

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Политехнический институт  
Кафедра «Теплотехники и гидрогазодинамики»

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ Кулагин В.А.  
«\_\_» июня 2021г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

Математическое моделирование термокапиллярной конвекции

13.04.01 – Теплоэнергетика и теплотехника

13.04.01.01 – Энергетика теплотехнологий

Научный руководитель

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

К.Т.Н.  
ученая степень

А.А. Пьяных  
инициалы, фамилия

Выпускник

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.Ю.Лахин  
инициалы, фамилия

Рецензент

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.С. Кузнецов  
инициалы, фамилия

Красноярск 2021

## РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация на тему «Математическое моделирование термпокапиллярной конвекции» содержит 57 страниц текстового документа, 12 иллюстраций, 1 таблица, 40 использованных источника.

КОНВЕКЦИЯ, ПЛЕНОЧНОЕ НАТЯЖЕНИЕ, НАГРЕВ, ЭФФЕКТ МАРАНГОНИ.

Цель диссертации: Построение математической модели процесса термпокапиллярной конвекции при различных условиях, путем решения одномерной и двумерной задачи

Задачи: Выполнить сравнение точного решения уравнений одномерного и двумерного стационарного течения свободной конвекции для плоского горизонтального слоя жидкости с постоянным градиентом температуры на нижней границе слоя и свободной верхней границей с коэффициентом поверхностного натяжения зависимым от температуры. Определить погрешность одномерного точного решения при различных степенях стеснения потока и числах Марангони, путем сравнения с численным двумерным решением.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава 1 Течение двухфазного поток, гидродинамика и теплообмен.....	9
1.1 Эффект Марангони.....	9
1.2 Термокапиллярная и термогравитационная конвекция при нагреве различными способами.....	11
1.2.1 Термокапиллярная и термогравитационная конвекция в слое, нагреваемого по краям.....	11
1.2.2 Радиационный нагрев поверхности раздела газ-жидкость...	14
1.2.3 Термокапиллярная конвекция в движущемся слое.....	18
1.2.4 Регулярные структуры, возникающие при локальном нагреве стекающей пленки жидкости.....	20
Вывод к главе.....	24
Глава 2 Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости с постоянным градиентом температуры на границе слоя.....	26
2.1 Постановка задачи.....	26
2.2 Решение задачи.....	29
2.2.1 Конвекция в случае, когда границами жидкости служат твердые плоскости.....	29
2.2.2 Конвекция в случае, когда верхняя граница слоя свободна	31
Вывод к главе.....	34
Глава 3 Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости с постоянным градиентом температуры на границах слоя и свободной верхней границей .....	35
3.1 Цель работы.....	35
3.2 Постановка одномерной стационарной задачи.....	36
3.3 Постановка двумерной стационарной задачи.....	45
3.4 Постановка двумерной стационарной задачи в безразмерном виде.....	47

3.5 План вычислительного эксперимента.....	48
Вывод к главе.....	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	53
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	54

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Процессы в пленках жидкости широко используются в различных технологических системах, так как обеспечивают высокую интенсивность теплопереноса и значительную поверхность контакта фаз при малых удельных расходах жидкости. Тонкие пленки жидкости могут также возникать при движении двухфазных потоков в каналах испарительно-конденсационных систем. Пленочные течения специально создаются в различных аппаратах химической технологии, пищевой, фармацевтической промышленности, в криогенной индустрии.

Совместное движение газа и жидкости имеет место в различных аппаратах химической промышленности и энергетике, например, при кольцевом режиме течения двухфазного потока в трубах или на стадии подготовки топлива в камерах сгорания.

Перспективным является использование тонких пленок жидкости, движущихся под действием газового потока, в системах охлаждения микроэлектронного оборудования, как в земных условиях, так и в условиях микрогравитации [Sherwood and Cray, 1992, Bar-Cohen et al., 1995, Kabov et al., 2004]. В таких системах процесс спутного течения пленки и газа происходит в микро или миниканалах. Характерная высота рассматриваемых каналов варьируется от 50 до 3000 мкм. При этом движение газа и жидкости как правило имеет ламинарный характер. Перспективными рабочими жидкостями для таких систем охлаждения является вода при давлениях ниже атмосферного, а также диэлектрическая жидкость FC-72. Вода позволяет снимать наиболее высокие тепловые потоки, но опасность разгерметизации ограничивает ее применение. FC-72 обладает относительно низким коэффициентом теплопроводности и теплотой фазового перехода. В работе выполнены расчеты для обеих жидкостей.

Существенную роль при движении двухфазных потоков в мини и микроканалах играет поверхностное натяжение. В условиях интенсивного

тепло и массообмена возникают термокапиллярные силы, вызываемые наличием градиента температуры на поверхности раздела газ-жидкость и концентрационнокапиллярные силы, вызываемые градиентом концентрации при течении многокомпонентных жидкостей.

Термокапиллярная конвекция в пленке жидкости, нагреваемой снизу, широко исследовалась в течение последних десятилетий. Тем не менее, вопрос о влиянии газовой фазы на поверхностные явления остается не до конца изученным. В большинстве статей изучение взаимодействия испарения и термокапиллярного эффекта проводится в предположении, что жидкость соприкасается только с собственным паром [Burelbach et al., 1988, Oron et al., 1997, Ажаев, 2004]. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что присутствие неконденсируемой компоненты в фазе пара сильно стимулирует появление поверхностной неустойчивости испаряющегося жидкого слоя [Haut and Colinet, 2004].

В 1994 г. в Институте теплофизики СО РАН д.ф.-м.н. О.А. Кабовым были обнаружены регулярные структуры в тонкой движущейся под действием гравитации пленке жидкости при ее локальном нагреве со стороны подложки. Структуры представляют собой вал жидкости в области верхней кромки нагревателя, из которого с определенной периодичностью стекают струи жидкости и тонкая пленка между ними. В лаборатории интенсификации процессов теплообмена Института теплофизики (зав. лаб. Кабов О.А.) ведется эксперимент, в котором предполагается получить и исследовать подобные регулярные структуры при совместном течении пленки жидкости и газа, как в земных условиях, так и в условиях микрогравитации. Было предложено теоретически изучить процессы в пленке жидкости, движущейся и под действием газового потока.

Устойчивость совместного движения неизотермической пленки жидкости и газа является сложной до конца не исследованной проблемой (Akershev and Alekseenko 1996, Gambaryan-Roisman and Stepban 2004). Касательные и нормальные напряжения на границе раздела газ-жидкость

вызываемые потоком газа, а также термокапиллярными силами, ответственны за нелинейные деформации, которые могут оказывать существенное влияние на интенсивность теплообмена и разрушение пленки.

**Цель работы** – исследование гидродинамики, теплообмена и испарения в локально нагреваемой пленке жидкости путем построения математической модели термокапиллярной конвекции.

**Предмет исследования** – процесс термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости при различных условиях.

**Новые научные результаты:**

Детальный анализ процесса термокапиллярной конвекции путем решения стационарной двумерной задачи процесса термокапиллярной конвекции, ранее не существовавшей.

**Методы исследований.** Для решения поставленных задач будут использованы как теоретические методы исследования, так и практические. В качестве теоретических методов будут использоваться анализ и оценка в рамках магистерской диссертации. В качестве практических методов рассматриваются математические модели процессов.

**Практическая значимость работы** заключается в том, что полученные результаты представляют собой новый этап в теоретическом изучении закономерностей пленочного течения, поскольку разработка и решение стационарной двумерной задачи даст возможность еще более точно проанализировать процессы термокапиллярной конвекции. Ряд выводов о характерных особенностях течения получены в общем виде аналитически, что может иметь особую ценность не только при тестировании применяемых численных алгоритмов, но и для формирования целостных физических представлений об изучаемом сложном явлении. Полученные результаты позволяют более целенаправленно и углубленно планировать эксперименты.

**Публикации.** По тематической составляющей диссертации опубликованы две статьи: в журнале «Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа» на тему «Термокапиллярная конвекция в

плоском слое жидкости с концентрационными источниками тепла» и в журнале «Теоретические основы химической технологии» на тему «Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости».



# Глава 1. Течение двухфазного потока, гидродинамика и теплообмен

## 1.1 Эффект Марангони

Началом изучения термокапиллярной конвекции можно считать эксперименты Бенара [Benard, 1900, 1901], наблюдавшего возникновение регулярной пространственно-периодической конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости (ячейки Бенара). Но следует отметить, что ячеистую структуру до этого наблюдали Varley и другие. Через некоторое время Рэлей [Rayleigh, 1916] решил задачу об устойчивости равновесия слоя со свободными границами, основанную на неоднородности плотности жидкости, подогреваемой снизу. Однако теория конвективных течений Рэля несколько расходилась с экспериментами Бенара. После экспериментов Блока [Block, 1956] и теоретического анализа Пирсона [Pearson, 1958] сейчас известно, что ячейки Бенара в большей степени вызваны поверхностным натяжением, чем вариациями плотности. Тем не менее, теория Рэля была подтверждена другими экспериментами, в которых ее применение правомерно.

Вследствие температурной зависимости поверхностного натяжения возникает термокапиллярное движение жидкости. Изменение поверхностного натяжения определяется зависимостью

$$\text{grad}\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial T} \text{grad}T \quad (1)$$

Для обычных жидкостей температурный коэффициент поверхностного натяжения  $(\partial\sigma/\partial T) < 0$  и слабо зависит от температуры. Тангенциальная сила на поверхности пленки, отнесенная к единице поверхности, равна [Левич 1959]

$$\tau_{sur} = grad\sigma \quad (2)$$

Сила  $\tau_{sur}$  направлена в противоположную сторону  $gradT$  и стремится привести поверхность жидкости в движение в направлении от мест с меньшим к местам с большим поверхностным натяжением, т.е. вызывает отток жидкости из областей на поверхности пленки, имеющих наибольшую температуру.

Часто в испарительно-конденсационных системах в качестве рабочих сред используются бинарные или многокомпонентные смеси. При испарении бинарных пленок жидкости поверхностное натяжение на границе раздела определяется как температурой, так и концентрацией компонентов. Впадины и гребни волн имеют различную температуру, что вызывает термокапиллярную конвекцию к гребням волн. Легкокипящий компонент имеет более высокую концентрацию в толстых частях пленки, что вызывает концентрационно-капиллярную конвекцию в жидкости. Концентрационная неустойчивость на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей рассмотрена в работе [Sternling and Scriven, 1959].

В зависимости от характера влияния концентрации компонентов на поверхностное натяжение бинарные смеси классифицируются на положительные, отрицательные и нейтральные. Положительными считаются смеси, у которых менее легкокипящий компонент имеет большее поверхностное натяжение. Снижение концентрации легкокипящего компонента в области утончения пленки приводит к росту поверхностного натяжения ( $\partial\sigma/\partial C < 0$ ), т.е. вызывает движение жидкости, противоположное термокапиллярному, и стабилизирует пленку. Противоположный эффект имеет место в отрицательных смесях ( $\partial\sigma/\partial C > 0$ ), разрушение которых является следствием коицентрационно-капиллярной конвекции.

Положительной бинарной смесью является раствор этилового спирта в воде. Для положительных смесей основным механизмом разрыва пленок является

высыхание либо термокапиллярное утончение до критической толщины. Влияние концентрационно-капиллярной конвекции на движение пленок в данной работе рассматриваться не будет.

## **1.2 Термокапиллярная конвекция при нагреве различными способами**

### **1.2.1 Термокапиллярная и термогравитационная конвекция в слое, нагреваемом по краям**

Жидкость помещается в контейнер, в котором боковые стенки имеют различную температуру, что создает градиент температуры вдоль свободной поверхности [Leontiev and Kirdyashkin 1968, Бердников 1977, Кирдяшкин 1982]. Такой способ является классическим и был использован во многих ранних работах. По проблеме стационарного термокапиллярного течения в прямоугольной полости в присутствии гравитационной конвекции и без нее выполнены обширные численные расчеты, начиная с конца 70 годов. Обзор и обобщение значительной части исследований приведено в работах [Полежаев и др. 1987, 1991]. В большинстве работ в качестве граничных условий бралась постоянная температура на стенках контейнера. Данные исследования имеют практическое приложение для выращивания кристаллов, например, методом Чохральского, а также для расчета состояния двухфазных систем в неизотермических условиях.

