ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2020, № 2, с. 1–6

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.85

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛОГА ФОРМУЛЫ БИНЕ

© 2020 г.
В. И. Кузоватов[a], **А. А. Кытманов**[a], **О. И. Кузоватова**[a]
[a] *Сибирский федеральный университет,*
660041 Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: kuzovatov@yandex.ru, aakytm@gmail.com, oik17@yandex.ru
Поступила в редакцию 31.08.2019

Приведен алгоритм построения аналога формулы Бине, которая используется при нахождении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана. Алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры Maple. Приведен пример, демонстрирующий работу данного алгоритма.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных инструментов, открывших путь к созданию алгоритмических методов исследования и решения систем алгебраических уравнений, явилось понятие базиса Гребнера идеала кольца многочленов, занимающее одно из центральных мест в современной компьютерной алгебре (см., например, [1]). Классические схемы исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений, основанные на методе базисов Гребнера, реализованы во многих существующих системах компьютерной алгебры. Однако, такие методы неприменимы для исследования систем существенно неалгебраических уравнений (т.е. уравнений, не сводящихся к алгебраическим заменами переменных).

Вместе с тем, неалгебраические системы уравнений возникают в различных областях знания. В частности, в процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с правыми частями, разложимыми в ряд Тейлора, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в различных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы. В частности, в монографии [2] приведены многочисленные примеры из химической кинетики, где требуются алгоритмы исключения неизвестных. Здесь важно применение разработанных методов для качественного и численного анализа математических моделей термокинетики процессов горения и катализа с целью получения условий воспламенения, взрыва и критических явлений в химически реагирующих системах. Для приложений, в том числе, например, для уравнений химической кинетики, важной задачей является исследование зависимостей решений систем нелинейных, в том числе и неалгебраических, уравнений от параметров. В вычислительном плане эта задача является достаточно трудоемкой. Ее степень сложности сильно зависит от размерности пространства неизвестных. Поэтому снижение этой размерности за счет исключения переменных может привести к упрощению исходной задачи.

Метод исключения неизвестных из систем нелинейных алгебраических уравнений, основанный на теории многомерных вычетов, был предложен Л.А. Айзенбергом в [3] в 1977 г. Дальнейшие модификации метода были предложены А.П. Южаковым, А.К. Цихом, В.И. Быковым, А.М. Кытмановым, М.З. Лазманом в конце прошлого века [2]. Эти идеи были в последствии развиты в работах [4, 5, 6]. Алгоритмический метод (разработанный на основе идей Л.А. Айзенберга и А.П. Южакова) был предложен М. Елкади и А. Ижером в работе [7]. Идея метода заключалась в нахождении определенных вычетных интегралов, связанных со степенными суммами корней (в положительных степенях) заданной системы уравнений, избегая нахождения самих корней и применяя затем к ним рекуррентные формулы Ньютона. По сравнению с классическим методом, данный метод сокращал время работы алгоритма, не повышая при этом кратность корней.

Еще одним методом исключения неизвестных служит построение результанта двух целых функций. Хорошо известен классический результант Сильвестра для двух многочленов и метод исключения неизвестных, на нем основанный. Для неалгебраических функций такое понятие не было изучено ранее. Лишь в последние года в работах [8, 9] обсуждается один подход к нахождению результанта двух целых функций, основанный на рекуррентных формулах Ньютона.

В работе [10] В.И. Кузоватовым и А.А. Кытмановым была предложена программная реализация алгоритма построения семейства аналогов формулы Плана (см., например, пример 7 главы 7 из [11]), впервые полученных В.И. Кузоватовым и А.М. Кытмановым в работе [12] при некоторых ограничениях. В работе [13] В.И. Кузоватовым эти ограничения были сняты.

Среди физических приложений классической формулы Плана и некоторых ее обобщений можно отметить их использование в теории квантованных полей для перенормировки тензора энергии импульса скалярного поля в различных фридмановских моделях Вселенной, а также при вычислении вакуумного среднего тензора энергии импульса квантованных полей в различных полных и неполных многообразиях (эффект Казимира). Подробное изложение этих вопросов можно найти в [14].

