

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

**ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА  
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА**

Красноярск 2003

Составитель: Н.А. Пинкина

Высшая математика. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. /  
Краснояр. гос. Ун-т; Сост. Н.А. Пинкина. Красноярск, 2003. 26 с.

Предназначено для студентов 1 курса экономического факультета.

Печатается по решению редакционно – издательского совета  
Красноярского госуниверситета

©Красноярский  
государственный  
университет , 2003

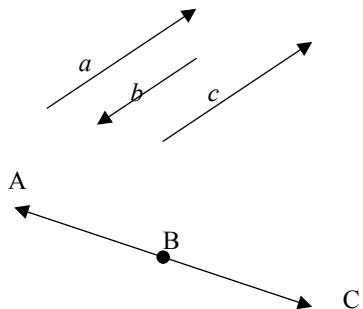
## Векторная алгебра

Векторной величиной или вектором называется всякая величина, обладающая направлением.

В геометрии вектором (в узком смысле) называется всякий направленный отрезок.

### Коллинеарные векторы

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой) называются коллинеарными



Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (равнонаправленные) или противоположное (противоположно направленные).

### Нуль-вектор

Если начало  $A$  и конец  $B$  отрезка  $AB$  совпадают, то такую пару совпадающих точек причисляют к векторам. Такой вектор называется нуль-вектором и считается коллинеарным с любым вектором.

### Равные и противоположные векторы

Определение. Два (ненулевых) вектора  $a$  и  $b$  равны, если они равнонаправлены и имеют один и тот же модуль. Все нулевые векторы считаются равными.

Определение. Два вектора, имеющие равные модули и противоположно направленные, называются противоположными.

### Компланарные векторы

Три вектора называются компланарными, если они, будучи приведены к одному началу, лежат в одной плоскости.

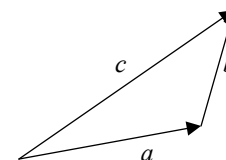
Если хотя бы один из трёх векторов – нулевой, то три вектора тоже считаются компланарными.

### Координаты векторов

Координатами вектора  $a$ , приведенного к началу координат, называются координаты его конечной точки.

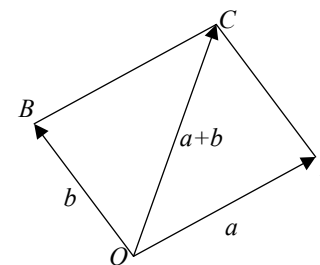
### Сумма векторов

#### Сложение векторов по правилу треугольника



$a + b = c$ , где  $c$  – вектор, начало которого совпадает с началом вектора  $a$ , а конец – с концом вектора  $b$ .

#### Сложение векторов по правилу параллелограмма



Вектор  $a+b$  – сумма векторов  $a$  и  $b$ .

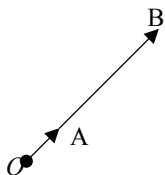
#### Свойства операции сложения

- 1)  $a+b=b+a$
- 2)  $(a+b)+c=a+(b+c)$

- 3)  $a+0=a$   
 4)  $a+(-a)=0$

### Умножение вектора на число

Определение. Произведением вектора  $a$  на число  $x$  называется вектор, модуль которого равен произведению модуля вектора  $a$  на абсолютное значение числа  $x$ , а направление совпадает с направлением вектора  $a$  или противоположно ему, смотря по тому, положительно число  $x$  или отрицательно. Если же  $x = 0$ , то произведение есть нуль-вектор.



$$\overline{OB} = \overline{OA} \cdot 4$$

### Свойства операции умножения вектора на число

- $(x + y) a = xa + ya$
- $x (a + b) = xa + xb$
- $x (ya) = (xy) a$

### Нахождение координат вектора

Если известны координаты начала  $A\{x_1, y_1, z_1\}$  и конца  $B\{x_2, y_2, z_2\}$  вектора, то координаты вектора вычисляются по формуле

$$x=x_2-x_1 \quad y=y_2-y_1 \quad z=z_2-z_1$$

Координаты середины отрезка  $AB$  находятся по формуле

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

### Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Длина вектора  $a$  выражается через его координаты формулой

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Расстояние  $d$  между точками определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

### Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением вектора  $a$  на вектор  $b$  называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними

$$ab = |a| |b| \cos \varphi$$

Если векторы  $a(x_1, y_1, z_1)$  и  $b(x_2, y_2, z_2)$  заданы своими координатами, то

$$ab = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

### Свойства скалярного произведения

- Свойство признак:  $a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 0$
- $ab = ba$
- $(a+b) m = am + bm$
- $(ma) b = m(ab)$
- Если векторы коллинеарны, то  $ab = \pm |a| |b|$  (знак  $+$ , если векторы имеют одно и то же направление, знак  $-$ , если противоположное).

