

УДК 539.3

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Н. А. Богульская<sup>1</sup>, И. О. Богульский<sup>1,2</sup>

1. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Россия,
2. Красноярский государственный аграрный университет, 660049, Россия,  
nbogulskaya@sfu-kras.ru, bogul.io@ya.ru

**Реферат.** Предложена модель движения гранулированной среды, в основе которой заложено упругое взаимодействие частиц. При этом каждая частица представляет собой абсолютно твердое тело (диск – в плоском случае, шар – в пространстве) массы  $m$  и радиуса  $r$ , окруженное достаточно тонкой упругой оболочкой. Предложен алгоритм решения сформулированной задачи. На каждом шаге вычисляются силы и моменты сил, возникающие при взаимодействии с соседними частицами. Численно решается задача Коши для полученной системы дифференциальных уравнений. На основе математической модели создан комплекс программ, реализующий имитационные модели поведения сыпучих сред в подвижных сосудах.

Ключевые слова: *гранулированная среда, численные методы, имитационное моделирование.*

## COMPUTER SIMULATION OF MOTION OF AN INHOMOGENEOUS GRANULAR MEDIUM

N.A. Bogulskaya, I.O. Bogulskii

**Abstract.** A model of the motion of a granular medium is proposed, which is based on the elastic interaction of particles. Moreover, each particle is an

absolutely solid body (a disk in the flat case, a ball in space) of mass and radius, surrounded by a sufficiently thin elastic shell. An algorithm for solving the formulated problem is proposed. At each step, the forces and moments of forces arising in the interaction with neighboring particles are calculated. The Cauchy problem for the resulting system of differential equations is numerically solved. Based on the mathematical model, a set of programs has been created that imitates the behavior of granular media in moving containers.

Keywords: *granular medium, numerical methods, simulation modeling.*

**Введение.** Сыпучие материалы повсеместно встречаются в природе, промышленности, повседневной жизни. Несмотря на своё широкое распространение, сыпучие материалы до сих пор являются объектом, изучение которого ещё далеко не закончено, наоборот, оно представляет всё более возрастающий интерес как само по себе, так и в связи с наличием большого количества задач, в которых сыпучая среда является одной из составляющих изучаемой системы.

Сыпучая среда может течь подобно жидкости, может оставаться в покое при наличии напряжений подобно твердому телу, при высокой интенсивности воздействия может вести себя подобно газу. Известно множество подходов к теоретическому описанию отдельных аспектов поведения сыпучей среды с использованием аппарата механики сплошных сред [1]. Так в работе [2] предложено описание движения сыпучей среды в рамках гидродинамической модели с достаточно сложной реологией. В [3]

используются специальные формулировки моделей сыпучих и пористых сред в виде вариационных неравенств для гиперболических операторов с ограничениями, описывающими физически нелинейный процесс перехода материала в пластическое состояние и разное сопротивление сыпучего или пористого материала растяжению и сжатию. Подход к построению модели гранулированной среды, предложенный в [4], наиболее близок к подходу, описанному в настоящей работе. Многообразие исследований в этой области, естественно, не исчерпывается упомянутыми работами. Однако общей теории, способной предсказать изменение поведения сыпучего материала, всё ещё нет.

В этой ситуации компьютерное моделирование, заключающееся в решении динамической задачи и отслеживании траектории каждой отдельной частицы, несомненно, является достаточно эффективным инструментом для исследования поведения сыпучей среды. В предлагаемом методе сложная задача о движении сыпучей среды как целого сводится к множеству простых и хорошо исследованных задач о механическом контакте между отдельными частицами.

Предлагаемый подход требует относительно простых, но очень интенсивных компьютерных вычислений. Это приводит к необходимости применения современных технологий программирования. Поэтому интенсивное развитие метода приходится именно на наши дни, что связано как с достигнутым необходимым уровнем вычислительной техники, так и с развитием методов программирования.

## 1. Математическая модель

Предлагается следующая модель гранулированной среды [5, 6]. Начнем с плоского случая с частицами в виде круглого абсолютно твердого диска определенного диаметра и массы, окруженного тонким упругим ободом. Движение каждой частицы описывается классическими уравнениями движения абсолютно твердого тела, а взаимодействие между гранулами является только сжатием и принимается линейно-упругим. Рассмотрим каждую из частиц и выясним, какие из остальных взаимодействуют с ней в данный момент времени. Вычислим силы и моменты сил, возникающие при взаимодействии с соседними частицами. Численно решим полученную систему дифференциальных уравнений.