Целью данной работы является разработка и программная реализация алгоритма построения семейства аналогов формулы Бине (см., например, глава 12, п. 12.32 из [11]), полученных В.И. Кузоватовым и А.М. Кытмановым в работе [15]. Данный алгоритм будет использоваться для алгоритмизации и программной реализации функциональных соотношений на многомерные аналоги дзета-функции Римана, которые являются важным инструментом в создании методов исключения неизвестных из систем нелинейных уравнений, как было показано в работе [16].

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА БИНЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Классическая формула Бине (см., например, глава 12, п. 12.32 из [11]) выражает значение логарифмической производной гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$ (в случае, если вещественная часть z положительна) через следующие интегралы:

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \ln z - 2\int\limits_0^\infty \frac{t\,dt}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)}.$$

Данное интегральное представление используется при нахождении функционального соотношения (см., например, глава 2, п. 9 из [17]) для классической дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Рассмотрим для вещественных x:

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x = = -2\int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\left(\frac{1}{e^{2\pi t}-1} - \frac{1}{2\pi t}\right) dt.$$

Подставляя найденное соотношение в интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и меняя порядок интегрирования, можно получить функциональное соотношение (см., например, глава 2, п. 9 из [17]) для классической дзета-функции Римана.

Напомним (см., например, глава 2, п. 9 из [17]), что интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в полосе $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ имеет вид:

$$\zeta(s) = -\frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x\right) x^{-s}\,dx.$$

Если говорить об обобщениях дзета-функции, то И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан и Л.А. Дикий изучали (см., например, работы [18, 19, 20]) дзета-функцию, ассоциированную с собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля в 50-х годах прошлого века. Ее значение оказалось связанным со следом данного оператора. Их подход был развит [21] далее В.Б. Лидским и В.А. Садовничим (60 годы), которые рассмотрели класс целых функций одного переменного, определили для них дзета-функцию корней и исследовали ее область аналитического продолжения. В работе [22] С.А. Смагин и М.А. Шубин строят дзета-функцию эллиптических операторов и операторов более общего вида, доказывают возможность мероморфного продолжения дзета-функции и дают некоторую информацию о полюсах.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка роста ρ в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (1) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Число корней не более чем счетно.

Дзета-функция $\zeta_f(s)$ корней z_n уравнения (1) определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{z_n \in N_f} (-z_n)^{-s},$$

где $s \in \mathbb{C}$.

В работе [23] В.И. Кузоватовым и А.А. Кытмановым с использованием теории вычетов получены два интегральных представления для дзета-функции, построенной по нулям целой функции конечного порядка роста на комплексной плоскости. С помощью этих представлений описана область, в которую эта дзета-функция продолжается.

Будем предполагать, что $z_n = -q_n$, $q_n > 0$, где q_n образуют некоторую последовательность натуральных чисел.

Рассмотрим функцию $(z = x + iy)$

$$F(f, 2\pi iz) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n 2\pi iz} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi iz}. \tag{2}$$

С помощью замены $e^{-2\pi iz} = w$ ряд (2) приводится к виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w^{q_n}$, то есть

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w^n, \tag{3}$$

где коэффициенты f_n определяются следующим образом:

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = q_k; \\ 0, & n \neq q_k, \end{cases}$$

и, следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|} = 1$.

Заметим, что в ряде (3) бесконечное число коэффициентов f_n отлично от нуля.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением классов рациональных функций $G(w)$, для которых справедливо представление (3). Как показывает теорема Сеге (см., например, [24, §6.1]), степенной ряд (3), коэффициенты которого f_n могут принимать лишь конечное число различных значений, или представляет собой рациональную функцию, или непродолжаем за пределы единичного круга. В случае рациональности суммы ряда (3)

$$G(w) = \frac{P(w)}{1 - w^N},$$

где $P(w)$ — многочлен, а N — некоторое натуральное число.

Предположим, что $\deg P(w) = N$, то есть

$$P(w) = a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + a_{N-1} w^{N-1} + w^N, \tag{4}$$

где коэффициенты $a_j \in \{0, 1\}$ ввиду разложения (3), $j = 1, \ldots, N-1$. Коэффициенты a_j зависят от распределения $\{q_n\}$.

