Мультиагентные Временные Нетранзитивные Линейные Логики, Проблема Допустимости

В.В.Рыбаков
Институт Математики и Информатики, Сибирский Федеральный Университет, Свободный 79, Красноярск 660 041, и
Институт Систем Информатики РАН, Новосибирск
Vladimir_Rybakov@mail.ru
Supported by RFBR and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, research project 18-41-240005

УДК 510.64,510.65,510.66

Аннотация. Мы изучаем расширение временной логики – мультиагентную логику на моделях с нетранзитивным линейным временем (в некотором смысле расширение интервальной логики). Предлагаемые реляционные модели допускают пробелы в отношениях достижимости агентов - и эти отношения в принципе различны – то есть информация достижимая для одного из агентов может быть недостижима для других. Логический язык использует временные операторы UNTIL и Next (для каждого из агентов), через которые могут вводится модальные операции возможно и необходимо. Главная изучаемая проблема для вводимой логики это проблема распознавания допустимости правил вывода. Ранее эта проблема исследовалась нами для логики с равномерной фиксированной длинной интервалов транзитивности. Данная работа не предполагает равномерной длины и расширяет логику индивидуальными временными операторами для различных агентов. Находится алгоритм решающий проблему допустимости в данной логике – а именно – распознающий допустимые правила вывода.

Ключевые слова: временные логики, мультиагентные логики, информация, проблема допустимости правил, разрешающие алгоритмы

1 Введение

Временная логика это раздел современных неклассических логик, в котором строятся модели для анализа высказываний с истинностными значениями, изменяющимися во времени. Возникновение временной логики относится к началу 1950-х гг, к работам А. Н. Прайора. С тех пор временная логика была (и остается) активной областью в математической логике и информатике, работах по искусственному интеллекту. (см. – Gabbay, Hodkinson [1, 2, 3]). Один важный частный случай таких логик - линейная временная логика LTL, которая в частности была использована в анализе протоколов вычислений, верификации корректности. Использование математических в информационных науках и компьютер сайенс включает применение техники неклассической логики для анализа корректности и совместимости, достоверности информации.

Например, мультиагентные логики, применяющие модальности интерпретированные через агентные отношения достижимости для верификацию моделей, были использованы для изучения взаимодействия и автономности агентов (см. Woldridge, Lomuscio [4], Woldridge [5, 6], Lomuscio et al [7]), Babenyschev и Rybakov [8, 9, 10, 11], Rybakov [12]).

Моделирование взаимодействия агентов как дуального представления для common knowledge (общего знания, информации) было предложено в Rybakov [12]. Сама концепция common knowledge для агентов была предложена и подробно исследована в Fagin et al [13] используя агентные отношения знания как (S5-подобные) модальности. Свойства интервальных линейных логик изучались например в [14]. Знание (knowledge), как общая концепция, базировалась на многоагентном подходе т.к. индивидуальное знание может порождать общее знание только через взаимодействие агентов, изучение. Подобное моделирование в терминах символьной математической логики может быть отнесено к концу 1950-х годов. Hintikka (в 1962) написал книгу: *Knowledge and Belief*, вероятно первую работу объема книги, предлагающую использование модальностей для нахождения математической семантики концепции знания. Временная онтология и рассуждения, включающие временные компоненты, были исследованы в van Benthem [15]. Техника формальных автоматов для решения проблемы выполнимости в линейной временной логике была развита в Vardi [16, 17]). Алгоритмические проблемы неклассических логик - например разрешимость, распознаваемость, всегда находятся в центре исследований - см. Максимова, Юн [18, 14]

Автором в недавнее время было предпринято исследования временных нетранзитивных логик близких к интервальной временной логике ([19, 20, 21, 22]. Найдено решение проблем выполнимости в таких логиках, проблемы разрешимости. В частности в [22] найдено решение проблемы допустимости в такой логике, но только в случае когда все интервалы транзитивности в моделях имеют равномерную фиксированную длину. Данная статья решает проблему допустимости в общем случае - когда все интервалы транзитивности имеют неравномерную произвольную длину ограниченную фиксированным данным числом. Помимо этого модели могут иметь новые расширенные свойства (1) допускаются различные операции достижимости для различных агентов (2) операции достижимости могут иметь пробелы (lacunas) на базисных фреймах (этот подход – (lacunas) – в случае стандартных моделей рассмотрен в [23]). Находится алгоритм решающий проблему допустимости в данной логике - а именно – распознающий допустимые правила вывода.

2 Интервальная Линейная Мультиагентная Логика.

Вначале опишем семантику и логический язык предлагаемой логической системы. Модели не являются транзитивными линейными структурами а базируются на составных интервальных фреймах. Предположение о том, что все вычислительные потоки линейны и потенциально бесконечны слишком сильное. На самом деле все ресурсы всегда ограничены, они могут быть достаточно большими, но с некоторой предполагаемой верхней границей. Поэтому в качестве базисной семантики мы выбираем следующие фреймы.

В дальнейшем N, как и принято в математической символике, обозначает множество всех натуральных чисел. Фиксируем некоторое $In \subset N$ – бесконечное множество временных индексов. Пусть $\forall i \in In$, $i(next)$ обозначает наименьшее число в In большее i; $In(i) := [i, i(next)]$. Таким образом, выполняется $N = \bigcup_{i \in In} In(i)$.

Временной интервальный линейный многоагентный k–фрейм представляет собой структуру

$$\mathcal{F} := \langle \bigcup_{i \in In} In(i), R_1, ..., R_k, \mathrm{Next} \rangle,$$

где любое R_j является бинарным отношением, которое является некоторым ограничением стандартного линейного порядка $\leq$ на интервале $I(n)$ т.е.

$$\forall i \in In, \forall j, R_j \subseteq (In(i) \times In(i)) \cap (\leq).$$

Коме того, разные интервалы транзитивности недостижимы по R_j, – $\forall x \in In(i) \forall y \notin In(i) \neg(x R_j y)$. Далее Next является стандартным бинарным отношением – следующее натуральное число. Полагаем что натуральное число m зафиксировано и всегда $\forall i \in In, (i(next) - i) \leq m$; мы называем m верхней границей транзитивности фрейма (сами фреймы естественно не транзитивны).

