S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.117, 519.156, 519.11
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 05A99

КОМБИНАТОРНЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С СОБИРАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ Ф. ХОЛЛА

В.М. Леонтьев

Abstract. Let $M_1, \dots, M_r$ be nonempty subsets of some total ordered set. Imposing some restricitons on these sets, we find an expression for the number of elements $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in M_1 \times \dots \times M_r$ that satisfy the condition C, where C is a propositional formula consisting of conditions $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$, $i, j \in \overline{1, r}$.

Keywords: collection process, Cartesian product, binary weight.

1. Введение

Ф. Холл в работе [1] доказал следующую теорему. Пусть для любых двух элементов x и y произвольной группы G коммутаторы $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots$ от x и y записаны в порядке возрастания весов (порядок среди коммутаторов одинакового веса произволен). Тогда для любого натурального n имеет место формула

$$(xy)^n = x^n y^n {R_3}^{f_3(n)} \cdots {R_i}^{f_i(n)} \cdots , \tag{1}$$

где показатели степеней коммутаторов могут быть представлены в виде

$$f_i(n) = a_1 \binom{n}{1} + \dots + a_w \binom{n}{w}, \tag{2}$$

здесь w — вес коммутатора R_i, а целые неотрицательные коэффициенты a_k зависят только от R_i, но не от n. Для теории конечных p-групп важным следствием представления (2) является делимость показателей $f_i(n)$ на число n, когда n простое и вес коммутатора меньше n.

Leontiev, V.M., Combinatorial issues related to P. Hall's collection process.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Пусть C — произвольное условие, получающееся с помощью логического сложения и умножения условий типа $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$ (далее мы будем называть подобные условия L-условиями). Ключевым моментом в доказательстве теоремы о собирательной формуле Холла было утверждение (см. [1, теорема 3.25] или [2, лемма 12.3.1]) о том, что количество элементов множества

$$\{1, \ldots, n\}^r = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \mid \lambda_i \in \{1, \ldots, n\}, i \in \overline{1, r}\}, \qquad r, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

которые удовлетворяют условию C, выражается в виде

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \binom{n}{i},$$

где целые неотрицательные коэффициенты a_i зависят только от C. В настоящей работе мы, на основе идеи, изложенной в [1] и [2], обобщили этот результат (теоремы 1 и 2). Во-первых, вместо декартовой степени множества целых чисел $\{1, \ldots, n\}$ мы рассматриваем декартово произведение непустых подмножеств произвольного линейно упорядоченного множества, удовлетворяющих некоторым ограничениям. Во-вторых, L-условия мы определяем как произвольные формулы алгебры высказываний, составленные из высказываний типа $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$.

Обозначим через $\omega(i)$ функцию бинарного веса числа (количество единиц в двоичной записи целого неотрицательного числа i). В работе [5] было выявлено, что с помощью функции ω можно параметризовать несобранную часть собирательной формулы Холла. Оказывается, что степени некоторых серий коммутаторов, входящих в собранную часть собирательной формулы, выражаются через мощность множества элементов $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ декартова произведения $\{0, \ldots, 2^m - 1\}^r$, удовлетворяющих некоторому L-условию C и ограничениям $\omega(\mu_i) = u_i$, $i \in \overline{1, r}$. В заключительной части статьи показано (теорема 3), что число решений возникающей системы допускает представление в виде

$$\sum_{i=0}^{u_1+\ldots+u_r} a_i \binom{m}{i}, \qquad a_i \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Переход к системе позволил в ряде случаев найти выражения для коэффициентов a_t из (4) и дать их комбинаторную интерпретацию (теорема 4). Как следствие этих результатов, доказано комбинаторное тождество (теорема 5), позволяющее выразить полученные в работах [3]-[6] явные выражения для степеней коммутаторов в виде (2).

2. Определение L-условий и связанных с ними понятий

В этом разделе мы строго определим понятие L-условия и введем отношение эквивалентности на множестве всех L-условий. Далее, получив ряд отношений L-условий, мы докажем в следующем разделе возможность выбора представителя в каждом классе эквивалентности, записанного в ДНФ без операции отрицания.

Определение 1. *Обозначим через L множество всех формул алгебры высказываний, в которых каждая пропозициональная переменная заменена на предикатные символы $[\lambda_i < \lambda_j]$ и $[\lambda_i = \lambda_j]$, где $i, j \in \mathbb{N}$.*

Определение 2. *Произвольный элемент $C \in L$ будем называть L-условием ранга r, $r \in \mathbb{N}$, если формула C содержит в своей записи хотя бы один из следующих предикатных символов: $[\lambda_i < \lambda_r]$, $[\lambda_r < \lambda_i]$, $[\lambda_i = \lambda_r]$, $[\lambda_r = \lambda_i]$, $i \in \mathbb{N}$, и не содержит предикатных символов $[\lambda_i < \lambda_j]$ и $[\lambda_i = \lambda_j]$, где $i > r$ или $j > r$. Логические константы 0 и 1 будем называть L-условиями ранга ноль.*

Пример 1. L-условия рангов 1, 2 и 3, соответственно:

$$\neg[\lambda_1 = \lambda_1] \to [\lambda_1 < \lambda_1]; \quad [\lambda_1 = \lambda_1] \wedge [\lambda_2 = \lambda_2] \oplus 1; \quad [\lambda_2 = \lambda_3] \leftrightarrow [\lambda_3 = \lambda_2].$$

Пусть M — произвольное непустое множество с введенными на нем отношениями равенства «$=_1$» и строгого линейного порядка «$<_1$». Тогда, определив на множестве $M_1 \times \cdots \times M_r \subseteq M \times \cdots \times M$ предикатные символы $[\lambda_i < \lambda_j]$ и $[\lambda_i = \lambda_j]$, $i, j \in \overline{1,r}$, следующим образом:

$$[\lambda_i = \lambda_j] = \begin{cases} 1, \text{если } \lambda_i =_1 \lambda_j, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases} \qquad [\lambda_i < \lambda_j] = \begin{cases} 1, \text{если } \lambda_i <_1 \lambda_j, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

получаем, что любое L-условие C ранга не выше r можно интерпретировать как r-местный предикат на $M_1 \times \cdots \times M_r$. Далее будем говорить, что набор элементов $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) \in M_1 \times \cdots \times M_r$ удовлетворяет L-условию C, если $C(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) = 1$, т.е. набор $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*)$ реализует истинное значение предиката $C = C(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$.