Пусть сосуд содержит  $N$  элементов, координаты центров которых  $x_i$ ,  $y_i$ , скорости центров  $u_i$ ,  $v_i$  и угловые скорости  $\omega_i$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, N$  известны.

Вычисление сил начнем с определения элементов, взаимодействующих с  $i$ -м. Вычислим расстояние между центрами элементов  $R_{ij}$  и выберем в качестве «ближайших» те, для которых оно меньше суммы радиусов. Далее работаем только с ними.

Вычислим силу, действующую на  $i$ -й элемент со стороны  $j$ -го.

Так как расстояние  $R_{ij}$  меньше суммы радиусов, возникает упругая сила  $f_{ij}$  (рис. 1), которая по величине равна

$$f_{ij} = (r_i + r_j - R_{ij})c = (r_i + r_j - R_{ij})\frac{mg}{2\varepsilon}, \quad (1)$$

и действует в направлении точки  $O$  по линии  $O'O$ .

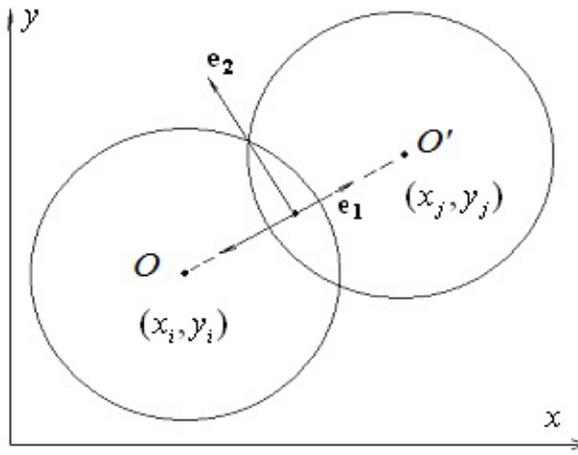


Рисунок 1 – Схема взаимодействия упругих частиц

Следовательно, со стороны  $j$ -го элемента действует сила с компонентами

$$f_x^{ij} = -(r_i + r_j - R_{ij}) \frac{mg(x_j - x_i)}{2\varepsilon R_{ij}}, \quad (2)$$

$$f_y^{ij} = -(r_i + r_j - R_{ij}) \frac{mg(y_j - y_i)}{2\varepsilon R_{ij}}.$$

В процессе движения между элементами возникает сила трения, пропорциональная силе упругого сжатия и направленная против относительной скорости движения точки контакта.

Рассмотрим два элемента с номерами « $i$ » и « $j$ » (рис. 2).

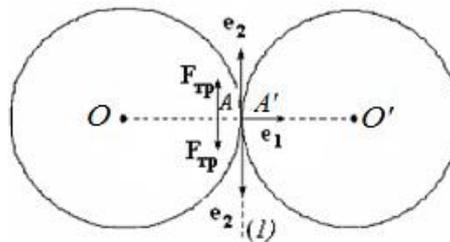


Рисунок 2 – Схема взаимодействия двух элементов с учетом сил трения

Возникающая сила трения  $F_{ij}^{tr}$  по величине равна

$$F_{ij}^{tr} = \nu f_{ij},$$

где  $\nu$  – коэффициент трения скольжения, и направлена либо в направлении вектора  $\mathbf{e}_2$ , либо в противоположном, в зависимости от проекций скоростей точек  $A$  и  $A'$  (см. рис. 2) на линию (1), идущую вдоль вектора  $-\mathbf{e}_2$ .

Проекции скоростей точек  $A$  и  $A'$  есть их скалярные произведения на вектор  $-\mathbf{e}_2$ . Кроме скоростей центров ячеек они содержат  $\omega_i$  и  $\omega_j$  – угловые скорости вращения  $i$ -го и  $j$ -го элементов. Проекция относительной скорости на линию (1) равна  $W$ .

Вводим величину  $(in)_{ij}$ , которая принимает значения  $(in)_{ij} = 1$ , если  $W < 0$  и  $(in)_{ij} = -1$ , если  $W > 0$ .