В ранних работах по исследованию термокапиллярной конвекции обычно предполагалось, что движение жидкости не вызывает деформацию свободной поверхности. В дальнейшем было установлено, что данное предположение достаточно хорошо выполняется только для относительно толстых слоев жидкости, более 4-5 мм. Термокапиллярная конвекция в мелкой широкой кювете глубиной  $h$  с различной температурой стенок ( $T_1 > T_2$ ) без учета деформации поверхности рассмотрена в работе [Левич 1959]. Тепловой конвекцией пренебрегается. Верхний слой жидкости ( $y=0$ )

движется под действием переменного поверхностного натяжения вызванного постоянным градиентом температуры

$$\sigma = \sigma(T_1) \frac{T_2 - T_1}{L} x \quad (3)$$

В нижней части кюветы имеет место возвратное течение под действием градиента давления вдоль кюветы. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\int_0^h u dy = 0 \quad (6)$$

$$(u)_{y=h} = 0, \quad \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \text{grad} T \quad (7)$$

Профиль скорости имеет вид

$$u = \frac{1}{4h\mu} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial T} (3y^2 - 4hy + h^3) \frac{dT}{dx}, \quad u_{y=0} = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial T} h \frac{dT}{dx} \quad (8)$$

Максимальная скорость на поверхности жидкости возрастает с ростом толщины слоя. Полученные зависимости справедливы при

$$h^3 \ll \frac{4\rho\nu^2 L}{\left| \frac{\partial\sigma}{\partial T} \right| \left| \frac{dT}{dx} \right|}, \text{Re}_\sigma = \frac{u_{y=0} h}{\nu} = \frac{1}{4\rho\nu^2} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{dT}{dx} h^2 \ll 1 \quad (9)$$

В работе [Бирих 1966] выполнено теоретическое исследование совместно протекающих тепловой гравитационной и термокапиллярной конвекции в бесконечном горизонтальном слое жидкости толщиной  $h = 2l$  с постоянным градиентом температуры на горизонтальных границах. Установлено, что при  $G_\sigma / Gr_b \gg 1$  имеет место чисто термокапиллярный режим течения ( $Gr_b = (dT / dx)g\beta l^4 / \nu^2$  - модифицированное число Грасгофа). В этом случае профиль скорости определяется параметром

$$G_\sigma = \frac{3(dT / dx)l^2}{\rho\nu^2} \left( -\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right) \quad (10)$$

а профиль температуры параметром  $G_\sigma Pr$ . Параметр  $G_\sigma$  является разновидностью записи числа Марангони. Из условия  $G_\sigma / Gr_b = 1$  в работе [Бирих 1966] предложен критерий характерной толщины слоя, определяющий вклад тепловой гравитационной конвекции

$$h_b = \left( -\frac{12}{\rho g \beta} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \right)^{1/2} \quad (11)$$

При  $h \ll h_b$  основной вклад вносит термокапиллярная конвекция. Для воды при  $T=25^\circ\text{C}$   $h_b=27,2$  мм. Пренебрежимо малое влияние сил Архимеда на термокапиллярную конвекцию можно ожидать при толщине горизонтального слоя порядка 270 мкм.

В работе [Кирдяшкин 1982] выполнено экспериментальное и теоретическое исследование профилей скорости и температуры в

нагреваемом сбоку горизонтальном слое жидкости  $7 \leq x_0 / h \leq 90$  для двух жестких теплоизолированных поверхностей и в условиях совместного влияния тепловых гравитационных и термокапиллярных сил.

### 1.2.2 Радиационный нагрев поверхности раздела газ-жидкость

На свободной поверхности жидкости создается неравномерное поле температур посредством локального лазерного или теплового излучения [Ostrach and Pradhan 1975, Shevtsova 1990, Индейкина и др. 1991, Shevtsova and Indeikina 1993, Kamotani et al. 1995, 1996]. Данные исследования имеют практическое приложение в сварке, зонной плавке, а также для метода фотохромной визуализации. При прохождении импульса ультрафиолетового лазерного излучения с энергией 0,08 Дж через горизонтальный слой этилового спирта толщиной 0,5 мм была зафиксирована скорость термокапиллярного движения на границе раздела до 3,5 см/с [Альварес-Суарес и Рязанцев 1986]. В работе [Растопов и Суходольский 1987] предложено использовать лазерно-индуцированный эффект Марангони для получения профиля поверхности жидкости с наперед заданной конфигурацией.

Также термокапиллярное явление наблюдается, когда жидкость нагревается посредством расположенного в ней тела [Ostrach and Kamotani 1996, Kamotani et al. 1995, 1996].

Термокапиллярное движение в тонких нагреваемых снизу слоях жидкости. Нагрев или охлаждение жидкости происходит через подложку, на которой располагается слой жидкости [Hershey 1939, Пшеничников и Токменина 1983, Van Hook et al. 1996].

[Pearson 1958] исследовал механизм термокапиллярной неустойчивости в тонком, нагреваемом снизу, горизонтальном бесконечном слое жидкости. Поверхность раздела считалась недеформируемой. Получены аналитические выражения для критического числа Марангони, определяющие границу

термокапиллярной неустойчивости в зависимости от безразмерного волнового числа ( $k = 2\pi h / \Lambda$ ) и числа Био ( $Bi = ah / \lambda_w$ )

$$Mn_{cr} = \frac{8k(k \cdot chk + Bi \cdot shk)(shk \cdot chk - k)}{sh^3k - k^3chk} \quad (\text{при усл. на стенке } T_w = const)$$

$$Mn_{cr} = \frac{8k(k \cdot chk + Bi \cdot shk)(shk \cdot chk - k)}{sh^2k \cdot chk - 2k \cdot shk + k^2chk - k^3shk} \quad (\text{при усл. на стенке } q_w = const)$$

Кривые  $T_{sur} Mn_{cr}(k)$  имеют минимум при  $h = k_m$ . С ростом  $Bi$  минимальное критическое число Марангони возрастает, а минимум смещается в область коротких волн. Термокапиллярная неустойчивость не связана с действием гравитации и, в частности, может вызывать ячеистые течения в стекающих пленках.

[Nield 1964] исследовал устойчивость горизонтального слоя с учетом термокапиллярных и подъемных сил. Численно была найдена связь между  $Ra_{cr}$ ,  $Mn_{cr}$  и  $k$  на границе устойчивости. Установлено, что при  $T_w = const$  и  $Bi=0$   $Ra_{cr}=669$  и  $Mn_{cr}=79,6$  соответственно для случаев, когда неустойчивость обусловлена только термогравитационным или только термокапиллярным механизмами. Вдоль кривой устойчивости критическое значение волнового числа равно  $k_{cr} \approx 2$ . Показано, что природа неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости, со свободной границей зависит от его толщины. При  $h \ll h_{hl}$  граница неустойчивости определяется числом Марангони. В работах [Scriven and Sterling 1964, Smith 1966] показано, что учет деформируемости свободной поверхности приводит к понижению устойчивости.

[Линде и др. 1984] приводят результаты экспериментальных исследований динамики многообразных диссипативных структур,

образующихся на поверхности раздела фаз в результате эффектов Марангони, обусловленных протеканием процессов тепло-и массопереноса при испарении. Имеет место спектр пространственно-периодических структур типа циркуляционных ячеек. Существуют релаксационные колебания с различными периодами и различными подструктурами, неподвижные и движущиеся мелкомасштабные ячейки, медленнодвигающиеся цилиндрические ячейки, крупномасштабные ячейки нескольких типов с подструктурой издвигающихся циркуляционных ячеек или движущихся релаксационных колебаний. В последнее десятилетие данное направление исследований интенсивно развивается. Формирование ячеистых структур приводит к существенной интенсификации теплообмена и массообмена [Hinkebein and Berg 1978, Слинько и др. 1983]. Различные типы ячеистых течений изучены в работах [Hinkebein and Berg 1978, Boek and Thess 1997, Bragard and Velarde 1998]

В работе [Пшеничников и Токменина 1983] выполнено экспериментальное исследование термокапиллярной конвекции в горизонтальных слоях этилового спирта толщиной 0,1-1,5 мм. Жидкость помещалась в металлические кюветы прямоугольной формы (102x40x20 мм), либо цилиндрической формы (диаметр 90 мм). К дну цилиндрической кюветы прижимался нагреватель диаметром 6 мм. Нагреватель и стенки кювет поддерживались при определенной температуре с помощью термостатов. Разность температур между нагреваемой и охлаждаемой поверхностями составляла 10-30 К. Деформация поверхности составляла до 0,7 мм. Угол наклона поверхности достигал до 1,4 градусов. Для  $h=0,4-0,5$  мм при  $\Delta T=20-30$  К было зафиксировано оголение нагретых участков.

Разработана теоретическая модель термокапиллярного движения в тонком слое жидкости с деформируемой поверхностью. Рассматривалось плоское ползущее движение жидкости, нелинейными членами пренебрегали. Продольную компоненту скорости  $U$  с толщиной жидкого слоя  $\xi(x)$  связывает уравнение



$$\frac{\partial^2 U}{dY^2} = \frac{d\xi}{dX} - \frac{d^3 \xi}{dX^3} \quad (12)$$

Здесь  $\xi = h/l_\sigma, Y = y/l_\sigma, U = u/(\sigma/\mu), x, y \sim$  координаты вдоль и поперек жидкого слоя соответственно. Граничные условия для скорости  $U$  имеют вид:

$$U(Y=0) = 0, \left. \frac{dU}{dY} \right|_{Y=\xi} = -\frac{\varepsilon}{3} \frac{d\vartheta}{dX}, \quad \varepsilon = \frac{3\Delta T}{\sigma_0} \left| \frac{d\sigma}{dT} \right| = -3Cr \quad (13)$$

Здесь  $\vartheta(x) = (T - T_2) / \Delta T$  - температура на поверхности жидкости,  $\Delta T = (T_1 - T_2) / 2$  - полуразность между нагревателем и холодильником. Учитывая, что в стационарном режиме поток через поперечное сечение слоя равен нулю, для толщины слоя получено уравнение

$$\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi'' = -\varepsilon\vartheta(x) + C \quad (14)$$

Решение уравнения найдено в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$  для случая, когда на краях прямоугольной кюветы ( $x = \pm B$ ), уровень жидкости остается постоянным и равен средней толщине слоя  $H$ . При  $H > 0,5$  мм теоретический расчет хорошо описывает полученные экспериментальные данные. Теоретические и экспериментальные исследования динамики термокапиллярного движения в тонком нагреваемом от подложки слое жидкости выполнено также в работах [Pimputkar and Ostrach 1980, Van Hook et al. 1996].

### 1.2.3 Термокапиллярная конвекция в движущемся слое

В [Ludviksson, Lightfoot, 1968] теоретически и экспериментально рассмотрена устойчивость плоскопараллельного течения пленки по вертикальной жесткой поверхности при наличии на ней градиента температур. Поверхностное натяжение в слое линейно зависело от температуры. В уравнениях Навье-Стокса не учитывались инерционные члены, поэтому теоретические результаты оказываются даже качественно неадекватными экспериментальным наблюдениям тех же авторов. В работе [Демехин, Потапов, 1989] впервые рассмотрена устойчивость вышеуказанного течения в полной постановке. Получены решения задачи как аналитические в длинноволновом приближении, так и численные в общем случае. Показано существование критического числа Марангони  $Ma_c$ , являющегося функцией только числа

Прандтля, и такого, что при  $Ma \in (0, Ma_c)$  в пленке реализуется волновой режим течения, при  $Ma > Ma_c$ , этот режим сменяется безволновым. В работе [Miladinova et al. 2002] рассматривается задача о влиянии неоднородного нагрева подложки на течение пленки жидкости. Линейный анализ устойчивости течения пленки в длинноволновом приближении показывает, что уменьшение температуры подложки вдоль течения приводит к стабилизации течения (амплитуда возмущений на поверхности пленки уменьшается) по сравнению со случаем однородного нагрева. При нарастании температуры подложки вдоль течения, течение, наоборот, дестабилизируется. Отмечается, что в рамках двумерной модели, термокапиллярные эффекты влияют только на форму волн, не вызывая локального утончения.