Пример 2. L-условие $A(\lambda_1, \lambda_2) = [\lambda_1 < \lambda_2]$ на множестве натуральных чисел $\{1,2\}^2$ принимает следующие значения:

$$A(1,1) = A(2,1) = A(2,2) = 0, \quad A(1,2) = 1.$$

Отсюда можем заключить, что L-условие A тождественно ложно на $\{1\}^2$ и не является таковым на множестве $\{1,2\}^2$.

Предложение 1. *Пусть M и N — произвольные линейно упорядоченные множества, причем M не менее чем счетно. Если некоторое L-условие ранга не выше r тождественно истинно на множестве M^r, то оно тождественно истинно на N^r.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный набор $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) \in N^r$ со значениями компонент: $v_1 < \cdots < v_s$, $1 \leqslant s \leqslant r$, и покажем, что $C(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) = 1$. Поскольку M бесконечно и любые два конечных линейно упорядоченных множества одинаковой мощности изоморфны, можем построить инъективное отображение $f : \{v_1, \ldots, v_s\} \to M$, сохраняющее линейный порядок. Поэтому, положив

$$\lambda_i^{**} = f(v_j) \Leftrightarrow \lambda_i^* = v_j, \quad i \in \overline{1,r},$$

будем иметь для $i, j \in \overline{1,r}$ следующие равенства:

$$[\lambda_i = \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^* \\ \lambda_j = \lambda_j^*}} = [\lambda_i = \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^{**} \\ \lambda_j = \lambda_j^{**}}}; \quad [\lambda_i < \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^* \\ \lambda_j = \lambda_j^*}} = [\lambda_i < \lambda_j]\Big|_{\substack{\lambda_i = \lambda_i^{**} \\ \lambda_j = \lambda_j^{**}}}.$$

Таким образом, $C(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_r^*) = C(\lambda_1^{**}, \ldots, \lambda_r^{**}) = 1$. □

Определение 3. *Будем говорить, что два L-условия C_1 и C_2 эквивалентны, и писать $C_1 \sim C_2$, если для любого линейно упорядоченного множества M L-условие $C_1 \leftrightarrow C_2$ тождественно истинно на M^r. Ввиду предложения 1 достаточно проверить тождественную истинность, например, при $M = \mathbb{N}$.*

Пример 3. Справедливы следующие отношения L-условий:

$$[\lambda_1 = \lambda_2] \vee [\lambda_3 < \lambda_4] \sim [\lambda_3 < \lambda_4] \vee [\lambda_1 = \lambda_2], \quad [\lambda_1 = \lambda_2] \sim [\lambda_1 = \lambda_2] \wedge [\lambda_3 = \lambda_3].$$

Пусть C_1 и C_2 — два эквивалентных L-условия рангов r и s, соответственно, $r \leqslant s$. Из определения 3 ясно, что $C_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_s^*) = C_2(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_s^*)$ для любых элементов $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_s^*$ произвольного линейно упорядоченного множества. Более того, справедливо правило замены: если A есть подформула L-условия C, и $A \sim B$, то замена A на B в C приведет к L-условию эквивалентному C.

Отметим также, что не все эквивалетности L-условий можно получить по правилу замены или путем использования свойств логических операций (коммутативность дизъюнкции и т.п.).

Предложение 2. *Для любых натуральных $i, j, k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие отношения L-условий:*

(5) $\quad [\lambda_i = \lambda_i] \sim 1;$

(6) $\quad [\lambda_i = \lambda_j] \sim [\lambda_j = \lambda_i];$

(7) $\quad [\lambda_i = \lambda_j] \wedge [\lambda_j = \lambda_k] \sim [\lambda_i = \lambda_j] \wedge [\lambda_j = \lambda_k] \wedge [\lambda_i = \lambda_k];$

(8) $\quad [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_k] \sim [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_k] \wedge [\lambda_i < \lambda_k];$

(9) $\quad [\lambda_i < \lambda_j] \oplus [\lambda_j < \lambda_i] \oplus [\lambda_i = \lambda_j] \oplus [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \wedge [\lambda_i = \lambda_j] \sim 1.$

Кроме того, из (5)-(9) следуют эквивалентности:

(10) $\quad [\lambda_i < \lambda_i] \sim 0;$

(11) $\quad [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \sim 0;$

(12) $\quad \neg[\lambda_i = \lambda_j] \sim [\lambda_i < \lambda_j] \vee [\lambda_j < \lambda_i];$

(13) $\quad \neg[\lambda_i < \lambda_j] \sim [\lambda_j < \lambda_i] \vee [\lambda_j = \lambda_i].$

Доказательство. Отношения (5)-(7) следуют из аксиом равенства: рефлексивности, симметричности и транзитивности, соответственно. А из аксиом транзитивности и трихотомии строгого линейного порядка следуют отношения (8) и (9), соответственно. Напомним, что любое отношение со свойствами транзитивности и трихотомии является антирефлексивным и асимметричным.