В этом случае к силам (2) необходимо добавить соответствующие компоненты сил трения:

$$F_x^{ij} = f_x^{ij} + F_{ij}^{tr} e_x (in)_{ij},$$

$$F_y^{ij} = f_y^{ij} + F_{ij}^{tr} e_y (in)_{ij}, \quad (3)$$

$$M_i = -M_i^0 \cdot (in)_{ij}.$$

Полные компоненты силы, действующей на  $i$ -й элемент, получаются суммированием величин (3) по всему окружению, в направлении  $y$  дополнительно учитывается вес « $-m_i g$ ».

Достаточно естественно записывается и взаимодействие элемента со стенками и дном лотка, при условии, что закон движения стенок лотка известен.

Закон Ньютона для  $i$ -го элемента – это система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_i = u_i, \\ m_i \frac{d}{dt} u_i = F_x - \mu u_i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_i = v_i, \\ m_i \frac{d}{dt} v_i = F_y - \mu v_i. \end{cases} \quad (4)$$

$$J_i \frac{d}{dt} \omega_i = M_i$$

$F_x$  и  $F_y$  – действующие на  $i$ -й элемент суммарные силы в направлениях  $x$  и  $y$ ,  $u_i$ ,  $v_i$  – компоненты скорости центра масс в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно,  $M_i$  – момент сил трения,  $J_i$  – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр тяжести, а диссипативные (вязкие) члены  $\mu u_i$  и  $\mu v_i$ , где  $\mu \geq 0$  – коэффициент вязкости, введены искусственным образом для повышения устойчивости решения.

В итоге возникает необходимость решения задачи Коши для системы  $5N$  дифференциальных уравнений первого порядка.

## 2. Численное решение

Задача Коши для системы уравнений (4) решается численно. Вопрос о выборе алгоритма не является тривиальным, что требует пояснения. Дело в том, что даже линейная задача об упругом взаимодействии твердых тел не является асимптотически устойчивой. Спектр оператора перехода в данной задаче вполне может содержать положительные вещественные части. Кроме того, система уравнений является жесткой.

Очевидно, применение методов типа метода Эйлера первого порядка точности исключается. С другой стороны, вычисление сил требует достаточно большого количества операций, поэтому использование многостадийных явных методов [7], существенно выигрывающих по сравнению с «классическими» за счет возможности выбора большого шага по времени, тоже не желательно. Простые оценки показывают, что независимо от выбора метода, специфика задачи приносит существенные ограничения на шаг по времени.

В качестве компромисса используем схему Рунге-Кутты второго порядка точности [8] с выбором срединной точки на первой стадии.

На каждом шаге по времени  $\Delta t$  на первой стадии высчитываются промежуточные величины на шаге  $\Delta t/2$ . По методу Эйлера

$$\begin{aligned}x_i^{n+\frac{1}{2}} &= x_i^n + \frac{\Delta t}{2} u_i^n, \\ u_i^{n+\frac{1}{2}} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{2m_i} (F_x^n - \mu u_i^n),\end{aligned}\tag{5}$$

$$y_i^{n+\frac{1}{2}} = y_i^n + \frac{\Delta t}{2} v_i^n,$$

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^n + \frac{\Delta t}{2m_i} (F_y^n - \mu v_i^n),$$

$$\omega_i^{n+\frac{1}{2}} = \omega_i^n + \frac{\Delta t}{2J_i} M_i^n.$$

На второй стадии выполняется переход на следующий шаг по времени

$$\Delta t: \quad x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t u_i^{n+\frac{1}{2}},$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{m_i} \left( F_x^{n+\frac{1}{2}} - \mu u_i^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (6)$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \Delta t v_i^{n+\frac{1}{2}},$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\Delta t}{m_i} \left( F_y^{n+\frac{1}{2}} - \mu v_i^{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n + \frac{\Delta t}{J_i} M_i^{n+\frac{1}{2}},$$

где  $F_x^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $F_y^{n+\frac{1}{2}}$ , ... – силы, вычисленные для значений  $x_i^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $y_i^{n+\frac{1}{2}}$ , ...

Начальные координаты центров можно выбрать достаточно произвольно. Начальные скорости и угловые скорости, как правило, принимаются нулевыми. Когда сосуд приходит в движение, элементы среды за несколько шагов по времени «плотно упаковываются».