### Условие перпендикулярности векторов

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

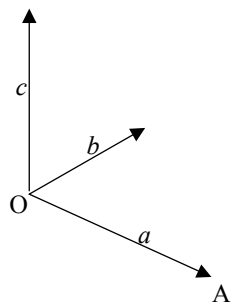
### Угол между векторами

Угол  $\varphi$  между векторами  $a$  и  $b$  можно найти по формуле

$$\cos \varphi = \frac{ab}{|a||b|}$$

### Правая и левая тройки векторов

Пусть  $a, b, c$  – три (ненулевых) вектора, не параллельные одной плоскости. Тройка векторов  $a, b, c$  называется правой, если из конца вектора  $c$  с поворотом вектора  $a$  к вектору  $b$  совершается против часовой стрелки.



правая тройка

Если же поворот осуществляется по часовой стрелке, то тройка векторов  $a, b, c$  называется левой.

При однократной перестановке двух векторов тройка меняет свою ориентацию.

#### Векторное произведение двух векторов

Определение. Векторным произведением двух векторов называется вектор, модуль которого равен

$$|c| = |a| |b| \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между  $a$  и  $b$ , а направление  $c$  перпендикулярно к плоскости, где расположены векторы  $a$  и  $b$  и выбирается таким образом, что тройка векторов  $a, b, c$  правая.

#### Свойства векторного произведения

1. Свойство-признак:  $a \uparrow\uparrow b \Leftrightarrow a \times b = 0$ .
2.  $b \times a = -(a \times b)$
3.  $(a + b) \times l = a \times l + b \times l$
4.  $(ma) \times b = m(a \times b)$

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Для нахождения площади треугольника  $A_1A_2A_3$  применяется формула

$$S = \frac{1}{2} |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}|$$

#### Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением трёх векторов  $a, b, c$  называется скалярное произведение вектора  $a$  на векторное произведение  $b \times c$ ; т.е. число  $a(b \times c)$ .

#### Свойства смешанного произведения

1. Свойство-признак: Тройка векторов является компланарной тогда и только тогда, когда ее смешанное произведение равно нулю.
2.  $abc = bca = cab = -(bac) = -(cba) = -(acb)$
3.  $(a + b) \cdot cd = acd + bcd$
4.  $(ma) \cdot bc = m(abc)$
5.  $aab = 0$

Выражение смешанного произведения векторов  $a, b, c$  через координаты сомножителей.

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

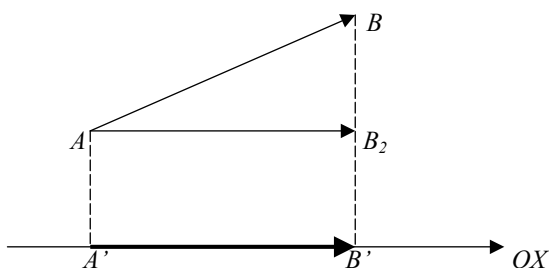
Объем параллелепипеда, построенного на векторах  $a, b, c$  равен смешанному произведению, которое берется со знаком плюс, если определитель третьего порядка положителен и со знаком минус, если отрицателен.

#### Проекция вектора на ось

Геометрической проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $OX$  называется вектор  $\overline{A'B'}$ , начало которого  $A'$  есть проекция начала  $A$  на ось  $OX$ , а конец  $B'$  – проекция конца  $B$  на ту же ось.

Алгебраической проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $OX$  называется длина вектора  $\overline{A'B'}$ , взятая со знаком  $+$  или  $-$ , смотря по тому, имеет ли вектор  $\overline{A'B'}$  то же направление, что ось  $OX$ , или противоположное.

$$\text{пр}_{OX} \overline{AB} = \pm \overline{A'B'}$$



Алгебраическая проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между осью и вектором:

$$\text{пр}_a b = |b| \cos \varphi$$

## Аналитическая геометрия

### Прямая на плоскости

Рассмотрим наиболее важные уравнения прямой на плоскости.

1) Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , перпендикулярно вектору  $N(A, B)$ .

Для вывода данного уравнения возьмем на прямой произвольную текущую точку  $M(x, y)$ . Для любой точки  $M$  вектор  $\overline{M_0M}(x-x_0; y-y_0)$  принадлежит данной прямой,  $\overline{M_0M} \perp N$ . Условие перпендикулярности двух векторов – скалярное произведение равно нулю, или, в координатах,

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0 \quad (1)$$

Вектор  $N$  называется нормалью.

2) Общее уравнение прямой.

Оно получается из уравнения (1). Раскроем скобки

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$$

и обозначим  $-Ax_0 - By_0 = C$ . Тогда имеем:

$$Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

3) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Получается

из уравнения (2) путем выражения  $y$  через остальные.

$$By = -Ax - C$$

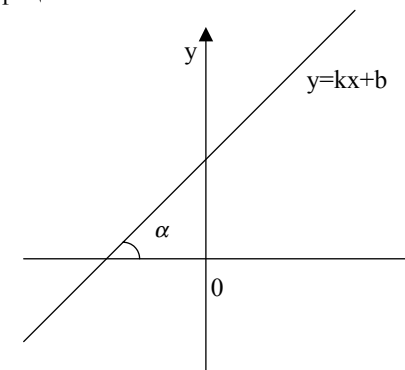
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

если обозначить  $-\frac{A}{B} = k, -\frac{C}{B} = b$ , то имеем

$$y = kx + b \quad (3)$$

$k$  – угловой коэффициент.

$k = \text{tg } \alpha$



4) Каноническое уравнение прямой.

В первом уравнении запишем

$$A(x-x_0) = -B(y-y_0)$$

Обе части разделим на  $AB$ , получим

$$\frac{x-x_0}{B} = \frac{y-y_0}{-A} \quad (4)$$

Вектор  $S(B, -A)$  называется направляющим вектором.  $S$  параллелен прямой (4).

5) Уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . В данном случае в уравнении (4) в качестве направляющего вектора  $S$  нужно взять вектор  $M_1M(x_2-x_1, y_2-y_1)$  и уравнение прямой примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (5)$$

6) Параметрические уравнения прямой получаются из уравнения (4) следующим образом:

$$\frac{x-x_0}{B} = \frac{y-y_0}{-A} = t,$$

тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{B} = t \\ \frac{y-y_0}{-A} = t \\ x-x_0 = tB \\ y-y_0 = -tA \\ \begin{cases} x = Bt + x_0 \\ y = -At + y_0 \end{cases} \end{cases}$$

Эти уравнения применяются в том случае, когда нужно получить «часть» прямой (например, отрезок, луч, целочисленные ответы).

7) Нормальное уравнение прямой выводится из уравнения (2). Оно получается, если в качестве нормального вектора взять нормированный нормальный вектор, т. е. вектор, длина которого единица. Для этого разделим уравнение (2) на  $|N| = \sqrt{A^2 + B^2}$ , получим:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

обозначим:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \alpha, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \alpha, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = p$$

в результате получаем следующее уравнение прямой:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0$$

8) Расстояние от точки  $M(x_0, y_0)$  до прямой (2) вычисляется по формуле:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

*Уравнение плоскости.*

Плоскость, проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярно вектору  $N\{A, B, C\}$  представляется уравнением первой степени

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad \text{или} \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

Где через  $D$  обозначена величина  $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ . Вектор  $N$  называется нормальным вектором или нормалью плоскости.

*Особые случаи положения плоскости относительно системы координат.*

- 1) Уравнение  $Ax + By + Cz = 0$  (свободный член  $D=0$ ) представляет собой плоскость, проходящую через начало координат.
- 2) Уравнение  $Ax + By + D = 0$  представляет плоскость, параллельную оси  $OZ$ , уравнение  $Ax + Cz + D = 0$  – плоскость, параллельную оси  $OY$ , уравнение  $Dy + Cz + D = 0$  – плоскость, параллельную оси  $OX$ .
- 3) Уравнение  $Ax + D = 0$  ( $B=0, C=0$ ) представляет плоскость, параллельную как оси  $OY$ , так и оси  $OZ$ , т. е. Параллельную координатной плоскости  $YOZ$ .
- 4) Уравнения  $X=0, Y=0, Z=0$  представляют соответственно плоскости  $YOZ, XOZ, XOY$ .