[Tto et al. 1995] исследовали влияние нагрева стенки на неустойчивость течения пленки по вертикальной поверхности. На стенке выполнялось условие  $q_w = const$ . На границе раздела рассматривалось два условия: 1) теплоизоляции ( $q_i = 0$ ) и 2)  $q_i = q_w = const$ . Была получена зависимость для

критического расхода жидкости, требуемого для начала развития неустойчивости

$$\frac{2}{15} \frac{g}{\nu} \Gamma_{V_{cr}} = \frac{\sigma k_{\Lambda}^2}{\rho} + \frac{\sigma_i (d\sigma / dT) q_w}{\rho \lambda} \left( \frac{g}{3\nu \Gamma_{V_{cr}}} \right)^{1/3} \quad (15)$$

Расчеты для  $\Lambda=10-30$  мм, показали, что существует два критических расхода жидкости. Для "больших" расходов имеет место гидродинамическая неустойчивость. Для "малых" расходов неустойчивость появляется вследствие влияния эффекта Марангони. Экспериментальные исследования проведены при течении воды по вертикальной обогреваемой по всей длине трубе высотой 1,5 м ( $D=24$  мм).

В [Joo et al. 1996] проводится теоретический анализ движения тонкого слоя жидкости по однородно нагреваемой наклонной поверхности. Показано что нелинейное взаимодействие гравитационно-капиллярных волн и термокапиллярной неустойчивости приводит к образованию массива ривулет ориентированных вдоль по потоку (рис. 1). Выполнено численное интегрирование эволюционного уравнения. Предполагается, что температура подложки имеет постоянную температуру. Расчеты эволюции формы поверхности выполнены для значения числа Био  $Bi = 1$ , когда проявление термокапиллярной неустойчивости максимально. Для водяной пленки толщиной 100 мкм  $Bi \setminus$  при коэффициенте теплоотдачи равном 6040. Такое большое значение коэффициента конвективной теплоотдачи возможно только при интенсивном испарении, а в таком случае необходимо учитывать массообмен [Кабов, 1999, Марчук, 2000]. Авторы указывают на отсутствие экспериментов, подтверждающих их теорию. Регулярные структуры, полученные в экспериментах Кабова, данной теорией не описываются, поскольку длина волны структур не зависит от  $Bi$ .

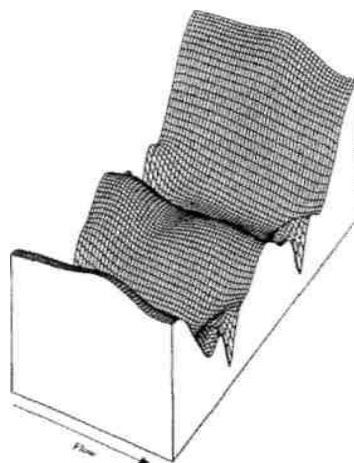


Рисунок 1 - Деформация поверхности в виде ривулет при стекании пленки жидкости по нагреваемой поверхности [Joo et al. 1996]

#### **1.2.4 Регулярные структуры, возникающие при локальном нагреве стекающей пленки жидкости.**

В 1994 г. в Институте теплофизики СО РАН д.ф.-. м.н О.А. Кабовым было обнаружено явление формирования пространственной самоорганизующейся структуры в тонкой движущейся под действием гравитации пленке жидкости при ее локальном нагреве со стороны подложки. Нагрев пленки приводит к формированию в верхней области нагревателя горизонтального вала жидкости, который при пороговом значении плотности теплового потока теряет устойчивость и распадается на струи, стекающие с определенной длиной волны, и тонкую пленку между ними (рис. 2, 3). На основании измерений температуры поверхности пленки с помощью инфракрасного сканера была доказана термокапиллярная природа возникновения вала и структур [Кабов 1999]. В [Kabov et al. 1996] при помощи Шлирей метода было установлено, что значение критической толщины вала, при которой формируются регулярные структуры, составляет  $h/h_0=1,32$ . Шлирей метод позволял измерять только относительно

небольшие углы наклона поверхности пленки, поэтому деформации в пленке после возникновения регулярных структур измерить не удалось. В [Кабов, 1998] предложен критерий формирования горизонтального вала жидкости. С использованием гипотезы вихревого спирального движения жидкости внутри вала, вызванного неоднородностью температуры подложки в поперечном направлении, сформулирована физическая модель формирования цепи регулярных структур.

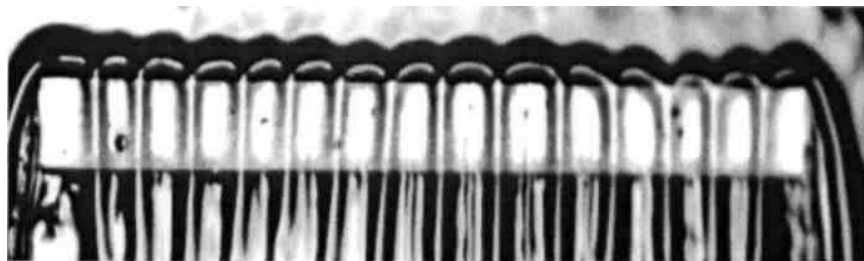


Рисунок 2 - Регулярные структуры, 10 % раствор этилового спирта в воде

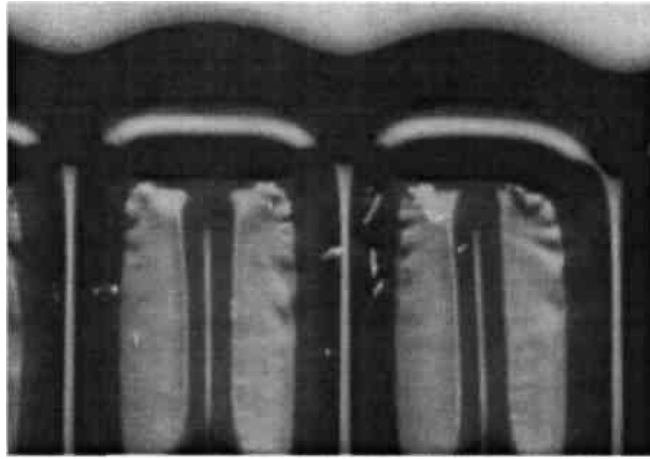


Рисунок 3 - Снимки процесса формирования регулярных структур полученные с помощью Шлирен метода, 25 % раствор этилового спирта в воде

С целью объяснения возникновения регулярных структур, а также термокапиллярного вала в последние годы выполнен ряд работ. В [Marchuk&Kabov, 1998, Марчук 2000, Кабов и др. 2001] рассчитана двумерная стационарная задача, как с учетом температурной зависимости вязкости, так и без ее учета, в приближении тонкого слоя:

$$0 = \sigma_0 h_{xxx} - \rho g \cos \theta h_x + \rho g \sin \theta + (\mu(x, y) u_y)_y \quad (16)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (17)$$

$$u T_x + v T_y = a T_{yy} \quad (18)$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (19)$$

$$[\mu u_y](x, h(x)) = \sigma_Y T_S(x) \quad (20)$$

$$\int_0^{h(x)} \rho u(x, y) dy = \Gamma \quad (21)$$

$$T(-\infty, y) = T_0 \quad (22)$$

$$T_y(x, h(x)) = 0 \quad (23)$$

$$-\lambda T_y(x, 0) = q(x)(\chi(x) - \chi(x - L)) \quad (24)$$

Эксперименты и численные расчеты с учетом зависимости вязкости и поверхностного натяжения от температуры показали, что при малых числах Рейнольдса в области верхней кромки нагревательного элемента существует деформация пленки в виде вала уже при малых тепловых потоках. Проведено сравнение экспериментальных данных и расчетных, наилучшее соответствие наблюдается, когда учитывается температурная зависимость вязкости и поверхностного натяжения. Отмечено, что выше вала по потоку систематически наблюдается утончение пленки на 3 % его толщины. Формирование структур происходит при некоторой практически постоянной относительной толщине вала не зависящей от числа  $Re$  пленки, эта величина составляет  $1,32 \pm 0,07$ .

Обзор экспериментальных и теоретических работ по локально нагреваемой пленке жидкости, стекающей под действием гравитации выполнен в [Frank & Kabov, 2006].

В [Sharupov and Medvedko, 2000] проделан линейный анализ устойчивости двумерного стационарного решения по отношению к трехмерным возмущениям в длинноволновом приближении,  $Re \sim 1$  и при заданной температуре поверхности  $T_{sur}$ .

В [Kuznetsov, 2000] получено стационарное решение двумерной задачи в приближении тонкого слоя. Проведен линейный анализ устойчивости двумерного решения в длинноволновом приближении в [Skotheim et al., 2003], причем конвективными членами в уравнении энергии пренебрегается.

[Kalliadasis et al, 2003] проделан линейный анализ устойчивости двумерного решения к возмущениям в поперечном направлении, причем распределение температуры на поверхности пленки предполагается заданным экспоненциально, используется модель «интегрального пограничного слоя», предложенная Шкадовым, используются профили скоростей, полученные в [Демехин, Потапов, 1989]. [Frank, 2003] провел впервые прямые численные расчеты трехмерной задачи в полной постановке методом частиц, численно получены регулярные структуры, которые качественно и количественно соответствуют экспериментам Кабова и др.. Серия работ по стекающей пленке жидкости для нагревателей большого размера выполнена Чинновым и др. [Chinnov et al. 2004, Чиннов и Кабов, 2004].

### **Вывод к главе**

Анализ литературы показывает, что большинство экспериментальных и теоретических исследований по гидродинамике, нагреву и испарению движущихся пленок выполнено для области средних и больших значений числа Рейнольдса жидкости ( $Re=10-104$ ), считающейся практически важной [Wilke 1962, Гимбутис 1988, Гогонин и др. 1993, Алексеенко и др., 1992, Демехин, 1990]. Работы, в которых исследуется теплообмен при  $Re<10$  крайне ограничены. Отсутствуют работы, посвященные исследованию совместного влияния термокапиллярного эффекта, испарения, а также динамического воздействия газа на тонкую пленку жидкости. Исследование влияния размера канала на динамику и теплообмен пленки жидкости при числах Рейнольдса меньших 5 началось только в последние пять лет, но в основном они посвящены однофазному течению. Обобщающие закономерности отсутствуют. Исследования динамики гравитационно стекающих пленок [Marchuk and Kabov 1998] показали, что при интенсивных локальных нагревах для процесса теплопереноса одинаково существенны оба механизма - конвективный и коидуктивный.



Общей целью работы является исследование гидродинамики, теплообмена в локально нагреваемой пленке жидкости, движущейся под действием газового потока в канале в условиях определяющего влияния термокапиллярных сил.

## **Глава 2. Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости с постоянным градиентом температуры на границах слоя**

### **2.1 Постановка задачи**

Необходимо найти точное решение уравнений свободной конвекции для плоского горизонтального слоя жидкости с постоянным градиентом температуры на границах слоя

Движение рассматриваемого типа возникает, например, в средней части широкой прямоугольной кюветы с плоским горизонтальным дном. Если одна вертикальная стенка кюветы горячая, а противоположная — холодная, то равновесие жидкости невозможно и движение возникает при сколь угодно малой разности температур. Имеются два механизма, вызывающих конвекцию. Плотность жидкости у горячей стенки меньше, чем у холодной (при нормальном тепловом расширении), и под действием подъемной силы возникает движение. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости убывает с ростом температуры, поэтому под действием капиллярных сил жидкость также движется вдоль поверхности к холодной стенке; в нижней части жидкости, прилегающей к твердому дну, возникает компенсирующее движение в противоположную сторону. Какой из этих механизмов является главным в конвекции — зависит от толщины слоя жидкости. Чисто капиллярная конвекция рассматривалась ранее В. Г. Левичем.

В средней по длине части кюветы градиент температуры на границах жидкости можно считать постоянным, а движение жидкости — параллельным дну. Это позволяет — для нахождения вида движения жидкости в этой области — перейти к рассмотрению конвекции в бесконечном плоскопараллельном горизонтальном слое жидкости с постоянным горизонтальным градиентом температуры на границах слоя.

Пусть толщина слоя жидкости  $d = 2h$ . Ось  $x$  направлена вертикально вверх, ось  $z$  — от горячей стенки к холодной, начало координат — в центре слоя жидкости. От координаты  $y$ , перпендикулярной плоскости  $xz$ , движение не зависит.

Граничные условия для температуры в этих координатах можно записать так:

$$T = -Az \text{ при } x = \pm h \quad (25)$$

Здесь  $T$  — температура, отсчитываемая от среднего значения,  $A$  - горизонтальный градиент температуры на границах жидкости.