Приведем явное выражение функции $F(f, 2\pi iz)$ через функцию $G(w)$. Будем иметь

$$F(f, 2\pi iz) = \frac{P\left(e^{-2\pi iz}\right)}{1 - e^{-2\pi izN}}.$$

Заметим, что функции $F(f, 2\pi y)$ и $1 + F(f, -2\pi y)$, входящие в правую часть формулы (5), определяются [10] следующим образом $\left(t = e^{2\pi y}\right)$:

$$F(f, 2\pi y) = -\frac{a_1 t^{N-1} + a_2 t^{N-2} + \ldots + a_{N-1} t + 1}{1 - t^N},$$

$$1 + F(f, -2\pi y) = \frac{1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{N-1} t^{N-1}}{1 - t^N}.$$

Для сокращения записи обозначим

$$W(x, y) = \varphi(x - iy) F(f, 2\pi y) + \\ + \varphi(x + iy)\left[1 + F(f, -2\pi y)\right].$$

Теорема 1 (аналог формулы Бине, [15]). *Справедливо равенство*

$$\frac{P(1)}{N}\sum_{n}\frac{1}{(z+q_n)^2}=\frac{P(1)}{N}\left(\frac{1}{2}\varphi(x_2)-\frac{1}{2}\varphi(0)\right)+ \\ +\int\limits_0^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int\limits_0^{\infty}W(0,y)\,dy-\frac{1}{i}\int\limits_0^{\infty}W(x_2,y)\,dy, \tag{5}$$

где суммирование берется по всем точкам q_n, *лежащим в отрезке* $[1;x_2]$, x_2 *– целое положительное число, полином* $P(w)$ *определен формулой* (4).

Здесь

$$\varphi(\zeta)=\frac{Q_1(\zeta)\,Q_2(\zeta)\,e^{\zeta^2}}{(z+\zeta)^2},$$

$$Q_1(\zeta)=\prod_{j\in J}\left(1-\frac{\zeta}{\alpha_j}\right)e^{\frac{\zeta}{\alpha_j}},\quad \alpha_j=\frac{j}{N},$$

$$Q_2(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Q_1(q_n)\,e^{q_n^2}}\cdot\frac{\psi(\zeta)}{\psi'(q_n)(\zeta-q_n)},$$

$$\psi(\zeta)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{q_n}\right),$$

$$J=\{j:\,j=1,2,\ldots,\,j\neq mN,\,m\in\{q_n\}\}.$$

Если говорить о методах исследования, то локальные вычеты обобщают обычный вычет Коши функции одного переменного, и их вычисление в наиболее важных для приложений случаях является конструктивной процедурой, которую несложно реализовать с помощью символьных вычислений на компьютере. Интегралы, выражаемые через локальные вычеты, появляются в различных прикладных задачах. В монографии [25] подробно обсуждается применение многомерных вычетов и, в частности, дается решение задачи о вычислении ошибки квантования двумерных рекурсивных цифровых фильтров. Для современной теоретической физики одним из важных классов интегралов являются кратные интегралы Меллина-Барнса, которые изучаются с помощью локальных вычетов. Еще одно направление исследований, в котором используются интегралы, выражающиеся через локальные вычеты, связано с изучением достаточных условий алгебраичности интегралов, зависящих от параметра. Данные методы могут быть использованы в теории формальных языков и грамматик [26].

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм 1: Алгоритм построения семейства аналогов формулы Бине.

Input: Список коэффициентов $a_j\in\{0,1\}$, $j=1,\ldots,N-1$; целое положительное число x_2.

Output: Список, состоящий из левой и правой частей формулы (5).

begin

$P(w):=a_1w+\ldots+a_{N-1}w^{N-1}+w^N$

$G(w):=\dfrac{P(w)}{1-w^N}$

$Q:=\{1\cdot a_1,2\cdot a_2,\ldots,(N-1)\cdot a_{(N-1)},N,(N+1)\cdot a_1,(N+2)\cdot a_2,\ldots,x_2\cdot a_{x_2}\}$

$Q:=$ список ненулевых элементов из Q

$J:=\{1,\ldots,x_2\cdot N\}\setminus\{Q\cdot N\}$

$A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_J):=J/N$

$Q_1(\zeta)=\prod_{j\in J}\left(1-\dfrac{\zeta}{\alpha_j}\right)e^{\frac{\zeta}{\alpha_j}}$