Модель $\mathcal{M}$ на $\mathcal{F}$ это $\mathcal{F}$ с некоторым означиванием V некоторого множества переменных $Prop$ т.е. $\forall p \in Prop, V(p) \subseteq \bigcup_{i \in In} In(i)$. То есть

$$\mathcal{M} := \langle \bigcup_{i \in In} In(i), R_1, ..., R_k, \mathrm{Next}, V \rangle.$$

Основное множество модели $\mathcal{M}$ – множество $\bigcup_{i \in In} In(i)$ является просто множеством всех натуральных чисел N; обозначим его через $|\mathcal{M}|$. Для краткости пишем $a \in \mathcal{M}$ для обозначения $a \in |\mathcal{M}|$. Если $a \in \mathcal{M}$ и $a \in V(p)$, пишем $(\mathcal{M}, a) \Vdash_V p$ и говорим, что p истинно на a при означивании V. Логический язык вводится следующим образом:

Определение 1 Множество всех формул содержит множество $Prop$ всех пропозициональных переменных и замкнуто относительно применения булевых логических операций $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$, унарной операций N (next) и бинарных операций U_j (until), $j \in [0, k]$ (для каждого агента j).

Для любой модели $\mathcal{M}$ определение значения истинности могут быть расширены с пропозициональных переменных на все формулы следующим образом.

Определение 2 .

$$\forall p \in Prop \ (\mathcal{M}, a) \Vdash_V p \Leftrightarrow a \in V(p);$$

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, a) \Vdash_V \varphi \wedge (\mathcal{M}, a) \Vdash_V \psi;$$

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, a) \Vdash_V \varphi \vee (\mathcal{M}, a) \Vdash_V \psi;$$

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, a) \nVdash_V \varphi \vee (\mathcal{M}, a) \Vdash_V \psi;$$

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V \neg\varphi \Leftrightarrow \neg[(\mathcal{M}, a) \Vdash_V \varphi];$$

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V N\varphi \Leftrightarrow \forall b[(a \text{ Next } b) \Rightarrow (\mathcal{M}, b) \Vdash_V \varphi];$$

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V (\varphi U_j \psi) \Leftrightarrow \exists b\ (aR_j b) \wedge ((\mathcal{M}, b) \Vdash_V \psi) \wedge$$

$$\forall c[(aR_j c < b) \Rightarrow (\mathcal{M}, c) \Vdash_V \varphi].$$

Таким образом, любой оператор U_j (until) работает как обычно, но ограничен верхней границей транзитивности локального участка - $[i, next(i)]$. Это хорошо согласуется с обычной интуицией относительно вычислительных процедур и вычислительных потоков - решения (состояния, удовлетворяющие формуле) должны (если существуют) быть достигнуты до окончания вычисления для текущего локального вычислительного потока.

Мы можем определить стандартные производные логические операции, используя постулируемые выше, следующим образом. Модальные операции $\Box_j$ (необходимо для агента j) и $\Diamond_j$ (возможно для агента j), определяется следующим образом: $\Diamond_i p := \top U_i p$, $\Box_i p := \neg\Diamond_i\neg p$. Легко проверить, что

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V \Diamond_j\varphi \Leftrightarrow \exists b \in N[(aR_j b) \wedge (\mathcal{M}, b) \Vdash_V \varphi];$$

$$(\mathcal{M}, a) \Vdash_V \Box_j\varphi \Leftrightarrow \forall b \in N[(aR_j b) \Rightarrow (\mathcal{M}, b) \Vdash_V \varphi].$$

Например, предположим что $(\mathcal{M}, a) \Vdash_V [\Box_1 p \to \Box_2\neg p] \wedge [\Box_2 p \to \Box_1\neg p]$. Истинность этой формулы выражает свойство агентов (1) и (2) находятся в оппозиции к истине неопровержимых фактов: всегда в будущем у агентов противоположное мнение, если один считаете, что факт всегда истинен, то другой думает, что этот факт всегда должен быть ложным.

Определение 3 Логика $L(m, max)$ это множество всех формул которые истинны на всех моделях с максимальной границнй транзитивности m при всех означиваниях.

Напомним что временная степень формулы φ это максимальное число включенных (nested) вхождений временных операций в эту формулу. Формальное определение вводится индуктивно, — временная степень пропозициональных переменных равна нулю: $td(p) := 0$; временная степень формулы чья главная операция булева операция является максимальной временной степень ее компонент, т.е. если $\varphi := \varphi_1 \star \varphi_2$, где $\star$ некоторая бинарная логическая операция, то $td(\varphi) := max\{td(\varphi_1), td(\varphi_2)\}$, и $tg(\neg\varphi) := td(\varphi)$; для $\varphi := \varphi_1 U \varphi_2$, $td(\varphi) := max\{td(\varphi_1), td(\varphi_2) + 1\}$, и $td(N\varphi) := td(\varphi) + 1$.

Тривиальным наблюдением, легко проверяемым индукцией по временной степени формул, является факт, что на наших моделях истинность формулы временной степени n зависит только от истинности пропозициональных переменных на последующих n интервалах транзитивности. Поэтому верна

Лемма 4 Для любого m логика $L(m, max)$ разрешима.

Но вопрос о разрешимости проблемы допустимости в таких логиках нетривиален. В случае когда в моделях все интервалы транзитивности имеют длину m она решена в [22]. В этой статье мы хотим снять это ограничение и решить проблему допустимости в общем случае и для более выразимой – многоагентной – логики.

Напомним, что для правила

$$\mathbf{r} := \frac{\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_l(x_1, \ldots, x_n)}{\psi(x_1, \ldots, x_n)},$$

определение его истинности на фреймах – стандартно: – если все посылки правила истинны на всех состояниях модели, то и заключение тоже везде истинно.

Также мы можем преобразовать любую формулу φ в правило $x \to x/\varphi$; и формула φ является теоремой логики $L(m, max)$ (т.е. $\varphi \in L(m, max)$) если и только если правило $(x \to x/\varphi)$ истинно на любом фрейме $\mathcal{F}$.

