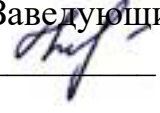


Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
 / В.В. Шайдуров

«29» июня 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ


ПОЛУЛАГРАНЖЕВЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Направление 02.04.01 Математика. Компьютерные науки
Магистерская программа 02.04.01.02 Вычислительная математика

Научный руководитель 

доцент, к.ф.–м.н. Е.В. Кучунова

Выпускник


26.06.2020

А.С. Кондратов

Красноярск 2020

АННОТАЦИЯ

Целью работы является реализация полулагранжевого метода для численного решения начально–краевой задачи для уравнения неразрывности, а также объединение полулагранжевого метода с методом конечных элементов для численного решения системы уравнений Навье–Стокса.

В работе разработан и реализован численный метод для уравнения неразрывности в двумерном случае, проведено объединение полулагранжевого метода с методом конечных элементов для численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа.

Ключевые слова: полулагранжевый метод, уравнение неразрывности, уравнения Навье-Стокса.

ABSTRACT

The aim of the work is to implement the semi-Lagrangian method for numerically solving the initial – boundary-value problem for the continuity equation, as well as to combine the semi-Lagrangian method with the finite element method for numerically solving the Navier – Stokes system of equations.

The numerical method for the continuity equation in the two-dimensional case is developed and implemented, the semi-Lagrangian method is combined with the finite element method to numerically solve the complete system of Navier-Stokes equations for a viscous heat-conducting gas.

Keywords: semi-Lagrangian method, advection problem, Navier-Stokes equation.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| 1 Численное решение уравнение неразрывности полулагранжевым методом | 5 |
| 1.1 Постановка задачи | 5 |
| 1.2 Базовые интегральные тождества | 6 |
| 1.3 Вычисление интеграла на верхнем слое по времени | 7 |
| 1.4 Вычисление интеграла на нижнем слое по времени | 9 |
| 1.5 Учет границ втекания | 13 |
| 1.6 Метод расщепления двумерной задачи на одномерные | 14 |
| 1.7 Результаты численных экспериментов | 16 |
| 1.7.1 Тестовая задача 1 | 16 |
| 1.7.2 Тестовая задача 2 | 17 |
| 2 Объединение полулагранжевого метода и метода конечных элементов для решения уравнений Навье–Стокса | 19 |
| 2.1 Постановка задачи | 19 |
| 2.2 Получение безразмерной системы уравнений | 20 |
| 2.3 Полулагранжевый метод для уравнения неразрывности | 28 |
| 2.4 Метод конечных элементов для уравнений количества движения и уравнения энергии | 29 |
| 2.4.1 Уравнения количества движения | 30 |
| 2.4.2 Уравнение внутренней энергии | 36 |
| 2.5 Алгоритм решения системы уравнений | 44 |
| 2.6 Моделирование течения вязкого теплопроводного газа в трубе | 45 |
| Заключение | 48 |
| Список использованных источников | 49 |
| Приложения | 50 |

ВВЕДЕНИЕ

В современной газовой динамике существует большое количество задач, требующих использование моделей, описывающих тот или иной физический процесс. Эти модели, как правило, представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных и краевые (начальные и граничные) условия. Для того, чтобы с помощью модели предсказать течение газа в каналах или трубах, необходимо численно решать краевые задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений, такие как, например, система уравнений Навье–Стокса. В некоторых простейших частных случаях решение этих задач можно получить в аналитической форме, однако большинство реальных течений моделируется на основе численного решения задач на компьютерах. Основная часть задач газодинамики не имеет аналитических решений, которые можно выписать в явном виде. В этой ситуации становится актуальным решение этих задач при помощи численных методов. Для описания течения газов нередко приходится решать полную систему уравнений Навье–Стокса. Описание течений газа и жидкости на основе уравнений Навье–Стокса имеет богатую историю. В настоящее время созданы и успешно применяются многочисленные коммерческие пакеты программ, реализующие численные алгоритмы решения этих уравнений. Однако используемые в них подходы нельзя считать совершенными

В настоящее время одним из популярных методов численного решения задач гидро– и газодинамики являются лагранжевые и полулагранжевые подходы. Эти методы основаны на подходе Лагранжа к записи уравнений движения потока. Для получения дискретных аналогов уравнений используется набор узловых точек, которые перемещаются вместе со средой, что приводит к тому, что узловые точки постоянно изменяются. Роль точек могут выполнять узлы расчетной сетки или точечные частицы, не связанные сеточными линиями.

Полулагранжевый метод является способом численного решения уравнений в частных производных, описывающих процесс переноса. Данный подход начал активно развиваться с 1960–х годов и является продолжением развития метода характеристик. Полулагранжевый метод позволяет работать на фиксированной вычислительной сетке и в тоже время учитывает лагранжевую природу процесса переноса, т.е. вдоль характеристик уравнение неразрывности можно переписать в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Полулагранжевый метод также связан с аналогичными методами, разработанными в других сферах моделирования, такими как, например, модифицированный метод характеристик, метод Эйлера–Лагранжа и характеристический метод Галеркина. К основным преимуществам метода можно отнести возможность использования крупных шагов по времени [1] и выполнение закона сохранения.

Цель магистерской диссертации – реализовать полулагранжий метод для численного решения начально–краевой задачи для уравнения неразрывности, а

также объединить полулагранжевый метод с методом конечных элементов для численного решения системы уравнений Навье–Стокса.

Для достижения поставленной цели в магистерской диссертации требовалось решить следующие задачи.

1. Реализовать полулагранжевый метод для численного решения начально–краевой задачи для уравнения неразрывности.
2. Провести вычислительные эксперименты на серии тестовых задач. Определить порядок сходимости численного метода.
3. Объединить полулагранжевый метод с методом конечных элементов для численного решения системы Навье–Стокса.
4. Примерить разработанный вычислительный метод для моделирования течения вязкого теплопроводного газа в трубе.

1 Численное решение уравнение неразрывности полулагранжевым методом

Уравнение неразрывности входит в состав многих математических моделей. Одним из методов численного решения уравнения неразрывности является полулагранжевый метод. Он является способом численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процесс переноса. В нём поиск численного решения на каждом слое по времени раскладывается на три составляющие [2,3]: аппроксимация интеграла на верхнем слое по времени, на котором решение еще не известно; построение характеристик (траекторий) с верхнего временного слоя на нижний слой; приближенное вычисление интеграла на нижнем слое по времени. В отличие от большинства конечно-разностных схем [4,5], которые накладывают жесткие ограничения на шаг по времени для обеспечения устойчивости [6], полулагранжевые методы позволяют использовать большие шаги по времени и сократить время расчётов. Однако некоторые реализации полулагранжевых алгоритмов накладывают ограничения на шаги по времени в связи с необходимостью точного вычисления интегралов от интерполяции численного решения на нижнем слое по времени. В данной работе предложен и реализован алгоритм, не накладывающий каких-либо ограничений на шаг по времени и вычисляющий интеграл на нижнем слое по времени точно для билинейной интерполяции численного решения.

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения неразрывности. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – прямоугольная область с границей Γ , таким образом $\bar{D} = D \cup \Gamma$. На замкнутом множестве $[0, T] \times \bar{D}$ рассмотрим двумерное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in [0, T], \quad (1.1)$$

где $\rho(t, x, y)$ – неизвестная функция плотности, $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ – функции вектора скорости $U = (u, v)$, $\mathbf{x} = (x, y)$. Считаем, что функции u , v достаточно гладкие и известны в области $[0, T] \times \bar{D}$. Граница Γ состоит из объединения трёх частей: $\Gamma = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}} \cup \Gamma_{\text{rigid}}$, где Γ_{in} – граница втекания, Γ_{out} – граница вытекания, Γ_{rigid} – граница с твёрдой стенкой.

Полагаем, что на границах вычислительной области выполняются следующие условия

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{\text{in}}} \leq 0, \quad (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{\text{out}}} \geq 0, \quad (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{\text{rigid}}} \equiv 0, \quad (1.2)$$

где символ (\cdot) означает скалярное произведение векторов, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе Γ .

Будем считать, что искомая функция $\rho(t, x, y)$ известна в начальный момент времени на всем множестве \bar{D}

$$\rho(t, x, y) = \rho_{\text{init}}(0, x, y) \quad \forall (x, y) \in D \quad (1.3)$$

и в любой момент времени t на границе втекания

$$\rho(t, x, y) = \rho_{\text{in}}(t, x, y) \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{in}}. \quad (1.4)$$

Здесь $\rho_{\text{init}}(t)$, $\rho_{\text{in}}(t, x, y)$ – известные достаточно гладкие функции.

Вычислительная область представлена на рисунке 1.

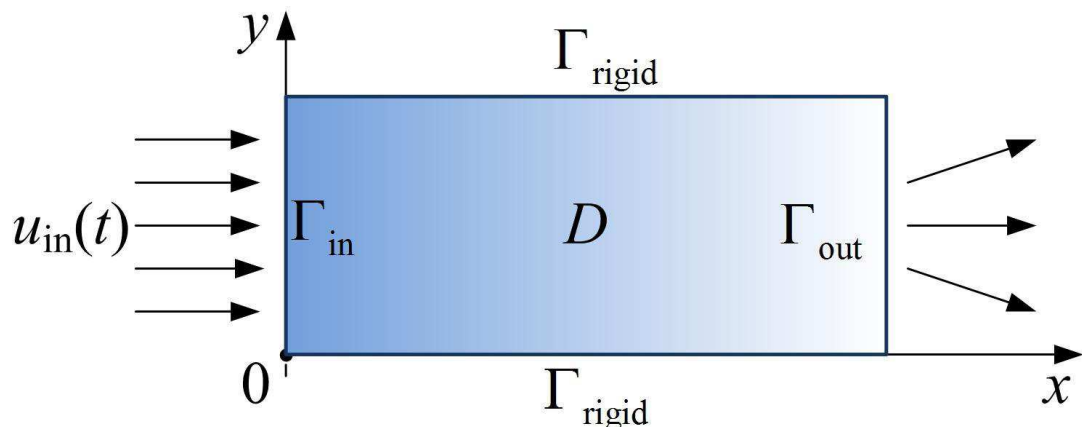


Рисунок 1– вычислительная область

1.2 Базовые интегральные тождества

Введем равномерную сетку T_τ по времени с шагом $\tau = T/K$, где $K > 0$. Узлы сетки обозначим $\tau_k = k\tau, k = 0, \dots, K$.

Рассмотрим два соседних слоя по времени t_{k-1}, t_k . Пусть Ω – произвольный четырехугольник на слое t_k . Из каждой вершины Ω строим траектории движения точки с верхнего слоя на нижний слой по времени. Траектория движения определяется решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = u(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = v(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \end{cases} \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k], \quad (1.5)$$

с начальными данными

$$\tilde{x}(t_k) = V_x, \quad \tilde{y}(t_k) = V_y \quad (1.6)$$

где $V = (V_x, V_y)$ – вершина Ω .

Траектории, опущенные из вершин Ω , образуют в плоскости $t = t_{k-1}$ четырёхугольник Q с криволинейными сторонами (рис. 2.а). В случае, если Ω расположен достаточно близко к границе втекания, некоторые характеристические траектории достигают границы Γ_{in} и образуют множество Q_{in} . Для Ω , Q и Q_{in} справедливо следующее утверждение [7–9].

Для решения задачи (1.1)–(1.4) справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \rho(t_k, x, y) d\Omega = \int_Q \rho(t_{k-1}, x, y) dQ + I(Q_{in}), \quad (1.7)$$

где

$$I(Q_{in}) = \begin{cases} \int_{Q_{in}} (U \cdot n) \rho_{in}(t, x, y) dQ_{in}, & \text{если } Q_{in} \neq \emptyset; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.8)$$

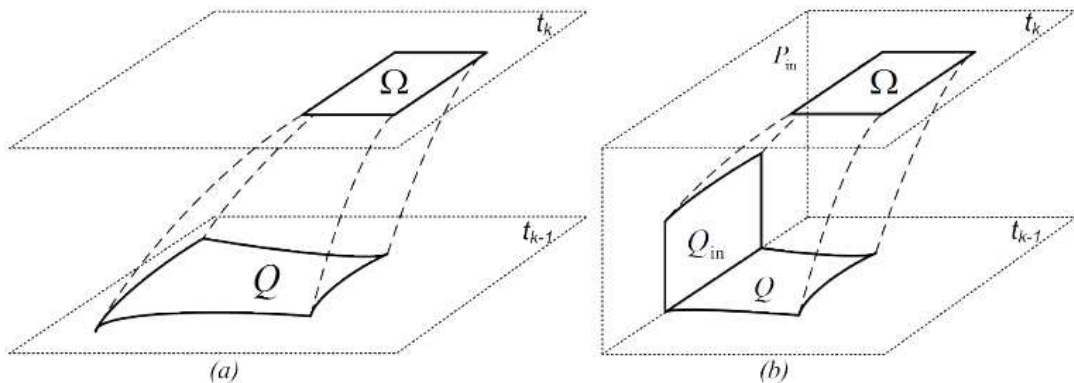


Рисунок 2 – Основная идея полулагранжевого метода

1.3 Вычисление интеграла на верхнем слое по времени

Построим в \bar{D} равномерную прямоугольную сетку

$$\bar{D}_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh; \quad i, j = 0, \dots, N\} \quad (1.9)$$

с шагом $h = 1/N$, где $N > 0$. Каждому узлу $\mathbf{P}_{i,j} = (x_i, y_j)$ сетки \bar{D}_h сопоставим множество

$$\tilde{\omega}_{ij} = (x_i - h/2, x_i + h/2) \times (y_i - h/2, y_i + h/2). \quad (1.10)$$

Для узлов, которые располагаются на одной из границ множество $\tilde{\omega}_{i,j}$ обрезаем границами вычислительной области. Таким образом под окрестностью узла будет понимать множество

$$\omega_{ij} = (x_i - h/2, x_i + h/2) \times (y_i - h/2, y_i + h/2) \cap \bar{D}. \quad (1.11)$$

Можно выделить следующие типы узлов: внутренний узел, узлы на границе втекания, узлы на твердой стенке, узлы на границе вытекания и угловые узлы (рис.3).