$\psi(\zeta)=\prod_{q_n\in Q}\left(1-\dfrac{\zeta}{q_n}\right)$

$Q_2(\zeta)=\sum_{q_n\in Q}\dfrac{1}{Q_1(q_n)\,e^{q_n^2}}\cdot\dfrac{\psi(\zeta)}{\psi'(q_n)(\zeta-q_n)}$

$\varphi(\zeta)=\dfrac{Q_1(\zeta)\,Q_2(\zeta)\,e^{\zeta^2}}{(z+\zeta)^2}$

$L:=\dfrac{P(1)}{N}\sum_{q_n\in Q}\dfrac{1}{(z+q_n)^2}$

$R:=\dfrac{P(1)}{N}\left(-\dfrac{1}{2}\varphi(0)+\dfrac{1}{2}\varphi(x_2)\right)+\int_0^{x_2}\varphi(z)\,dz+\dfrac{1}{i}\int_0^{\infty}\Big(\varphi(-iy)G(e^{-2\pi y})+\varphi(iy)\big[1+G(e^{2\pi y})\big]\Big)\,dy-\dfrac{1}{i}\int_0^{\infty}\Big(\varphi(x_2-iy)G(e^{-2\pi y})+\varphi(x_2+iy)\big[1+G(e^{2\pi y})\big]\Big)\,dy$

return $\{L,R\}$

5. ПРИМЕР

Алгоритм был реализован в среде Maple 2016 64bit. Полный код программы доступен по адресу `https://github.com/aakytmanov/Binet_formula`. Вычисления производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 7 Enterprise x64 SP1. Время счета для приведенного примера составило менее 0.1 секунды.

Пример 1. Пусть $q_n = \{1,2\}$, $x_2 = 2$. Тогда $N = 2$, $\alpha_j = \{1/2, 3/2\}$, $P(w) = w + w^2$,

$$F(f, 2\pi y) = \frac{1}{e^{2\pi y} - 1},\ 1 + F(f, -2\pi y) = \frac{1}{1 - e^{2\pi y}},$$

$$Q_1(\zeta) = (1 - 2\zeta)\left(1 - \frac{2}{3}\zeta\right) e^{8\zeta/3},$$

$$\psi(\zeta) = (1 - \zeta)\left(1 - \frac{\zeta}{2}\right), \quad \psi'(\zeta) = -\frac{3}{2} + \zeta,$$

$$Q_2(\zeta) = \frac{1}{Q_1(1)\, e} \cdot \frac{\psi(\zeta)}{\psi'(1)(\zeta - 1)} + \\ + \frac{1}{Q_1(2)\, e^4} \cdot \frac{\psi(\zeta)}{\psi'(2)(\zeta - 2)} = \\ = \frac{-3}{e^{11/3}} \cdot \frac{\psi(\zeta)}{\left(-\frac{1}{2}\right)(\zeta - 1)} + \frac{1}{e^{28/3}} \cdot \frac{\psi(\zeta)}{\frac{1}{2}(\zeta - 2)} = \\ = \frac{6\psi(\zeta)}{e^{11/3}(\zeta - 1)} + \frac{2\psi(\zeta)}{e^{28/3}(\zeta - 2)} = \\ = 3\zeta e^{-11/3} - 6e^{-11/3} + \zeta e^{-28/3} - e^{-28/3}.$$

Таким образом,

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{3} \frac{e^{\zeta^2} e^{8\zeta/3} (2\zeta - 1)(2\zeta - 3)}{(z + \zeta)^2} \times \\ \times \left(3\zeta e^{-11/3} - 6e^{-11/3} + \zeta e^{-28/3} - e^{-28/3}\right) \tag{6}$$

и (5) принимает вид

$$\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{2}\Big(\varphi(2) - \varphi(0)\Big) + \\ + \int_0^2 \varphi(z)\, dz + \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{\varphi(-iy) - \varphi(iy)}{e^{2\pi y} - 1}\, dy - \\ - \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{\varphi(2 - iy) - \varphi(2 + iy)}{e^{2\pi y} - 1}\, dy,$$

где функция $\varphi(\zeta)$ в данном случае определена формулой (6).