Определение 5 Правило $r := \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)/\psi(x_1, \ldots, x_n)$ называется допустимым в логике L если для всех формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$[(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \in L] \Longrightarrow [\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L].$$

Определение 6 Правило $r := \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)/\psi(x_1, \ldots, x_n)$ истинно на фрейме $\mathcal{F}$ (обозначение $\mathcal{F} \Vdash r$), если для всех означиваний V переменных из r в $\mathcal{F}$ если все посылки из r истинны на всех состояниях из $\mathcal{F}$ относительно V то и заключение из r также истинно на всех состояниях при V.

Полезным инструментом будет возможность использования правил в специальной однородной форме без формул временной степени выше 1.

Определение 7 Правило $\mathbf{r}$ находиться в приведенной нормальной форме если $\mathbf{r} = \varepsilon/x_1$ где

$$\varepsilon := \bigvee_{1 \leq j \leq l} [\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i^{t(j,i,0)} \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (N_l x_i)^{t(j,i,1)} \wedge$$
$$\bigwedge_{l \in [1,k], 1 \leq i, i_1 \leq n} (x_i U_l x_{i_1})^{t(j,i,i_1,l,2)}],$$

где $t(j, i, z), t(j, i, l, 1), t(j, i, i_1, l, 2) \in \{0, 1\}$ и для любой формулы α выше, $\alpha^0 := \alpha$, $\alpha^1 := \neg\alpha$.

Определение 8 Правило в приведенной нормальной форме $\mathbf{r_{nf}}$ называется приведенной формой правила $\mathbf{r}$ в логике $L(m, max)$ если эти правила равносильны по допустимости в $L(m, max)$ и по истинности на любом фрейме из задания $L(m, max)$.

Естественно что мы можем ограничится рассмотрением только правил с единственной посылкой — любое правило $\alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$ эквивалентно по истинности и допустимости правилу $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n/\beta$. Приведем со схемой доказательства следующую теорему (доказательство было ранее приведено нами для различных логических систем (см. например [22]) и в нескольких статьях, оно проводится здесь по той же схеме что и ранее).

Теорема 9 Существует ((single exponential time) алгоритм, строящий по любому данному правилу $\mathbf{r}$ его приведенную форму $\mathbf{r_{nf}}$ (для логики $L(m, max)$).

Приведем схему доказательства (она сходна с использованной, например, в [22]). Пусть дано правило вывода $\mathbf{r} = \alpha/\beta$. Пусть $Sub(\mathbf{r})$ обозначает множество всех подформул формул из $\mathbf{r}$. Вводим множество переменных $Z = \{z_\gamma \mid \gamma \in Sub(r)\}$ не входящих в $\mathbf{r}$ и правило (в промежуточной форме):

$$\mathbf{r_{if}} = z_\alpha \wedge \bigwedge_{\gamma \in Sub(\mathbf{r}) \setminus Var(\mathbf{r})} (z_\gamma \leftrightarrow \gamma^\sharp)/z_\beta,$$

где

$$\gamma^\sharp = \begin{cases} z_\delta * z_\epsilon, & \text{if } \gamma = \delta * \epsilon \text{ for } * \in \{\wedge, \vee, \to, U_j\}. \\ *z_\delta, & \text{if } \gamma = *\delta \text{ for } * \in \{\neg, N\}. \end{cases}$$

Правила $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r_{if}}$ истинны либо опровержимы на любых фреймах для $L(m, max)$ одновременно и равносильны по допустимости. Начнем с истинности. Действительно пусть $\mathcal{M}$ модель для $L(m, max)$ на фрейме $\mathcal{F}$ с означиванием V такая что $\mathcal{M} \nVdash_V \mathbf{r}$. Тогда $\mathcal{M} \Vdash_V \alpha$ и существует состояние $a \in \mathcal{F}$, такое что $(\mathcal{M}, a) \nVdash_V \beta$. Выберем означиванием $V_1 : Z \to 2^N$ где $V_1(z_\gamma) := V(\gamma)$. Тогда легко заметить (вычисляя индукцией по длине формул) что $\mathcal{M} \Vdash_{V_1} z_\alpha \wedge \bigwedge\{z_\gamma \leftrightarrow \gamma^\sharp \mid \gamma \in Sub(\mathbf{r}) \setminus Var(\mathbf{r})\}$ и $(\mathcal{M}, w) \nVdash_{V_1} z_\beta$.

С другой стороны, допустим что $\mathcal{M}$ модель для $L(m, max)$ на фрейме $\mathcal{F}$ с означиванием V_1 такая что $V_1 : Z \to 2^N$ и выполняется $\mathcal{M} \Vdash_{V_1} z_\alpha \wedge \bigwedge\{z_\gamma \leftrightarrow \gamma^\sharp \mid \gamma \in Sub(\mathbf{r}) \setminus Var(\mathbf{r})\}$ и $\exists w \in \mathcal{F}\ (\mathcal{M}, w) \nVdash_{V_1} z_\beta$.

Определим $V : Var(\mathbf{r}) \to 2^N$ следующим образом $V(x_i) := V_1(z_{x_i})$. Тогда (снова вычисляя индукцией по длине формул) получаем $V(\gamma) = V_1(z_\gamma)$ для всех $\gamma \in Sub(r)$. Следовательно $\mathcal{M} \Vdash_V \alpha$, $(\mathcal{M}, w) \nVdash_V \beta$ и поэтому $\mathcal{M} \nVdash_V \mathbf{r}$. Поверка равносильности по допустимости проводится по той же схеме.

Далее преобразуем посылку правила $\mathbf{r_{if}}$ в совершенную дизъюнктивную нормальную форму построенную на формулах вида x_i, Nx_i и $x_i U_l x_j$. Как известно такое построение требует одноэспоненциальное время от количества всех формул вида x_i, Nx_i и $x_i U_l x_j$, следовательно от количества подформул исходного правила и следовательно его длины. □

Приведенные нормальные формы полученные по алгоритму доказательства этой теоремы определены однозначно. Для любых $x, y \in |\mathcal{F}|$, где $x < y$ дистанция между x и y – $dist(x, y)$ — есть длина по N - оператору цепи ведущей из x в y, т.е $y - x$.