Скорость стационарного движения жидкости будем искать в виде:

$$u_x = 0, u_y = 0, u_z = u(x) \quad (26)$$

Уравнения свободной конвекции с учетом (25) принимают вид:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = g\beta T, \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (27)$$

$$\nu \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (28)$$

Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — средняя плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\beta$  и  $\chi$  — коэффициенты теплового расширения и температуропроводности соответственно,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Уравнение непрерывности выполняется тождественно. Необходимо также написать условие замкнутости потока:

$$\int_{-h}^h v(x) dx = 0 \quad (29)$$

### Общее решение

Из уравнений (27) можно исключить давление. Получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^3} = \frac{g\beta}{\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (30)$$

Левая часть этого уравнения зависит только от  $x$ , это означает, что температура является линейной функцией. Для нахождения  $\partial T/\partial z$  продифференцируем уравнение (28) по  $z$  и дважды проинтегрируем по  $x$ . Получим:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\nu}{g\beta} \cdot (c_1 x + c_2) \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30) и интегрируя по  $x$ , получим:

$$v = c_1 \cdot \frac{x^4}{4!} + c_2 \cdot \frac{x^3}{3!} + c_3 \cdot \frac{x^2}{2!} + c_4 x + c_5 \quad (32)$$

Интегрируя (31) по  $z$ , получим распределение температуры:

$$T = \frac{\nu}{g\beta} \cdot (c_1 x + c_2) \cdot z + f(x) \quad (33)$$

где функция  $f(x)$  должна быть найдена из (28):

$$\chi \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} = \nu \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (34)$$

с известной правой частью. Все константы  $c_i$  в (32) и (33) должны быть найдены из граничных условий и (29).

Из граничного условия (25) с учетом (33) находим:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{Ag\beta}{\nu}, \quad f(\pm h) = 0 \quad (35)$$

Как видно, поставленное выше граничное условие (25) приводит к тому, что выражение для  $\partial T/\partial z$  (см. (31) становится четной функцией  $x$ .

## 2.2 Решение задачи

### 2.2.1 Конвекция в случае, когда границами жидкости служат твердые плоскости

Рассмотрим свободную конвекцию в случае, когда границами жидкости служат твердые плоскости. Условие прилипания жидкости на твердых границах дает:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{Ag\beta}{\nu}, \quad f(\pm h) = 0 \quad (36)$$

Условия (29), (35) и (36) однозначно определяют все константы интегрирования. После вычислений получим скорость и температуру жидкости:

$$u = -\frac{\nu}{h} \cdot \frac{G}{6} \cdot (\xi - \xi^3) \quad G = -\frac{Ag\beta h^4}{\nu^2} \quad (\xi = \frac{x}{h}) \quad (37)$$

$$T = Ah \cdot \left[ \frac{GP}{360} \cdot (3\xi^5 - 10\xi^3 + 7\xi) - \frac{z}{h} \right] \left( P = \frac{v}{x} \right) \quad (38)$$

здесь  $G$  — число Грасгофа,  $P$  — число Прандтля.

Вычислим поток тепла в рассматриваемом слое жидкости. Поток тепла  $Q$  (на единицу длины вдоль оси  $y$ ) в горизонтальном направлении складывается из двух частей: потока, обусловленного теплопроводностью жидкости, и конвективного теплового потока:

$$Q = -\mu \cdot \int_{-h}^h \frac{\partial T}{\partial z} dx + \rho c_p \cdot \int_{-h}^h v T dx = 2\mu Ah \cdot \left[ 1 + \frac{(GP)^2}{4725} \right] \quad (39)$$

где  $\mu$  и  $c_p$  — теплопроводность и теплоемкость жидкости.

Кроме горизонтального потока тепла, имеется также вертикальный тепловой поток, вызванный движением жидкости. Вертикальный поток тепла может быть найден по градиенту температуры у границы жидкости. Поток через единичную площадку поверхности  $x = h$  равен:

$$Q = -\mu \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} = \frac{\mu AGP}{45} \quad (40)$$

Такое же количество тепла проходит через единичную площадку поверхности  $x = -h$ .

На рисунок №4, приведенном ниже, представлено сравнение скорости конвекции в трех разных средах (вода, силиконовое масло, метиловый спирт), границами которых являются две твердые плоскости.

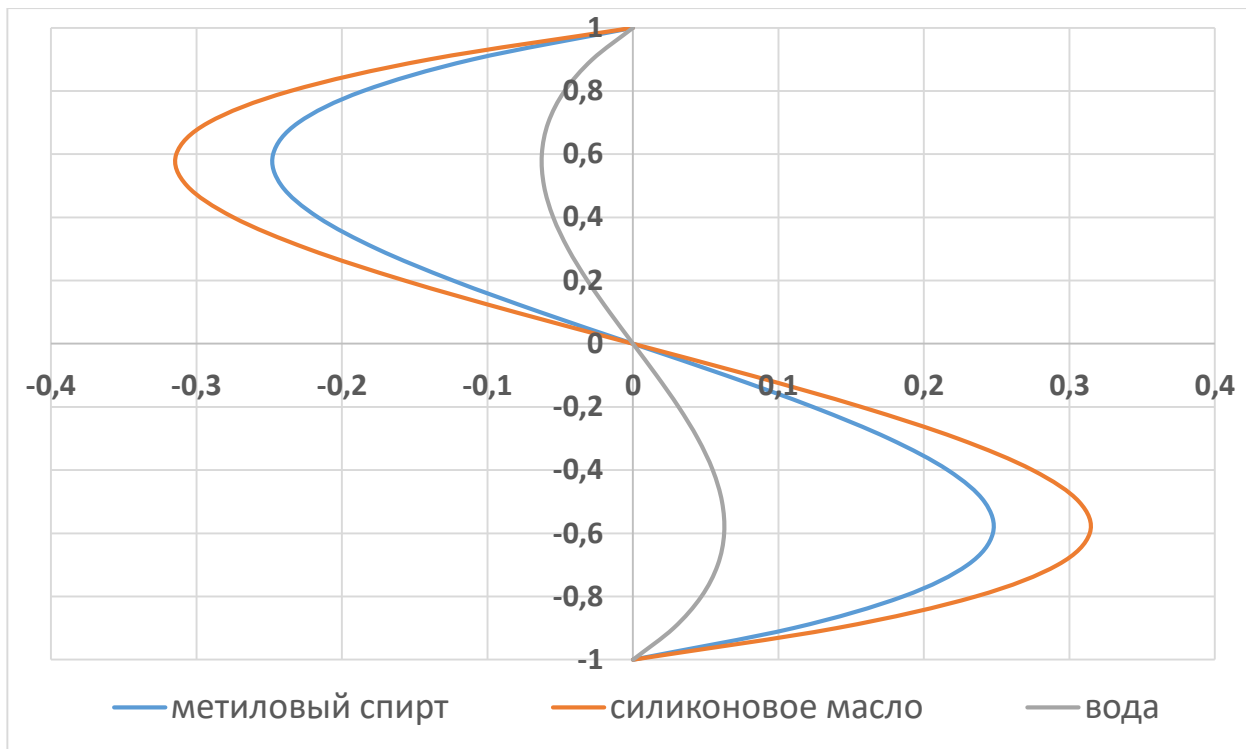


Рисунок №4 – Скорость конвекции в трех разных средах, ограниченных двумя твердыми плоскостями (ось абсцисс – скорость конвекции м/с; ось ординат – координата точки измерения)

Из графика видно, что среда, где происходит конвекция, влияет на скорость протекания данного процесса. Исходя из формулы 37, можно понять, что скорость процесса выше в метиловом спирте, так как тепловое расширение данной среды ниже в сравнение с другими средами, что приводит к увеличению числа Грасгофа. С увеличением данного показателя прямо пропорционально увеличивается и скорость протекания конвекции.

### 2.2.2 Конвекция в случае, когда верхняя граница слоя свободна

Рассмотрим теперь движение жидкости в случае, когда верхняя граница слоя свободна. На свободной поверхности жидкости сумма всех сил, действующих на единичную площадку поверхности, должна обращаться в нуль. Кроме силы трения, определяемой тензором вязких напряжений, на

свободной поверхности действуют капиллярные силы, вызванные неоднородностью коэффициента поверхностного натяжения. Условие равновесия сил может быть записано в виде:

$$\rho v \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=h} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (41)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения, который будем считать линейно зависящим от температуры.

На нижней границе слоя будем по-прежнему требовать исчезновения скорости жидкости, т. е:

$$v = 0 \text{ при } x = -h \quad (42)$$

Используя (41), (42) вместе с (29), из (32) и (33) получим:

$$v = \frac{v}{h} \cdot \left[ \frac{G}{24} \cdot (-4\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi - 1) + \frac{G_\sigma}{24} \cdot (3\xi^2 + 2\xi - 1) \right] \quad (43)$$

$$T = Ah \cdot \left[ \frac{GP}{480} \cdot (4\xi^5 - 5\xi^4 - 20\xi^3 + 10\xi^2 + 16\xi - 5) + \frac{G_\sigma P}{288} \cdot (-3\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi - 3) - \frac{z}{h} \right] \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)$$

здесь безразмерный параметр  $G_\sigma$  характеризует интенсивность капиллярного движения жидкости.

Отношение:

$$\frac{G_\sigma}{G} = \frac{3}{\rho g \beta h^2} \cdot \left( -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \quad (45)$$

определяет, какая из двух сил — сила Архимеда или капиллярная сила — является доминирующей в конвекции.



На рисунок №5, приведенном ниже, представлено сравнение скорости конвекции в трех разных средах (вода, силиконовое масло, метиловый спирт), когда одна из границ слоя свободна.

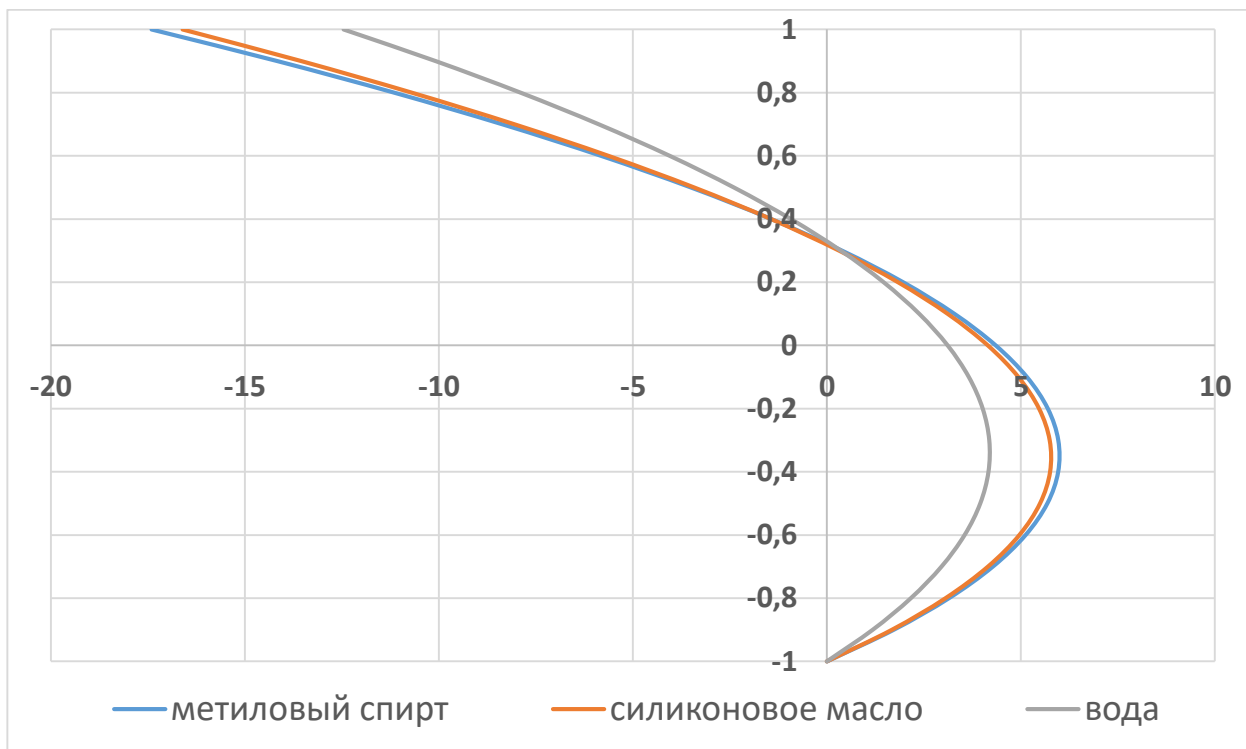


Рисунок №5 – Скорость конвекции в трех разных средах, в случае, когда одна из границ слоя свободна (ось абсцисс – скорость конвекции м/с; ось ординат – координата точки измерения)

Из графика видно, что среда, где происходит конвекция, влияет на скорость протекания данного процесса. Исходя из формулы 37, можно понять, что скорость процесса выше в метиловом спирте, так как тепловое расширение данной среды ниже в сравнение с другими средами, что приводит к увеличению числа Грасгофа. С увеличением данного показателя прямо пропорционально увеличивается и скорость протекания конвекции.