Выведем из (5)-(9) отношения (10) и (11) при помощи логических преобразований и правила замены. Используем (9) при $j = i$, затем (5):

$$[\lambda_i < \lambda_i] \sim [\lambda_i < \lambda_i] \wedge 1 \sim$$
$$\sim [\lambda_i < \lambda_i] \wedge ([\lambda_i < \lambda_i] \oplus [\lambda_i < \lambda_i] \oplus [\lambda_i = \lambda_i] \oplus [\lambda_i < \lambda_i] \wedge [\lambda_i < \lambda_i] \wedge [\lambda_i = \lambda_i]) \sim$$
$$\sim [\lambda_i < \lambda_i] \wedge (1 \oplus [\lambda_i < \lambda_i]) \sim [\lambda_i < \lambda_i] \oplus [\lambda_i < \lambda_i] \sim 0.$$

Из (8) при $k = i$ и (10) следует

$$[\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \sim [\lambda_i < \lambda_j] \wedge [\lambda_j < \lambda_i] \wedge [\lambda_i < \lambda_i] \sim 0.$$

Читателю не составит труда вывести отношения (12) и (13) самостоятельно. $\square$

Из отношений (12) и (13) следует

Предложение 3. *В каждом классе эквивалентности множества всех L-условий можно выбрать формулу, записанную в ДНФ без операции отрицания.*

Заметим, что для любого L-условия можно найти эквивалентное ему L-условие большего ранга. Обратное, вообще говоря, неверно.

3. О количестве элементов декартова произведения, удовлетворяющих некоторому L-условию

Пусть $M_1 \times \dots \times M_r$ — декартово произведение произвольных непустых подмножеств некоторого линейно упорядоченного множества. Далее мы покажем, что множество $M_1 \times \dots \times M_r$ можно разбить на попарно непересекающиеся классы таким образом, что для любого L-условия C либо все элементы произвольного класса удовлетворяют C, либо ни один из них. Вычислив мощности этих классов, мы найдем выражение для количества элементов $M_1 \times \dots \times M_r$, удовлетворяющих произвольному L-условию.

Пусть $v_1 < \dots < v_t$ — все различные значения компонент произвольного набора $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in M_1 \times \dots \times M_r$, $1 \leqslant t \leqslant r$. Положим $I_k = \{i \mid \lambda_i = v_k\}$ для k от 1 до t. Тогда набор $(I_1, \dots, I_t)$ есть упорядоченное разбиение множества индексов $\{1, \dots, r\}$, т.е.

$$\{1, \dots, r\} = I_1 \cup \dots \cup I_t, \quad I_i \cap I_j = \varnothing \Leftrightarrow i \neq j.$$

Таким образом, любому набору из $M_1 \times \dots \times M_r$ соответствует единственное упорядоченное разбиение $\{1, \dots, r\}$, откуда вытекает утверждение следующей теоремы.

Теорема 1. *Декартово произведение $M_1 \times \dots \times M_r$, составленное из непустых подмножеств произвольного линейно упорядоченного множества, представимо в виде объединения попарно непересекающихся классов:*

$$M_1 \times \dots \times M_r = \bigcup_{t=1}^{r} \bigcup_{\substack{I_1 \cup \ldots \cup I_t = \{1,\ldots,r\} \\ I_i \cap I_j = \varnothing \Leftrightarrow i \neq j}} \left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle,$$

где класс $\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle$ состоит из всех наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in M_1 \times \dots \times M_r; \\ \lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow \exists k \, (i \in I_k) \wedge (j \in I_k); \\ \lambda_i < \lambda_j \Leftrightarrow \exists p \, \exists q \, (i \in I_p) \wedge (j \in I_q) \wedge (p < q). \end{cases}$$

Пример 4. Пусть декартово произведение $M_1 \times M_2$ составлено из подмножеств целых чисел $M_1 = \{0, 1, 2\}$ и $M_2 = \{0, 1, 2, 3\}$. Имеют место равенства:

$$\left\langle {M_1 \times M_2 \atop (\{1,2\})} \right\rangle = \{(0,0), (1,1), (2,2)\};$$

$$\left\langle {M_1 \times M_2 \atop (\{1\},\{2\})} \right\rangle = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\};$$

$$\left\langle {M_1 \times M_2 \atop (\{2\},\{1\})} \right\rangle = \{(1,0), (2,0), (2,1)\}.$$

Лемма 1. *Пусть C — произвольное L-условие ранга не выше r. Тогда для любого упорядоченного разбиения $(I_1, \dots, I_t)$ множества $\{1, \dots, r\}$ либо каждый элемент класса $\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle$ удовлетворяет C, либо ни один из них.*

Доказательство. Для L-условий ранга 0 утверждение леммы очевидно. Далее положим ранг C больше нуля. По определению $\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle$ все наборы

$(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ из этого класса удовлетворяют фиксированному упорядочению компонент $\lambda_1,\dots,\lambda_r$. Поэтому мы можем построить L-условие ранга r, соответствующее этому упорядочению, следующим образом:

$$K=\bigwedge_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant r}}K_{ij},\quad K_{ij}=\begin{cases}[\lambda_i<\lambda_j],\ \text{если } \lambda_i<\lambda_j;\\ [\lambda_i=\lambda_j],\ \text{если } \lambda_i=\lambda_j;\\ 1,\ \text{если } \lambda_i>\lambda_j.\end{cases}$$

Далее, ввиду предложения 3 условие C можно привести к ДНФ вида

$$C\sim\bigvee_{i=1}^{s}(C_{i1}\wedge\dots\wedge C_{ik_i}),$$

где C_{uv} — предикаты типа $[\lambda_i<\lambda_j]$ или $[\lambda_i=\lambda_j]$. Предположим, что в классе $\left\langle{M_1\times\dots\times M_r \atop (I_1,\dots,I_t)}\right\rangle$ нашелся набор $(\lambda_1^*,\dots,\lambda_r^*)$, удовлетворяющий условию C. Тогда $(\lambda_1^*,\dots,\lambda_r^*)$ удовлетворяет каждому конъюнкту некоторого дизъюнкта $C_{j1}\wedge\dots\wedge C_{jk_j}$. Значит, каждый предикат из $C_{j1},\dots,C_{jk_j}$ обязательно встретится в K. Таким образом, любой набор из класса $\left\langle{M_1\times\dots\times M_r \atop (I_1,\dots,I_t)}\right\rangle$ удовлетворяет дизъюнкту $C_{j1}\wedge\dots\wedge C_{jk_j}$, а следовательно, условию C. □