На основе математической модели создан комплекс программ, реализующий имитационные модели поведения сыпучих сред в подвижных сосудах. Для программирования была выбрана среда Delphi6. Имитационная модель предполагает графическую иллюстрацию поведения объекта.

Библиотека Visual Component Library среды Delphi6 предоставляет для этого широкие возможности. Они могут быть расширены за счет распараллеливания процесса вычисления [9].

### 3. Результаты численных экспериментов

На рисунке 3 приведено численное решение задачи для достаточно удалённого от начального момента времени, когда система уже «достаточно плотно упакована». Здесь рассмотрено 2 400 элементов в подвижном лотке и около 100 в бункере в начальный момент времени. В дне лотка имеется три отверстия размером три диаметра элемента, через которые происходит высыпание частиц.

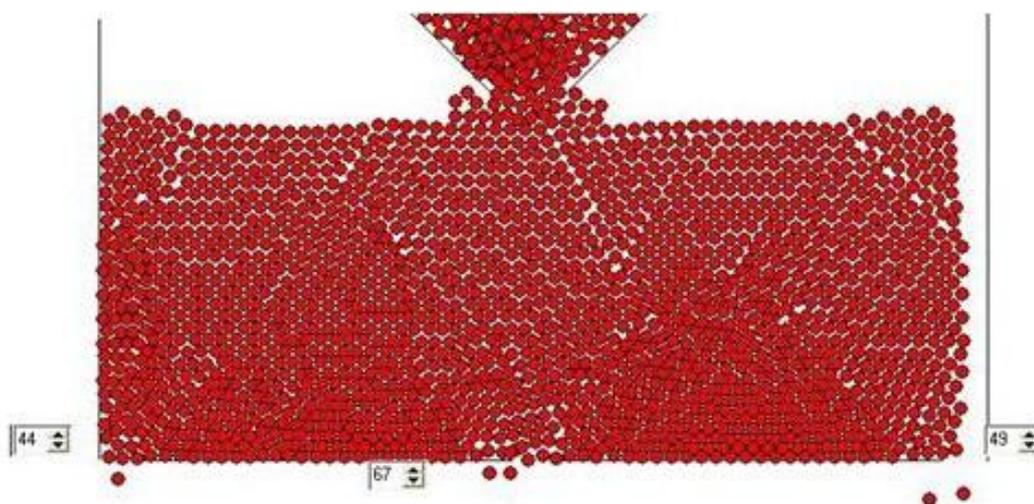


Рисунок 3 – Результат работы программы

На рисунке 4 представлен результат работы программы для конструкции с пятью отверстиями в лотке.

В численном эксперименте длина лотка принята 50 см, диаметр частиц – 0,8 см. Величина  $\varepsilon$  составляет 0,01 радиуса. Частота горизонтальных

гармонических колебаний лотка – 9 Гц, амплитуда – 1 см, шаг по времени – 0,002 сек. Около отверстий расположены счётчики выпавших частиц.