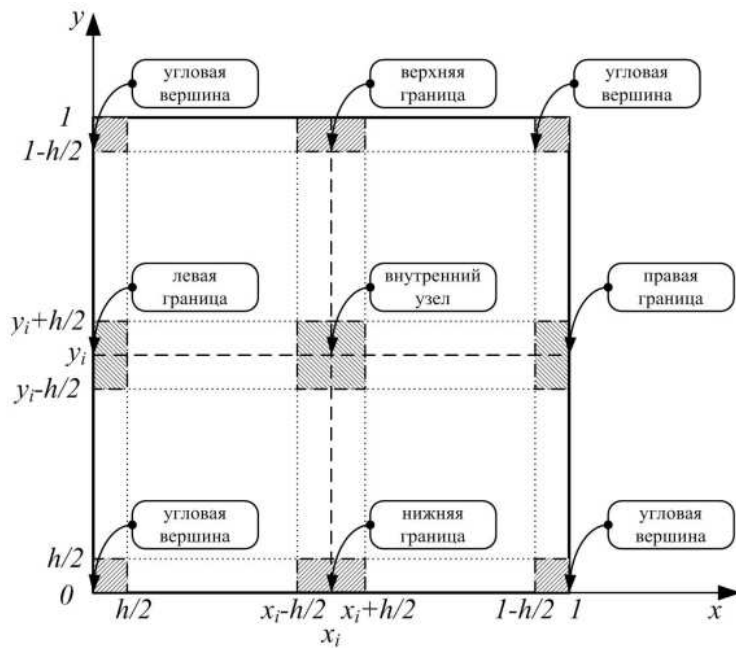


Рисунок 3 - Окрестности узлов сетки

Решение задачи (1.1) – (1.4) будем искать в виде кусочно–постоянной интерполяции неизвестной функции $\rho^h(t, x, y)$, которая на каждом слое по времени постоянна в каждой окрестности $\omega_{i,j}^k = \{t_k\} \times \omega_{i,j}$. Будем считать, что при $t = t_{k-1}$ численное решение ρ^h известно во всех узлах сетки \bar{D}_h и требуется вычислить значение функции $\rho^h(t, x, y)$ на k -ом слое по времени. В силу (1.7)

$$\int_{\omega_{i,j}^k} \rho(t_k, x, y) d\omega_{i,j}^k = \int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, x, y) dQ_{i,j}^{k-1} + I(Q_{in,i,j}^{k-1}), \quad (1.12)$$

Здесь $Q_{i,j}^{k-1}$ – криволинейных четырехугольник, получаемый пересечением характеристических траекторий, опускаемых из границы окрестности $\omega_{i,j}$, с

плоскостью $t = t_{k-1}$. Методика получения такого четырехугольника аналогична технологии, описанной в п. 1.2. Область $Q_{in,i,j}^{k-1}$ получается пересечением характеристических траекторий с плоскостью $\Gamma_{in} \times [0, T]$, интеграл для этой области равен

$$I(Q_{in,i,j}^{k-1}) = \begin{cases} \int_{Q_{in,i,j}^{k-1}} (U \cdot n) \rho_{in}(t, x, y) dQ_{in,i,j}^{k-1}, & \text{если } Q_{in,i,j}^{k-1} \neq \emptyset; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Для левой части соотношение (1.12) будем применять следующее приближение

$$\int_{\omega_{i,j}^k} \rho(t_k, x, y) d\omega_{i,j}^k \approx meas(\omega_{i,j}^k) \rho_{i,j}^k, \quad (1.14)$$

где $meas(\omega_{i,j}^k)$ — это площадь окрестности $\omega_{i,j}^k$. Для внутренних узлов площадь окрестности составляет h^2 , для узлов, лежащих на границе вытекания или на границе с твердой стеклой — $\frac{h^2}{2}$, для угловых узлов — $\frac{h^2}{4}$.

1.4 Вычисление интеграла на нижнем слое по времени

Чтобы вычислить правую часть равенства (1.7), как уже говорилось, необходимо решить задачу Коши, где в качестве начальных данных будут выступать вершины окрестности узла сетки. Задачу Коши численно можно решить, например, методом Рунге–Кутты четвертого порядка

$$\begin{aligned} l_{n+1} &= l_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= (t_n, x(t_n), l(t_n)), \\ k_2 &= f(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \tau \frac{k_1}{2}, y_n + \tau \frac{k_1}{2}), \\ k_3 &= f(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \tau \frac{k_2}{2}, y_n + \tau \frac{k_2}{2}), \\ k_4 &= f(t_n + \tau, x_n + \tau k_3, y_n + \tau k_3). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Так как в нашем случае l_{n+1} известен и необходимо найти l_n , то просто везде перед τ появится минус. В итоге мы получим на нижнем слое некоторый криволинейный четырехугольник, который мы аппроксимируем прямолинейным, получая некоторую область Q , которая состоит из множества вершин $B_n^k = (t_k, B_n^x, B_n^y)$. Нам необходимо найти интеграл по области Q ,

подынтегральную функцию ρ мы аппроксимируем численным решением ρ^h и получаем следующее соотношение

$$\int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, x, y) dx dy \approx \int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, x, y) dx dy. \quad (1.16)$$

В настоящее время разработано множество различных методов [9] для вычисления интеграла от кусочно–постоянной функции. В данной работе предлагается оригинальный алгоритм, основанный на построении простых многоугольников из некоторого множества вершин и использование формулы площади Гаусса (1.18). Формула площади Гаусса [10] верна для любого самонепересекающегося (простого) многоугольника, который может быть выпуклым или вогнутым. Формула была описана Мейстером (1724—1788) в 1769 году и Гауссом в 1795 году. Формула определения площади определяется путём взятия каждого ребра многоугольника АВ и вычисления площади треугольника АВО с вершиной в начале координат О через координаты вершин. При обходе вокруг многоугольника образуются треугольники, включающие внутреннюю часть многоугольника и расположенные снаружи его. Разница между суммой этих площадей и есть площадь самого многоугольника. Её можно рассматривать как частный случай теоремы Грина, которая устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру C и двойным интегралом по односвязной области D , ограниченной этим контуром. Достоинством предложенного метода вычисления интеграла на нижнем слое по времени является его универсальность и независимость от шага по времени.

Вычисление интеграла на нижнем слое по времени от сеточной функции

$$\int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho^h(t^{k-1}, x, y) dQ \quad (1.17)$$

состоит из следующих шагов.

1. Когда мы опускаем характеристические траектории с верхнего слоя по времени на нижний, мы получаем некоторое множество точек. Имеем на нижнем слое по времени некоторую область Q , которая состоит из множества вершин $B_n^k = (t_k, B_n^x, B_n^y)$. Строим выпуклую оболочку данного множества точек, для этого можно применить алгоритм Джарвиса [11]. В результате получим минимальную выпуклую оболочку (МВО) из набора точек B , которую будем называть контуром. Обозначим множество точек, вошедших в МВО M . При этом множество M состоит из точек множества B , но не факт, что $M = B$.
2. Если все точки множества B принадлежат множеству M , то задача решена.
3. Если же нет, то ищем точку P с минимальным расстоянием до контура – пусть это минимальное расстояние до стороны (g, h) (если таких точек

несколько, то берем любую из них), вставляем в контур найденную точку P (вместо контура \dots, g, h, \dots будет \dots, g, P, h, \dots).

4. Для оставшихся точек повторяем описанную выше процедуру, пока последняя не будет вставлена в контур.

В итоге мы получим простой (без самопересечений) многоугольник с пронумерованными против часовой стрелке вершинами.

Теперь нам необходимо вычислить обрамляющий прямоугольник полученной области, то есть прямоугольник, в который вложен наш простой многоугольник, найденный ранее. В этом прямоугольнике находятся найденные нами вершины простого многоугольника. На рисунке 4 буквами R обозначены вершины прямоугольника, обрамляющего множество вершин B . После этого в ограниченной области мы перебираем все узлы, вошедшие в обрамляющий прямоугольник R , и ищем пересечения окрестностей узлов сетки $\omega_{i,j}$ с полученным простым многоугольником B , площадь которого необходимо найти. При этом каждой ячейке сетки соответствует плотность, которая постоянна в окрестности узла сетки. Обрамляющий прямоугольник нужен, чтобы уменьшить количество дальнейших вычислений. Так мы проверяем пересечения окрестностей узлов сетки с многоугольником B которые почти наверняка пересекутся с многоугольником B , и мы не будем тратить время на перебор всех узлов сетки.

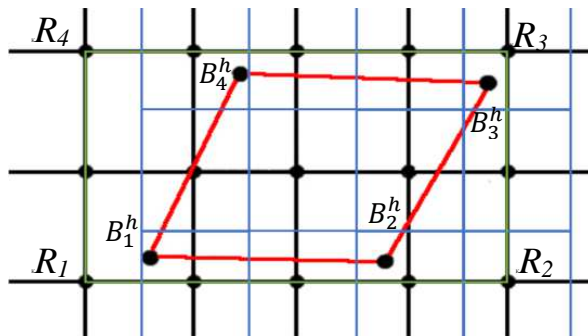


Рисунок 4 – Пример области с пронумерованными вершинами

Когда пересечение окрестности узла сетки и многоугольника B найдено, то находятся вершины их пересечения, то есть пересечение прямых, образующих окрестность узла сетки и прямых, образующих многоугольник B . Затем строится по ним простой многоугольник M , как и ранее. Во множество M входят координаты вершин пересечения многоугольника B и некоторой окрестности узла сетки. Пример пересечения окрестности узла сетки и многоугольника приведён на рисунке 5. И вычисляется площадь пересечения по формуле площади Гаусса

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x'_i y'_{i+1} + x'_n y'_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x'_{i+1} y'_i - x'_1 y'_n \right|, \quad (1.18)$$

где (x'_i, y'_i) – координаты вершин многоугольника, которые находятся во множестве M .

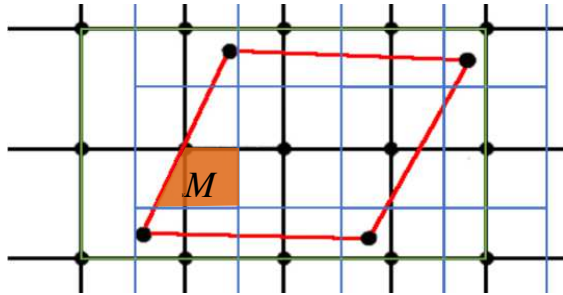


Рисунок 5 – Пример пересечения окрестности и многоугольника

Затем значение площади умножается на значение плотности в этой окрестности (1.14). И так происходит для каждой точки в полученном обрамляющем прямоугольнике (1.12).

Рассмотрим подробнее алгоритм вычисления площади многоугольника M . Окрестность ω_{ij} узла сетки это фактически прямоугольник. Необходимо найти сначала пересечение каждой стороны прямоугольника ω_{ij} , которая пересекается с многоугольником B , с каждой стороной области M . Если это отрезок прямой, то добавляются в список точки начала и конца этого отрезка. Если это только точка, то она добавляется в список. Затем ищется вложенность каждой вершины окрестности узла в полученную область, используя формулу площади Гаусса

1. Считаем площадь многоугольника B ;
2. Считаем площади всех треугольников, пример на рисунке 6, которые образуются всеми двумя соседними точками многоугольника M и точкой, вложенность которой мы проверяем;
3. Суммируем площади треугольников;
4. Если сумма равна площади многоугольника B , то точка внутри или на многоугольнике, нет — снаружи.

Затем тем же алгоритмом ищется вложенность каждой вершины многоугольника B в окрестность ω_{ij} . Стоит сказать, что данный алгоритм работает и для невыпуклых многоугольников.

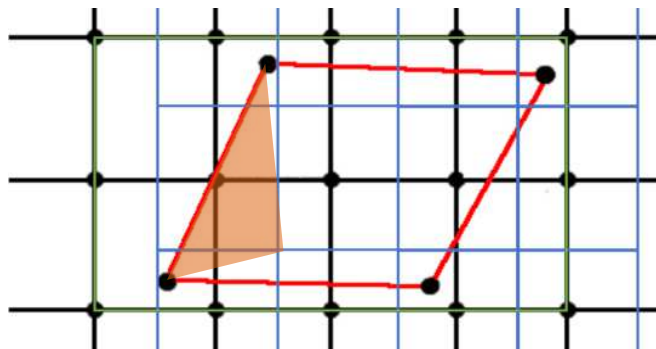


Рисунок 6 - пример треугольника, образованного точкой вершины окрестности с двумя соседними точками многоугольника

В итоге мы получаем точки пересечения многоугольников, которые мы сортируем, строим по ним простой многоугольник и ищем по его площадь. И так происходит для каждой окрестности узла сетки в обрамляющем прямоугольнике. Стоит отметить, что абсолютно те же действия происходят и на области втекания, когда характеристические траектории попадают туда.

Формула для вычисления плотности на k -ом слое по времени получается следующая

$$\rho_{i,j}^{h,k} = \frac{1}{\text{meas}(\Omega_{i,j})} \left(\int_{R_{i,j}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, x, y) d\Omega + \int_{R_{in,i,j}^{k-1}} \rho_{in}^h u^h dS \right). \quad (1.19)$$

1.5 Учет границ втекания

Траектория с верхнего слоя пересечёт границу втекания в том случае, если окрестность $\omega_{i,j}^k$ расположена достаточно близко к P_{in} (рис. 7). В таком случае некоторые траектории могут достигнуть границу втекания и образовать множество $Q_{in,i,j}^{h,k-1}$. По этому множеству вычисляем интеграл $I(Q_{in,i,j}^{h,k-1})$, входящий в правую часть тождества (1.7).

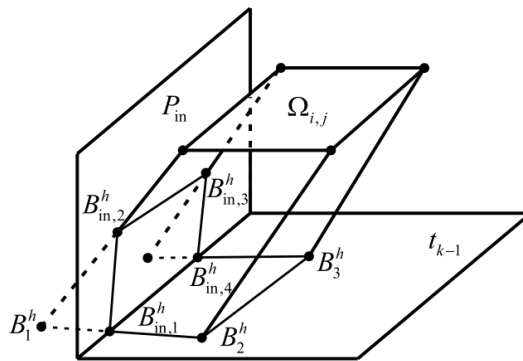


Рисунок 7 - Аппроксимация траекторий движения

Когда хотя бы одна траектория с верхнего слоя по времени пересекает P_{in} , то $I(Q_{in,i,j}^{h,k-1}) \neq 0$ и необходимо определить точки, принадлежащие многоугольнику $Q_{in,i,j}^{h,k-1}$, он необязательно будет четырёхугольным, например когда на границу втекания попадёт только одна траектория, множество $Q_{in,i,j}^{h,k-1}$ будет состоять из трёх точек, которые образуют треугольную область, по которой необходимо будет вычислить интеграл.

Чтобы вычислить интеграл $I(Q_{in,i,j}^{h,k-1})$, в плоскости P_{in} строим сетку

$$\bar{\Omega}_{h,in} = \{(t_k, 0, y_p) : q = 0, \dots, N; k = 0, \dots, K\}. \quad (1.20)$$

Для каждого узла сетки $\bar{\Omega}_{h,\text{in}}$ строим окрестность

$$\omega_{\text{in},q}^k = \left(t_k - \tau/2, t_k + \tau/2\right) \times \{0\} \times \left(y_q - h/2, y_q + h/2\right). \quad (1.21)$$

На множестве P_{in} определим функции ρ_{in}^h и U^h так, что

$$\rho_{\text{in}}^h(t, 0, y) = \rho_{\text{in}}(t_k, 0, y_q), U^h(t, 0, y) = U(t_k, 0, y_q) \quad \forall t, 0, y \in \omega_{\text{in},q}^k \cap P_{\text{in}}. \quad (1.22)$$

Интеграл $I(Q_{\text{in},i,j}^{h,k-1})$ аппроксимируем следующим образом

$$\int_{Q_{\text{in},j}^{k-1}} \rho u(t_{k-1}, x, y) dS \approx \int_{Q_{\text{in},j}^{k-1}} \rho^h u(t_{k-1}, x, y) dS. \quad (1.23)$$

Дальнейшее вычисление интеграла полностью аналогично методу, изложенному в п. 1.4.