Лемма 2. *Пусть $\{N_i\}_{i=1}^t$ — семейство конечных непустых подмножеств некоторого линейно упорядоченного множества. Если $N=N_1\cap\dots\cap N_t\neq\varnothing$ и $[\min N,\max N]\cap(N_i\backslash N)=\varnothing$ для всех i от 1 до t, то мощность множества*

$$V=\{(v_1,\dots,v_t)\in N_1\times\dots\times N_t\mid v_1<\dots<v_t\}$$

равна

$$\binom{|N|}{t}+b_{t-1}\binom{|N|}{t-1}+\dots+b_1\binom{|N|}{1}+b_0\binom{|N|}{0},\tag{14}$$

где b_s — целые неотрицательные коэффициенты, зависящие от $N_1,\dots,N_t$. Более того, если $N\in\{N_i\}_{i=1}^t$, то $b_0=0$, а при $N_1=\dots=N_t$ все b_s равны нулю.

Доказательство. Разобьем множество V на попарно непересекающиеся классы $V_0,\dots,V_t$ по следующему правилу: $(v_1,\dots,v_t)\in V_s$ тогда и только тогда, когда среди $v_1,\dots,v_t$ найдется ровно s компонент, значения которых принадлежат N. Ввиду условий:

$$v_1<\dots<v_t;\qquad [\min N,\max N]\cap(N_i\backslash N)=\varnothing,\quad i\in\overline{1,t},$$

справедливо утверждение: если $i<j<k$ и $v_i,v_k\in N$, то $v_j\in N$. Значит, для любого набора $(v_1,\dots,v_t)\in V_s$ существует k от 0 до $t-s$ такое, что $v_{k+1},\dots,v_{k+s}\in N$. При этом $v_i<\min N$ для $i\in\overline{1,k}$, и $v_i>\max N$ для $i\in\overline{k+s+1,t}$. Таким образом, имеет место равенство

$$|V_s|=\sum_{k=0}^{t-s}c_kd_ke_k,$$

где d_k,c_k,e_k равны, соответственно, мощностям множеств

$$\{(v_{k+1},\dots,v_{k+s})\in V|v_{k+1},\dots,v_{k+s}\in N\},$$

$$\{(v_1,\dots,v_k)\in V|v_k<\min N\},\{(v_{k+s+1},\dots,v_t)\in V|\max N<v_{k+s+1}\}.$$

Нетрудно видеть, что d_k равно числу сочетаний из $|N|$ по s для любого k от 1 до $t-s$, поэтому

$$|V_s| = \binom{|N|}{s} \sum_{k=0}^{t-s} c_k e_k = \binom{|N|}{s} b_s.$$

В итоге, имеем

$$|V| = |V_t| + \cdots + |V_0| = b_t \binom{|N|}{t} + b_{t-1} \binom{|N|}{t-1} + \cdots + b_1 \binom{|N|}{1} + b_0 \binom{|N|}{0},$$

где, как легко проверить, $b_t = 1$.

Предположим, что $N = N_k$ для некоторого k. Тогда в любом наборе из V значение компоненты v_k принадлежит пересечению N, а значит, $b_0 = |V_0| = 0$. Рассуждая аналогично, если $N_1 = \cdots = N_t$, то $b_{t-1} = \cdots = b_0 = 0$. □

Лемма 3. *Пусть непустые подмножества $M_1, \ldots, M_r$ некоторого линейно упорядоченного множества конечны и $M = M_1 \cap \cdots \cap M_r \neq \varnothing$. Если $[\min M, \max M] \cap (M_i \backslash M) = \varnothing$ для всех i от 1 до r, то для любого упорядоченного разбиения $(I_1, \ldots, I_t)$ множества $\{1, \ldots, r\}$ имеет место равенство*

$$\left|\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle\right| = \binom{|M|}{t} + b_{t-1} \binom{|M|}{t-1} + \cdots + b_1 \binom{|M|}{1} + b_0 \binom{|M|}{0}, \tag{15}$$

где b_s — целые неотрицательные коэффициенты, зависящие от $M_1, \ldots, M_r$ и $(I_1, \ldots, I_t)$. Более того, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^r$, то $b_0 = 0$, а при $M_1 = \cdots = M_r$ все b_s равны нулю.

Доказательство. Из определения класса $\left\langle {M_1 \times \cdots \times M_r \atop (I_1, \ldots, I_t)} \right\rangle$ следует, что его мощность равна мощности множества

$$V = \{(v_1, \ldots, v_t) \mid v_1 < \cdots < v_t; v_i \in \bigcap_{j \in I_i} M_j, i = 1, \ldots, t\},$$

где, как нетрудно заметить,

$$\bigcap_{i=1}^{t} \bigcap_{j \in I_i} M_j = M \neq \varnothing.$$

Из условий леммы и свойств операций пересечения и разности множеств следуют равенства

$$\varnothing = \bigcap_{j \in I_i} [\min M, \max M] \cap (M_j \backslash M) = [\min M, \max M] \cap \left(\left(\bigcap_{j \in I_i} M_j \right) \backslash M \right)$$

для любого i от 1 до t. Таким образом, множество V удовлетворяет условиям предыдущей леммы и мы получаем равенство (15).

Предположим, что $M = M_k$ для некоторого k от 1 до r. Тогда найдется такое i, что $k \in I_i$, а следовательно,

$$\bigcap_{j \in I_i} M_j = M = \bigcap_{i=1}^{t} \bigcap_{j \in I_i} M_j,$$

и мы попадаем в условия предыдущей леммы. Аналогично, если $M_1 = \cdots = M_r$, то

$$\bigcap_{j \in I_1} M_j = \cdots = \bigcap_{j \in I_t} M_j.$$

□

Теорема 2. *Пусть $M_1, \dots, M_r$ — непустые конечные подмножества некоторого линейно упорядоченного множества, C — произвольное L-условие ранга не выше r. Если выполнены условия:*

$$M = M_1 \cap \dots \cap M_r \neq \varnothing; \qquad [\min M, \max M] \cap (M_i \backslash M) = \varnothing, \quad i \in \overline{1, r};$$

то количество элементов из $M_1 \times \dots \times M_r$, удовлетворяющих условию C, выражается в виде

$$\sum_{t=1}^{r} a_t \binom{|M|}{t} + \sum_{t=0}^{r} b_t \binom{|M|}{t},$$

где a_s, b_s — целые неотрицательные коэффициенты, b_s зависят от $M_1, \dots, M_r$ и C, a_s зависят только от C. Более того, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^{r}$, то $b_0 = 0$, а при $M_1 = \dots = M_r$ все b_s равны нулю.