Определение 10 . Пусть дана модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ и новое означивание V_s некоторых (допустимо – новых) переменных из некоторого множества S во фрейме $\mathcal{F}$. Означивание V_s называется формульным (определимым) в $\mathcal{M}$ если существуют формулы β_i такие что

$$\forall x_i \in S, \quad V_s(x_i) = V(\beta_i).$$

Лемма 11 Если правило $\mathbf{r_{nf}} = \bigvee_{1\leq j\leq l} \varphi_j/x_1$ в нормальной приведенной форме недопустимо в логике $L(m, max)$ тогда существует фрейм

$\mathcal{F}_1 = \langle \bigcup_{i\in In} In(i), R_1, ..., R_k, \mathrm{Next}\rangle$ с означиванием V_1 переменных из $\mathbf{r_{nf}}$ и некоторое $w_s \in In$ такие что выполняется $\bigcup_{i\in In} In(i) = [0, w_s] \cup \bigcup_{i\in In, i\geq w_s} In(i)$,

(i) Любая переменная правила $\mathbf{r_{nf}}$ имеет одинаковую истинность при V_1 на всех состояниях из $\bigcup_{i\in In, i\geq w_s} In(i)$;

(ii) Существует j_0 такое что $(\mathcal{F}_1, n) \Vdash_{V_1} \varphi_{j_0}$ $\forall n \in \bigcup_{i\in In, i\geq w_s} In(i)$;

(iii) $\forall n \in N$ существует j такой что $(\mathcal{F}_1, n) \Vdash_{V_1} \varphi_j$ (обозначим такой уникальный φ_j символом $\theta(n)$);

(iv) $(\mathcal{F}_1, 0) \nVdash_{V_1} x_1$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{r_{nf}} = \phi/x_1$, где

$$\phi := \bigvee_{1\leq j\leq l} [\bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i^{t(j,i,0)} \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq n} (Nx_i)^{t(j,i,1)} \wedge$$

$$\bigwedge_{1\leq i, \leq i_1, i\neq i_1, g\in[1,k]]} (x_i U_g x_{i_1})^{t(j,i,i_1,g,1)}]$$

и отображение $x_i \to \varepsilon(x_i)$ есть подстановка формул $\varepsilon(x_i)$ вместо переменных x_i из $\mathbf{r_{nf}}$, такое что после расширения этой подстановки на формулы выполняется

$$\varepsilon(\phi) \in L(m, max) \text{ и } \varepsilon(x_1) \notin L(m, max).$$

Обозначим

$$\varphi_j := \bigwedge_{1\leq i\leq n} [x_i^{t(j,i,0)} \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq n} (Nx_i)^{t(j,i,1)} \wedge [\bigwedge_{1\leq i, \leq i_1, i\neq i_1, g\in[1,k]} (x_i U_g x_{i_1})^{t(j,i,i_1,g,1)}$$

Тогда найдется фрейм

$$\mathcal{F} := \langle \bigcup_{i\in In} In(i), R_1, ..., R_k, \mathrm{Next}\rangle$$

из семейства фреймов задающих логику $L(m, max)$ с означиванием V такой что

$$(\mathcal{F}, b) \nVdash_V \varepsilon(x_1)$$

для некоторого $b \in \bigcup_{i\in In} In(i)$). Естественно мы можем предположить что $b = 0$, т.е. $(\mathcal{F}, 0) \nVdash_V \varepsilon(x_1)$ Пусть d есть максимальная темпоральная степень формул $\varepsilon(x_i)$ для всех i. Пусть

$$w_s := min\{n \mid n \in In, n > d\} + 1.$$

Т.е. w_s превосходит на единицу наименьшее число в множестве индексов In строго большее чем d. Далее, мы модифицируем означивание V полагая что все переменный всех формул $\varepsilon(x_i)$ истинны на всех $a \in \bigcup_{i \in In, i > w_s}$ а на $[0, w_s]$ имеют те же значения что и ранее при V. Обозначим новое означивание символом V_0. Заметим, что

$$\forall x_i \in Var(\phi) \forall a \in In(0) := [0, 0(next)]\ (\mathcal{F}, x) \Vdash_V \varepsilon(x_i) \Leftrightarrow \mathcal{F}, x) \Vdash_{V_0} \varepsilon(x_i),$$

т.е. эта модификация означивания V не меняет истинностных значений формул всех $\varepsilon(x_i)$ на всех состояниях из $[0, 0(next)]$. Доказательство этого следует стандартной индукцией по длине формул и их темпоральной степени.

Наличие возможных пробелов в отношениях достижимости R_j (возможно $R_j \subset (\leq)$ на некотором временном интервале) не нарушает индуктивных шагов так как операции U_j ограничены временными интервалами. Помимо этого истинность любой формулы $\varepsilon(x_i)$ будет совпадать на всех $a \in \bigcup_{i \in In, i > w_s}$ при V_0 так как на $\bigcup_{i \in In, i \geq w_s}$ значения переменных всех формул $\varepsilon(x_i)$ при V_0 одинаковое.

По предположению леммы $\varepsilon(\phi) \in L(m, max)$, поэтому

$$\forall c \in |\mathcal{F}|, \exists j : (\mathcal{F}, c) \Vdash_{V_0} \varepsilon(\varphi_j).$$

Обозначим такой уникальный φ_j через $\theta(c)$.

Теперь на нашем фрейме $\mathcal{F}$ вводим другое означивание уже для переменных самого правила, полагая $V_1(x_i) := V_0(\varepsilon(x_i))$. Тогда

$$\forall x_i \in Var(\phi) \forall a \in |\mathcal{F}| \quad (\mathcal{F}, x) \Vdash_{V_0} \varepsilon(x_i) \Leftrightarrow \mathcal{F}, x) \Vdash_{V_1} x_i.$$

При таком V_1 все заключения нашей леммы как видим выполняются. $\square$

Далее мы должны расширить эту лемму. Итак, как и ранее, пусть правило $\mathbf{r_{nf}} = \bigvee_{1 \leq j \leq l} \varphi_j / x_1 = \phi / x_1$ не допустимо и отображение $x_i \to \varepsilon(x_i)$ есть подстановка формул $\varepsilon(x_i)$ вместо переменных x_i из $\mathbf{r_{nf}}$, такое что после расширения этой подстановки на формулы выполняется $\varepsilon(\phi) \in L(m, max)$ и $\varepsilon(x_1) \notin L(m, max)$ и φ_j дизъюнкты из посылки этого правила. Пусть $t(w_s)$ есть число интервалов транзитивности внутри $[0, w_s]$. Используем далее обозначения из доказательство Леммы 11