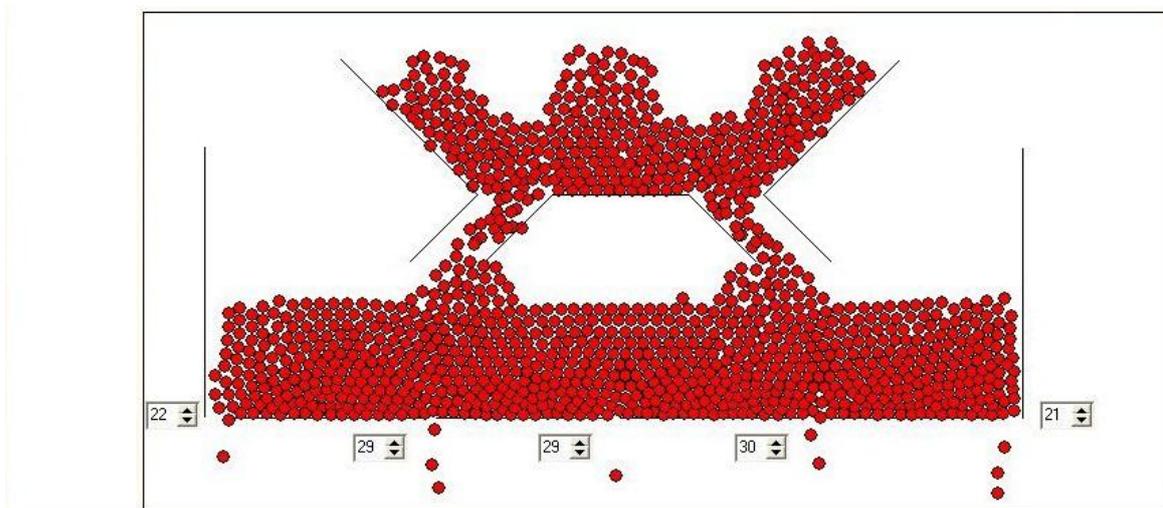


Рисунок 4 – Результат работы программы для варианта конструкции с бункером с двумя выходами

#### 4. Обобщение базовой модели

Реализация предложенного подхода для диска и шара достаточно прозрачна. Во многих реальных задачах гранулы имеют неправильную форму. Возникают существенные сложности и во много раз увеличиваются вычислительные затраты при вычислении упругих сил взаимодействия и, тем более, сил трения.

Предлагается (рис. 5) представлять гранулы неправильной формы в виде ансамблей шаров, жестко соединенных в конструкцию, не меняющую форму. При этом взаимодействие между гранулами – это взаимодействие между отдельными шарами. Описать движение гранулы – это описать движение ее центра масс и углов поворота ее вокруг этого центра масс.

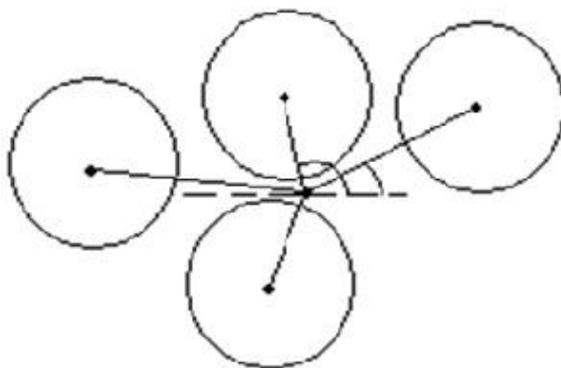


Рисунок 5 – Гранула – ансамбль шаров

На рис. 6 приведен результат вычислительного эксперимента, в котором рассматривался упрощенный вариант удлиненного тела – «диполь»: каждая гранула представлялась в виде двух шаров, жестко соединенных стержнем.

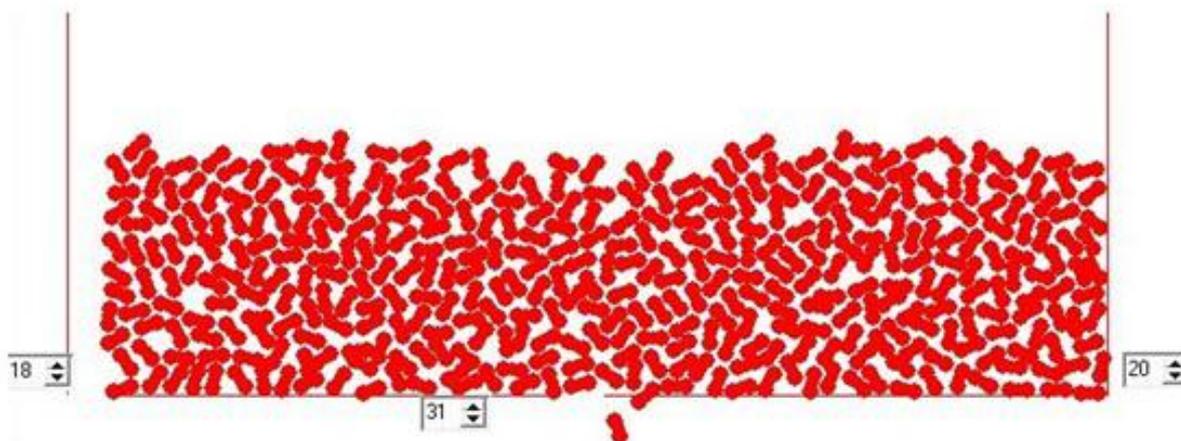


Рисунок 6 – Движение среды из диполей

## **5. Поведение сыпучей среды с различными значениями физических параметров гранул**

На рисунке 7 показан снимок состояния сыпучей среды с гранулами, имеющими различные размеры и массу. Можно отметить, что в этом случае

среда в результате вибрации более плотно «упаковывается», и замедляется процесс истечения гранул через отверстия в дне лотка.