Доказательство. Обозначим через $C_{M_1 \times \dots \times M_r}$ множество всех элементов из $M_1 \times \dots \times M_r$, удовлетворяющих условию C. Согласно теореме 1 и лемме 1 $C_{M_1 \times \dots \times M_r}$ является объединением классов $\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle$, удовлетворяющих C. Обозначив за P_t множество всех таких классов, из теоремы 1 и предыдущей леммы получаем равенства

$$|C_{M_1 \times \dots \times M_r}| = \sum_{t=1}^{r} \sum_{(I_1, \dots, I_t) \in P_t} \left| \left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle \right| =$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{(I_1, \dots, I_t) \in P_t} \left(\binom{|M|}{t} + \sum_{j=0}^{t-1} B_j \left(\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle \right) \binom{|M|}{j} \right).$$

После упрощения и приведения подобных будем иметь

$$|C_{M_1 \times \dots \times M_r}| = \sum_{t=1}^{r} |P_t| \binom{|M|}{t} + \sum_{t=1}^{r} \sum_{j=0}^{t-1} \binom{|M|}{j} \sum_{(I_1, \dots, I_t) \in P_t} B_j \left(\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle \right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{r} a_t \binom{|M|}{t} + \sum_{t=0}^{r} b_t \binom{|M|}{t}.$$

Согласно предыдущей лемме, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^{r}$, то все $B_0(\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle)$ равны нулю, а следовательно, $b_0 = 0$. Если же $M_1 = \dots = M_r$, то все $B_j(\left\langle {M_1 \times \dots \times M_r \atop (I_1, \dots, I_t)} \right\rangle)$, $j \in \overline{0, t-1}$, равны нулю, а значит, $b_t = 0$ для всех t. □

4. L-условия и функция бинарного веса числа

Перед началом нам необходимо отметить следующее. До этого момента в рассуждениях мы использовали классический биномиальный коэффициент, определенный для целых $n \geqslant 0$, k следующим образом:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \text{ если } n \geqslant k \geqslant 0; \\ 0, \text{ если } n < k \text{ или } k < 0. \end{cases}$$

В комбинаторных задачах бывает полезным расширить область определения биномиального коэффициента на все целые n и k, чтобы, например, не заботиться об ограничениях на параметры или индексы в комбинаторных выражениях (см. [6]). Хотя задавать расширение можно по-разному, целесообразнее это делать с сохранением некоторых свойств классического биномиального коэффициента, например, рекуррентного соотношения

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \tag{16}$$

В условиях этого соотношения расширение по-прежнему определяется неоднозначно, необходимо и достаточно определить $\binom{n}{k}$ для каждого отрицательного n при любом фиксированном k (k может быть разным для разных n). В работе [6] автор задавал такое расширение, распространяя свойство $\binom{n}{n} = 1$ на все целые n. Далее в настоящей работе мы, распространяя свойство $\binom{n}{k} = 0$, $k < 0$, используем следующее определение расширенного биномиального коэффициента:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (n-i), & \text{если } k \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } k < 0. \end{cases} \qquad n, k \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Читателю не составит труда проверить выполнение соотношения (16) для (17).

Также мы введем мультиномиальный коэффициент, определив его для целых $n, k_1, \ldots, k_s$ следующим образом:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_s} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-k_1-\cdots-k_{s-1}}{k_s}.$$

В следующей лемме мы отметим ряд важных для нас свойств биномиального коэффициента, некоторые из которых будут использоваться часто и без дополнительных упоминаний.

Лемма 4. *Если среди целых чисел $k_1, \ldots, k_s$ найдется хотя бы одно отрицательное, то для любого целого n*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_s} = 0.$$

Если все целые числа $k_1, \ldots, k_s$ неотрицательны, $n = k_1 + \cdots + k_s$, то имеет место равенство

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_s!},$$

в правой части которого записано количество неупорядоченных разбиений множества мощности n на s подмножеств мощностей $k_1, \ldots, k_s$. Для любых целых $n, k_1, \ldots, k_s$ и любого $i \in \overline{1, s-1}$ имеет место тождество

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_s} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_{i+1}, k_i, \ldots, k_s}. \tag{18}$$

Для любых целых $n \geqslant 0$, k справедливо равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{19}$$

Для любых целых n, k справедливо тождество

$$(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}. \tag{20}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Из условий второго имеем

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_s} = \frac{1}{k_1!}\prod_{i=0}^{k_1-1}(n-i)\cdots\frac{1}{k_s!}\prod_{i=0}^{k_s-1}(n-k_1-\cdots-k_{s-1}-i) = \frac{n!}{k_1!\cdots k_s!}.$$

Далее, докажем (18) при $s=2$. Тождество выполнено, если $k_1<0$ или $k_2<0$. Далее полагая $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$, имеем

$$\binom{n}{k_1,k_2} = \binom{n}{k_2,k_1} \Leftrightarrow \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} = \binom{n}{k_2}\binom{n-k_2}{k_1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{k_1-1}(n-i)\prod_{i=0}^{k_2-1}(n-k_1-i) = \prod_{i=0}^{k_2-1}(n-i)\prod_{i=0}^{k_1-1}(n-k_2-i) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{k_1-1}(n-i)\prod_{i=k_1}^{k_1+k_2-1}(n-i) = \prod_{i=0}^{k_2-1}(n-i)\prod_{i=k_2}^{k_1+k_2-1}(n-i).$$