Лемма 12 Пусть правило $\mathbf{r_{nf}}$ недопустимо. Пусть фрейм $\mathcal{F}_1$ с означиванием V_1 и состояние $w_s \in \mathcal{F}_1$ получены выше в Лемме 11. Пусть $[0, a]$ есть некоторый начальный отрезок произвольного фрейма для логики $L(m, max)$, где число интервалов транзитивности внутри $[0, a]$ равно $t(w_s) + 3$ и дано означивание V_s для всех переменных из всех формул $\varepsilon(x_i)$ на интервале $[0, a]$ где при V_s все эти переменные истинны. Тогда для любого $w \in [0, w_s] \subset |\mathcal{F}_1|$ существует фрейм $\mathcal{F}_2(w)$ и означивание V_2 переменных правила $\mathbf{r_{nf}}$ такие что (a)$|\mathcal{F}_2(w)| = [0,a] \cup \{b \mid b \in |\mathcal{F}_1|, b \geq w\}$ где $a = w$ и отношения достижимости R_j на сочленении - любые допустимые по максимальной длине m интервала транзитивности;

(b) V_2 совпадает с V_1 на $\{b \mid b \geq w\}$ и истинность всех формул φ_j на состояниях из $\{b \mid b \geq w\}$ относительно V_1 и V_2 совпадает;

(c) Для любого x из первого интервала транзитивности в $[0,a]$,
$(\mathcal{F}_2, x) \Vdash_{V_2} \varphi_{j_0}$, где φ_{j_0} из (ii) из формулировки Леммы 11;
(d) для любого $x \in [0,a]$ существует φ_j такое что $(\mathcal{F}_2, x) \Vdash_{V_2} \varphi_j$.

Доказательство. Пусть модель на фрейме $\mathcal{F}_1$ с означиванием V_1 и $w_s \in \mathcal{F}_1$ получены выше в Лемме 11. Берем любой $\mathcal{F}_2(w)$, $|\mathcal{F}_2(w)| = [0,a] \cup \{b \mid b \geq w\}$ как в (a) из формулировки. Для $\{b \mid b \geq w\}$ в точности следуем доказательству Леммы 11 и для таких b все упомянутое в Леммы 11 справедливо. Для $x \in [0,]$ мы повторяем фрагмент доказательства Леммы 11 связанный с использованием временной степени формул.

Точнее, мы задаем означивание V_0 для всех переменных всех формул $\varepsilon(x_i)$ на $x \in [0, a-1]$ – быть истинными (как и в Лемме 11 для всех состояний больших w_s) а на $\{b \mid b \geq w\}$ как и ранее в доказательстве Леммы 11. Тогда истинность любой формулы $\varepsilon(x_i)$ при V_0 будет совпадать на всех $a \in \bigcup_{i \in In, i \geq w_s} In(i)$ в $\mathcal{F}_1$ при V_0 и на всех состояниях из первого интервала транзитивности в $[0,a]$ при V_0, причем на всех вместе этих состояниях она будет одинаковой.

Доказательство этих фактов как и ранее в Лемме 11 следует индукцией по временной степени формул. Вводя на $\mathcal{F}_2(w)$ как и ранее на фрейме $\mathcal{F}$ другое означивание для переменных самого правила, полагая $V_2(x_i) := V_0(\varepsilon(x_i))$, получаем что

$$\forall x_i, \forall u \in |\mathcal{F}_2| \quad (\mathcal{F}_2, u) \Vdash_{V_0} \varepsilon(x_i) \Leftrightarrow \mathcal{F}_2, u) \Vdash_{V_2} x_i.$$

Тогда все утверждения (a),(b),(c) и (d) из нашей Леммы выполняются. □

Лемма 13 В обозначениях Лемм 11 и 12 мы можем предположить что интервалы всех состояний в получаемых фреймах $\mathcal{F}_1$ и в $\mathcal{F}_2(w)$ расположенные ниже w_s имеют конечный размер с верхней границей эффективно вычисляемой по размеру правила.

Доказательство. Здесь достаточно применить технику прореживания. Начнем с фрейма $\mathcal{F}_1$ – для этого двигаясь от наименьшего интервала транзитивности вверх рассматриваем последовательно все интервалы транзитивности как модели при V_1 и формулы $\theta(j)$ истинные на состояниях j этих интервалов (такие формулы $\theta(j)$ существуют по (iii) из Лемме 11).

Находим два интервала транзитивности – самый нижний и наименьший за ним с совпадаюшими последовательностями фомул

$$[\theta(j), \ldots, \theta(j+m)] \quad \text{и} \quad [\theta(i), \ldots, \theta(i+m)].$$

После этого удаляем все интервалы транзитивности между $[i, i+m]$ и $[j, j+m]$ и замещаем $[j, j+m]$ интервалом $[i, i+m_i]$ переобозначая все отношения достижимости и означивание переменных соответственно. Это преобразование сохраняет истинность формул вида $\theta(j)$. Поэтому учитывая свойства модели $\mathcal{F}_1$ из Леммы 11 получаем что и модель полученная этим преобразованием будет иметь эти свойства.

Применяя это преобразования ко всем интервалам транзитивности расположенным ниже w_s двигаясь к w_s получаем что за конечное число шагов вычислимое по размеру правила оно завершается и интервал всех состояний расположенных ниже w_s будет конечным с размером вычислимым по размеру правила.

Для моделей $\mathcal{F}_2(w))$ с V_2 применяем то же самое преобразование сначала ко всему $\{b \mid b \geq w\}$ двигаясь от w к $w_s + 3 \times m + 1$ как и указано выше в доказательстве этой леммы, а затем - к интервалу $[0, a]$ в $\mathcal{F}_2(w))$ двигаясь от 0 к $a = w$ (пользуясь свойствами из Леммы 12) и сохраняя точку входа в $\mathcal{F}_1$. $\Box$

Теперь используем Леммы 11 и 12 (и Лемму 13 для вычисления верхних границ начальных участков проверяемых фреймов) того чтобы получить достаточное условие допустимости.