*Условие параллельности плоскостей.*

Если плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  параллельны, то нормальные векторы  $N_1\{A_1, B_1, C_1\}$  и  $N_2\{A_2, B_2, C_2\}$  коллинеарны ( и наоборот). Поэтому условие параллельности (необходимое и достаточное) есть

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

*Условие перпендикулярности двух плоскостей.*

Если плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы ( и наоборот). Поэтому условие перпендикулярности (необходимое и достаточное) есть

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

*Угол между плоскостями.*

Две плоскости образуют четыре двугранных угла, равных попарно. Один из них равен углу между нормальными векторами  $N_1$  и  $N_2$ , обозначая любой из двугранных углов за  $\varphi$  имеем формулу

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

*Плоскость, проходящая через данную точку параллельно данной плоскости.*

Плоскость, проходящая через точку  $M(x_1, y_1, z_1)$  и параллельная плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ , представляется уравнением  $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

*Плоскость, проходящая через три точки.*

Если точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  лежат на одной прямой, то проходящая через них плоскость представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

данное уравнение выражает компланарность трех векторов.

*Уравнение плоскости в отрезках.*

Если плоскость отсекает на осях отрезки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (не равные нулю), то ее можно представить уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

которое называется «уравнением плоскости в отрезках».

*Расстояние от точки до плоскости.*

Расстояние  $d$  от точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  равно абсолютному значению величины  $\delta$ , т. е.

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

*Уравнение прямой в пространстве.*

Всякая прямая линия представляется системой двух уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

представляющих (если их рассматривать по отдельности) какие-либо две (различные) плоскости.

*Направляющий вектор.*

Всякий (ненулевой) вектор  $a\{l, m, n\}$ , лежащий на прямой (или параллельный ей), называется направляющим вектором этой прямой. Координаты  $l, m, n$  называются направляющими коэффициентами прямой.

Помножив направляющие коэффициенты на одно и то же число  $k$  (не равное нулю), получим числа  $lk, mk, nk$ , которые тоже будут направляющими коэффициентами (это координаты вектора  $ak$ , коллинеарного с  $a$ ).

За направляющий вектор прямой  $UV$  можно принять векторное произведение  $N_1 \times N_2$  где  $N_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$  и  $N_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$  - нормальные векторы плоскостей.

*Угол между двумя прямыми.*

Угол  $\varphi$  между прямыми  $L$  и  $L_1$  (точнее один из углов между ними) находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|ll_1 + mm_1 + nn_1|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}$$

где  $l, m, n$  и  $l_1, m_1, n_1$  направляющие коэффициенты прямых  $L$  и  $L_1$ .

*Угол между прямой и плоскостью.*

Угол  $\psi$  между прямой  $L$  и плоскостью находится по формуле

$$\sin \psi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

*Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.*

Условие параллельности прямой  $L$  и плоскости есть

$$Ax + By + Cz = 0$$

Оно выражает перпендикулярность прямой и нормального вектора  $\{A, B, C\}$ .

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$$

Оно выражает параллельность прямой и нормального вектора.

*Канонические уравнения прямых.*

Прямая  $L$ , проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и имеющая направляющий вектор  $a\{l, m, n\}$ , представляется уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

выражающими коллинеарность векторов  $a$  и  $\overline{MM_0}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ .

*Параметрические уравнения прямой.*

Каждое из соотношений  $\frac{x - x_0}{l}, \frac{y - y_0}{m}, \frac{z - z_0}{n}$  равно частному от деления вектора  $\overline{MM_0}$  на коллинеарный вектор  $a\{l, m, n\}$ . Обозначим это частное через  $t$ , тогда

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

*Уравнения прямой, проходящей через две данных точки.*

Прямая, проходящая через точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , представляется уравнениями

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

*Эллипс*

Эллипс есть геометрическое место точек (М) сумма расстояний которых до двух данных точек  $F'$  и  $F$  имеет одно и то же значение  $2a$ :

$$F'M + FM = 2a$$

Точки  $F'$  и  $F$  называются фокусами эллипса, а расстояние  $F'F$  фокусным расстоянием и обозначается  $2c$ .