Входными данными алгоритма в этом случае будут список коэффициентов a_j, состоящий из [1], некоторое заданное положительное целое число $x_2 = 2$ и построенная функция $\varphi(z)$, например:

```
> Binet([1], 2, z->varphi(z), Phi);
```

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке следующих фондов: второй автор использовал поддержку гранта РНФ 18-71-10007 (разработка и программная реализация алгоритма); первый и третий авторы поддержаны грантом РФФИ 18-31-00019 (постановка технического задания для разработки алгоритма, тестирование, вычисление примеров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *von zur Gathen J., Gerhard J.* Modern Computer Algebra (3rd edition), Cambridge University Press, 2013.

2. *Bykov V. I., Kytmanov A. M., Lazman M. Z.* Elimination methods in polynomial computer algebra, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-Basel, 1998.

3. *Айзенберг Л. А.* Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР, 1977, Т. 234, No 3, С. 505–508.

4. *Кытманов А. А.* Об аналогах рекуррентных формул Ньютона // Изв. вузов. Математика, 2009, No 10, С. 40–50.

5. *Кытманов А. А.* Алгоритм вычисления степенных сумм корней для класса систем нелинейных уравнений // Программирование, 2010, Т. 36, No 2, С. 55–63.

6. *Kytmanov, A.A., Kytmanov, A.M., Myshkina, E.K.* Finding Residue Integrals for Systems of Non-algebraic Equations in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Symbolic Computation, 2015, V. 66, P. 98–110.

7. *Elkadi M., Yger A.* Residue calculus and applications // Publ. Res. Inst. Math. Sci., 2007, V. 43, No 1, P. 55–73.

8. *Kytmanov A. M., Naprienko Y. M.* An approach to define the resultant of two entire functions // Journal Complex Variables and Elliptic Equations, 2017, V. 62, No 2, P. 269–286.

9. *Kytmanov A. M., Myshkina E. K.* On Some Approach for Finding the Resultant of Two Entire Functions // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., 2019, V. 12, No 4, P. 434–438.

10. *Кузоватов В. И., Кытманов А. А.* Алгоритм построения аналога формулы Плана // Программирование, 2018, No 2, C. 35–41.

11. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

12. *Kuzovatov V. I., Kytmanov A. M.* On an Analog of the Plan's Formula // Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2018, V. 53, No 3, P. 139–146.

13. *Кузоватов В. И.* Об одном обобщении формулы Плана // Известия вузов. Математика, 2018, No 5, C. 41–51.

14. *Саарян А. А.* К формуле суммирования Абеля-Плана // Изв. АН Армянской ССР. Физика, 1986, Т. 21, No 5, C. 262–265.

15. *Кузоватов В. И., Кытманов А. М.* Об одном аналоге интегрального представления Бине // Сибирские Электронные Математические Известия, 2019, Т. 16.

16. *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations // Siberian Math. J., 2007, V. 48, No 5, P. 863–870.

17. *Titchmarsh E. C.* The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, Oxford, 1951.

18. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Доклады Ак. наук СССР, 1953, Т. 88, No 4, C. 593–596.

19. *Дикий Л. А.* Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1955, Т. 19, No 4, C. 5187–200.

20. *Дикий Л. А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля // УМН, 1958, Т. 13, No 3, C. 111–143.

21. *Lidskii V. B., Sadovnichii V. A.* Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions // Functional Analysis and Its Applications, 1967, V. 1, No 2, P. 133–139.

22. *Smagin S. A., Shubin M. A.* On the Zeta-Function of a Transversally Elliptic Operator // Russian Mathematical Surveys, 1984, V. 39, No 2, P. 201–202.

23. *Kuzovatov V. I., Kytmanov A. A.* On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., 2014, V. 7, No 4, P. 489–499.

24. *Bieberbach L.* Analytische Fortsetzung, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

25. *Tsikh A. K.* Multidimensional residues and their applications, AMS, Providence, 1992.

26. *Egorushkin O. I., Kolbasina I. V., Safonov K. V.* On application of multidimensional complex analysis in formal language and grammar theory // Applied Discrete Mathematics, 2017, V. 37, P. 76–89.