Теорема 14 Пусть дано правило вывода $\mathbf{r_{nf}} = \bigvee_{1 \leq j \leq l} \varphi_j / x_1$ в нормальной редуцированной форме. Пусть существуют модель $\mathcal{F}_1$ с означиванием V_1 и все модели $\mathcal{F}_2(w)$ с означиваниями V_2 для всех переменных из правила $\mathbf{r_{nf}}$, удовлетворяющие условиям Леммы 12. Тогда правило $\mathbf{r_{nf}}$ не допустимо в $L(m, max)$.

Доказательство. В силу Леммы 13 мы можем предположить что интервалы всех упомянутых моделей расположенные ниже w_s (точки стабилизации) конечны и имеют размер вычислимый по размеру правила $\mathbf{r_{nf}} = \bigvee_{1 \leq j \leq l} \varphi_j / x_1$. Вначале мы должны описать структуру модели на $\mathcal{F}_1$ с V_1 с помощью следующих формул. Итак пусть $\mathcal{F}_1 := \langle \bigcup_{i \in In} In(i), R_1, ..., R_k, \mathrm{Next} \rangle$ и V_1 заданное означивание на $\mathcal{F}_1$; для всех $i \in In$, $Id(i) = [i, i(next)]$ - интервалы транзитивности и $\bigcup_{i \in In} In(i) = [0, w_s] \cup \bigcup_{i \in In, i \geq w_s} In(i)$.

$\forall t \in |\mathcal{F}_1| \setminus \{u \mid u \geq w_s + 3m + 1\}$ вводим уникальную переменную p_t. Для $x, y \in |\mathcal{F}_1| \setminus \{u \mid u \geq w_s + 3m + 1\}$ и $x < y$ как и ранее $dist(x, y)$обозначает расстояние между x и y, т.е. $y - x$. Вводим следующие формулы для любого зафиксированного p_t:

$$A(p_t) := p_t \wedge [\bigwedge_{x > t, x \in [t+1, w_s + 3 \times m]} N^{dist(t,x)} (p_x \wedge \bigwedge_{p_l \neq p_t} \neg p_l).$$

Пусть $S(t) := \{x \mid x \in [t, w_s + 3 \times m]\}$ и

$$B(p_t) := p_t \to \bigwedge_{x \in S(t), x \geq t, tR_j x, j \in [1,k]} [\Diamond_j p_x] \wedge \bigwedge_{x, \in S(t), (\mathcal{F}, t), \neg(tR_j x), j \in [1,k]} [\neg \Diamond_j p_x];$$

$$C(p_t) := A(p_t) \wedge \bigwedge_{x, y \in S(t), x \neq y} [N^{dist(t,x)} p_x \to \neg p_y];$$

$$D(p_t) := A(p_t) \wedge \bigwedge_{x \geq t, x \in S(t)} N^{dist(t,x)} A(p_x) \wedge B(p_x) \wedge C(p_x).$$

Предположим что $\mathcal{F} := \langle \bigcup_{i \in In} In(i), R_1, ..., R_k, \mathrm{Next} \rangle$ некоторая модель с означиванием V для введенных переменных p_t.

Лемма 15 Пусть $a_t \in |\mathcal{F}|$ и $(\mathcal{F}, a_t) \Vdash_V D(p_t)$ и пусть V_p это означивание на $\mathcal{F}$ переменных правила $\mathbf{r_{nf}} = \bigvee_{1 \le j \le l} \varphi_j / x_1$ задаваемое равенством

$$V_p(x_i) := V(\bigvee\{D(p_t) \mid t \in |\mathcal{F}_1| \setminus \{u \mid u \geq w_s + 3 \times m + 1, (\mathcal{F}_1, t) \Vdash_{V_1} x_i\}\}).$$

Тогда для всех состояний $x \geq a_t$ и состояния c из $[t, w_s]$ в модели $\mathcal{F}_1$ где $dist(a_t, x) = dist(t, c)$ выполняется $((\mathcal{F}, x) \Vdash_{V_p} \theta(c)$, где формула $\theta(c)$ определена в (iii) в Лемме 11.

Доказательство проводится используя структуру формул $A(p_t), B(p_t), C(p_t)$ и $D(p_t)$. Нужно поверить, что модели на $[a_t, a_t + dist(t, w_s)]$ внутри модели $\mathcal{F}$ относительно V_p и на $[t, t + dist(t, w_s)]$ внутри $\mathcal{F}_1$ относительно V_1 изоморфны. Действительно в силу

$$(\mathcal{F}, a_t) \Vdash_V D(p_t)$$

выполняется

$$\forall a \in |\mathcal{F}|, \forall t, t_1 \in [0, w_s + 3 \times m], (dist(a_t, a) = dist(t, t_1) \Rightarrow (\mathcal{F}, a) \Vdash_V p_{t_1}.$$

поэтому интервалы $[t, t + dist(t, w_s + 3 \times m]$ и $[a_t, a_t + dist(t, w_s + 3 \times m]$ изоморфны как фреймы. А означивания V_1 и V_p на этих фреймах (соответственно) совпадают в силу определения

$$V_p(x_i) := V(\bigvee\{D(p_t) \mid t \in |\mathcal{F}_1| \setminus \{u \mid u \geq w_s + 3 \times m + 1, (\mathcal{F}_1, t) \Vdash_{V_1} x_i)\}\}),$$

так что и модели на этих фреймах изоморфны.

Напомним, что $a_t \in |\mathcal{F}|$, и $(\mathcal{F}, a_t) \Vdash_V D(p_t)$. В Лемме 11 доказано что для каждого элемента t из $\mathcal{F}_1$, $(\mathcal{F}_1, t) \Vdash_{V_1} \theta(t)$. Поэтому $\forall x, x \geq a_t$ и b из $[t, w_s]$ из модели $\mathcal{F}_1$ где $dist(a_t, x) = dist(t, b)$ выполняется $((\mathcal{F}, x) \Vdash_{V_p} \theta(b)$. $\square$.