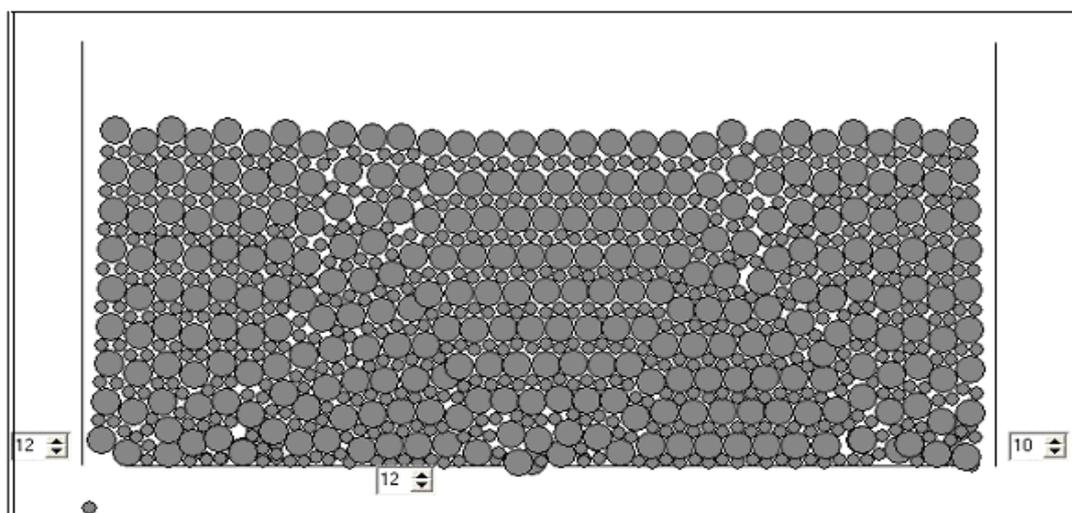


Рисунок 7 – Состояние сыпучей среды с гранулами, различными по размеру и массе

### Заключение

Вычислительный эксперимент показал состоятельность предложенной модели движения гранулированной среды, в основе которой заложено упругое взаимодействие частиц. Результаты хорошо согласуются с натурными экспериментами, проведенными на универсальных высевающих устройствах вибрационного типа [10].

### Литература

1. P.Y. Lagree, Staron L., Popinet S. The granular column collapse as a continuum: validity of two-dimensional Navier–Stokes model with a  $\mu(I)$ -rheology // J. Fluid Mech. 2011. V. 686. P. 378–408.

2. Шваб А.В., Марченко М.С. Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2011. №3(15). С.108–116.

3. Sadovskaya O., Sadovskii V. Mathematical modeling in mechanics of granular materials / O. Sadovskaya, V. Sadovskii. Ser.: Advanced Structured Materials, V. 21. Springer: Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2012.

4. Микуляк С.В. Особенности распространения нелинейных волн в слое гранулированной среды // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 10, №2. С.74–83.

5. Богульский И.О., Богульская Н.А. Численное моделирование движения гранулированной среды в подвижных сосудах // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, №2. С. 27–34.

6. Богульская Н.А., Богульский И.О. Моделирование движения неоднородной гранулированной среды с гранулами неправильной формы // Вестник КрасГАУ. 2012. №11(74). С. 41–49.

7. Новиков Е.А. Явные методы для жёстких систем / Е.А. Новиков. – Новосибирск: Наука, 1997.

8. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. М.: Наука, 1978.

9. Богульский И.О., Богульская Н.А. Решение задачи моделирования движения гранулированной среды на основе распараллеливания // Распределенные и кластерные вычисления: Тезисы докладов 7-й межрегиональной школы-семинара. Красноярск. 2010. С. 8.

10. Вишняков А.С. Вибрационный высев семян сельскохозяйственных культур / А.С. Вишняков, А.А. Вишняков, И.О. Богульский, В.А. Козлов. Красноярск: Краснояр.гос.аграр.ун-т, 2017.