## **Выводы к главе**

Проанализировав математическую модель процесса конвекции при разных граничных условиях, удалось найти точное решение уравнений свободной конвекции для плоского горизонтального слоя жидкости с постоянным градиентом температуры на границах слоя.

Результат показал зависимость скорости протекания свободной конвекции от среды, где происходит данный процесс. Так, в качестве примера, были приняты три вещества: метиловый спирт, силиконовое масло, вода. Расчет показал, что скорость процесса выше в метиловом спирте, так как тепловое расширение ниже, чем у других веществ, что в свою очередь приводит к увеличению числа Грасгофа. С увеличением данного показателя прямо пропорционально увеличивается и скорость протекания конвекции (формула 37; 43).

## Глава 3 Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости с постоянным градиентом температуры на границах слоя и свободной верхней границей

### 3.1 Цель работы

Выполнить сравнение точного решения уравнений одномерного и двумерного стационарного течения свободной конвекции для плоского горизонтального слоя жидкости с постоянным градиентом температуры на нижней границе слоя и свободной верхней границей с коэффициентом поверхностного натяжения зависимым от температуры. Определить погрешность одномерного точного решения при различных степенях стеснения потока и числах Марангони, путем сравнения с численным двумерным решением.

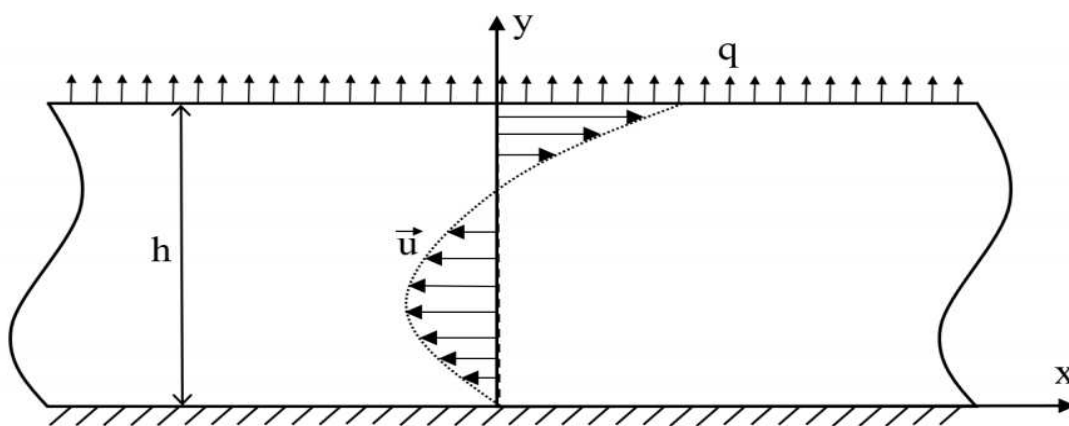


Рисунок 6 – Схема к одномерной задаче

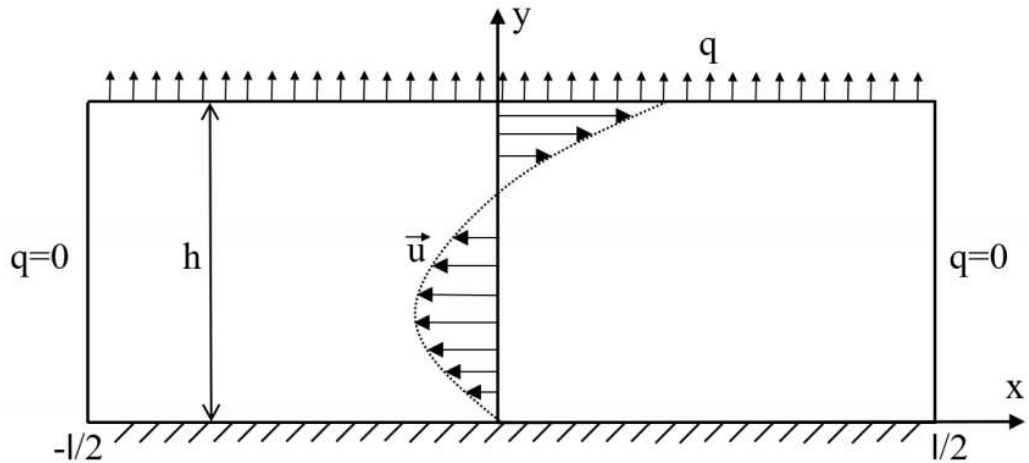


Рисунок 7 – Схема к двумерной задаче

### 3.2 Постановка одномерной стационарной задачи

Пусть толщина слоя жидкости  $h$ . Ось  $y$  направлена вертикально вверх, ось  $x$  - от горячей стенки к холодной, начало координат расположено в основании слоя жидкости. От координаты  $z$ , перпендикулярной плоскости  $xu$  движение не зависит.

Уравнения свободной конвекции для одномерного стационарного течения  $\vec{u} = (u(y), 0)$ ,  $T = T(x, y)$ :

$$P_x = \rho \nu u_{yy} \quad (46)$$

$$P_y = \rho g \beta T \quad (47)$$

$$uT_x = \chi (T_{xx} + T_{yy}) \quad (48)$$

Здесь  $p$  - давление,  $\rho$  - средняя плотность жидкости,  $\nu$  - кинематическая вязкость,  $\beta$  и  $\chi$  - коэффициенты теплового расширения и температуропроводности соответственно,  $g$  - ускорение свободного падения.

Условие замкнутости потока, в котором принимается, что движение жидкости обусловлено только за счет термогравитационных сил.

$$\int_0^h u(y) dy = 0 \quad (49)$$

Граничные условия:

$$y=0: T = -Ax \quad u = 0 \quad (50)$$

$$y=h: kT_y - \gamma(T - T_{env}) = 0; \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (51)$$

где  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения, который будем считать линейно зависящим от температуры,  $A$  - заданный на основании градиент температуры. Общее решение поставленной задачи получено в [Бирих Р.В., ПМТФ, №3, 1966]. Из уравнений (46) - (47) можно исключить давление. Получим

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{g\beta}{\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (52)$$

Левая часть этого уравнения зависит только от  $y$ , это означает, что температура является линейной функцией  $x$ . Для нахождения  $\partial T / \partial x$  продифференцируем уравнение (48) по  $x$  и дважды проинтегрируем по  $y$ .

$$uT_x = \chi(T_{xx} + T_{yy}) \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uT_x) = \chi \frac{\partial}{\partial x}(T_{xx} + T_{yy}) \quad (54)$$

$$u_x T_x + uT_{xx} = \chi(T_{xxx} + T_{yyx}) \quad (55)$$

$u_x T = 0$  т.к.  $u$  не зависит от  $x$ ,  $u T_{xx} = T_{xxx} = 0$  т.к.  $T$  линейная функция  $x$  (см. уравнение 52). Тогда получим  $T_{yux} = 0$ . Двойное интегрирование по  $y$  дает

$$T_x = \frac{\partial T}{\partial x} = D_1 y + D_2 = \frac{\nu}{g\beta} (C_1 y + C_2) \quad (56)$$

Подставляя (56) в (52) и трижды интегрируя по  $y$  получим

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = C_1 y + C_2; \quad (57)$$

$$u = C_1 \frac{y^4}{4!} + C_2 \frac{y^3}{3!} + C_3 \frac{y^2}{2!} + C_4 y + C_5 \quad (58)$$

Интегрируя (56) по  $x$  получим распределение температуры

$$T = \frac{\nu}{g\beta} (C_1 y + C_2) x + f(y) \quad (59)$$

где функция  $f(y)$  должна быть найдена из (48). Подставляя (59) в (48) получим

$$u T_x = \chi f_{yy} \quad (60)$$

из этого уравнения, с известной левой частью, находится  $f(y)$ .

Все константы  $C_i$  в (58) и (59) должны быть найдены из (49) и граничных условий (50)-(51).

Используя граничное условие (50) для (49) получим

$$-Ax = \frac{\nu}{g\beta} C_2 x + f(0) \quad (61)$$

$f(0)$  постоянная величина, чтобы выполнялось равенство необходимо приравнять все коэффициенты полиномов слева и справа. Тогда получается

$$f(0) = 0 \quad (62)$$

$$C_2 = -Ag\beta / \nu \quad (63)$$

Дифференцируя (59) по  $y$  и используя граничное условие (6) получим

$$k \left( \frac{\nu}{g\beta} C_1 x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=h} \right) = \gamma \left( \frac{\nu}{g\beta} (C_1 h + C_2) x + f(h) - T_{env} \right) \quad (64)$$

Приравнявая коэффициенты уравнения прямой слева и справа получим два уравнения

$$\frac{k\nu}{g\beta} C_1 = \frac{\gamma\nu}{g\beta} (C_1 h + C_2) \quad (65)$$

$$k \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=h} = \gamma (f(h) - T_{env}) \quad (66)$$

Из уравнения (65) получим  $C_1$ , учитывая ранее найденную  $C_2$  (63):

$$kC_1 - \gamma C_1 h = \gamma C_2 \quad (67)$$

$$C_1 (k - \gamma h) = \gamma C_2 \quad (68)$$

$$C_1 = \frac{\gamma C_2}{(k - \gamma h)} = \left[ C_2 = -\frac{Ag\beta}{\nu} \right] = -\frac{\gamma Ag\beta}{\nu(k - \gamma h)} = \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \quad (69)$$

Выражения (62) и (66) являются граничными условиями первого и третьего рода, соответственно, которые необходимо использовать при решении уравнения (60).

Найдем постоянные  $C_3$ ,  $C_4$  и  $C_5$ . Используя граничное условие (50) из уравнения (58) получим

$$C_5 = 0 \quad (70)$$

Применяя граничное условие (51) к уравнению (48) получим

Продифференцируем уравнение (58) по  $y$  и применим граничное условие (50), тогда получим

$$u_y = C_1 \frac{y^3}{3!} + C_2 \frac{y^2}{2!} + C_3 y + C_4 \quad (71)$$

$$\frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \frac{h^3}{3!} + C_2 \frac{h^2}{2!} + C_3 h + C_4 \quad (72)$$

$$C_4 = \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} - C_1 \frac{h^3}{3!} - C_2 \frac{h^2}{2!} - C_3 h \quad (73)$$

Теперь используем условие (49) чтобы найти  $C_3$  с учетом того что  $C_5 = 0$ :

$$\int_0^h u(y) dy = 0$$

$$\int_0^h \left( C_1 \frac{y^4}{4!} + C_2 \frac{y^3}{3!} + C_3 \frac{y^2}{2!} + C_4 y \right) dy = 0$$

(74)



$$\left( C_1 \frac{y^5}{5!} + C_2 \frac{y^4}{4!} + C_3 \frac{y^3}{3!} + C_4 \frac{y^2}{2!} \right) \Big|_{y=0} = 0 \quad (75)$$

$$C_1 \frac{h^5}{5!} + C_2 \frac{h^4}{4!} + C_3 \frac{h^3}{3!} + C_4 \frac{h^2}{2!} = 0 \quad (76)$$

Подставляем (73) в (76) и выразим  $C_3$ :

$$C_1 \frac{h^5}{5!} + C_2 \frac{h^4}{4!} + C_3 \frac{h^3}{3!} + \left( \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} - C_1 \frac{h^3}{3!} - C_2 \frac{h^2}{2!} - C_3 h \right) \frac{h^2}{2!} = 0 \quad (77)$$

$$C_1 \left( \frac{h^5}{5!} - \frac{h^5}{3!2!} \right) + C_2 \left( \frac{h^4}{4!} - \frac{h^4}{2!2!} \right) + C_3 \left( \frac{h^3}{3!} - \frac{h^3}{2!} \right) + \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} \frac{h^2}{2!} = 0 \quad (78)$$

$$C_3 \left( \frac{h^3}{3!} - \frac{h^3}{2!} \right) = -C_1 \left( \frac{h^5}{5!} - \frac{h^5}{3!2!} \right) - C_2 \left( \frac{h^4}{4!} - \frac{h^4}{2!2!} \right) - \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} \frac{h^2}{2!} \quad (79)$$

$$C_3 h \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = -C_1 h^3 \left( \frac{1}{60} - \frac{1}{6} \right) - C_2 h^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} \quad (80)$$

$$-\frac{2}{3} C_3 h = \frac{3}{20} C_1 h^3 + \frac{5}{12} C_2 h^2 - \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} \quad (81)$$

$$C_3 = -\frac{9}{40} C_1 h^2 - \frac{15}{24} C_2 h + \frac{3}{2h} \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} \quad (82)$$

Подстановка  $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=h} = \frac{\nu}{g\beta} (C_1 h + C_2)$  (уравнение 56) дает

$$C_3 = -\frac{9}{40} C_1 h^2 - \frac{15}{24} C_2 h + \frac{3}{2h} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial\sigma}{\partial T} (C_1 h + C_2) \quad (83)$$

$$C_3 = C_1 \left( -\frac{9}{40} h^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \right) + C_2 \left( -\frac{15}{24} h + \frac{3}{2h} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \right) \quad (84)$$

Подстановка  $C_1 = \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)}$  (уравнение 69),  $C_2 = -\frac{Ag\beta}{\nu}$  (уравнение 63)

дает

$$C_3 = \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \left( -\frac{9}{40} h^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) + \frac{Ag\beta}{\nu} \left( \frac{15}{24} h - \frac{3}{2h} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \quad (85)$$

Подстановка найденного  $C_3$  в (73) позволит определить  $C_4$ .

