3,10)
7	(12,0,4, 1,11, 9)	**8**	(12,0,4, 2,12, 9)	**9**	(12,0,4, 3, 8, 9)
10	(12,0,4, 4, 6, 9)	**11**	(12,0,4, 5,10, 9)	**12**	(12,0,4, 6, 4, 9)
13	(12,0,5, 1, 2, 8)	**14**	(12,0,5, 2, 1, 8)	**15**	(12,0,5, 3, 5, 8)
16	(12,0,5, 4, 7, 8)	**17**	(12,0,5, 5, 3, 8)	**18**	(12,0,5, 6, 9, 8)
19	(12,1,2, 9, 4,11)	**20**	(12,1,3, 4,11,10)	**21**	(12,1,4, 1,11, 9)
22	(12,1,4, 6, 4, 9)	**23**	(12,1,4,11, 1, 9)	**24**	(12,1,5, 2, 1, 8)
25	(12,1,6, 6, 5, 7)	**26**	(12,2,3, 4,11,10)	**27**	(12,2,3, 5, 1,10)
28	(12,2,4, 2,12, 9)	**29**	(12,2,4,11, 1, 9)	**30**	(12,2,5, 1, 2, 8)
31	(12,2,5, 5, 3, 8)	**32**	(12,3,2, 9, 4,11)	**33**	(12,3,3, 6, 3,10)

Полученные результаты о матричном представлении регулярного множества полуполевой плоскости, допускающей Q_8, предполагается далее применить для изучения полуполевых плоскостей, допускающих подгруппу автотопизмов G, изоморфную $SL(2,5)$. Такая группа G имеет шесть силовских 5-подгрупп, в нормализаторе каждой из которых есть элементы четвертого порядка. Без ограничения общности в качестве такого элемента можно будет выбрать, например, автотопизм α.

Автор выражает благодарность профессору Дуракову Б.К. за постановку задачи и консультации.

Список литературы

[1] Кравцова О. В., Дураков Б. К. *Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_5*, Сиб. Мат. Журн., **59** (2), 396-411 (2018).

[2] Hughes D. R., Piper F. C. *Projective planes* (Springer–Verlag New–York Inc., 1973).

[3] Johnson N. L., Jha V., and Biliotti M., *Handbook of finite translation planes* (London – New York, 2007).

[4] Курош А. Г., *Лекции по общей алгебре* (Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2007).

[5] Мазуров В. Д., Хухро Е. И. *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач* (Новосибирск, 2006).

[6] Huang H., Johnson N. L. *8 semifield planes of order* 8^2, Discrete Math. **80** (1), 69–79 (1990).

[7] Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К., Кравцова О. В., Дураков Е. Б. *О полуполевых плоскостях порядка* 16^2, Сиб. Мат. Журн. **37** (3), 616–623 (1996).

[8] Левчук В.М., Панов С.В., Штуккерт П.К. *Вопросы перечисления проективных плоскостей и латинских прямоугольников*, в сб. «Механика и моделирование», Красноярск: СибГАУ, 56–70 (2012).

[9] *O. V. Kravtsova*, On alternating subgroup A_5 in autotopism group of finite semifield plane, Сиб. электрон. матем. изв., **17** (2020), 47–50.

[10] G.E. Moorhouse, *$PSL(2, q)$ as a collineation group of projective planes of small orders*, Geom. Dedicata, **31**, No. 1, 63-88 (1989).

[11] C. Bartolone, T. G. Ostrom, *Translation planes of order q^3 which admit $SL(2, q)$*, Journal of Algebra, **99**, 50-57 (1986).

[12] D.A. Foulser, N.L. Johnson, T.G. Ostrom, *A characterization of the Desarguesian planes of order q^2 by SL(2,q)*, Internat. J. Math. & Math. Sci.Vol., **6**, no. 3, 605-608 (1983).

[13] V. Jha, N.L. Johnson, *The translation planes of order 81 admitting $SL(2, 5)$*, Note di Matematica **24**, no. 2, 59-73 (2005).

[14] A.R. Prince, *A class of two-dimensional translationplanes admitting $SL(2, 5)$*, Note di Matematica **29**, suppl. n. 1, 223-230 (2009).

[15] Кравцова О. В. *Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_4*, Известия вузов. Математика, **9**, 10–25 (2016).