Каноническое определение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Отношение фокусного расстояния к большой оси называется эксцентриситетом эллипса.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

*Гипербола*

Гипербола есть геометрическое место точек (М), разность расстояний которых до двух данных точек  $F'$ ,  $F$  имеет одно и то же абсолютное значение.

$$|F'M - FM| = 2a$$

Точки  $F'$  и  $F$  называются фокусами гиперболы, расстояние  $F'F$  – фокусным расстоянием; оно обозначается через  $2c$ :

$$F'F = 2c.$$

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $b^2 = c^2 - a^2$

Отношение фокусного расстояния к действительной оси, называется эксцентриситетом гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

*Парабола*

Парабола есть геометрическое место точек (М), равноудаленных от данной точки  $F$  и прямой  $PQ$ :

$$FM = KM.$$

Точка  $F$  называется фокусом, а прямая  $PQ$  – директрисой параболы. Расстояние  $FC = p$  от фокуса до директрисы называется параметром параболы.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы в то же системе координат

$$x + \frac{p}{2} = 0.$$



## Элементы аналитической геометрии.

1. Найти угол между прямыми  $5x-7y+1=0$  и  $2x+3y-7=0$ .
2. Провести через точку  $M_0(5, 2)$  прямую, перпендикулярную прямой  $3x-2y+6=0$ .
3. Провести прямую через две точки  $A(2, 7)$  и  $B(5, 7)$ .
4. Даны три вершины  $A(2, -1)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(7, 11)$  треугольника. Найти уравнения и длины его медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины  $A$ .
5. Составить уравнение сторон треугольника  $ABC$ , если его вершины имеют следующие координаты:  $A(2, 3)$ ,  $B(4, 7)$ ,  $C(6, 9)$ .
6. Написать параметрические уравнения прямой  $2x+3y-5=0$ .
7. Найти расстояние от т.М  $(2, -1)$  до прямой  $x+5y-8=0$ .
8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(-2, 1, 3)$  параллельно плоскости  $x-2y+z-3=0$
9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $P(1, 2, -4)$  и перпендикулярно вектору  $\vec{N} = 4i+3j+k$
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-2, 1, 3)$  и  $B(3, -4, -1)$  перпендикулярно плоскости  $2x-y+3z-1=0$
11. Определить расстояние от точки  $M_0(2, 4, -3)$  до плоскости  $x-2y+3z+19=0$
12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(5, 4, 3)$  и отсекающей равные отрезки на осях.
13. Из точки  $P(2, 3, -5)$  на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящее через их основания.
14. Найти угол пересечения двух плоскостей:  $x-2y+2z-4=0$  и  $3x-y-2z+1=0$

15. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $K(2, 3, -1)$  параллельно плоскости  $5x-3y+2z-10=0$

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(-1, 2, -2)$  параллельно двум векторам:  $\vec{a} \{3, 1, -1\}$  и  $\vec{b} \{-2, 2, 1\}$ .

17. Привести уравнение  $3x+5y-7z+6=0$  к виду  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(-2, 3, 1)$  параллельно плоскости  $Oxy$ .

19. Уравнение плоскости  $2x-6y+3z-14=0$  привести к нормальному виду.

20. Определить направляющие косинусы радиус-вектора, перпендикулярного плоскости  $3x-4y+5z-10=0$

21. Найти расстояние от точки  $A(3, 9, 1)$  до плоскости  $x-2y+2z-3=0$ .

22. Найти величину плоского угла между плоскостями  $11x-8y-7z-15=0$  и  $4x-10y+z-2=0$ .

23. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:  $M_1(1, -4, 9)$ ,  $M_2(-2, -5, -7)$ ,  $M_3(3, -6, 8)$ .

24. Составит уравнение плоскости, проведенной через точку  $K(1, 5, 2)$  параллельно плоскости, проходящей через три точки  $L(4, -3, 1)$ ,  $M(3, 4, 0)$ ,  $P(-1, -1, 5)$ .

25. Составить уравнение плоскости  $P$ , проходящей через ось  $Oy$  и точку  $M(2, -4, 3)$ .

26. Точка  $A_0$  симметрична точке  $A(6, -4, -2)$  относительно плоскости  $x+y+z-3=0$ . Найти  $A_0$ .

27. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми  $4x-3y-7=0$  и  $4x-3y+13=0$ .