1.6 Метод расщепления двумерной задачи на одномерные

Дополнительно рассматривался метод расщепления двумерной задачи (1.1) на две одномерных. Для этого перепишем уравнение (1.1) в следующем виде

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho)}{\partial x}\right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y}\right) = 0 \quad (1.24)$$

Приравнивая к нулю каждое из слагаемых, получаем следующую систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(2u\rho)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(2v\rho)}{\partial y} = 0 \end{cases}. \quad (1.25)$$

Для построения численного алгоритма решения одномерных задач (1.25) применяются аналогичные интегральные тождества [3–4] для вычисления плотности на верхнем слое по времени

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(t^k, x, y_j) dx = \int_{Q_{x,i}^{k-1}} \rho(t^{k-1}, x, y_j) dx, \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \rho(t^k, x_i, y) dy = \int_{Q_{y,j}^{k-1}} \rho(t^{k-1}, x_i, y) dy. \quad (1.26)$$

Здесь $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $(y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ – одномерные окрестности узла \mathbf{x}_{ij} , $Q_{x,i}^{k-1}$ и $Q_{y,i}^{k-1}$ – некоторые множества, получившиеся при опускании характеристических

траекторий из окрестностей на верхнем слое по времени k на нижний слой по времени $k-1$. Для вычислений проекций характеристических траекторий на предыдущий слой по времени решаем задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = 2u(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = 2v(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \end{cases} \text{ при } t \in [t_{k-1}, t_k]. \quad (1.27)$$

На нижнем слое получаем точки $x_{i\pm 1/2}$, $y_{j\pm 1/2}$, которые образуют границы множеств $Q_{x,i}^{k-1} = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ и $Q_{y,i}^{k-1} = (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$. На рисунке 8 показан пример множества $Q_{x,i}^{k-1}$.

Задача Коши тогда будет выглядеть следующим образом

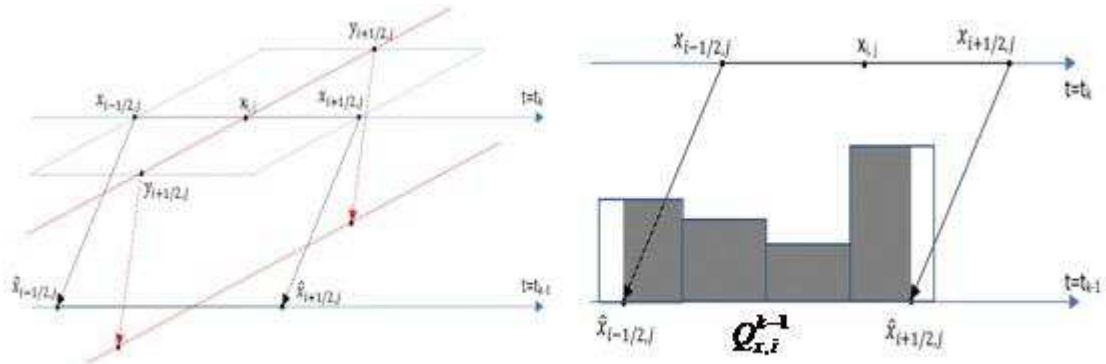


Рисунок 8 - Геометрическая интерпретация метода расщепления

Аппроксимируя левую и правую части равенств (1.26) получим формулы для численного решения задачи

$$\begin{cases} h \cdot \rho_{ij}^k = I_{x,i}^{k-1}(x) + 2\tau h f_1 + I_{in}^x \\ h \cdot \rho_{ij}^k = I_{y,j}^{k-1}(y) + 2\tau h f_2 \end{cases}, \quad (1.28)$$

где $I_{x,i}^{k-1}$, $I_{y,j}^{k-1}$ – вычисленные численно значения одномерных интегралов по множествам $Q_{x,i}^{k-1}$ и $Q_{y,i}^{k-1}$ соответственно на $(k-1)$ -ом слое по времени. Интеграл $I_{x,i}^{k-1}$ вычисляется как сумма произведений длины каждой окрестности на плотность, соответствующей окрестности. Пример длин окрестностей и плотностей приведён на рисунке 8.

Сложив (1.28) у нас будет значение плотности в окрестности точки на верхнем слое по времени

$$\rho_{ij}^k = \frac{1}{2h} (I_{x,i}^{k-1} + I_{y,j}^{k-1} + I_{x,in}^{k-1}), \quad (1.29)$$

где $I_{x,in}^{k-1}$ это численно вычисленный интеграл по плоскости втекания. Если узел сетки находится близко к плоскости втекания, то опущенная траектория с верхнего слоя по времени на нижний слой может пересечь плоскость втекания. В таком случае $I_{x,in}^{k-1} \neq 0$. Интеграл $I_{x,in}^{k-1}$ вычисляется аналогично интегралу $I_{x,i}^{k-1}$. Если же характеристическая траектория не достигла плоскости втекания, то $I_{x,in}^{k-1} = 0$.

1.7 Результаты численных экспериментов

1.7.1 Тестовая задача 1

В качестве теста рассмотрим задачу с разрывным решением: параллельный перенос круга в области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ при $t \in [0,1]$. Начальные данные и значения на границе втекания задавались в виде

$$\rho_{\text{init}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x-0.2)^2 + (y-0.2)^2 \leq 0.1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}, \quad (1.30)$$

$$\rho_{\text{in}}(t, x, y)|_{\Gamma_{\text{in}}} = 0. \quad (1.31)$$

Функции скорости выберем постоянными: $u(t, x, y) = 0.6$, $v(t, x, y) = 0$.

В этом случае точное решение задачи будет имеет следующий вид

$$\rho(t, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 \leq 0.1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}, \quad (1.32)$$

где $x_c(t) = 0.2 + ut$. К моменту времени $t=1$ центр круга переместится в точку $(0.8, 0.5)$. Выполнение балансового соотношения (1.7) исследовалась в дискретном аналоге нормы пространства $L_1(\Omega)$

$$\|\rho^{h,k}\|_{L_1^h} = \sum_{i,j=0}^N \rho_{i,j}^{h,k} \text{meas}(\omega_{i,j}), \quad (1.33)$$

где $\text{meas}(\omega_{i,j})$ – площадь окрестности $\omega_{i,j}$. В таблице, представленной ниже приведены значения шага по времени и разность норм в начальный момент времени и в последующие моменты времени (1.34) для первого алгоритма. Для второго алгоритма полученные данные очень похожи на первый.

$$\left| \left\| \rho^{0,k} \right\|_{L_1^h} - \left\| \rho^{h,k} \right\|_{L_1^h} \right| = 0, \quad (1.34)$$

Таблица 1 – шаг по времени и норма тестовой задачи

| Шаг по времени | Разность норм |
|----------------|-----------------|
| 0.00000 | |
| 0.01250 | 0.000000000E+00 |
| 0.02500 | 0.000000000E+00 |
| 0.03750 | 0.000000000E+00 |
| ... | ... |
| 1.96250 | 1.000033389E-13 |
| 1.97500 | 1.000033389E-13 |
| 1.98750 | 1.000033389E-13 |
| 2.00000 | 1.000033389E-13 |

Данные приведены с 12-ю знаками в дробной части. Как можно видеть, норма со временем не меняется, что подтверждает выполнение закона сохранения. В Приложении А представлено решение на первом и последнем слоях по времени.

1.7.2 Тестовая задача 2

Для сравнения двух вычислительных методов рассматривалась задача (1.1) –(1.4) с известным точным решением

$$x_c(t) = x_0 + R_c (\cos(2\pi t) - 1), \quad y_c(t) = y_0 + R_c \sin(2\pi t), \quad (1.35)$$

$$\rho(t, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x - x_c(t))^2 + (y - y_c(t))^2 \leq R; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}, \quad (1.36)$$

Скорости задавались следующими формулами

$$u(t, x, y) = -2\pi R_c \sin(2\pi t), \quad v(t, x, y) = 2\pi R_c \cos(2\pi t). \quad (1.37)$$

Здесь $x_0 = 0.75$, $y_0 = 0.5$, $R = 0.1$, $R_c = 0.25$.

На рисунке 9 представлены профили графиков точного и вычисленных решений, полученных первым и вторым методами. Несложно заметить, что первый метод значительно меньше сглаживает разрывные решения по сравнению со вторым методом.

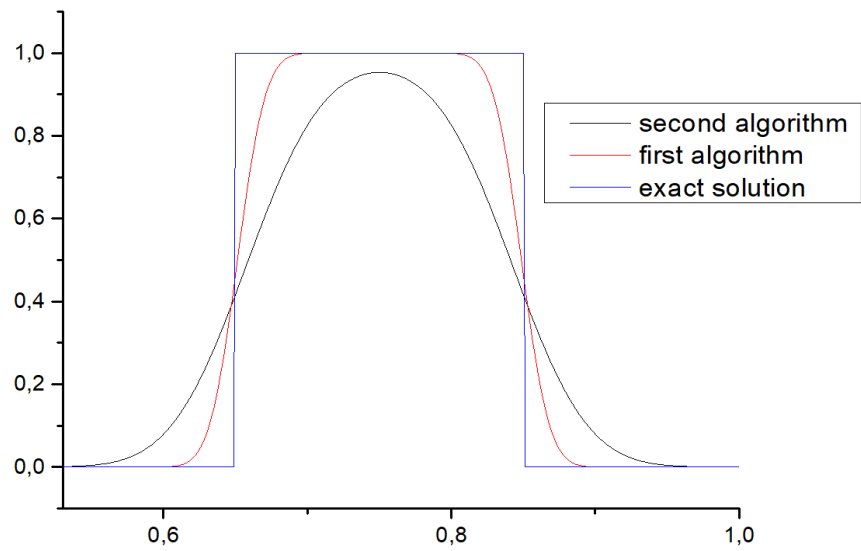


Рисунок 9 – Численное и точное решение тестовой задачи

2 Объединение полулагранжевого метода и метода конечных элементов для решения уравнений Навье–Стокса

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим двумерное течение газа в плоском прямоугольном канале D , $\bar{D} = D \cup \Gamma$ (рис. 10). Граница Γ представляет собой объединение трёх типов границ: $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_{rigid}$, где Γ_{in} – граница втекания, Γ_{out} – граница вытекания, Γ_{rigid} – граница с твёрдой стенкой.

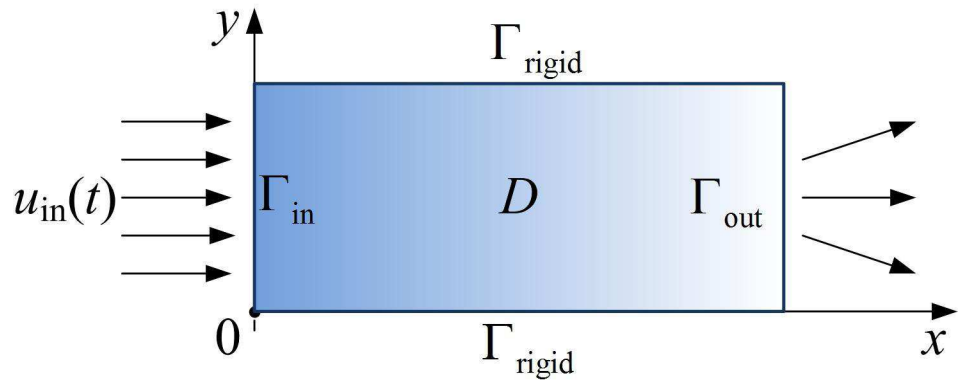


Рисунок 10 – исходная область

Для моделирования течения однокомпонентного сжимаемого вязкого теплопроводного газа выпишем уравнения неразрывности, количества движения и внутренней энергии в виде.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi, \quad (2.4)$$

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad (2.5)$$

$$q_x = -\frac{\gamma}{Pr} \mu \frac{\partial e}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\gamma}{Pr} \mu \frac{\partial e}{\partial y}, \quad (2.6)$$

$$\Phi = \mu \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (2.7)$$

2.2 Получение безразмерной системы уравнений

Уравнения динамики жидкости часто приводят к безразмерному виду. Преимущество такой формы записи состоит в независимом варьировании таких характеризующих течения параметров, как число Маха, число Рейнольдса, число Прандтля. После приведения уравнений к безразмерному виду параметры потока «нормализуются» так, что их величины изменяются в обозначенных пределах, например -1 и 1 . Применим процедуру обезразмеривания по методу неопределенных коэффициентов. Для этого введем новые параметры

$$x' = \frac{x}{L}, y' = \frac{y}{L}, t' = \frac{t}{t_\infty}, \quad (2.8)$$

$$u' = \frac{u}{V_\infty}, v' = \frac{v}{V_\infty}, \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad (2.9)$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}, P' = \frac{P}{P_\infty}, T' = \frac{T}{T_\infty}, e' = \frac{e}{V_\infty^2}, \quad (2.10)$$

где безразмерные величины помечены штрихом, параметры невозмущенного потока индексом ∞ , L – характерная длина V_∞ – характерная скорость, t_∞ – характерное время, ρ_∞ – характерная плотность.

Перейдём к уравнению неразрывности (2.1). Рассмотрим производную по времени от плотности. Применяя правило дифференцирования сложной функции к (2.9), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho_\infty \rho')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\rho_\infty}{t_\infty} \frac{\partial \rho'}{\partial t'}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим второе слагаемое уравнения (2.1). Подставляем из уравнения (2.9) скорость u , применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial(u\rho)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho_\infty \rho' V_\infty u')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\rho_\infty V_\infty}{L} \frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим третье слагаемое уравнения (2.1). Подставляем из уравнения (2.9) скорость v , применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial(v\rho)}{\partial y} = \frac{\rho_\infty V_\infty}{L} \frac{\partial(v' \rho')}{\partial y'}. \quad (2.13)$$

Используя полученные выражения (2.11)–(2.13), подставим их в исходное уравнение (2.1)

$$\frac{\rho_\infty}{t_\infty} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\rho_\infty V_\infty}{L} \left(\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Домножив (2.14) на $\frac{L}{\rho_\infty V_\infty}$, получим

$$\frac{L}{V_\infty t_\infty} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'} = 0. \quad (2.15)$$

Выбираем t_∞ так, чтобы $\frac{L}{V_\infty t_\infty} = 1$, определим $t_\infty = \frac{L}{V_\infty}$. Тогда безразмерное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial(u' \rho')}{\partial x'} + \frac{\partial(v' \rho')}{\partial y'} = 0, \quad (2.16)$$

Рассмотрим первое уравнение количества движения (2.2), подставляя в него (2.9), получаем

$$\frac{\partial(V_\infty u')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + V_\infty u' \frac{\partial(V_\infty u')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + V_\infty v' \frac{\partial(V_\infty u')}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{V_\infty}{t_\infty} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{V_\infty^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V_\infty^2}{L} v' \frac{\partial u'}{\partial y'}. \quad (2.17)$$

Используя выражение $t_\infty = \frac{L}{V_\infty}$, получаем $\frac{V_\infty}{t_\infty} = \frac{V_\infty^2}{L}$. Таким образом, для субстанциональной производной в уравнении движения (2.2) справедливо

$$\frac{du}{dt} = \frac{V_\infty}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = \frac{V_\infty^2}{L} \frac{\partial u'}{\partial t'}. \quad (2.18)$$

Пространственная производная для давления в безразмерном виде примет следующий вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(P_\infty \cdot P')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{P_\infty}{L} \frac{\partial P'}{\partial x'}. \quad (2.19)$$

Для обезразмеривания динамического коэффициента вязкости введём $\mu' = \frac{\mu}{\mu_\infty}$.