Индукция по s и тождества

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_{s+1}} = \binom{m}{k_1,\ldots,k_s}\binom{m-k_1-\cdots-k_s}{k_{s+1}} = \binom{m}{k_1}\binom{m-k_1}{k_2,\ldots,k_{s+1}}$$

завершают доказательство третьего утверждения. Если $n<k$ или $k<0$, то обе части равенства (19) равны нулю. Пусть $n \geqslant k \geqslant 0$, тогда из третьего утверждения получаем

$$\binom{n}{k,n-k} = \binom{n}{n-k,k} \Leftrightarrow \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k} = \binom{n}{n-k}\binom{k}{k} \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Докажем последнее утверждение. При $k \geqslant 0$ имеем

$$(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{k+1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(n-i) = (k+1)\binom{n}{k+1}.$$

Если $m<0$, то обе части (20) равны нулю. □

Теорема 3. *Пусть C — произвольное L-условие ранга не выше r, $r \in \mathbb{N}$. Тогда для любых целых неотрицательных чисел $m, u_1,\ldots,u_r$ мощность множества*

$$\left\{(\mu_1,\ldots,\mu_r) \in \{0,\ldots,2^m-1\}^r \mid C(\mu_1,\ldots,\mu_r)=1;\ \omega(\mu_i)=u_i,\ i\in\overline{1,r}\right\} \tag{21}$$

выражается в виде

$$\sum_{t=0}^{u_1+\cdots+u_r} a_t\binom{m}{t}, \tag{22}$$

где a_s — целые неотрицательные коэффициенты, зависящие только от C и $u_1,\ldots,u_r$. Более того, $a_0 \neq 0$, только когда набор $(0,\ldots,0)$ принадлежит множеству (21).

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда все параметры $u_1, \dots, u_r$ положительны. Введя для удобства записи константу $u_0 = 0$, каждому набору $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ поставим в соответствие набор

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{u_1}, \lambda_{u_1+1}, \dots, \lambda_{u_1+u_2}, \dots, \lambda_{u_1+\dots+u_r}),$$

где $\lambda_{u_{k-1}+j}$ — номер разряда j-ой единицы в двоичной записи μ_k (единицы считаем слева направо, номера разрядов, как обычно, справа налево, начиная с нулевого). Т.к. любое натуральное число однозначно определяется номерами разрядов единиц в его двочиной записи, следующие множества равномощны:

$$\big\{(\mu_1, \dots, \mu_r) \in \{0, \dots, 2^m - 1\}^r \mid \omega(\mu_i) = u_i,\, i \in \overline{1, r}\big\}, \tag{23}$$

$$\big\{(\lambda_1, \dots, \lambda_{u_1+\dots+u_r}) \in \{0, \dots, m-1\}^{u_1+\dots+u_r} \mid \lambda_{u_{i-1}+1} > \dots > \lambda_{u_{i-1}+u_i},\, i \in \overline{1, r}\big\}. \tag{24}$$

Далее, введем функцию γ_A, сопоставляющую высказыванию A его истинностное значение. Построим формулу $\tilde{C}$ путем замены в L-условии C всех предикатов типа $[\lambda_i = \lambda_j]$, $[\lambda_i < \lambda_j]$, соответственно, на следующие выражения:

$$\gamma_{u_i = u_j} \wedge E, \qquad \text{где } E = \bigwedge_{k=1}^{\min\{u_i, u_j\}} [\lambda_{u_{i-1}+k} = \lambda_{u_{j-1}+k}];$$

$$\big(\gamma_{u_i < u_j} \wedge E\big) \vee \bigvee_{k=1}^{\min\{u_i, u_j\}} [\lambda_{u_{i-1}+k} < \lambda_{u_{j-1}+k}] \wedge \bigwedge_{h=1}^{k-1} [\lambda_{u_{i-1}+h} = \lambda_{u_{j-1}+h}].$$

Теперь введем обозначение

$$M = \tilde{C} \wedge \bigwedge_{k=1}^{r} \bigwedge_{h=1}^{u_k - 1} [\lambda_{u_{k-1}+h+1} < \lambda_{u_{k-1}+h}].$$

Полученная формула является L-условием ранга не выше $u_1 + \dots + u_r$ при любых фиксированных парматретрах $u_1, \dots, u_r$. Более того, всякий элемент из множества (24) удовлетворяет M тогда и только тогда, когда соответствующий ему элемент из множества (23) удовлетворяет C. Таким образом, по теореме 2 мощность множества (21) выражается в виде

$$\sum_{t=1}^{u_1+\dots+u_r} a_t \binom{m}{t},$$

где целые неотрицательные коэффициенты a_t зависят только от M. Как следствие, a_t зависят от C и параметров $u_1, \dots, u_r$.

Перейдем к оставшимся случаям. Если все параметры $u_1, \dots, u_r$ равны нулю, то множество (21) содержит не более одного элемента, а именно элемент $(0, \dots, 0)$. Поэтому, если $C(0, \dots, 0) = 1$, то в сумме (22) имеем $a_0 = 1$, если же $C(0, \dots, 0) = 0$, то $a_0 = 0$.