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\nu}{g \beta} (C_1 h + C_2) - C_1 \frac{h^3}{3!} - C_2 \frac{h^2}{2!} - C_3 h = \\ &= \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\nu}{g \beta} (C_1 h + C_2) - C_1 \frac{h^3}{3!} - C_2 \frac{h^2}{2!} - \left[ C_1 \left( -\frac{9}{40} h^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) + C_2 \left( -\frac{15}{24} h + \frac{3}{2h} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] h = \\ &= C_1 \left[ \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{h \nu}{g \beta} - \frac{h^3}{3!} + \left( \frac{9}{40} h^3 - \frac{3}{2} \frac{h}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] + C_2 \left[ \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\nu}{g \beta} - \frac{h^2}{2!} + \left( \frac{15}{24} h^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] = \\ &= C_1 \left[ \frac{7h^3}{120} - \frac{1}{2} \frac{h}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right] + C_2 \left[ \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right] \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} u &= C_1 \frac{y^4}{4!} + C_2 \frac{y^3}{3!} + C_3 \frac{y^2}{2!} + C_4 y + C_5 = \\ &= \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \frac{y^4}{4!} - \frac{Ag\beta}{\nu} \frac{y^3}{3!} + \\ &+ \left[ \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \left( -\frac{9}{40} h^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) - \frac{Ag\beta}{\nu} \left( -\frac{15}{24} h + \frac{3}{2h} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] \frac{y^2}{2!} + \\ &+ \left[ \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \left( \frac{7h^3}{120} - \frac{1}{2} \frac{h}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) - \frac{Ag\beta}{\nu} \left( \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right] y \end{aligned}$$

Введение характерной скорости  $u^* = \varkappa Ah / (\nu \rho)$ , где  $\varkappa = \frac{\partial \sigma}{\partial T}$ , позволяет получить безразмерную скорость

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \frac{y^4}{4!} - \frac{Ag\beta}{\nu} \frac{y^3}{3!} \\
&+ \left[ \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \left( -\frac{9}{40} h^2 + \frac{3}{2} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) - \frac{Ag\beta}{\nu} \left( -\frac{15}{24} h + \frac{3}{2h} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) \right] \frac{y^2}{2!} \\
&+ \left[ \frac{\gamma Ag\beta}{\nu(\gamma h - k)} \left( \frac{7h^3}{120} - \frac{1}{2} \frac{h\varkappa}{\rho g \beta} \right) - \frac{Ag\beta}{\nu} \left( \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) \right] y = \\
&\frac{\varkappa Ah}{\nu\rho} \frac{\gamma\rho g\beta}{\varkappa h(\gamma h - k)} \frac{y^4}{4!} - \frac{\varkappa Ah}{\nu\rho} \frac{\rho g\beta}{\varkappa h} \frac{y^3}{3!} \\
&+ \frac{\varkappa Ah}{\nu\rho} \left[ \frac{\gamma\rho g\beta}{\varkappa h(\gamma h - k)} \left( -\frac{9}{40} h^2 + \frac{3}{2} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) - \frac{\rho g\beta}{\varkappa h} \left( -\frac{15}{24} h + \frac{3}{2h} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) \right] \frac{y^2}{2!} \\
&+ \frac{\varkappa Ah}{\nu\rho} \left[ \frac{\gamma\rho g\beta}{\varkappa h(\gamma h - k)} \left( \frac{7h^3}{120} - \frac{1}{2} \frac{h\varkappa}{\rho g \beta} \right) - \frac{\rho g\beta}{\varkappa h} \left( \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) \right] y
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
U &= \frac{u}{u^*} = \frac{\gamma\rho g\beta}{\varkappa h(\gamma h - k)} \frac{y^4}{4!} - \frac{\rho g\beta}{\varkappa h} \frac{y^3}{3!} \\
&+ \left[ \frac{\gamma\rho g\beta}{\varkappa h(\gamma h - k)} \left( -\frac{9}{40} h^2 + \frac{3}{2} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) - \frac{\rho g\beta}{\varkappa h} \left( -\frac{15}{24} h + \frac{3}{2h} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) \right] \frac{y^2}{2!} \\
&+ \left[ \frac{\gamma\rho g\beta}{\varkappa h(\gamma h - k)} \left( \frac{7h^3}{120} - \frac{1}{2} \frac{h\varkappa}{\rho g \beta} \right) - \frac{\rho g\beta}{\varkappa h} \left( \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{\rho g \beta} \right) \right] y
\end{aligned}$$

Введем безразмерные переменные и числа:  $\eta = y/h$ ,  $U = u/u^*$ ,  $u^* = \varkappa Ah/(\nu\rho)$  – характерная скорость,  $We = \frac{\rho L |\bar{u}|^2}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 h}{\nu\chi\rho}$  – число Вебера,  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$  – число Прандтля,  $Ma = \frac{\varkappa Ah^2}{\nu\rho\chi}$  – число Марангони,  $Ra = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi}$  – число Рэлея,  $Bi = \frac{\gamma h}{k}$  – число Био.

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \rho g \beta}{\alpha h (\gamma h - k)} \frac{y^4}{4!} &= \frac{\gamma \rho g \beta}{\alpha h k (\gamma h / k - 1)} \frac{y^4 h^4}{4! h^4} = \frac{\gamma \rho g \beta h^3}{\alpha k (Bi - 1)} \frac{\eta^4}{4!} = \frac{\rho g \beta h^2}{\alpha} \frac{Bi}{(Bi - 1)} \frac{\eta^4}{4!} \\ &= \frac{\rho \nu \chi}{\alpha A h^2} \frac{g \beta A h^4}{\nu \chi} \frac{Bi}{(Bi - 1)} \frac{\eta^4}{4!} = \frac{Ra}{Ma} \frac{Bi}{(Bi - 1)} \frac{\eta^4}{4!} \end{aligned}$$

$$\frac{\rho g \beta}{\alpha h} \frac{y^3}{3!} = \frac{Ra}{Ma} \frac{\eta^3}{3!}$$

$$\frac{\alpha}{\rho g \beta h^2} = \frac{Ma}{Ra}$$

$$\begin{aligned} U = \frac{u}{u^*} &= \frac{Ra}{Ma} \frac{Bi}{(Bi - 1)} \frac{\eta^4}{4!} - \frac{Ra}{Ma} \frac{\eta^3}{3!} \\ &+ \left[ \frac{Ra}{Ma} \frac{Bi}{(Bi - 1)} \left( -\frac{9}{40} + \frac{3 Ma}{2 Ra} \right) - \frac{Ra}{Ma} \left( -\frac{15}{24} + \frac{3 Ma}{2 Ra} \right) \right] \frac{\eta^2}{2!} \\ &+ \left[ \frac{Ra}{Ma} \frac{Bi}{(Bi - 1)} \left( \frac{7}{120} - \frac{1 Ma}{2 Ra} \right) - \frac{Ra}{Ma} \left( \frac{1}{8} - \frac{1 Ma}{2 Ra} \right) \right] \eta \end{aligned}$$

Числовые значения физических свойств для силиконового масла и параметры модели следующие:  $\rho = 760 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 0.65E - 6 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\gamma = 5 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ ,  $\alpha = \frac{\partial \sigma}{\partial T} = -8E - 5 \text{ Н/мК}$ ,  $\chi = 0.06295E - 6 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $A = 5 \text{ К/м}$ ,  $\beta = 1.3E - 3 \text{ К}^{-1}$ ,  $h = 2.5 \text{ мм}$ ,  $k = 0.8 \text{ Вт/мК}$ . Результат решения представлен на рисунке 8:

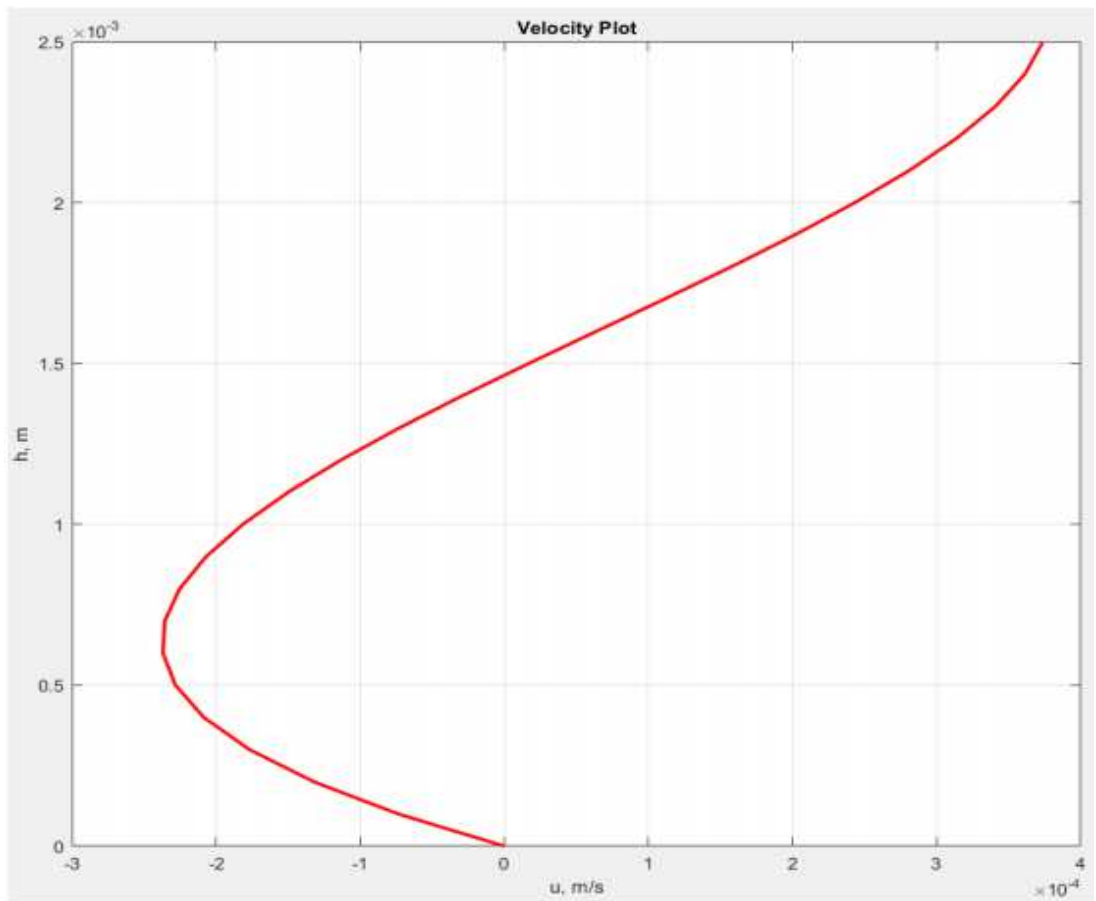


Рисунок 8 – Решение одномерной задачи

### 3.3 Постановка двумерной стационарной задачи

#### Основные уравнения:

Уравнения движения

$$uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho} P_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}) \quad (87)$$

$$uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} P_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}) + g\beta(T - T_0) \quad (88)$$

уравнение неразрывности

$$u_x + v_y = 0 \quad (89)$$

уравнение энергии

$$uT_x + vT_y = \chi(T_{xx} + T_{yy}) \quad (90)$$

### Граничные условия

На боковых стенках  $x = \pm l/2$ :

$$u\left(\pm\frac{l}{2}, y\right) = 0, \quad v\left(\pm\frac{l}{2}, y\right) = 0, \quad T_x\left(\pm\frac{l}{2}, y\right) = 0 \quad (91)$$

На нижней стенке  $y = 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_0 \quad (92)$$

Граничное условие на верхней границе  $y = h$

$$-kT_y = \gamma(T - T_{env}) \quad (93)$$

Последнее выражение является условием теплового контакта свободной границы с окружающей средой. Считается, что для большинства чистых поверхностей раздела зависимость  $\sigma(T)$  хорошо аппроксимируется линейной зависимостью

$$-kT_y = \gamma(T - T_{env})\sigma(T) = \sigma_0 - \alpha(T - T_0) \quad (94)$$

и число Вебера  $We = \frac{\sigma_0 h}{\nu \chi \rho} \gg 1$  (свободная граница недеформируема).