Распишем второе слагаемое уравнения количества движения (2.2) в безразмерном виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{2}{3} \mu_{\infty} \mu' \left(2 \frac{V_{\infty}}{L} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{V_{\infty}}{L} \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial x'}{\partial x} = \\ &= \frac{\mu_{\infty} V_{\infty}}{L^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{2}{3} \mu' \left(2 \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.20)$$

Распишем третье слагаемое уравнения количества движения (2.2) в безразмерном виде

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\mu_{\infty} V_{\infty}}{L^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right]. \quad (2.21)$$

Подставляем все найденные безразмерные выражения (2.18)–(2.21) в исходное уравнение движения (2.2). Будем иметь следующее безразмерное уравнение

$$\rho_{\infty} \rho' \frac{V_{\infty}^2}{L} \frac{du'}{dt} = -\frac{P_{\infty}}{L} \frac{dP'}{dx'} + \frac{\mu_{\infty} V_{\infty}}{L^2} \frac{d}{dx'} \left[\frac{2}{3} \mu' \left(2 \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \right] + \frac{\mu_{\infty} V_{\infty}}{L^2} \frac{d}{dy'} \left[\mu' \left(2 \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right]. \quad (2.22)$$

Преобразуем уравнение (2.22) и получим следующее уравнение

$$\rho' \frac{du'}{dt'} = \frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\mu_{\infty}}{L \cdot \rho_{\infty} V_{\infty}} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{2}{3} 2 \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right] + \frac{d}{dy'} \left[\mu' \left(2 \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right] \right). \quad (2.23)$$

Пусть $\frac{P_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} = 1$, тогда $P_{\infty} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2$. Обозначим $Re = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} L}{\mu_{\infty}}$ – число Рейнольдса.

Тогда уравнение безразмерное уравнение количества движения примет вид

$$\rho' \frac{du'}{dt'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'}, \quad (2.24)$$

где $\tau'_{xx} = \frac{2}{3} \frac{\mu'}{Re} \left(2 \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)$, $\tau'_{xy} = \frac{\mu'}{Re} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)$.

Аналогично процедуру обезразмеривания проводим для второго уравнения количества движения, в безразмерном виде уравнение принимает вид

$$\rho' \frac{dv'}{dt'} = -\frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y'}, \quad (2.25)$$

где $\tau'_{xy} = \frac{\mu'}{Re} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)$, $\tau'_{yy} = \frac{2}{3} \frac{\mu'}{Re} \left(2 \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)$.

Рассмотрим уравнение энергии (2.4). Для обезразмеривания энергии введем $e' = \frac{e}{e_\infty}$. Распишем субстанциональную производную $\frac{de}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial(e_\infty e')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + V_\infty u' \frac{\partial(e_\infty e')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + V_\infty v' \frac{\partial(e_\infty e')}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \\ &= \frac{e_\infty}{t_\infty} \frac{\partial e'}{\partial t'} + \frac{V_\infty e_\infty}{L} \left(u' \frac{\partial e'}{\partial x} + v' \frac{\partial e'}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Используем выражение $t_\infty = \frac{L}{V_\infty}$, тогда $\frac{e_\infty}{t_\infty} = \frac{e_\infty V_\infty}{L}$. Поэтому для субстанциональной производной справедливо

$$\frac{de}{dt} = \frac{V_\infty e_\infty}{L} \left(\frac{\partial e'}{\partial t'} + u' \frac{\partial e'}{\partial x} + v' \frac{\partial e'}{\partial y} \right) = \frac{V_\infty e_\infty}{L} \frac{de'}{dt'}. \quad (2.27)$$

Ранее мы определили $P = P_\infty P'$, $P_\infty = \rho_\infty V_\infty^2$, поэтому давление будет выражаться следующим образом через безразмерные переменные

$$P = \rho_\infty V_\infty^2 P'. \quad (2.28)$$

Давление для идеального газа $P = (\gamma - 1) \rho e$, где энергия и плотность соответственно $e = e_\infty e'$, $\rho = \rho_\infty \rho'$. Поэтому давление запишется следующим образом

$$P = (\gamma - 1) \rho_\infty e_\infty \rho' e'. \quad (2.29)$$

Принимая во внимание (2.28) получим $\rho_\infty V_\infty^2 P' = (\gamma - 1) \rho_\infty e_\infty \rho' e'$. Тогда учитывая, что $e_\infty = V_\infty^2$, давление в безразмерном виде запишется следующим образом

$$P' = (\gamma - 1) \rho' e'. \quad (2.30)$$

Приведем обезразмеривание правой части уравнения (2.4). Первое слагаемое $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ правой части, являющееся компонентой теплового потока, расписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial e}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu_\infty \mu' \frac{\partial(e_\infty e')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu_\infty \frac{e_\infty}{L} \mu' \frac{\partial e'}{\partial x'} \right) = \frac{\mu_\infty e_\infty}{L^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu' \frac{\partial e'}{\partial x'} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Тогда компонента теплового потока в обезразмеренном виде будет выглядеть следующим образом

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\mu_\infty e_\infty}{L^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu' \frac{\partial e'}{\partial x'} \right). \quad (2.32)$$

Вторая компонента теплового потока в обезразмеренном виде получается аналогичным образом

$$\frac{\partial q_y}{\partial x} = \frac{\mu_\infty e_\infty}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu' \frac{\partial e'}{\partial y'} \right). \quad (2.33)$$

Диссипативная функция в обезразмеренном виде будет иметь следующий вид

$$\Phi = \frac{\mu_\infty V_\infty^2}{L^2} \mu' \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right]. \quad (2.34)$$

Принимая во внимание (2.27), (2.30), (2.32), (2.33) и (2.34) и подставив все полученные безразмерные компоненты в исходное уравнение (2.4) получим

$$\begin{aligned} \rho_\infty \rho' \frac{e_\infty V_\infty}{L} \frac{de'}{dt'} + P_\infty P' \frac{V_\infty}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = \\ = -\frac{\mu_\infty V_\infty^2}{L^2} \mu' \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Принимая во внимание, что $e_\infty = V_\infty^2$ и $P_\infty = \rho_\infty V_\infty^2$, получаем

$$\rho' \frac{de'}{dt'} + P' \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial q'_x}{\partial x'} - \frac{\partial q'_y}{\partial y'} + \Phi', \quad (2.36)$$

где $q'_x = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu'}{\text{Re}} \frac{\partial e'}{\partial x'}$, $q'_y = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu'}{\text{Re}} \frac{\partial e'}{\partial y'}$,

$$\Phi' = \frac{\mu'}{\text{Re}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right].$$

Выпишем полученную безразмерную систему уравнений. Нами были введены безразмерные величины

- безразмерные пространственные координаты $x' = \frac{x}{L}$, $y' = \frac{y}{L}$;
- безразмерное время $t' = \frac{t}{t_\infty}$, где $t_\infty = \frac{L}{V_\infty}$;

- безразмерные проекции вектора скорости $u' = \frac{u}{V_\infty}, v' = \frac{v}{V_\infty}$;
- безразмерная плотность $\rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}$;
- безразмерное давление $P' = \frac{P}{P_\infty}$, где $P_\infty = \rho_\infty V_\infty^2$;
- безразмерная внутренняя энергия $e' = \frac{e}{e_\infty}$, где $e_\infty = V_\infty^2$.

Определим следующие выражения для динамической вязкости $\mu = (\gamma(\gamma-1)M^2 e)^\omega = e_\infty^\omega (\gamma(\gamma-1)M^2 e')$, где $\mu_\infty = e_\infty^\omega$.

В результате всех преобразований безразмерная система будет выглядеть следующим образом

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial (u' \rho')}{\partial x'} + \frac{\partial (v' \rho')}{\partial y'} = 0, \quad (2.37)$$

$$\rho' \frac{du'}{dt'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'}, \quad (2.38)$$

$$\rho' \frac{dv'}{dt'} = -\frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y'}, \quad (2.39)$$

$$\rho' \frac{de'}{dt'} + P' \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial q'_x}{\partial x'} - \frac{\partial q'_y}{\partial y'} + \Phi', \quad (2.40)$$

$$\Phi' = \frac{\mu'}{\text{Re}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right], \quad (2.41)$$

$$\text{где } \tau'_{xx} = \frac{2}{3} \frac{\mu'}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right), \quad \tau'_{xy} = \frac{\mu'}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right), \quad \tau'_{yy} = \frac{2}{3} \frac{\mu'}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial u'}{\partial x'} \right),$$

$$\frac{\partial q'_x}{\partial x} = \frac{\mu_\infty e_\infty}{L^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu' \frac{\partial e'}{\partial x'} \right), \quad \frac{\partial q'_y}{\partial x} = \frac{\mu_\infty e_\infty}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu' \frac{\partial e'}{\partial y'} \right), \quad \text{число Рейнольдса } \text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}.$$

Поскольку далее будут рассматриваться только безразмерные уравнения, то штрихи будут опускаться. И тогда система двумерных уравнений Навье–Стокса, описывающих течение и теплообмен однокомпонентного сжимаемого вязкого и теплопроводного газа в безразмерном виде, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} = 0, \quad (2.42)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.43)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (2.44)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi, \quad (2.45)$$

Здесь u, v – соответственно проекции вектора скорости U на оси координат; ρ – плотность; e – внутренняя энергия, отнесенная к единице массы; $P = (\gamma - 1) p e$ – давление; $\mu = (\gamma(\gamma - 1) M^2 e)^\omega$ – динамический коэффициент вязкости; $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ – компоненты тензора напряжений, выражающиеся следующим образом

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3 \text{Re}} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3 \text{Re}} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right);$$

q_x, q_y – компоненты теплового потока, определенные следующим образом

$$q_x = - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \frac{\partial e}{\partial x}, \quad q_y = - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \frac{\partial e}{\partial y};$$

Φ – диссипативная функция определенная следующим образом

$$\Phi = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right],$$

где Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля, γ – газодинамическая постоянная;

$\frac{du}{dt}$ – полная (субстанциональная) производная, то есть производная вдоль характеристического направления.

Два уравнения в системе (2.13)–(2.14) определяют изменение количества движения под действием внешних сил и внутренних напряжений, третье уравнение выражает закон сохранения массы (уравнение неразрывности), четвертое – определяет изменение внутренней энергии движущейся среды за счет потока тепла путем теплопроводности и работы внутренних напряжений. Будем считать, что функция $\rho(t, x, y)$ известна в начальный момент времени на всем множестве \bar{D}

$$\rho(t, x, y) = \rho_{ini}(0, x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad (2.46)$$

и в любой момент времени t на границе втекания Γ_{in}

$$\rho(t, x, y) = \rho_{in}(t, x, y) \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{in} \quad (2.47)$$

Также будем полагать, что на границе втекания Γ_{in} справедливо соотношение

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} < 0, \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{in}, \quad (2.48)$$

на границе вытекания Γ_{out}

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} > 0, \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{out}}, \quad (2.49)$$

границе с твёрдой стенкой Γ_{rigid}

$$U = (0, 0), \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{rigid}}, \quad (2.50)$$

где символ (\cdot) это скалярное произведение, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе Γ .

Чтобы задать условия на границе вытекания Γ_{out} , запишем законы сохранения количества движения и полной энергии в векторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho U dD = - \int_{\Gamma} (U \cdot \mathbf{n}) \rho U + P \mathbf{n} - T \mathbf{n} d\Gamma, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) dD = - \int_{\Gamma} \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) (U \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Gamma} (P U - T \mathbf{n} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.52)$$

Будем полагать, что на границе вытекания выполняются соотношения

$$P \mathbf{n} - T \mathbf{n} = P_{\text{out}} \mathbf{n} \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{out}} \quad (2.53)$$

и

$$(P U - T U + \mathbf{q}) \mathbf{n} = P_{\text{out}} U \cdot \mathbf{n} \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{out}}, \quad (2.54)$$

где P_{out} – известная функция. Из (2.53) и (2.54) вытекает следующее условие

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{out}}. \quad (2.55)$$

Перепишем равенство $P \mathbf{n} - T \mathbf{n} = P_{\text{out}} \mathbf{n}$ следующим образом

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (P - P_{\text{out}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Отсюда следует, что $\tau_{xx} = P - P_{\text{out}}, \tau_{xy} = 0$. Запишем полученные условия на границе втекания в скалярном виде

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3 \operatorname{Re}}{2\mu} (P - P_{\text{out}}) \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{out}}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{out}}. \quad (2.58)$$

Далее, поскольку выражение $q \cdot n = 0$ в скалярном виде запишется как $q_x = 0$, то условие на границе вытекания для уравнения внутренней энергии примет вид

$$\frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{out}}. \quad (2.59)$$

2.3 Полулагранжевый метод для уравнения неразрывности

Введём равномерные сетки. В \bar{D} построим сетку $\bar{D}_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh, i, j = 0, \dots, N\}$ с шагом $h = 1/N$, $N \geq 1$. На отрезке $[0, T]$ тоже построим сетку T_τ с шагом $\tau = T/K$, $K \geq 1$ и узлами $\tau_k = k\tau, k = 0, \dots, K$. Для решения уравнения неразрывности (2.42) системы (2.42) – (2.45) будем использовать метод, описанный ранее в разделе 1. Для каждого узла вычислительной сетки \bar{D}_k на каждом временном слое необходимо численно решить интегральное уравнение, выражающее локальный закон сохранения массы

$$\int_{\omega_{i,j}} \rho(t_k, x, y) d\omega_{i,j}^k = \int_{Q_{i,j}} \rho(t_{k-1}, x, y) dQ_{i,j} + \int_{Q_{i,j}^{\text{in}}} \rho_{\text{in}}(t, y) u(t, 0, y) dQ_{i,j}^{\text{in}}, \quad (2.60)$$

где $\omega_{i,j}$ – окрестность узла на верхнем слое по времени t_k , $Q_{i,j}$ – область интегрирования на нижнем слое по времени t_{k-1} , полученная путём пересечения характеристических поверхностей с нижним слоем по времени, $Q_{i,j}^{\text{in}}$ – область интегрирования на границе втекания Γ_{in} . Ранее была получена явное выражение для вычисления плотности в узле

$$\rho_{i,j}^{h,k} = \frac{1}{\operatorname{meas}(\Omega_{i,j}^k)} \left(\int_{R_{i,j}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, x, y) d\Omega + \int_{R_{i,j}^{k-1}} \rho_{\text{in}}^h u^h dS \right) \quad (2.61)$$

2.4 Метод конечных элементов для уравнений количества движения и уравнения энергии

Будем искать приближенное решение искомого уравнения как функцию u^h , равную нулю на границе (краевое условие), непрерывную на области D и линейную на каждом полученном квадратном элементе.