Далее, предположим, что среди чисел $u_1, \dots, u_r$ найдутся как положительные, так и нулевые. Считая для определенности $u_k = 0$, имеем $\mu_k = 0$. Как следствие, мощность множества (21) равна количеству наборов

$$(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r) \in \{0, \dots, 2^m - 1\}^{r-1},$$

удовлетворяющих условиям:

$$\tilde{C}(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r) = 1; \quad \omega(\mu_i) = u_i, i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots r\},$$

где L-условие $\tilde{C}$ получено из C заменой каждого предиката, содержащего в своей записи μ_k, на соответствующие логические константы, а именно

$$[\lambda_j < \lambda_k] = 0; \quad [\lambda_k < \lambda_j] = \gamma_{u_j>0}; \quad [\lambda_k = \mu_j] = [\lambda_j = \lambda_k] = \gamma_{u_j=0}, \qquad j \in \overline{1,r}.$$

Таким образом, данный случай можно последовательно свести к ситуации, рассмотренной ранее, когда все параметры $u_1, \ldots, u_r$ положительны. □

Теорема 4. *Для любых натуральных m, u, v мощности множеств*

(25) $$\{(\mu_1, \mu_2) \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}^2 \mid \omega(\mu_1) = u;\ \omega(\mu_2) = v\},$$

(26) $$\{(\mu_1, \mu_2) \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}^2 \mid \omega(\mu_1) = u;\ \omega(\mu_2) = v;\ \mu_1 < \mu_2;\}$$

равны, соответсвеноо,

$$\sum_{i=1}^{u+v} \binom{m}{i} \binom{i}{i-u, i-v, u+v-i},$$
$$\sum_{i=1}^{u+v} \binom{m}{i} \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k}{i-u-1, i-v, u+v-i-k-1}.$$

Доказательство. Обозначим множества (25) и (26) через A и B, соответственно. Из теорем 3 и 2 следует, что

$$|A| = \sum_{i=1}^{u+v} a_i \binom{m}{i}, \qquad |B| = \sum_{i=1}^{u+v} b_i \binom{m}{i},$$

где коэффициенты a_s, b_s равны количеству классов $\left\langle {\{0,m-1\}^{u+v} \atop (I_1,\ldots,I_s)} \right\rangle$ множества

$$\left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_u, \lambda_{u+1}, \ldots, \lambda_{u+v}) \in \{0, m-1\}^{u+v}\right\},$$

удовлетворяющих, соответственно, L-условиям

$$C_1 = \bigwedge_{h=1}^{u-1} [\lambda_{h+1} < \lambda_h] \wedge \bigwedge_{h=1}^{v-1} [\lambda_{u+h+1} < \lambda_{u+h}],$$
$$C_2 = C_1 \wedge \left(\gamma_{u<v} \wedge \bigwedge_{k=1}^{\min\{u,v\}} [\lambda_k = \lambda_{u+k}] \vee \bigvee_{k=1}^{\min\{u,v\}} [\lambda_k < \lambda_{u+k}] \wedge \bigwedge_{h=1}^{k-1} [\lambda_h = \lambda_{u+h}] \right).$$

Начнем с вычиления a_s, $s \in \overline{1, u+v}$. Нужно пересчитать все разбиения $(I_1, \ldots, I_s)$ множества индексов $\{1, \ldots, u+v\}$, удовлетворяющие условиям:

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_u,\ \lambda_{u+1} > \cdots > \lambda_{u+v}.$$

Отождествим множества $I_1, \ldots, I_s$ с урнами, а индексы $1, \ldots, u$ и $u+1, \ldots, u+v$, соответственно, с красными и синими шарами. В каждой урне может находиться либо один красный шар, либо один синий, либо один красный и один синий. Пусть в этих случаях урны окрашиваются, соответственно, в красный, синий и фиолетовый цвета. Получаем, что каждому разбиению $(I_1, \ldots, I_s)$ соответствует своя цветовая гамма урн $I_1, \ldots, I_s$, и наоборот. Предположим, что красные шары уже некоторым образом расположены в урнах, тогда остается ровно $s-u$ пустых урн, в которые будут помещены только синие шары. Таким образом, мы всегда имеем $s-u$ синих урн, $s-v$ красных, и $u+v-s$ фиолетовых. Значит, коэффициент a_s равен количеству разбиений множества из s элементов на три подмножества с мощностями $s-u$, $s-v$, и $u+v-s$, т.е.

$$a_s = \binom{s}{s-u, s-v, u+v-s}.$$

Переходим к вычилению b_s, $s \in \overline{1, u+v}$, продолжая использовать комбинаторную интерпритацию. После раскрытия скобок L-условие C_2 будет записано в ДНФ так, что никакие два дизъюнкта не могут принимать одновременно истинные значения. Значит, остается для каждого дизъюнкта в отдельности пересчитать количество соответствующих разбиений $(I_1, \dots, I_s)$. При любом k от 1 до $\min\{u,v\}$ для дизъюнкта

$$C_1 \wedge [\lambda_k < \lambda_{u+k}] \wedge \bigwedge_{h=1}^{k-1} [\lambda_h = \lambda_{u+h}]$$

имеем: урны $I_1, \dots, I_{k-1}$ окрашены в фиолетовый цвет, урна I_k — в синий, остальные урны допускают любую окраску. Значит, в этом случае количество разбиений $(I_1, \dots, I_s)$ равно $\binom{s-k}{s-u, s-v-1, u+v-s-k+1}$. Далее, для дизъюнкта

$$C_1 \wedge [u < v] \wedge \bigwedge_{k=1}^{\min\{u,v\}} [\lambda_k = \lambda_{u+k}]$$

существует не более одной цветовой гаммы урн $I_1, \dots, I_s$, а именно $I_1, \dots, I_u$ окрашены в фиолетовый цвет, $I_{u+1}, \dots, I_s$ окрашены в синий. Это возможно только при $s = v$. Значит, количество разбиений $(I_1, \dots, I_s)$ выражается в виде $\delta_{[u<v]\wedge[s=v]}$, где δ_A — функция, переводящая высказывание A в целое число 1, если оно истинно, в 0, если ложно. Таким образом, имеем

$$b_s = \delta_{[u<v]\wedge[s=v]} + \sum_{k=1}^{\min\{u,v\}} \binom{s-k}{s-u-1, s-v, u+v-s-k+1}.$$

Поскольку

$$\delta_{[u<v]\wedge[s=v]} = \sum_{k=\min\{u,v\}+1}^{v} \binom{s-k}{s-u-1, s-v, u+v-s-k+1},$$

b_s принимает искомый вид. □

Теорема 5. *Для любых целых $m, u_1, \dots, u_q$ справедливо тождество*

$$\binom{m}{u_1} \cdots \binom{m}{u_q} = \sum_{i_{q-1}=u_q}^{u_1+\dots+u_q} \binom{m}{i_{q-1}} \sum_{i_{q-2}=u_{q-1}}^{u_1+\dots+u_{q-1}} \cdots \sum_{i_0=u_1}^{u_1} h(i_0, \dots, i_{q-1}), \tag{27}$$