Предположим что $\langle \mathcal{F} := \langle \bigcup_{i \in In} In(i), R_1, ..., R_k, \mathrm{Next}, V \rangle$ некоторая модель с означиванием V для переменных p_t (где напомним $\forall t \in |\mathcal{F}_1| \setminus \{u \mid u \geq w_s + 3m + 1\}$ введена уникальная переменная p_t). Пусть m_w – максимальное возможное число a во всех полученных $\mathcal{F}_2(w)$ введенных в Лемме 12 (после применения Леммы 13). Допустим что существует $b \in \mathcal{F}$ такой что

$$b \in |\mathcal{F}| : \ (\mathcal{F}, b) \Vdash_V \neg \bigvee_{p_t} D(p_t) \wedge$$

$$[\bigvee_{s \leq m_w, p_t} [N^s D(p_t) \wedge \neg \bigvee_{s_1 < s-1, t_1} N^{s_1} D(p_{t_1})]].$$

Пусть c это наименьший элемент больший b где

$$(\mathcal{F}, c) \Vdash_V D(p_t)$$

для некоторого p_t.

Тогда как мы показали выше модель $[t, t + dist(t, w_s)]$ с означиванием V_1 в модели $\mathcal{F}_1$ изоморфна модели $[c, c + dist(t, w_s)]$ с означиванием $V_p(x_i) := \{u \mid (\mathcal{F}, u) \Vdash_{V_p} (x_i)\}$ внутри модели $\langle \mathcal{F}, V_p \rangle$. В силу Леммы 11 получаем

$$\forall d \in [c, c + dist(t, w_s)], (\mathcal{F}, d) \Vdash_{V_p} \theta(q),$$

для некоторого q.

Для $d \in [0, c - 1]$ внутри $\mathcal{F}$ мы вновь применим Лемму 12. Заметим что для любого верхнего интервала $[a_1, c - 1]$ в сегменте $[b, c - 1]$ с числом элементов внутри $[a_1, c - 1]$ не более чем число элементов внутри $[0, a]$ в Лемме 12 по этой лемме существует расширение означивания – V_2 – переменных x_i в $[a, \infty)$ на интервал $[a_1, c - 1]$ и на $[0, c - 1]$ существующего означивания V_1 переменных x_i в $[a, \infty)$ такое что выполняется следующее. При V_2 на любом элементе из $[0, c - 1]$ истина некоторая формула $\theta(u)$.

Причем если $[a_1, c - 1]$ имеет длину более чем длина $[0(next), a]$ в Лемме 12 то и на первом участке транзитивности из $[0, c - 1]$ при V_2 истинна специальная формула φ_{j_0} т.е. при любом состоянии x из такого интервала $((\mathcal{F}, x) \Vdash_{V_2} \varphi_{j_0})$, где φ_{j_0} из формулировки Леммы 11.

Останется заметить что такое означивание V_2 для переменных x_i – формульное (может быть определена формулами) от переменных p_t и может быть задано на $\{d \mid d \geq c, d \in [c, c + dist(t, w_s + 3 \times m]\}$ как и ранее в нашем доказательстве после ведения p_t,

(т.е. $V_2(x_i) := V(\bigvee\{D(p_t) \mid t \in |\mathcal{F}_1| \setminus \{u \mid u \geq w_s + 3 \times m + 1\}, (\mathcal{F}_1, t) \Vdash_{V_1} x_i)\}\})$, а на $[b, c - 1]$ формулами от только одной переменной p_c (учитывая структуру фрейма $[b, c - 1]$, его конечность и вычислимую ограниченную величину). Итого получаем что

Лемма 16 При упомянутом формульном означивании V_2 выполняется

$$\forall d \in [0, c], (\mathcal{F}, d) \Vdash_{V_2} \theta(q),$$

для некоторого q.

Теперь суммируем означивание переменных x_i:

$$S(x_i) := V_p(x_i) \cup V_2(x_i) \cup V_3(x_i),$$

где V_3 формульное означивание для x_i задаваемое формулой

$$G(x_i) := [\neg[\bigvee\{D(p_t) \mid t \in |\mathcal{F}_1| \setminus \{u \mid u \geq w_s + 3 \times m + 1\}]]\wedge$$

$$\neg[\neg \bigvee_{p_t} D(p_t) \wedge [\bigvee_{s \leq m_w, p_t} [N^s D(p_t) \wedge \neg \bigvee_{s_1 < s-1, t_1} N^{s_1} D(p_{t_1}]]] \wedge Sg_i.$$

где $Sg_i = \top$ если x_i входит положительно в θ_{j_0}, а иначе $Sg_i = \bot$.

Лемма 17 Означивание $S(x_i)$ является формульным и

(a) Существует фрейм $\mathcal{F}_0$ и означивание V_0 переменных из формул задающих $S(x_1)$ на $\mathcal{F}_0$ такое что $(\mathcal{F}_0, 0) \nVdash_{V_0} x_1$;

(b) При любом означивании V_4 переменных формул участвующих в определении означиваний $S(x_i)$ на любом фрейме $\mathcal{F}$ посылка правила

$\bigvee_{1 \leq j \leq l} \varphi_j / x_1$ истинна на $\mathcal{F}$ при V_4.

Доказательство. Формульности означивания S была показана ранее. Докажем (a), – пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ - это модель из Леммы 11. Напомним что x_1 ложна на 0 в $\mathcal{F}_1$ при V_1 (см. формулировку Леммы 11) и $V_1(x_1)$ и $S(x_1)$ на $[0, w_s]$ в $\mathcal{F}_1$ совпадают. Т.е. (a) выполняется.

Возьмем произвольный фрейм $\mathcal{F}$ и произвольное означивание V_4 для всех переменных p_t введенных ранее и любой элемент x из $\mathcal{F}$.

(Step-1) Допустим вначале что для некоторого $D(p_t)$

$$x \in \mathcal{F}, (\mathcal{F}, x) \Vdash_{V_4} D(p_t).$$

Тогда по Лемме 15 при V_p на x истинна некоторая формула $\theta(u)$, и означивание S тогда совпадает с V_p на интервале $[x, x + dist(t, w_s + 3 \times m]$ и $\theta(u)$ будет истинна на x и при означивании S.