Функцию u^h можно представить в следующем виде

$$u^h(t, x, y) = \sum_{S_{i,j} \in \bar{D}_k} u_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad v^h(t, x, y) = \sum_{S_{i,j} \in \bar{D}_k} v_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad (2.62)$$

$$e^h(t, x, y) = \sum_{S_{i,j} \in \bar{D}_k} e_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad (2.63)$$

где $\varphi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) \psi_j(y)$. Одномерные базисные функции определены следующим образом

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_i \\ 1, & x = x_i \end{cases}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (2.64)$$

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0, & y \neq y_j \\ 1, & y = y_j \end{cases}, \quad j = \overline{0, n}. \quad (2.65)$$

Функция $\varphi_{i,j}$ тождественно равна нулю вне области $D_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+1}) \times (y_{j-1}, y_{j+1})$, представляющей собой объединение элементов, имеющих вершиной $\mathbf{x}_{i,j}$.

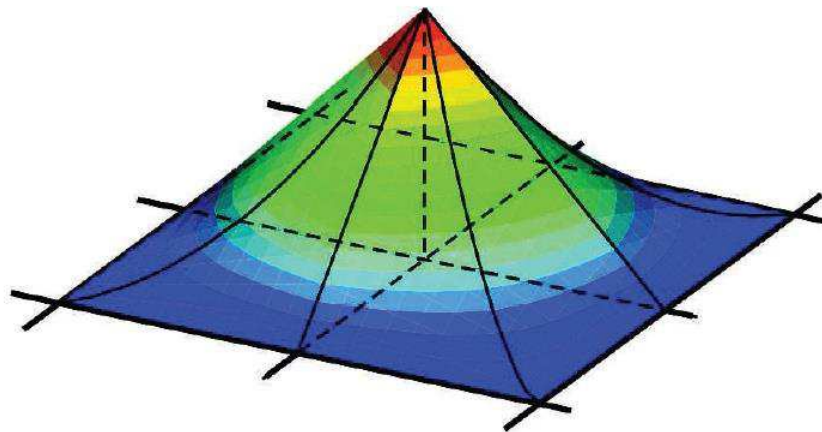


Рисунок 11 - базисная функция

Для каждого узла $\mathbf{x}_{i,j}$ базисные функции отличны от нуля на множестве $D_{ij} = ([x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{i-1}, y_{i+1}]) \cap \bar{D}$ (рис. 11). Для внутренних узлов $(x_i, y_j) \in D_h$ множество D_{ij} представим в виде объединения четырех подмножеств: $D_{ij} = \bigcup_{m=1}^4 \omega_m$.

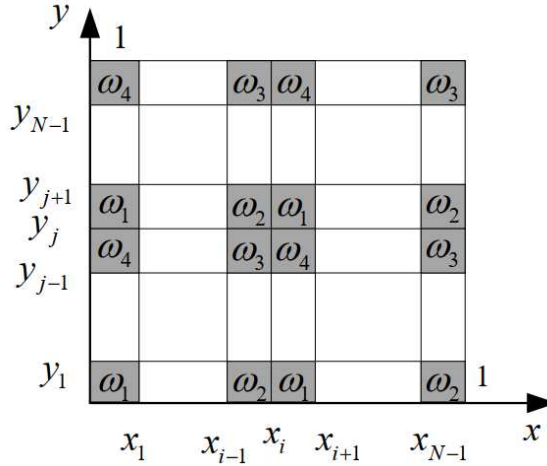


Рисунок 12 – Окрестности узлов различных типов

2.4.1 Уравнения количества движения

Второй закон Ньютона применительно к жидкости или газу, протекающим через бесконечно малый фиксированный контрольный объем, приводит к уравнению количества движения в векторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{V}) + \nabla \rho \bar{V} \bar{V} = \rho \bar{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}. \quad (2.66)$$

Запишем уравнения количества движения в скалярном виде

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.67)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}. \quad (2.68)$$

Умножим уравнения (2.67)–(2.68) на базисную функцию φ_{ij} и интегрируем по области D

$$\int_D \rho \frac{du}{dt} \varphi_{ij} dD = \int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD \quad (2.69)$$

$$\int_D \rho \frac{dv}{dt} \varphi_{ij} dD = \int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD. \quad (2.70)$$

Рассмотрим левую часть уравнений (2.69)–(2.70). Аппроксимация левых частей будет следующей

$$\int_D \rho \frac{du}{dt} \varphi_{ij} dD \approx \frac{du}{dt} \Big|_{x_{ij} D} \int_D \rho \varphi_{ij} dD \approx \frac{du}{dt} \Big|_{x_{ij}} \rho_{ij} h^2, \quad (2.71)$$

$$\int_D \rho \frac{dv}{dt} \varphi_{ij} dD \approx \frac{dv}{dt} \Big|_{x_{ij} D} \int_D \rho \varphi_{ij} dD \approx \frac{dv}{dt} \Big|_{x_{ij}} \rho_{ij} h^2. \quad (2.72)$$

Аппроксимировать субстанциональную производной в узле \mathbf{x}_{ij} будем вдоль характеристических кривых

$$\frac{du}{dt} \Big|_{x_{ij}} \approx \frac{u_{i,j}^{h,m} - u(\mathbf{x}_{ij}^{m-1})}{\tau}, \quad (2.73)$$

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{x_{ij}} \approx \frac{v_{i,j}^{h,m} - v(\mathbf{x}_{ij}^{m-1})}{\tau}, \quad (2.74)$$

где \mathbf{x}_{ij}^{m-1} – проекция узла \mathbf{x}_{ij} на нижний слой по времени вдоль характеристической траектории. Проекцию узла аппроксимируем по методу Эйлера

$$\mathbf{x}_{ij}^{m-1} \approx \mathbf{x}_{ij} - \tau \mathbf{U}_{ij}^{h,m} \quad (2.75)$$

Проекции вектора скорости $\mathbf{U}(\mathbf{x}_{ij}^{m-1})$ вычисляем при помощи билинейной интерполяции на нижнем слое по времени.

Подставляя (2.73) в (2.71) получим аппроксимацию левой части равенства уравнения количества движения

$$\int_D \rho \frac{du}{dt} \varphi_{ij} dD \approx \frac{du}{dt} \Big|_{x_{ij} D} \int_D \rho \varphi_{ij} dD \approx \rho_{ij}^{hm} h^2 \frac{u_{ij}^{h,m} - u(\bar{P}_{ij}^{h,m-1})}{\tau} \quad (2.76)$$

Для произвольной непрерывно дифференцируемой функции f справедливы следующие вспомогательные выкладки

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} \varphi_{ij} dD = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial x} \varphi_{ij} dy dx = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} (f \varphi_{ij}) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dy - \int_D f \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD = - \int_D f \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD, \quad (2.77)$$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y} \varphi_{ij} dD = - \int_D f \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD. \quad (2.78)$$

Умножим правые части уравнений (2.67)–(2.68) на базисную функцию φ_{ij} и интегрируем по области D

$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD = \int_{D_{ij}} \left(P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} - \tau_{xx} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right) dD, \quad (2.79)$$

$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD = \int_{D_{ij}} \left(P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} - \tau_{xx} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} - \tau_{xy} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \right) dD. \quad (2.80)$$

Рассмотрим правую часть уравнений (2.79) и (2.80). Для вычисления каждого слагаемого, представляем область интегрирования D_{ij} в виде объединения четырех подобластей $D_{ij} = D_{00} \cup D_{01} \cup D_{10} \cup D_{11}$ (рис. 13). Тогда для первого интеграла справедливо

$$\int_D P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD = \int_{D_{00}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD + \int_{D_{01}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD + \int_{D_{10}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD + \int_{D_{11}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \quad (2.81)$$

Распишем аппроксимацию интеграла на каждой из подобластей

$$\int_{D_{00}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx \frac{h}{4} (P_{i-1,j} + P_{ij}), \quad (2.82)$$

$$\int_{D_{01}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx \frac{h}{4} (P_{i-1,j} + P_{ij}), \quad (2.83)$$

$$\int_{D_{10}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{h}{4} (P_{i+1,j} + P_{ij}), \quad (2.84)$$

$$\int_{D_{11}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{h}{4} (P_{i+1,j} + P_{ij}). \quad (2.85)$$

Подставляем результаты из (2.82)–(2.85) в (2.81), получим

$$\int_{D_{ij}} P \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx \frac{h}{2} (P_{i-1,j} - P_{i+1,j}). \quad (2.86)$$

Так же выпишем аппроксимацию следующих интегралов

$$\int_{D_{ij}} -\frac{\partial P}{\partial x} \varphi_{ij} dD \approx \frac{h}{2} (P_{i+1,j} - P_{i-1,j}), \quad (2.87)$$

$$\int_{D_{ij}} -\frac{\partial P}{\partial u} \varphi_{ij} dD \approx \frac{h}{2} (P_{i,j+1} - P_{i,j-1}). \quad (2.88)$$

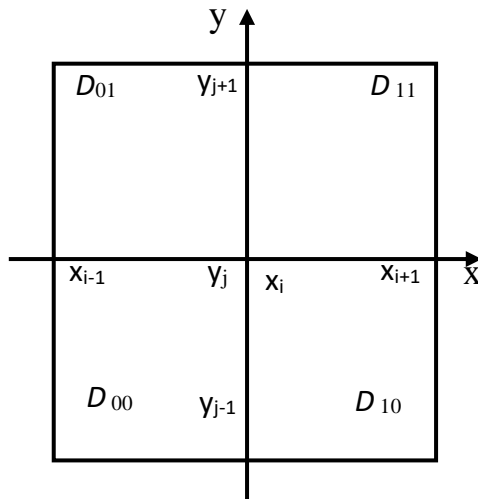


Рисунок 13 - подобласти области D

Перейдём к рассмотрению оставшихся двух слагаемых

$$\int_{D_{ij}} \left(-\tau_{xx} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right) dD \quad (2.89)$$

Обозначим за I^1 первый интеграл формуле (2.89)

$$I^1 = \int_{D_{ij}} \tau_{11} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD, \quad (2.90)$$

где $\tau_{11} = \frac{2}{3\text{Re}} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$.

Для вычисления интеграла (2.90) по области D_{ij} необходимо найти его значения на каждой из подобластей. Распишем подробно нахождение интеграла I_{00}^1 . Выкладки для I_{01}^1 , I_{10}^1 , I_{11}^1 приведены в Приложении Б.

$$\begin{aligned}
I_{00}^1 &= \int_{D_{00}} \tau_{11} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx \frac{h}{4} \left(\tau_{11}|_{(i-1,j)} + \tau_{11}|_{(i,j)} \right) = \frac{h}{4} \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i-1,j)} + \\
&+ \frac{h}{4} \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \mu_{i,j} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i,j)} = \frac{h}{6} \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j} \left(2 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{v_{i-1,j} - v_{i-1,j-1}}{h} \right) + \\
&+ \frac{h}{6} \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \mu_{i,j} \left(2 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{v_{i-1,j} - v_{i-1,j-1}}{h} \right) = \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij}) u_{ij} - \frac{1}{3 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j} u_{i-1,j} - \\
&- \frac{1}{3 \operatorname{Re}} \mu_{i,j} u_{i,j} - \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij}) u_{i-1,j} - \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j} v_{i-1,j} + \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j} v_{i-1,j-1} - \\
&- \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i,j} v_{i,j} + \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i,j} v_{i,j-1} = \\
&= \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij}) u_{ij} - \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij}) u_{i-1,j} - \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j} v_{i-1,j} + \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j} v_{i-1,j-1} - \\
&- \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i,j} v_{i,j} + \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i,j} v_{i,j-1} = \\
&= \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij}) (u_{ij} - u_{i-1,j}) - \frac{1}{6 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} (v_{i-1,j} - v_{i-1,j-1}) + \mu_{i,j} (v_{i,j} - v_{i,j-1}))
\end{aligned}$$

$$I_{00}^1 \approx \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij}) (u_{ij} - u_{i-1,j}) - \frac{1}{6 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} (v_{i-1,j} - v_{i-1,j-1}) + \mu_{i,j} (v_{i,j} - v_{i,j-1})), \quad (2.91)$$

$$I_{01}^1 \approx \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij}) (u_{ij} - u_{i-1,j}) - \frac{1}{6 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} (v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}) + \mu_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j})), \quad (2.92)$$

$$I_{10}^1 \approx \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{ij} + \mu_{i+1,j}) (u_{ij} - u_{i+1,j}) + \frac{1}{6 \operatorname{Re}} (\mu_{ij} (v_{ij} - v_{i,j-1}) + \mu_{i+1,j} (v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1})), \quad (2.93)$$

$$I_{11}^1 \approx \frac{1}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{ij} + \mu_{i+1,j}) (u_{i,j} - u_{i+1,j}) + \frac{1}{6 \operatorname{Re}} (\mu_{ij} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + \mu_{i+1,j} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j})). \quad (2.94)$$

В итоге в правой части, объединяя (2.91)–(2.94), будем иметь

$$\int_D \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD = \int_D \left(-\tau_{xx} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right) dD \approx \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \alpha_{pq} u_{pq}^{h,m} + \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \beta_{pq} v_{pq}^{h,m}, \quad (2.95)$$

где коэффициенты α и β определены следующим образом

$$\alpha_{i-1,j-1} = \alpha_{i-1,j+1} = \alpha_{i,j-1} = \alpha_{i,j+1} = \alpha_{i+1,j-1} = \alpha_{i+1,j+1} = 0, \quad \alpha_{i-1,j} = -\frac{2}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{ij})$$

$$\alpha_{i,j} = \frac{2}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{i+1,j}) + \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \mu_{ij}, \quad \alpha_{i+1,j} = \frac{2}{3 \operatorname{Re}} (\mu_{ij} + \mu_{i+1,j}),$$

$$\beta_{i+1,j+1} = \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i+1,j}, \quad \beta_{i-1,j-1} = \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j}, \quad \beta_{i-1,j} = \beta_{i,j} = \beta_{i,j+1} = 0, \quad \beta_{i-1,j+1} = -\frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j},$$

$$\beta_{i,j-1} = \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{ij}, \quad \beta_{i+1,j-1} = -\frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i+1,j}, \quad \beta_{i+1,j} = \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i-1,j}, \quad \beta_{i+1,j+1} = \frac{1}{6 \operatorname{Re}} \mu_{i+1,j}.$$

Также справедливо следующее

$$\int_D -\frac{\partial P}{\partial x} \varphi_{ij} dD = \int_D p \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx \frac{h}{2} (P_{i+1,j} - P_{i-1,j}), \quad (2.96)$$

Объединив всё воедино, а именно (2.76), (2.95), (2.96), получим

$$h^2 \rho_{ij}^{h,m} \frac{u_{ij}^{h,m} - u(P_{ij}^{h,m-1})}{\tau} = \frac{h}{2} (P_{i+1,j} - P_{i-1,j}) + \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \alpha_{pq} u_{pq}^{h,m} + \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \beta_{pq} v_{pq}^{h,m}. \quad (2.97)$$

Разделим (2.97) на $\frac{h^2 \rho_{ij}^{h,m}}{\tau}$ и получим

$$u_{ij}^{h,m} = u(P_{ij}^{h,m-1}) + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h} + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \left[\sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\alpha}_{pq} u_{pq}^{h,m} + \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\beta}_{pq} v_{pq}^{h,m} \right], \quad (2.98)$$

где $\tilde{\alpha}_{pq} = \frac{\alpha_{pq}}{h^2}$, $\tilde{\beta}_{pq} = \frac{\beta_{pq}}{h^2}$.