где $h(i_0, \dots, i_{q-1})$ не зависят от m и представляются в виде

$$h(i_0, \dots, i_{q-1}) = \prod_{j=1}^{q-1} \binom{i_j}{i_j - u_{j+1}, i_j - i_{j-1}, u_{j+1} + i_{j-1} - i_j}.$$

Доказательство. Вначале докажем для любых целых m, u, v следующее тождество:

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v} = \sum_{i=u}^{u+v} \binom{m}{i} \binom{i}{i-u, i-v, u+v-i}. \tag{28}$$

Если $u < 0$ или $v < 0$, то обе части (28) равны нулю. Положим далее, что $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, и докажем (28) индукцией по v. При $v = 0$ равенство (28) примет вид

$$\binom{m}{u} = \binom{m}{u}\binom{u}{0, u, 0}. \tag{29}$$

Используя предположение индукции, определение биномиального коэффициента (17), и равенство (19), получаем

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} = \frac{m-v}{v+1}\binom{m}{u}\binom{m}{v} =$$
$$= \frac{m-v}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v}\binom{m}{i}\binom{i}{i-u}\binom{u}{i-v}\binom{u+v-i}{u+v-i} =$$
$$= \frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v}(m-i+(i-v))\binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v}.$$

Теперь дважды применим (20):

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} = \frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v}(i+1)\binom{m}{i+1}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v}+$$
$$+\frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v}(u-(i-v-1))\binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v-1}.$$

В первой сумме проведем замену индекса суммирования, затем обе суммы распространим от u до $u + v + 1$:

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} = \frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v+1} i\binom{m}{i}\binom{i-1}{u}\binom{u}{i-v-1}+$$
$$+\frac{1}{v+1}\sum_{i=u}^{u+v+1}(u+v-i+1)\binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v-1}.$$

Покажем, что

$$i\binom{i-1}{u} + (u+v-i+1)\binom{i}{u} = (v+1)\binom{i}{u}.$$

Применяя (16), затем снова (20), будем иметь:

$$i\binom{i-1}{u} + (u-i)\binom{i}{u} = i\binom{i-1}{u} + (u-i)\binom{i-1}{u} - (i-u)\binom{i-1}{u-1} = 0.$$

Таким образом,

$$\binom{m}{u}\binom{m}{v+1} = \sum_{i=u}^{u+v+1}\binom{m}{i}\binom{i}{u}\binom{u}{i-v-1} = \sum_{i=u}^{u+v+1}\binom{m}{i}\binom{i}{i-u}\binom{u}{i-(v+1)}.$$

Перейдем к доказаетельству тождества (27) индукцией по q. При $q = 1$ тождество очевидно. Далее, используя предположение индукции и тождество

(28), для любого целого u_{q+1} получаем

$$\binom{m}{u_1}\cdots\binom{m}{u_{q+1}} = \sum_{i_{q-1}=u_q}^{u_1+\cdots+u_q}\binom{m}{u_{q+1}}\binom{m}{i_{q-1}}\sum_{i_{q-2}=u_{q-1}}^{u_1+\cdots+u_{q-1}}\cdots\sum_{i_0=u_1}^{u_1} h(i_0,\ldots,i_{q-1}) =$$
$$= \sum_{i_{q-1}=u_q}^{u_1+\cdots+u_q}\sum_{i_q=u_{q+1}}^{i_{q-1}+u_{q+1}}\binom{m}{i_q}\sum_{i_{q-2}=u_{q-1}}^{u_1+\cdots+u_{q-1}}\cdots\sum_{i_0=u_1}^{u_1} h(i_0,\ldots,i_q).$$

Остается показать, что верхний индекс суммирования по i_q можно заменить на $u_1+\cdots+u_{q+1}$. Если $u_k<0$ для некоторого $k\in\overline{1,q}$, то $h(i_0,\ldots,i_q)=0$ при любых целых $i_1,\ldots,i_q$. Пусть все $u_1,\ldots,u_q$ положительны, тогда мы распространяем сумму по i_q до $u_1+\cdots+u_{q+1}$, добавляя нулевые слагаемые. $\square$

Если все целые $m,u_1,\ldots,u_q$ положительны, то левая часть тождества (27), очевидно, равна мощности множества

$$\left\{(\mu_1,\ldots,\mu_r)\in\{0,\ldots,2^m-1\}^r \mid \omega(\mu_i)=u_i,\ i\in\overline{1,r}\right\}.$$

Обобщая рассуждения из теоремы 4, коэффициент при $\binom{m}{i_{q-1}}$ в правой части (27) можно проинтерпретировать как количество разбиений $(I_1,\ldots,I_{i_{q-1}})$ множества индексов $\{1,\ldots,u_1+\cdots+u_q\}$, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_{u_{k-1}+1}<\cdots<\lambda_{u_{k-1}+u_k},\qquad u_0=0,\ k\in\overline{1,q}.$$

References

[1] P. Hall, *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proc. London Math. Soc., **36** (1934), 29–95.

[2] M. Hall, Jr., *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1959.

[3] E. Krause, *On the collection process*, Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 497–504.

[4] A.I. Skopin, *Jacobi identity and P. Hall's collection formula in two types of transmetabelian groups*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **175** (1989), 106–112.

[5] V.M. Leontiev, *P.Hall's collection formulas with some restrictions on commutator subgroup*, August Möbius Contest, (2016), URL:www.moebiuscontest.ru/files/2016/leontiev.pdf

[6] V.M. Leontiev, *On Divisibility of Some Sums of Binomial Coefficients Arising From Collection Formulas*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **11**:5 (2018), 603–614.

Vladimir Markovich Leontiev
Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: v.m.leontiev@list.ru