28. Написать каноническое уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей  $2x+3y+5z-3=0$  и  $x+y+2z-1=0$

29. Найти расстояние от точки  $M(2, 3, 4)$  до прямой  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{0}$

30. Найти пересечение прямой  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{5}$  и плоскости  $x+2y-3z-2=0$

31. Написать канонические уравнения прямой, являющейся пересечением плоскостей  $2x+3y+5z-3=0$  и  $x+y+2z-1=0$ .

32. Найти пересечение прямой  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{5}$  и плоскости  $x+2y-3z-2=0$ .

33. Провести через точку  $M(2, 5, 4)$  прямую, параллельную прямой  $11x-3y-3z+20=0$ ,  $x+3y-6z+1=0$ .

34. Найти расстояние от точки  $M(2, 3, 4)$  до прямой  $\frac{x}{13} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{0}$ .

35. Доказать, что прямые  $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{2}$  и  $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{-4}$  перпендикулярны.

36. Найти координаты точки  $M$ , делящей пополам отрезок прямой  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1}$ , заключенный между плоскостями  $xOy$  и  $xOz$ .

37. Составить каноническое уравнение прямой, заданной общими уравнениями:  $x+2y-z-6=0$  и  $2x-y+z+1=0$ .

38. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(2, -3, 5)$  и параллельно прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$ .

39. Составить уравнение прямой, перпендикулярной плоскости  $2x-3y+4z-8=0$  и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью  $Oz$ .

40. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-4, 0, 2)$  перпендикулярно прямой  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$  и  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$ .

41. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2, 2, -2)$  перпендикулярно линии пересечения плоскостей  $3x-2y-z+1=0$  и  $x-y-z=0$ .

42. Доказать, что прямые  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$  и  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$  пересекаются.

43. Найти угол между прямой  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-1}{-3}$  и плоскостью  $6x-3y+2z=0$ .

44. Доказать, что прямая  $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$  принадлежит плоскости  $x+2y-4z+1=0$ .

45. Найти угол между прямыми  $\frac{x-5}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{-8}$  и  $\frac{x-2}{11} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{-7}$ .

46. Написать уравнение окружности радиуса  $R=6$  и с центром в точке  $O(2, -3)$ .

47. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса  $4x^2+9y^2=16$ .

48. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситеты, уравнение асимптот и директрис гиперболы  $9x^2-16y^2=144$ .

49. Определить координаты фокуса, уравнение директрисы параболы  $y^2=12x$ . Определить расстояние от точки  $M(3, 6)$  до фокуса.

50. Найти длину хорды эллипса, проходящую через фокус, перпендикулярно большой оси.

51. Найти координаты центра и радиус сферы  $x^2+y^2+z^2-6x-8y+4z=0$

52. Составить уравнение сферы, проходящей через четыре точки  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(1, 0, -1)$ .

53. При каких значениях параметра  $p$  плоскость  $2x-2y-z=p$  касается сферы  $x^2+y^2+z^2=81$ .

54. Установить тип заданной поверхности и построить ее:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$ .

55. Найти точки пересечения поверхности  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$  и прямой  $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$ .

56. Определить, какую поверхность представляет уравнение  $y^2 = 15z$ .

57. Найти канонический вид кривой  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$  и определить данную кривую.

58. Исследовать поверхность  $4 - z = x^2 + y^2$  методом параллельных сечений и построить данную поверхность.

59. Определить и построить поверхность  $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4x + 2y + 8z + 1 = 0$ .

### Список литературы.

1. Справочник по высшей математике./ М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1966.
2. Сборник задач по высшей математике./ В.П. Минорский. – М.: Наука, 1978.
3. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры./ Д.В. Беклемешев.– М.: Наука, 2000.

Высшая математика. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Составитель Наталья Анатольевна Пинкина

Оригинал – макет Ольги Павловны Золотовой

Редактор О.Ф. Александрова  
Корректурa автора

Подписано в печать 12.09.2003

Тиражируется на электронных носителях

Заказ 274

Дата выхода 26.09.2003

Адрес в Internet: [www.lan.krasu.ru/studies/editions.asp](http://www.lan.krasu.ru/studies/editions.asp)

Отдел информационных ресурсов управления информатизации КрасГУ  
660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 22-05, e-mail:  
[info@lan.krasu.ru](mailto:info@lan.krasu.ru)

Издательский центр Красноярского государственного университета  
660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: [rio@lan.krasu.ru](mailto:rio@lan.krasu.ru)