(Step–2) Рассмотрим второй случай когда

$$x \in |\mathcal{F}| : \ (\mathcal{F}, x) \Vdash_V \neg \bigvee_{\forall p_t} D(p_t) \wedge$$

$$[\bigvee_{s \leq m_w, p_t} (N^s p_t \wedge \neg N^{s-1} p_t)].$$

Пусть c наименьший элемент больший x где $(\mathcal{F}, c) \Vdash_V D(p_t)$. Тогда по Лемме 16 для любых $d \in [0, c]$ при V_2 на u истинна некоторая формула $\theta(u)$, и V_2 на интервале $[x, c-1]$ тогда снова согласована с S (не расширяет ее на этом интервале). Т.е. $\forall x \in [0, c-1](\mathcal{F}, c) \Vdash_S \theta(u)$ для некоторого $\theta(u)$.

(Step-3) Допустим что предположения (S1) и (S2) неверны. Тогда данный элемент x расположен на дистанции более m_w от тех где выполняются формулы $D(p_t)$ и тогда истинность переменных x_i на x определяется только означиванием V_3 и следовательно (см. (d) из Леммы 12) $(\mathcal{F}, x) \Vdash_S (\varphi_{j_0})$. $\square$

Используя Леммы 11, 12, 13 и Теорему 14 мы получаем

Теорема 18 Проблема допустимости для $L(m, max)$ разрешима. Существует алгоритм проверяющий допустимость правил в $L(m, max)$.

Список литературы

[1] Gabbay D.M., Hodkinson I.M. and Reynolds M.A. *"Temporal Logic",* - Mathematical Foundations and Computational Aspects, vol. 1., Clarendon Press, Oxford (1994).

[2] Gabbay D.M., Hodkinson I.M. *"An axiomatization of the temporal logic with Until and Since over the real numbers",* Journal of Logic and Computation, vol. 1, (1990), 229 – 260.

[3] Gabbay D., Hodkinson I,. *"Temporal Logic in Context of Databases",* in: J. Copeland, editor, Logic and Reality, Essays on the legacy of Arthur Prior, Oxford University Press, (1995).

[4] Wooldridge M. and Lomuscio A. *"Multi-Agent VSK Logic ",* in: Proceedings of the Seventh European Workshop on Logics in Artificial Intelligence (JELIAI-2000), 2000, Springer-Verlag, September 2000.

[5] Wooldridge. *"An Automata-theoretic approach to multi-agent planning",* in: Proceedings of the First European Workshop on Multi-agent Systems (EUMAS 2003), Oxford University, December 2003.

[6] Wooldridge M., Huget M.P., Fisher M., and Parsons S., "Model Checking Multi-Agent Systems: The MABLE Language and Its Applications", International Journal on Artificial Intelligence Tools, vol.15. no. 2, (2006), 195 – 225.

[7] Belardinelli F. and Lomuscio A. "Interactions between Knowledge and Time in a First-Order Logic for Multi-Agent Systems: Completeness Results"', Journal of Artificial Intelligence Research, vol. 45, (2012), 1–45 .

[8] Babenyshev S. and Rybakov V., "Logic of Plausibility for Discovery in Multi-agent Environment Deciding Algorithms", in: KES (3) 2008: Springer, Lecture Notes in Computer Science, 2008, vol. 5179/2008, pp. 210-217.

[9] Babenyshev S., Rybakov V., "Decidability of Hybrid Logic with Local Common Knowledge Based on Linear Temporal Logic LTL",in: CiE 2008, Lecture Notes in Computer Science, (2008), pp. 32-41, vol. 5028/2008.

[10] Babenyshev S., Rybakov V. "Logic of Discovery and Knowledge: Decision Algorithm", in: KES (2), Lecture Notes in Computer Science, vol. 5178/2008, (2008), pp. 711-718.

[11] Babenyshev S., Rybakov V. "Describing Evolutions of Multi-Agent Systems", in: KES (1) 2009, Lecture Notes in Computer Science, (2009), pp. 38-45, Volume 5711/2009.

[12] Rybakov V.V., "Linear Temporal Logic LTK_K extended by Multi-Agent Logic K_n with Interacting Agents", J. Log. Computation, Oxford Press, vol. 19, no. 6, (2009), 989 – 1017.

[13] Fagin R., Halpern, J. Moses Y., Vardi M., *Reasoning About Knowledge*, The MIT Press, 1995.

[14] В. Ф. Юн. Временная Логика Линейных по Времени Фреймов с Аксиомой Индукции. Сиб. Эдект. Матем. Изв., Том 6, (2009), стр. 312–325.

[15] Benthem, J.F.A.K. van. "The Logic of Time: a Model-theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse", Reidel, Dordrecht, (1982).

[16] Vardi M. *" An automata-theoretic approach to linear temporal logic",* in: Y.Banff Higher Order Workshop (1995), 238 – 266. Available at http://citeseer.ist.psu.edu/vardi96automatatheoretic.html.

[17] Vardi M. Y. “Reasoning about the past with two-way automata” , in: Larsen K.G., Skyum S., Winskel G., editors. ICALP, LNCS, Springer, 1443 (1998), 628 – 641.

[18] Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн., Сильная Разрешимость и Сильная Узнаваемость. Алгебра и логика, Том 56, no 5, (2017), 559—581.

[19] Rybakov V., “Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations”, J. Logic and Computation, Oxford Press, vol 26, no. 3, (2016) 945–958.

[20] Rybakov V.V. “Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms”, Sibir. Math. Jour., vol 58, no 5, (2017), 1128–1143.

[21] Rybakov V.V. “Multiagent temporal logics with multivaluations”, Sibir. Math. Jour., vol 59, no 4, (2018), 897–911.

[22] Rybakov V.V. “Linear Temporal Logic with Non-transitive Time, Algorithms for Decidability and Verification of Admissibility”, Chapter in Book: Larisa Maksimova on Implication, Interpolation, and Definability, Springer, (2018), 219-243.

[23] Rybakov V.V. “Temporal multi-valued logic with lost worlds in the past”, Sib. Elektronic Mathematical Reports., vol. 15, (2018), 436–449.