Получаем СЛАУ

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \left(\sum_{\substack{p=i-1 \\ p \neq i}}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\alpha}_{pq} u_{pq}^{h,m} \right) + \left(1 - \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \right) \tilde{\alpha}_{ij} u_{ij}^{h,m} = \\ & = u(P_{ij}^{h,m-1}) + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h} + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\beta}_{pq} v_{pq}^{h,m} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Это уравнение (2.99) войдёт в систему. Выполняя аналогичные действия для второго уравнения количества движения, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{\substack{p=i-1 \\ p \neq i}}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\alpha}_{pq}^u u_{pq}^{h,m} + \left(1 - \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \right) \tilde{\alpha}_{ij}^u u_{ij}^{h,m} = \\ & = u(P_{ij}^{h,m-1}) + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h} + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\beta}_{pq}^v v_{pq}^{h,m} \\ & -\frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{\substack{p=i-1 \\ p \neq i}}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\beta}_{pq}^u v_{pq}^{h,m} + \left(1 - \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \right) \tilde{\beta}_{pq}^u v_{pq}^{h,m} = \\ & = v(P_{ij}^{h,m-1}) + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h} + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\alpha}_{pq}^u u_{pq}^{h,m} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Полученную систему уравнений (2.39) решаем итерационным методом, например методом Якоби

$$u_{ij}^{h,m,(s+1)} = \left[\left(1 - \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \right) \tilde{\alpha}_{ij}^u \right]^{-1} \left[u \left(\bar{P}_{ij}^{h,m-1} \right) + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h} + \right. \\ \left. + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\alpha}_{pq}^u u_{pq}^{h,m,(s)} + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\beta}_{pq}^u v_{pq}^{h,m,(s)} \right] \quad (2.101)$$

$$v_{ij}^{h,m,(s+1)} = \left[\left(1 - \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \right) \tilde{\beta}_{ij}^v \right]^{-1} \left[v \left(\bar{P}_{ij}^{h,m-1} \right) + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h} + \right. \\ \left. + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\alpha}_{pq}^v u_{pq}^{h,m,(s)} + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \sum_{p=i-1}^{i+1} \sum_{q=j-1}^{j+1} \tilde{\beta}_{pq}^v v_{pq}^{h,m,(s)} \right] \quad (2.102)$$

2.4.2 Уравнение внутренней энергии

Рассмотрим уравнение внутренней энергии, входящее в состав уравнений Навье-Стокса

$$\rho \frac{de}{dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi + Q_t(t, x, y), \quad (2.103)$$

где давление: $P = (\gamma - 1)\rho e$; динамический коэффициент вязкости:

$$\mu = (\gamma(\gamma - 1)M^2 e)^\omega; \text{ тепловой поток: } q_x = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial e}{\partial x}, q_y = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial e}{\partial y}.$$

Делаем следующую замену: $e(t, x, y) = \varepsilon^2(t, x, y)$.

После замены уравнение внутренней энергии (2.103) будет выглядеть следующим образом

$$2\varepsilon\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi + Q_t(t, x, y). \quad (2.104)$$

Сделав некоторые преобразования получим

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{2\varepsilon} \left(P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - \Phi - Q_t \right). \quad (2.105)$$

Введём обозначение $\hat{P} = \frac{P}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}(\gamma - 1)\rho e$.

Умножаем уравнение (2.105) на базисную функцию φ_{ij} и интегрируем по области D

$$\int_D \rho \frac{d\varepsilon}{dy} \varphi_{ij} dD = - \int_D \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD - \int_D \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD + \int_D \frac{1}{2\varepsilon} (\Phi + Q_t) \varphi_{ij} dD. \quad (2.106)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (2.106). Аппроксимируем её следующим образом

$$\int_D \rho \frac{d\varepsilon}{dy} \varphi_{ij} dD \approx \rho_{ij}^{h,m} \left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_{\mathbf{x}_{ij}} h^2. \quad (2.107)$$

В (2.107) входит субстанциональная производная. Аппроксимация субстанциональной производной

$$\left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_{\mathbf{x}_{ij}} \approx \frac{\varepsilon_{ij}^{h,m} - \varepsilon(\mathbf{x}_{ij}^{h,m-1})}{\tau}, \quad (2.108)$$

где $\mathbf{x}_{ij}^{h,m-1}$ – проекция характеристической траектории на нижний слой по времени, аппроксимируем по методу Эйлера: $\mathbf{x}_{ij}^{h,m-1} = \mathbf{x}_{ij} - \tau \mathbf{U}_{ij}^{h,m}$.

Рассмотрим правую часть уравнения (2.106) и введём следующие аппроксимации

$$\int_D \frac{1}{2\varepsilon} Q_t(t, x, y) \varphi_{ij} dD \approx \frac{1}{2\varepsilon^{h,m}} Q_t(t^m, x_i, y_j) h^2, \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1}{2\varepsilon} \Phi \varphi_{ij} dD \approx & \frac{1}{2 \operatorname{Re}} \hat{\mu}_{ij} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} \right)^2 \right] = \frac{1}{2 \operatorname{Re}} h^2 \hat{\mu}_{ij} F_{ij}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Перейдём к рассмотрению первого слагаемого правой части уравнения (2.106)

$$\int_D \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD. \quad (2.111)$$

Чтобы найти значение интеграла (2.111) необходимо рассмотреть его по каждой из подобластей D_{00} , D_{01} , D_{10} , D_{11} .

Интеграл (2.111) по области D_{00}

$$\int_{D_{00}} \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD \approx \hat{P}_{ij}^{h,m} \int_{D_{00}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD. \quad (2.112)$$

Рассмотрим интеграл (2.112) и его составные части

$$\int_{D_{00}} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi_{ij} dD = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi_i(x) \psi_j(y) dy dx. \quad (2.113)$$

Найдём аппроксимацию для интеграла (2.113)

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi_i(x) dx &= u \varphi_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx = u \varphi_i \Big|_{x_i} - u \varphi_i \Big|_{x_{i-1}} - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx = \\ &= u_i - \frac{1}{h} \frac{u_i + u_{i-1}}{2} h = \frac{u_i - u_{i-1}}{2}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Применяется следующая очевидная формула

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} \psi_j(y) dy = \frac{h}{2}. \quad (2.115)$$

$$\int_{D_{00}} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi_{ij} dD \approx \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{2} \psi_j(y) dy \approx \frac{h}{2} \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{2}. \quad (2.116)$$

В итоге, объединяя (2.114)–(2.116) получаем аппроксимацию правой части уравнения (2.111) по подобласти D_{00}

$$\int_{D_{00}} \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD \approx \frac{1}{2} (\gamma - 1) \rho_{ij}^{h,m} \varepsilon_{ij}^{h,m} \frac{h}{2} \left[\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{2} + \frac{v_{ij} - v_{i,j-1}}{2} \right]. \quad (2.117)$$

Проделав аналогичные действия по другим подобластям, получаем

$$\int_{D_{01}} \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD \approx \frac{1}{2} (\gamma - 1) \rho_{ij}^{h,m} \varepsilon_{ij}^{h,m} \frac{h}{2} \left[\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{2} + \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{2} \right]. \quad (2.118)$$

$$\int_{D_{10}} \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD \approx \frac{1}{2} (\gamma - 1) \rho_{ij}^{h,m} \varepsilon_{ij}^{h,m} \frac{h}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{2} + \frac{v_{ij} - v_{i,j-1}}{2} \right]. \quad (2.119)$$

$$\int_{D_{10}} \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD \approx \frac{1}{2} (\gamma - 1) \rho_{ij}^{h,m} \varepsilon_{ij}^{h,m} \frac{h}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{2} + \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{2} \right]. \quad (2.120)$$

Объединяем интегралы по подобластям, а именно (2.117)–(2.120), получаем следующую аппроксимацию

$$\begin{aligned} \int_D \hat{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD &\approx \\ &\approx \frac{1}{2} (\gamma - 1) \rho_{ij}^{h,m} \varepsilon_{ij}^{h,m} \frac{h}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Перейдём к рассмотрению второго интеграла правой части уравнения (2.106). В него входит компонента потока

$$q_x = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial (\varepsilon^2)}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\text{Re}} 2\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (2.122)$$

Тогда производная по x будет равна

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\text{Re}} 2\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) = -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu'}{\text{Re}} 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\text{Re}} 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu'}{\text{Re}} 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}. \quad (2.123)$$

Домножим (2.123) на $-\frac{1}{2\varepsilon}$

$$-\frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu'}{\text{Re}} 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\varepsilon \text{Re}} 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu'}{\text{Re}} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}. \quad (2.124)$$

Проинтегрируем получившееся равенство

$$-\int_D \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial q_x}{\partial x} \varphi_{ij} dD = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\int_D \frac{\mu'}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \varphi_{ij} dD + \int_D \frac{\mu'}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \varphi_{ij} dD + \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \varphi_{ij} dD \right]. \quad (2.125)$$

Найдём значение интеграла (2.125). Для этого рассмотрим отдельно его слагаемые

$$\int_D (\mu \varphi_{ij}) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} dD = \mu \varphi_{ij} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \int_D \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial (\mu \varphi_{ij})}{\partial x} dD = - \int_D \mu' \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \varphi_{ij} dD - \int_D \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD. \quad (2.126)$$

Возвращаемся к (2.125) и подставляем (2.126)

$$\begin{aligned} - \int_D \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial q_x}{\partial x} \varphi_{ij} dD &= \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\int_D \frac{\mu'}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \varphi_{ij} dD + \int_D \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \varphi_{ij} dD - \int_D \frac{\mu'}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \varphi_{ij} dD - \right. \\ &\left. - \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\int_D \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \varphi_{ij} dD - \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \right] \right]. \quad (2.127) \end{aligned}$$

Аналогично для второго слагаемого

$$-\int_D \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial q_y}{\partial y} \varphi_{ij} dD = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\int_D \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 \varphi_{ij} dD - \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD \right]. \quad (2.128)$$

Объединяя (2.127) и (2.128) получим

$$-\int_D \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\int_D \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 \right] \varphi_{ij} dD - \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right] dD \right]$$

Используя тот факт, что $\int_D f \varphi_{ij} d\Omega \approx h^2 f_{ij}$, поэтому в итоге получим

$$-\int_D \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \varphi_{ij} dD = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\hat{\mu}_{ij}^{h,m}}{\text{Re}} h^2 \left[\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{h,m} - \varepsilon_{i-1,j}^{h,m}}{4h^2} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{h,m} - \varepsilon_{i,j-1}^{h,m}}{4h^2} \right)^2 \right]. \quad (2.129)$$

Далее рассмотрим

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \int_D \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD. \quad (2.130)$$

$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|_{x_{ij}}$ в каждой подобласти берём разные аппроксимации.

$$\text{Для } D_{00} \text{ и } D_{01} \quad \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|_{x_{ij}} \approx \frac{\varepsilon_{ij}^{h,m} - \varepsilon_{i-1,j}^{h,m}}{h}.$$

$$\text{Для } D_{10} \text{ и } D_{11} \quad \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|_{x_{ij}} \approx \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{h,m} - \varepsilon_{ij}^{h,m}}{h}.$$

Для аппроксимации $\int_D \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD$ воспользуемся аппроксимацией интеграла

$\int_D f_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD$ для билинейной функции. Каждой подобласти области D (рис.13).

Приведем аппроксимацию интеграла по одной области. Остальные получаются аналогично

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{1}{h} [\mu_{i-1,j-1} \varphi_{i-1} \psi_{j-1} + \mu_{i,j-1} \varphi_i \psi_{j-1} + \mu_{i-1,j} \varphi_{j-1} \psi_j + \mu_{ij} \varphi_i \psi_{ij}] \psi_j dx dy = \\ &= \frac{1}{h} \mu_{i-1,j-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1} dx \int_{y_{i-1}}^{x_i} \psi_{j-1} \psi_j dy + \frac{1}{h} \mu_{i-1,j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1} dx \int_{y_{i-1}}^{x_i} \psi_j^2 dy + \frac{1}{h} \mu_{i,j-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx \int_{y_{i-1}}^{x_i} \psi_{j-1} \psi_j dy + \\ &+ \frac{1}{h} \mu_{i,j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx \int_{y_{i-1}}^{x_i} \psi_j^2 dy = \frac{1}{h} \mu_{i-1,j-1} \frac{h}{2} \frac{h}{6} + \frac{1}{h} \mu_{i-1,j} \frac{h}{2} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \mu_{i,j-1} \frac{h}{2} \frac{h}{6} + \frac{1}{h} \mu_{i,j} \frac{h}{2} \frac{h}{3} = \\ &= \frac{h}{12} [\mu_{i-1,j-1} + \mu_{i,j-1} + 2\mu_{i-1,j} + 2\mu_{ij}], \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD = \frac{h}{12} [2\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1}], \quad (2.132)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD = \frac{h}{12} [\mu_{i,j-1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j-1} + 2\mu_{i+1,j}], \quad (2.133)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD = \frac{h}{12} [\mu_{i,j+1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} + 2\mu_{i+1,j}]. \quad (2.134)$$

Тогда аппроксимация искомого интеграла (2.130) на каждой из подобластей будет следующей

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{00}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{ij}^{h,m} - \varepsilon_{i-1,j}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [\mu_{i-1,j-1} + \mu_{i,j-1} + 2\mu_{i-1,j} + 2\mu_{i,j}]. \quad (2.135)$$

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{01}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{ij}^{h,m} - \varepsilon_{i-1,j}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [2\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + 2\mu_{i,j} + 2\mu_{i,j+1}]. \quad (2.136)$$

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{10}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{h,m} - \varepsilon_{ij}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [\mu_{i,j-1} + 2\mu_{ij} + \mu_{i+1,j-1} + 2\mu_{i+1,j}]. \quad (2.137)$$

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{11}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{h,m} - \varepsilon_{ij}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [\mu_{i,j+1} + 2\mu_{ij} + \mu_{i+1,j-1} + 2\mu_{i+1,j}]. \quad (2.138)$$

Складывая все эти интегралы (2.135)–(2.138), получаем аппроксимацию для (2.130)

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx \alpha_{i-1,j}^\varepsilon \varepsilon_{i-1,j}^{h,m} + \alpha_{ij}^\varepsilon \varepsilon_{ij}^{h,m} + \alpha_{i+1,j}^\varepsilon \varepsilon_{i+1,j}^{h,m}, \quad (2.139)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{i-1,j}^\varepsilon &= \frac{1}{12} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} (\mu_{i-1,j-1} + \mu_{i,j-1} + \mu_{i-1,j+1} + \mu_{i,j+1} + 4\mu_{i-1,j} + 4\mu_{i,j}), \\ \alpha_{i,j}^\varepsilon &= -\frac{1}{12} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} (\mu_{i-1,j-1} + \mu_{i-1,j+1} + 4\mu_{i-1,j} - 4\mu_{i+1,j} - \mu_{i+1,j-1} - \mu_{i+1,j+1}), \\ \alpha_{i+1,j}^\varepsilon &= -\frac{1}{12} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} (\mu_{i,j-1} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i+1,j+1} + 4\mu_{i+1,j} + 4\mu_{ij}). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Далее рассмотрим

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \int_D \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD. \quad (2.141)$$

Аналогично для $\int_D \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD$ применим метод точного вычисления интеграла