Можем записать при  $y = h$  касательное динамическое условие:

$$\rho\nu(u_y + v_x) = -\alpha T_x \quad (95)$$

### 3.4 Постановка двумерной стационарной задачи в безразмерном виде

Введем безразмерные переменные и числа:  $\xi = x/l, \eta = y/h, U = u/u^*, V = v/\delta u^*, \mathcal{P} = \frac{Ph^2}{\rho u^* \nu l}, \Theta = \frac{T-T_0}{Al}, \delta = h/l$ -относительное удлинение (aspect ratio),  $u^* = \alpha Ah/(\nu \rho)$  - характерная скорость,  $We = \frac{\rho L |\bar{u}|^2}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 h}{\nu \chi \rho}$  - число Вебера,  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$  - число Прандтля,  $Ma = \frac{\alpha Ah^2}{\nu \rho \chi}$  - число Марангони,  $Ra = \frac{g \beta Ah^4}{\nu \chi}$  - число Рэлея,  $Bi = \frac{\gamma h}{k}$  - число Био.

Тогда основные уравнения в безразмерном виде могут быть записаны:

$$\delta(UU_\xi + VU_\eta) + \frac{Pr}{Ma} \mathcal{P}_\xi = \frac{Pr}{Ma} (\delta^2 U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}) \quad (96)$$

$$\delta^3(UV_\xi + VV_\eta) + \frac{Pr}{Ma} \mathcal{P}_\eta = \frac{\delta^2 Pr}{Ma} (\delta^2 V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta}) + \frac{Pr Ra}{Ma^2} T \quad (97)$$

$$U_\xi + V_\eta = 0 \quad (98)$$

$$\delta(UT_\xi + VT_\eta) = \frac{1}{Ma} (\delta^2 T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta}) \quad (99)$$

#### Граничные условия

На боковых границах  $\xi = \pm 1/2, 0 \leq \eta \leq 1$ :

$$U\left(\pm \frac{1}{2}, \eta\right) = 0, \quad V\left(\pm \frac{1}{2}, \eta\right) = 0, \quad \Theta_\xi(\eta) = 0 \quad (100)$$

На нижней границе  $-1/2 < \xi < 1/2, \eta = 0$ :

$$U(\xi, 0) = 0, \quad V(\xi, 0) = 0 \quad (101)$$

$$\Theta = -\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \xi - \frac{T_0}{Al} \quad (102)$$

Граничные условия на верхней границе  $-1/2 < \xi < 1/2, \eta = 1$ :

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = Bi(\Theta + \Theta_{env}) \quad (103)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \quad (104)$$

где  $\Theta_{env} = \frac{T_0 - T_{env}}{Al}$

### 3.5 План вычислительного эксперимента

Для получения зависимости погрешности, которая получается в одномерной задаче относительно двумерной, от степени стеснения потока и числа Марангони, необходимо выполнить вычислительный эксперимент. Для этого задаемся тремя значениями степеней стеснения и чисел Марангони для которых выполняем точные одномерные и численные двумерные расчеты.

Для оценки расхождения полученных результатов предлагается использовать в качестве погрешностей среднеквадратическую ошибку  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_2 - u)^2}{n}}$  и абсолютное значение максимальной разницы скоростей  $\sigma_2 = |u_2 - u|$ , где  $u_2$  - горизонтальная составляющая скорости в двумерном решении,  $u$  - скорость, полученная в точном одномерном решении,  $n$  - количество точек по высоте, которое определяется расчетной сеткой.

В результате получаем две таблицы или графика  $\sigma_1(\delta, Ma), \sigma_2(\delta, Ma)$  показывающие насколько велика погрешность одномерного приближения относительно двумерного.



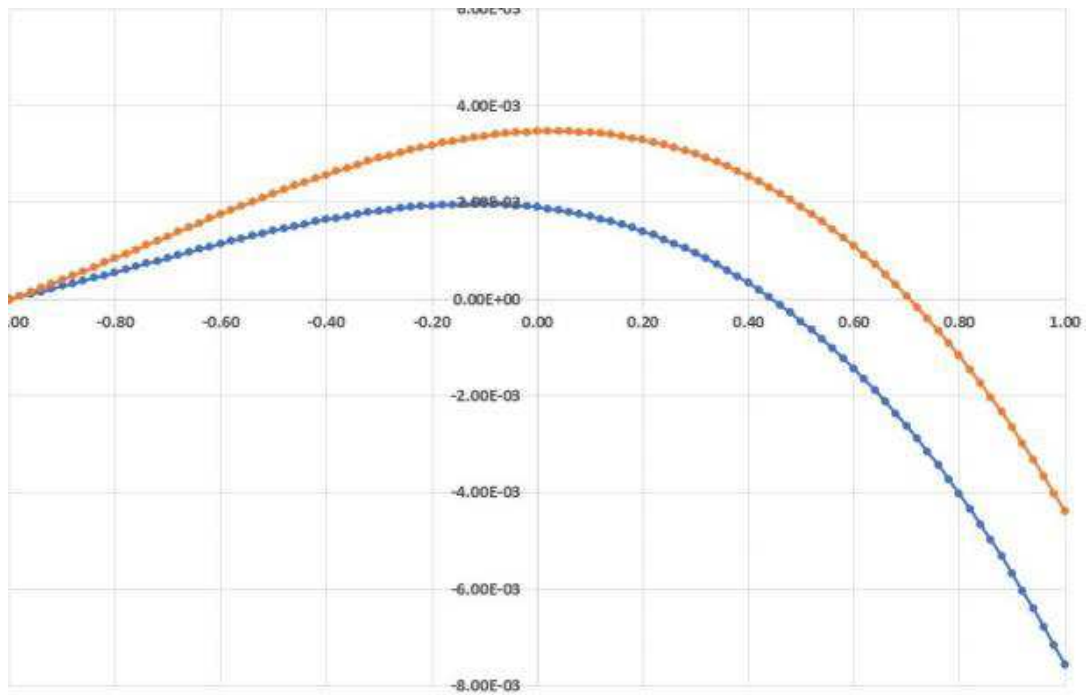


Рисунок 9 – Схематическое представление одномерного и двумерного решений (по оси ординат скорость, по оси абсцисс безразмерная координата)

### Выводы к главе

Выполнялось сравнение скоростей  $u$ , полученных на одномерной задаче и двумерной задаче при различном "стеснении" потока  $\delta$ .

Коэффициент теплообмена с окружающей средой  $\gamma = 2 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ , температура окружающей среды  $\theta_{env} = 0^\circ\text{C}$ , на нижней границе задан градиент  $0,1 \text{ К/м}$ .

Свойства силиконового масла  $\nu = 0.65E - 6 \text{ м}^2/\text{с}$ , плотность  $\rho = 760 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент термического расширения  $\beta = 1.3E - 3 \text{ К}^{-1}$ , коэффициент теплопроводности  $k = 0.1 \text{ Вт/мК}$ , температурный коэффициент поверхностного натяжения  $\kappa = 8E - 5 \text{ Н/(мК)}$ , коэффициент температуропроводности  $\chi = 0.06295E - 6 \text{ м}^2/\text{с}$ .

Для сравнения скоростей принималось шесть равноудаленных точек с расстоянием  $\delta/5$  (Рис. 6).



Рисунок 10 - Точки в которых брались значения горизонтальной компоненты скорости при решении двумерной задачи

Сравнение выполнялось с использованием формулы для среднеквадратической ошибки

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (u_2 - u)^2}{6}}. \text{ Где } u_2 \text{ - горизонтальная составляющая скорости в}$$

двумерном решении,  $u$  - скорость, полученная в одномерном решении.