$\int_D f_I \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} dD$ для билинейной функции. Получим следующие значения интегралов

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD = \frac{h}{12} [\mu_{i-1,j-1} + 2\mu_{i,j-1} + \mu_{i-1,j} + 2\mu_{ij}]. \quad (2.142)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD = \frac{h}{12} [\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + 2\mu_{i,j} + 2\mu_{i,j+1}]. \quad (2.143)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD = \frac{h}{12} [2\mu_{i,j-1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i+1,j}]. \quad (2.144)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \mu_l \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD = \frac{h}{12} [2\mu_{i,j+1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} + \mu_{i+1,j}]. \quad (2.145)$$

Тогда аппроксимация искомого интеграла (2.141) на каждой из подобластей будет следующей

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{00}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{ij}^{h,m} - \varepsilon_{i,j-1}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [\mu_{i-1,j-1} + 2\mu_{i,j-1} + \mu_{i-1,j} + 2\mu_{ij}]. \quad (2.146)$$

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{01}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{ij}^{h,m} - \varepsilon_{i,j-1}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + 2\mu_{i,j} + 2\mu_{i,j+1}]. \quad (2.147)$$

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{10}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{h,m} - \varepsilon_{ij}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [2\mu_{i,j-1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i+1,j}]. \quad (2.148)$$

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_{D_{11}} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} dD \approx -\frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{h,m} - \varepsilon_{ij}^{h,m}}{h} \frac{h}{12} [2\mu_{i,j+1} + 2\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} + \mu_{i+1,j}]. \quad (2.149)$$

Складываем интегралы (2.146)–(2.149) и получаем

$$-\frac{\gamma}{\text{Pr}} \int_D \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} dD \approx \beta_{i,j-1}^\varepsilon \varepsilon_{i,j-1}^{h,m} + \beta_{ij}^\varepsilon \varepsilon_{ij}^{h,m} + \beta_{i,j+1}^\varepsilon \varepsilon_{i,j+1}^{h,m}, \quad (2.150)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{i,j-1}^\varepsilon &= \frac{h}{12} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} (\mu_{i-1,j-1} + 2\mu_{i,j-1} + 2\mu_{i-1,j} + 4\mu_{ij} + \mu_{i-1,j+1} + 2\mu_{i,j+1}), \\ \beta_{i,j}^\varepsilon &= -\frac{h}{12} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} (\mu_{i-1,j-1} + 2\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} - \mu_{i+1,j-1} - \mu_{i+1,j+1} - 2\mu_{i+1,j}), \\ \beta_{i,j+1}^\varepsilon &= -\frac{h}{12} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} (2\mu_{i,j-1} + 4\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j-1} + 2\mu_{i+1,j} + 2\mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}). \end{aligned} \quad (2.151)$$

Аппроксимация уравнения для энергии в итоге получается следующей

$$\begin{aligned}
\rho_{ij}^{h,m} \frac{\varepsilon_{ij}^{h,m} - \varepsilon(\overline{P}_{ij}^{h,m-1})}{\tau} &= \frac{1}{2\varepsilon_{ij}^{h,m}} Q_t(t^m, x_i, y_j) - \frac{1}{4}(\gamma-1) \rho_{ij}^{h,m} \varepsilon_{ij}^{h,m} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} \right] + \\
&+ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\hat{\mu}_{ij}^{h,m}}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{h,m} - \varepsilon_{i-1,j}^{h,m}}{4h^2} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{h,m} - \varepsilon_{i,j-1}^{h,m}}{4h^2} \right)^2 \right] + \alpha_{i-1,j}^\varepsilon \varepsilon_{i-1,j}^{h,m} + \alpha_{ij}^\varepsilon \varepsilon_{ij}^{h,m} + \alpha_{i+1,j}^\varepsilon \varepsilon_{i+1,j}^{h,m} + \\
&+ \beta_{i,j-1}^\varepsilon \varepsilon_{i,j-1}^{h,m} + \beta_{ij}^\varepsilon \varepsilon_{ij}^{h,m} + \beta_{i,j+1}^\varepsilon \varepsilon_{i,j+1}^{h,m}.
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}
\left[1 + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{1}{4}(\gamma-1) \rho_{ij}^{h,m} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} \right] - \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} (\alpha_{ij}^\varepsilon + \beta_{ij}^\varepsilon) \right] \varepsilon_{ij}^{h,m,(s)} &= \\
= \varepsilon(\overline{P}_{ij}^{h,m-1}) + \frac{1}{\varepsilon_{ij}^{h,m,(s)}} Q_t(t^m, x_i, y_j) + \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu_{ij}^{h,m}}{\text{Re}} \left[\frac{(\varepsilon_{i+1,j}^{h,m,(s-1)} - \varepsilon_{i-1,j}^{h,m,(s-1)})^2}{4h^2} + \right. \\
\left. + \frac{(\varepsilon_{i,j+1}^{h,m,(s-1)} - \varepsilon_{i,j-1}^{h,m,(s-1)})^2}{4h^2} \right] + \tilde{\alpha}_{ij}^\varepsilon \varepsilon_{i+1,j}^{h,m,(s-1)} + \tilde{\alpha}_{i+1,j}^\varepsilon \varepsilon_{i+1,j}^{h,m,(s-1)} + \tilde{\beta}_{ij}^\varepsilon \varepsilon_{i+1,j}^{h,m,(s-1)} + \tilde{\beta}_{i+1,j}^\varepsilon \varepsilon_{i+1,j}^{h,m,(s-1)} + \frac{1}{2} \frac{\hat{\mu}_{ij}}{\text{Re}} F_{ij},
\end{aligned} \tag{2.153}$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}^\varepsilon = \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \alpha_{ij}^\varepsilon$, $\tilde{\beta}_{ij}^\varepsilon = \frac{\tau}{\rho_{ij}^{h,m}} \beta_{ij}^\varepsilon$.

2.5 Алгоритм решения системы уравнений

Алгоритм решения системы уравнений (2.12) – (2.15) базируется на методе расщепления по физическим процессам [14]. На каждом временном слое t_k отдельно решаются уравнения, соответствующие характерным физическим процессам, таким как: перенос массы (2.12), импульса (2.13) – (2.14), энергии (2.15).

Цикл по времени: для каждого шага по времени $k = 1, \dots, K$

Итерации по нелинейности: на каждой итерации $l = 0, \dots, L$

1. Решить уравнение неразрывности полулагранжевым методом (2.22), тем самым вычислить $\rho^{k,l}(x, y)$. При $l=0$ взять значения скорости с предыдущего слоя по времени $u^{k-1,0}(x, y)$, $v^{k-1,0}(x, y)$. При $l=1, \dots, L$ использовать скорость с предыдущей итерации по нелинейности $u^{k,l-1}(x, y)$, $v^{k,l-1}(x, y)$.

2. Решить систему уравнений (2.22) – (2.23) методом Якоби, тем самым вычислить $u^{k,l}(x, y), v^{k,l}(x, y)$. При $l=0$ взять значения $\rho^{k,0}(x, y), e^{k-1,0}(x, y)$. При $l=1, \dots, L$ подставить $\rho^{k,l}(x, y), e^{k,l-1}(x, y)$.
3. *Итерации по нелинейности*: на каждой итерации $w=0, \dots, W$ решить систему методом Якоби, тем самым вычислить $e^{k,l,w}(x, y)$, используя значения $\rho^{k,l}(x, y), u^{k,l}(x, y), v^{k,l}(x, y)$. При $l=0$ и $w=0$ подставить $\rho^{k-1,0,0}(x, y)$ в $\mu = (\gamma(\gamma-1)M^2 e)^\omega$, при $w=1, \dots, W$ взять $e^{k,l,w-1}(x, y)$

2.6 Моделирование течения вязкого теплопроводного газа в трубе

Рассмотрим тестовую задачу течения газа в трубе, геометрия которой представлена на рисунке 14. Длина трубы составляет 150 (м), диаметр – 15(м).

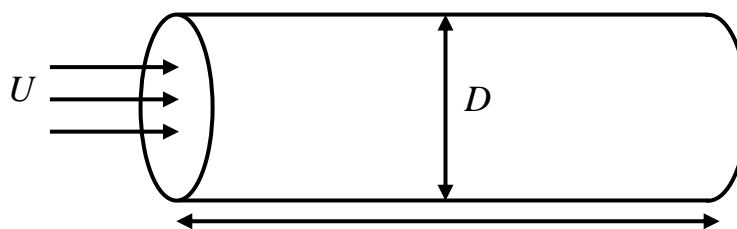


Рисунок 14 – задача с трубой

Ввиду того, что задача осесимметрична, будем проводить расчеты в плоскости (рис. 15), проходящей через ось симметрии. Размер вычислительной области после обезразмеривания: $[0, 20] \times [-1, 1]$.

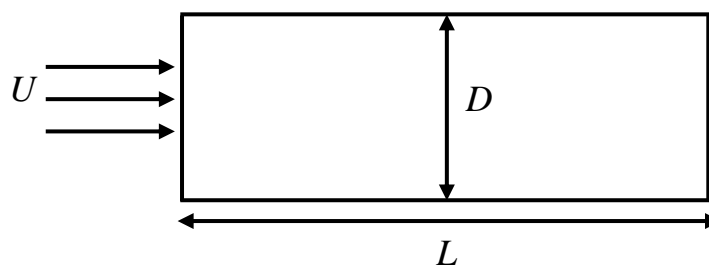


Рисунок 15– сечение трубы плоскостью

Параметры обезразмеривания задачи приведены в таблице 2.

При проведении расчетов использовали следующую вычислительную сетку:

- пространству: 400 x 40 узлов, таким образом шаг по пространству составляет $h = 0.05$;
- по времени: 1600, т.е. шаг по времени $\tau = 0,000625$ ($\tau = h/80$).

При проведении итерационного процесса на каждом временном шаге, величина параметра сходимости составляла $\varepsilon = 10^{-4}$, выбор такого относительно большого значения параметра обусловлен необходимостью экономии расчетного времени.

Количество итераций по нелинейности на каждом шаге по времени составляло 5–6 итераций. В таблице 3 приведены используемые параметры расчетов

Таблица 2 – масштабные коэффициенты

| | | |
|-------------------------------------|-----|-------------------|
| Характерный размер L | 7,5 | м |
| Характерная плотность ρ_∞ | 1 | кг/м ³ |
| Характерная скорость V_∞ | 15 | м/с |
| Характерное время T_∞ | 0,5 | с |
| Энергия e_∞ | 225 | Дж/кг |
| Давление P_∞ | 225 | Па |

Таблица 3 – параметры расчётов.

| Параметр | Значение |
|----------------------------------|----------------------|
| Универсальная газовая постоянная | 287 |
| Число Прандля | 0.75 |
| Параметр γ | 1,4 |
| Динамическая вязкость | 10^{-6} |
| Число Рейнольдса | $1,13 \cdot 10^8$ |
| Число Маха | $2,37 \cdot 10^{-2}$ |

На границе втекания задавались начальные данные, представленные в таблице 4. Значения граничных условий, устанавливаемых на границе вытекания представлены в таблице 5.

Таблица 4 – параметры границы втекания

| Параметр | Значение до обезразмеривания | Значение после обезразмеривания |
|-------------|------------------------------|---------------------------------|
| Плотность | 0,5 (кг/м ³) | 0,5 |
| Скорость | 15 (м/с) | 1 |
| Температура | 1000 К | 1 |
| Энергия | 717500 (Дж/кг) | 3188,9 |
| Давление | 143500 (Па) | 637,78 |

Таблица 5 – параметры границы втекания

| Параметр | Значение до обезразмеривания | Значение после обезразмеривания |
|-----------|------------------------------|---------------------------------|
| Плотность | 1 (кг/м ³) | 1 |
| Скорость | 0 (м/с) | 0 |

| | | |
|---------------------------|----------------|---------|
| Давление (атмосферное) | 101308 (Па) | 450,26 |
| Энергия | 253270 (Дж/кг) | 1125,64 |

Результаты моделирования приведены в Приложении Б. В начальный момент времени в трубе находится неподвижный газ с постоянной плотностью и с постоянной внутренней энергией. Далее в трубу начинает поступать нагретый до 1000К газ. Из-за разницы давления газ приходит в движение. В приведенных в приложении численных снимках можно видеть, как меняется плотность, скорость и энергия газа. После 0.5 секунды течение газа приобретает установившийся характер.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе получены следующие результаты.

1. Реализован алгоритм численного решения начально-краевой задачи для двумерного уравнения неразрывности на основе полулагранжевого подхода.
2. Реализован алгоритм численного решения полной системы Навье-Стокса путем объединения полулагранжевого подхода с методом конечных элементов.

Работа была представлена на следующих конференциях

1. Проспект Свободный 2019, секция Mathematics and Computer Science (in English)
2. Проспект Свободный 2019, секция "Прикладная математика и информатика"
3. Открытая конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям ИВМ СО РАН.
4. Решетнёвские чтения 2019, секция "Механика сплошных сред".

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Xin Wen, , Vyatkin, A.V., Shaidurov V.. SemiLagrangian Scheme for solving hyperbolic equation of first order // Молодой учёный. 2013. Т. 9, № 56. С. 6–13.
2. Магомедов К.М. Метод характеристик для численного решения пространственных течений газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 2, № 6. С. 313–325.
3. Wiin-Nielson A. On the application of trajectory methods in numerical forecasting // Tellus. 1959. Т. 11. С. 180–186.
4. Рябенький, В.С., Филипов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Вазов, В., Формайт Д. Разностные методы решения уравнений в частных производных. М.: Наука, 1963.
6. Годунов, С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977.
7. Iske A. Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2004. Т. 20. С. 388–411.
8. Вяткин А.В. Использование гибридных вычислительных систем для решения уравнения переноса модифицированным методом траекторий // Системный анализ и информационные технологии : тр. V Междунар. конф. Красноярск: ИВМ СО РАН. С. 45–55.
9. Вяткин, А.В., Кучунова, Е.В., Шайдунов В.В. Полулагранжевый метод решения двумерного уравнения неразрывности с дискретным законом сохранения // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 5. С. 27–38.
10. Rhoad R., Milauskas G., Whipple R. Geometry for Enjoyment and Challenge. 2020. 784 с.
11. Препарата Ф., Шаймос М. Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, под редакцией Ю. М. Банковского, 1989. 478 с.
12. Shaidurov V., Shchepanovskaya G., Yakubovich M. A semi-Lagrangian approach in the finite element method for the Navier-Stokes equations of viscous heat-conducting gas // Am. Inst. Phys. 2014. Т. 1629. С. 19–39.
13. Vyatkin, A.V., Kuchunova, E.V., Shaydurov V.V. Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements // RJNAMM. 2018. Т. 33, № 2. С. 123–135.
14. Вяткин А.В., Кучунова Е.В., Шайдунов В.В. Использование адаптивных сеток при решении двумерного уравнения неразрывности полулагранжевым методом // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 3, № 144–153. С. 27–38.
15. Шайдунов В.В., Щепановская Г.И., Якубович М.В. Применение метода траекторий и метода конечных элементов в моделировании движения вязкого теплопроводного газа // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 275–281.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А. Решение тестовой задачи №1 на первом и последнем слоях по времени.