Таблица 1 – Результаты сравнения

Aspect ratio	$\sigma \cdot 10^{-6}$
0.5	6.425
0.1	0.0126
0.05	0.006
0.01	0.001

Скоростное поле двумерной задачи

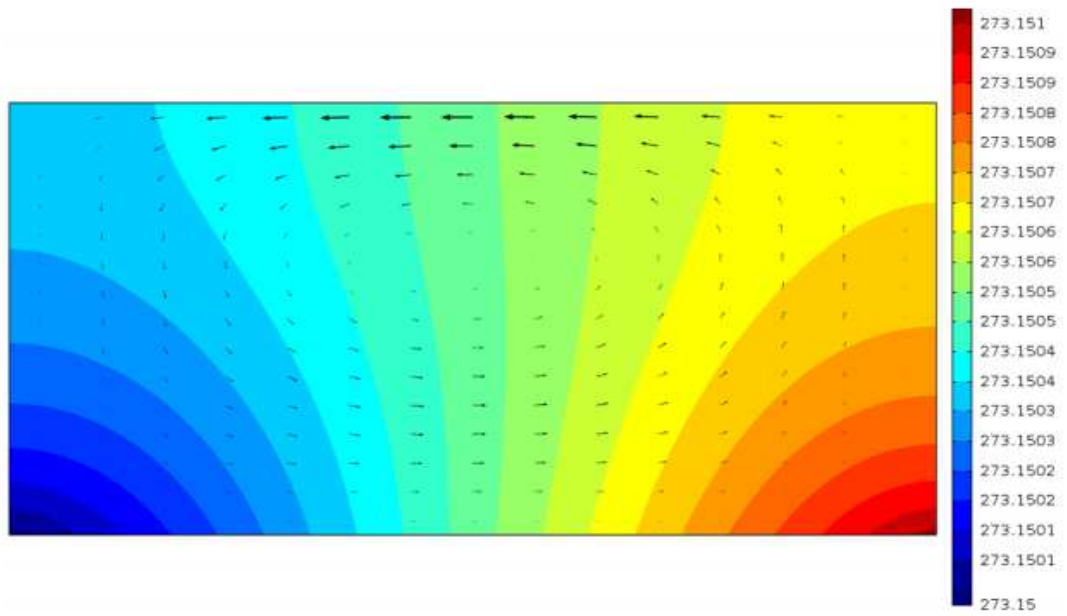


Рисунок 11 - Поле скорости для  $\delta = 5E - 3$

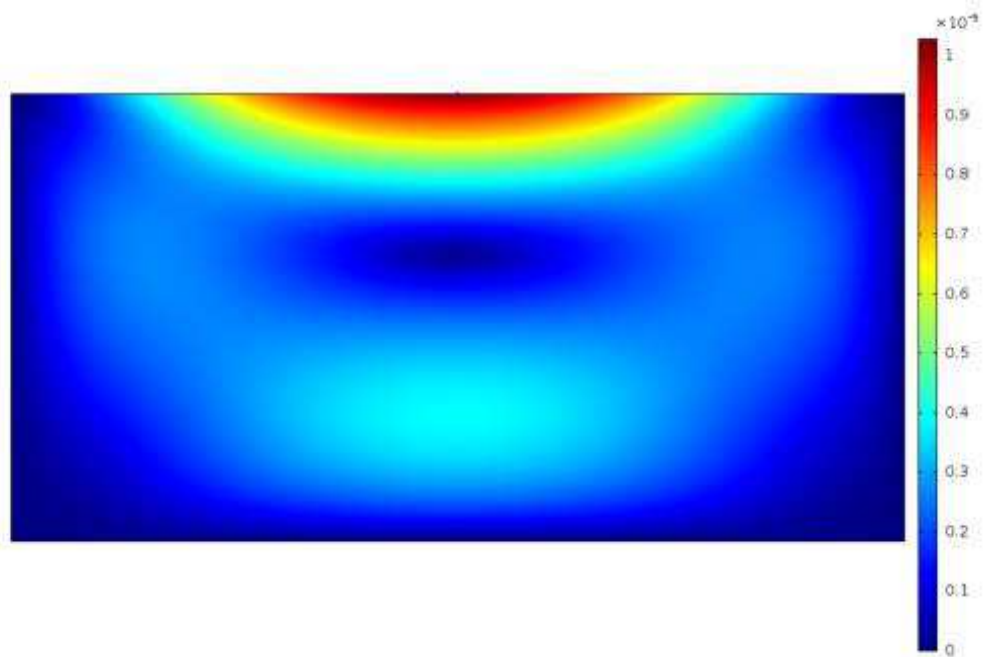


Рисунок 12 - Скалярное представление скорости (м/с) для  $\delta = 5E - 3$

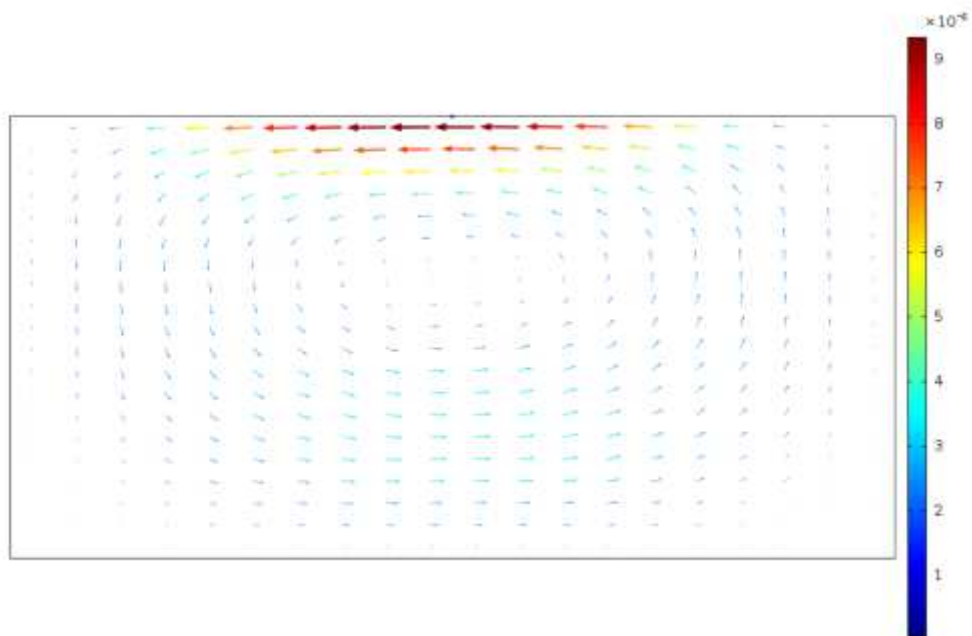


Рисунок 13 - Векторное представление скорости (м/с) для  $\delta = 5E - 3$ ,  
м/с

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Необходимость решения задачи конвекции в слое жидкости возникает в различных практически важных задачах инженерной деятельности. В частности решение данной задачи возникает при проектировании новых и совершенствовании существующих установок энергетики, металлургии, электроники и др.

В данной работе впервые выполнено решение задачи одномерной конвекции в слое жидкости с граничным условием третьего рода. Также выполнено сравнение одномерного и двумерного решения задачи конвекции в слое жидкости со свободной недеформируемой границей и граничным условием третьего рода, заданного на ней. В результате сравнения получены погрешности применения одномерного решения при различных степенях стеснения потока.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Sherwood, G., and Cray, S., 1992, Gas-Liquid Forced Turbulence Cooling II United States Patent N 5, 131, 233.
2. Kabov O.A., Kuznetsov V.V. and Legros J.-C, 2004, Pleat transfer and film dynamic in shear-driven liquid film cooling system of microelectronic equipment II Second Int. Conference on Microchannels and Minichannels, Ed. S.G. Kandlikar, June 17-19, 2004, Rochester, NY, ASME, New York-P. 687-694.
3. Burelbach J.P., Bankoff S.G. and Davis S.H., 1988, Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid films II J. Fluid Mech. - Vol. 195 - P. 463-494.
4. Ajaev V.S., 2004, Viscous flow of a volatile liquid on an inclined heated surface // J. of Colloid and Interface Science-Vol. 280 - P. 165-173.
5. Haut B. and Colinet P., 2005, Surface-tension-driven instabilities of a pure liquid layer evaporating into an inert gas II J. Colloid and Interface Science - Vol. 285, Issue 1-P. 296-305.
6. Aklershev S.P. and Alekseenko S.V., 1996, Interfacial instabilities in an annular two-phase flow II Russ. J. Eng. Thermophys. - Vol. 6, No 4 - P. 307-320.
7. Pearson J. R. A., 1958, On convection cells induced by surface tension II J. Fluid Mech.-Vol. 4, N 5.- P. 489-500.
8. Левич В.Г., 1959, Физико-химическая гидродинамика.- Изд. 2,- М.: Гос.изд. физ.-мат. литературы.
9. Leontiev A.I. and Kirdyashkin A.G., 1968, Experimental Study of Flow Patterns and Temperature Fields in Horizontal Free Convection Liquid Layers // Int. J. Heat Mass Transfer.-Vol. 11.-P. 1461-1466.
10. Бердников В.С., 1977, Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости //Теплофизические исследования: Сб. науч. тр. - Новосибирск,- С. 99-104.

11. Кирдяшкин А.Г., 1982, Структура тепловых гравитационных и термокапиллярных течений в горизонтальном слое жидкости в условиях горизонтального градиента температуры // Препринт 79-82.- Новосибирск, Институт теплофизики.- 34 с.
12. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Везуб 1-И. А., 1987, Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье - Стокса. - М.: Наука.
13. Полежаев В.И., Белло М.С. Везуб Н.А. и др., 1991, Конвективные процессы в невесомости.- М.: Наука.- 240 с.
14. Ostrach S., Pradhan A., 1978, Surface-tension induced convection at reduced gravity II AIAA Journal.-Vol. 16.-P. 419-425.
15. Shevtsova V.M., 1990, Influence of a Nonlinear Temperature Dependent Surface Tension Force on a Fluid Motion II Proceedings of the Seventeenth International Symposium on Space Technology and Science.- Tokyo. P. 851-857.
16. Индейкина А.Е., Рязанцев Ю.С, Шевцова В.М., 1991, Нестационарная термокапиллярная конвекция в слое неравномерно нагретой жидкости. // Изв. АН СССР МЖГ.- № 3.- С. 17-25.
17. Альварес-Суарес В.А., Рязанцев Ю.С, 1986, О термокапиллярном движении, вызванном локальным нагревом жидкости импульсом ультрафиолетового излучения // Изв. АН СССР. МЖГ.- № 6.- С.165-168.
18. Растопов С.Ф., Суходольский А.Т., 1987, Применение лазерно-индуцированного эффекта Марангони для записи дифракционных решеток // Квантовая электроника.-Т. 14, № 8.- С. 1709-1710.
19. Ostrach S. and Kamotani Y., 1996, Surface Tension Driven Convection Experiment-2 (STDCE-2) II Proc. Third Microgravity Fluid Physics Conference, Cleveland, Ohio, July 13-15.- P. 331-337.
20. Hershey A.V., 1939, Ridges in a Liquid Surface Due to the Temperature Dependence of Surface Tension II Phys. Rev.- Vol. 56.,- P. 204.

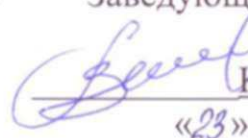
21. Пшеничников А.Ф., Токменина Г.Л., 1983, Деформация свободной поверхности жидкости термокапиллярным движением // Известия АН СССР, МЖГ.-№3.-С. 150-153.
22. Van Hook S.J., Schatz M.F., Swift J.B., McCormik W.D., and Swinney H.L., 1996, Long-wavelength Instability in Marangoni Convection II Proc. Third Microgravity Fluid Physics Conference, Cleveland, Ohio, July 13-15.- P. 265-270.
23. Scriven L.E., Sterling CV. The Marangoni effects //Nature. - 1960. - Vol. 187. -P. 186-188.
24. Линде Х., Шварц П., Вильке Х., 1984, Диссипативные структуры и нелинейная кинетика неустойчивости Марангони // Гидродинамика межфазных поверхностей.- М: Мир.- С. 79-117.
25. Hmkebein T.E. and Berg J.C., 1978, Surface Tension Effects In Heat Transfer Through Thin Liquid Films II Int. J. Heat Mass Transfer.- Vol.21.- P. 1241-1249.
26. Boeck T. and Thess A., 1997, Inertial Benard-Marangoni convection II J. Fluid Mech.-Vol. 350.-P. 149-175.
27. Bragard J. and Velarde M.G., 1998, Benard-Marangoni convection: planforms and related theoretical predictions II I Fluid Mech.- Vol. 368.- P. 165-194.
28. Демехин Е.А., Потапов О.Л. Неустойчивость Марангони в стекающих слоях вязкой жидкости. Изв. СО АН СССР, Серия техн. наук, 1989, Вып.6, с. 113-120.
29. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C., 2001, Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films II J. Fluid Mech. - Vol. 453. - P. 153-175.
30. Кабов О.А., 1999, Влияние капиллярных эффектов на пленочную конденсацию и теплообмен в пленках жидкости: Дис. докт. физ.-мат. наук.- Новосибирск: ИТ СО РАН.



31. Марчук И.В., 2000, Термографическое исследование пленки жидкости стекающей по поверхности с локальным источником тепла: Дис. канд. физ.-мат. наук.- Новосибирск: ИТ СО РАН.
32. Кабов О.А., Легро Ж.К., Марчук И.В., Шейд Б., 2001, Деформация свободной поверхности в движущемся локально нагреваемом тонком слое жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. - №3. - С. 200-208.
33. Kabov O.A., Marchuk I.V., Muzykantov A.V., Legros J.C., Istasse E., Dewandel J.L., 1999a, Regular Structures In Locally Heated Falling Liquid Films II 2nd Int. Symp. on Two-Phase Flow Modelling And Experimentation, 23-25 May, 1999, Pisa, Italy.-Vol. 2.-P. 1225-1233.
34. Frank A.M., Kabov O.A., 2006, Thermo capillary structure formation in a falling film: experiment and calculations II Physics of Fluids (submitted)
35. Frank A.M., 2003, 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // Europ. J. of Mechanics B/ Fluids - Vol. 22 - P. 445-471.
36. Chmnov E.A., Kabov O.A. Marchuk I.V. and Zaitsev D.V., 2002a, Heat transfer and breakdown of subcooled falling water film on a vertical middle size heater II Intern. J. Heat and Technology. - Vol. 20, No 1. - P. 69-78.
37. Гимбутис Г., 1988, Теплообмен при гравитационном течении пленки жидкости. - Вильнюс : Моксклас- 233 с.
38. Алексеенко СВ., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., 1979, Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. - Новосибирск, - 51 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд.-ние. Ин-т теплофизики; № 36 - 79).
39. Алексеенко СВ., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., 1992, Волновое течение пленок жидкости. - Новосибирск: ВО "Наука". Сибирская издательская фирма. - 256 с.
40. Бирих Р.В., 1966, О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ.-№ 3.-С. 69-72.

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Политехнический институт  
Кафедра «Теплотехники и гидрогазодинамики»

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой

  
Кулагин В.А.  
«23» июня 2021г.

### МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Математическое моделирование термокапиллярной конвекции

13.04.01 – Теплоэнергетика и теплотехника

13.04.01.01 – Энергетика теплотехнологий

Научный руководитель

  
(21.06.21)  
подпись, дата

К.Т.Н.  
ученая степень

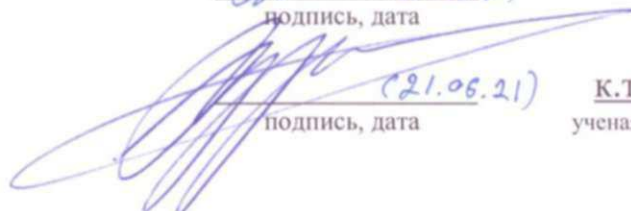
А.А. Пьяных  
инициалы, фамилия

Выпускник

  
(21.06.21)  
подпись, дата

А.Ю.Лахин  
инициалы, фамилия

Рецензент

  
(21.06.21)  
подпись, дата

К.Т.Н.  
ученая степень

А.С. Кузнецов  
инициалы, фамилия

Красноярск 2021