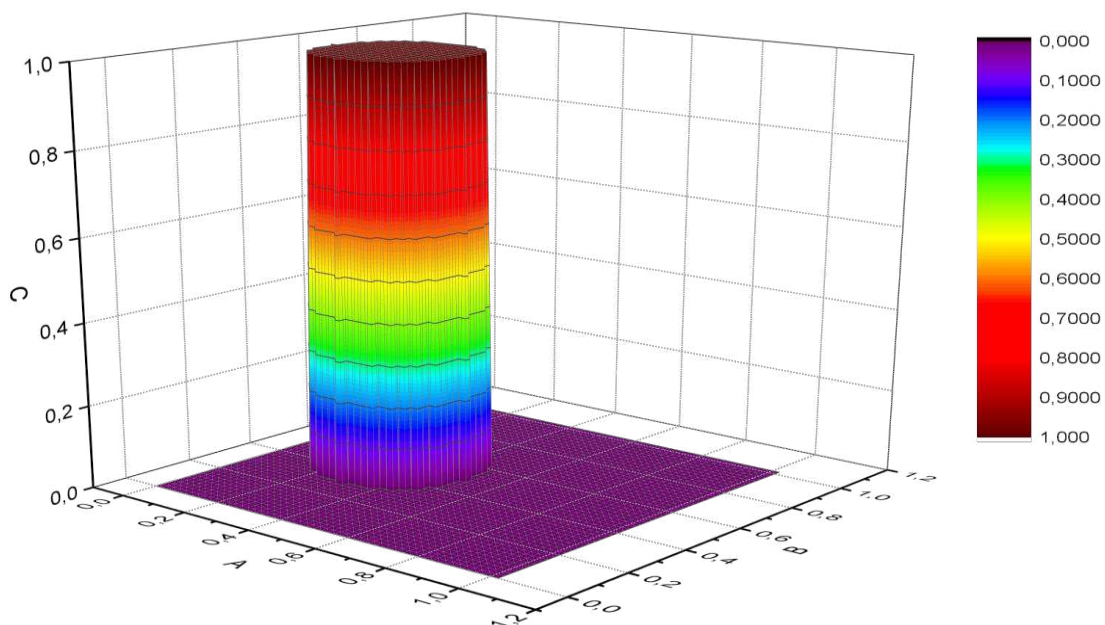


Рисунок 1 – численное решение задачи на первом слое по времени

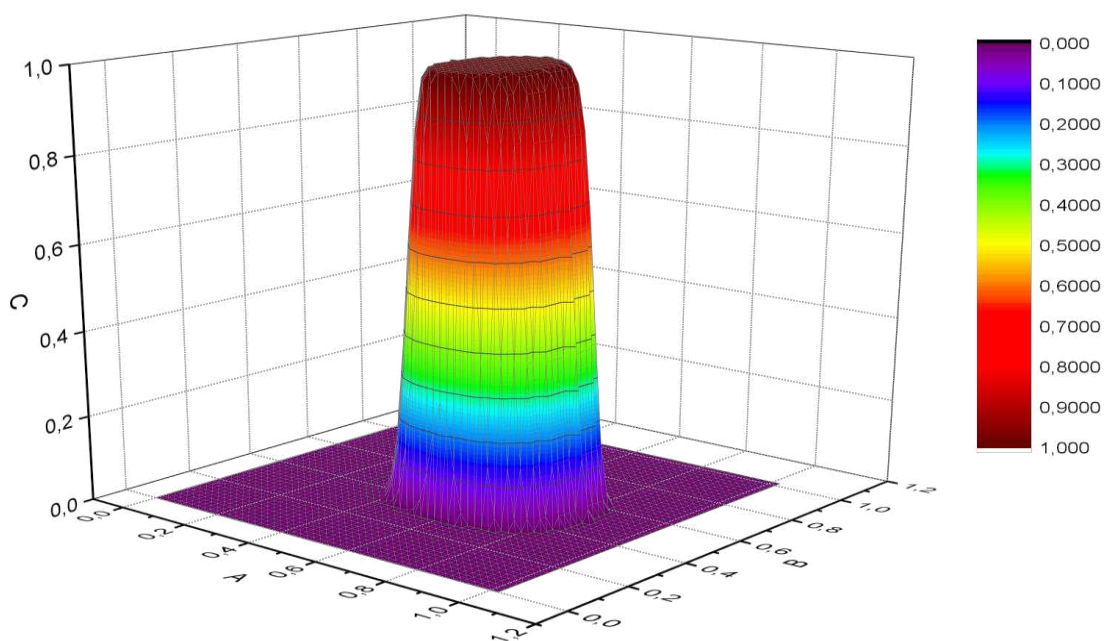


Рисунок 2 – численное решение задачи на первом слое по времени

Приложение Б. Результаты моделирования течения вязкого теплопроводного газа в трубе

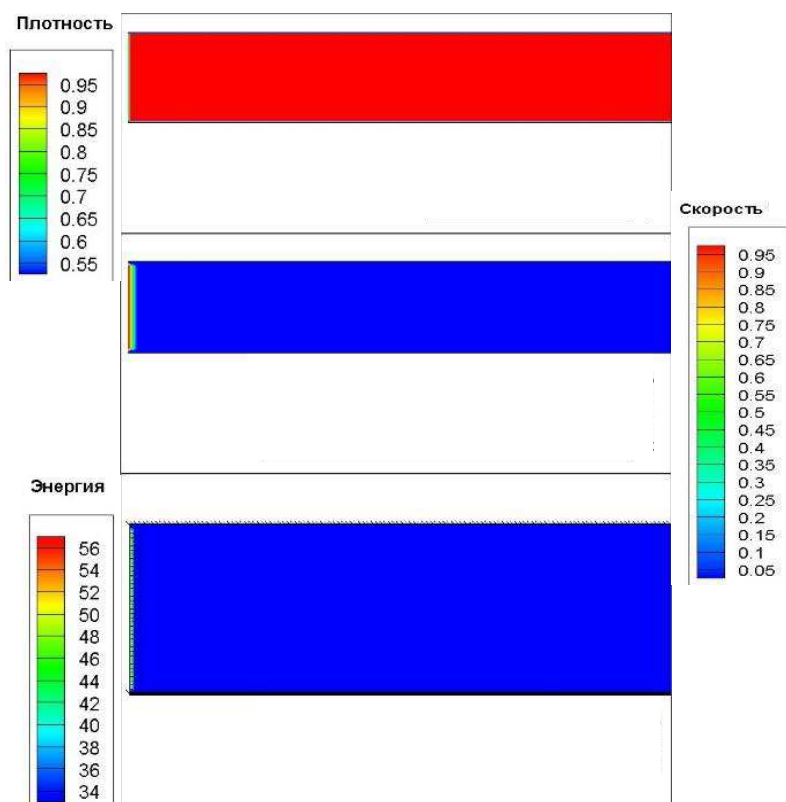


Рисунок 1 – Численный снимок решения в начальный момент времени

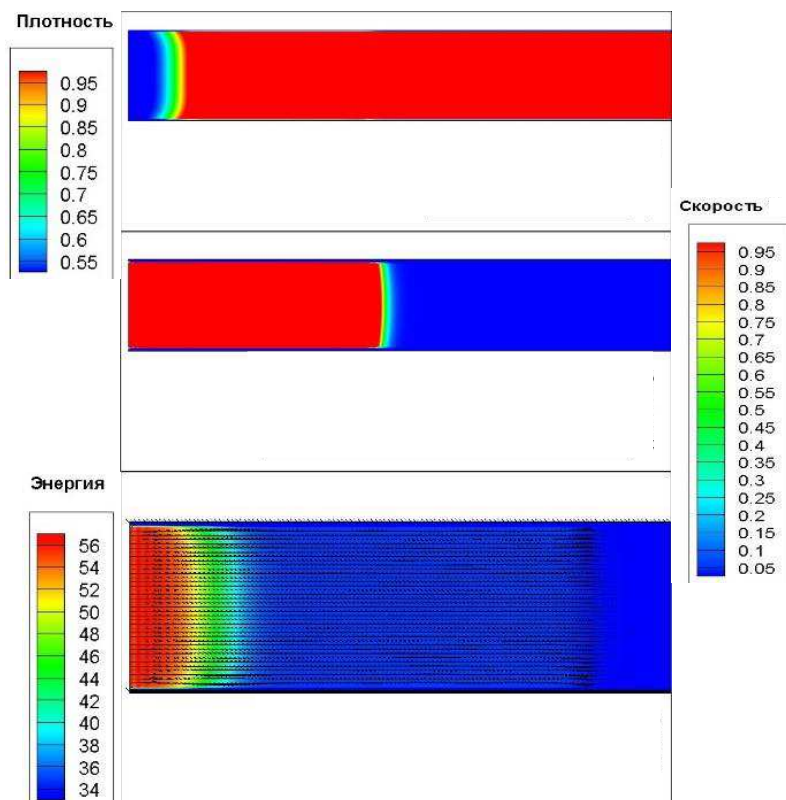


Рисунок 2 – Численный снимок решения для $t=0.2$

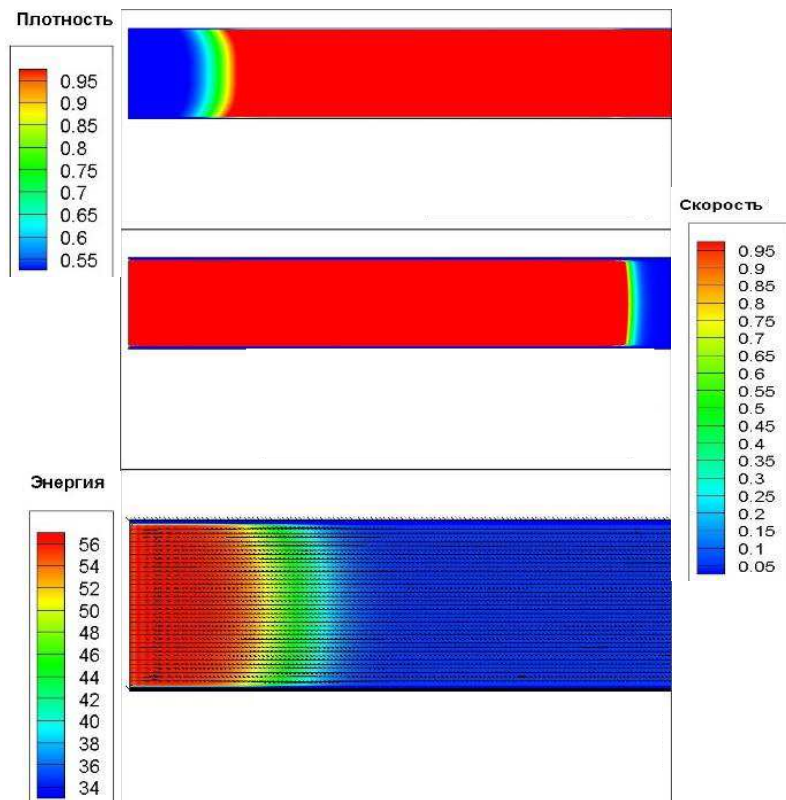


Рисунок 3 – Численный снимок решения для $t=0.4$

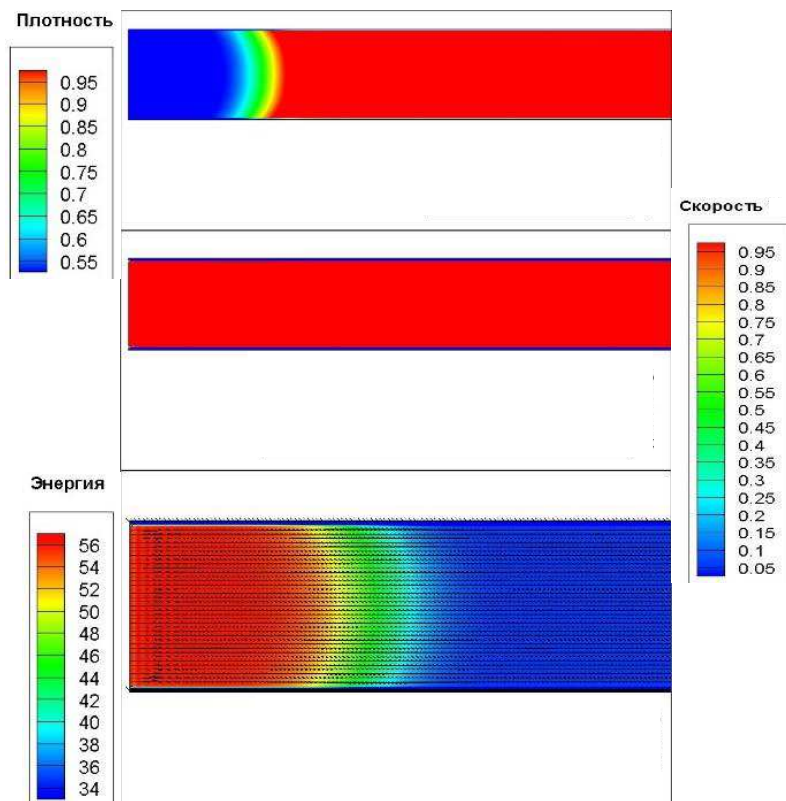


Рисунок 4 – Численный снимок решения для $t=0.6$

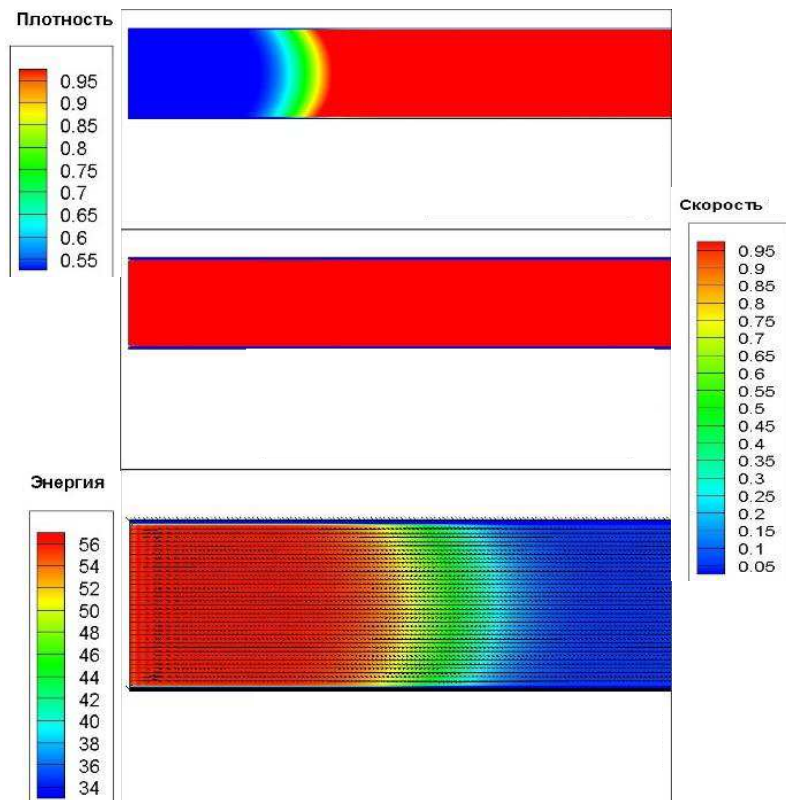


Рисунок 5 – Численный снимок решения для $t=0.8$

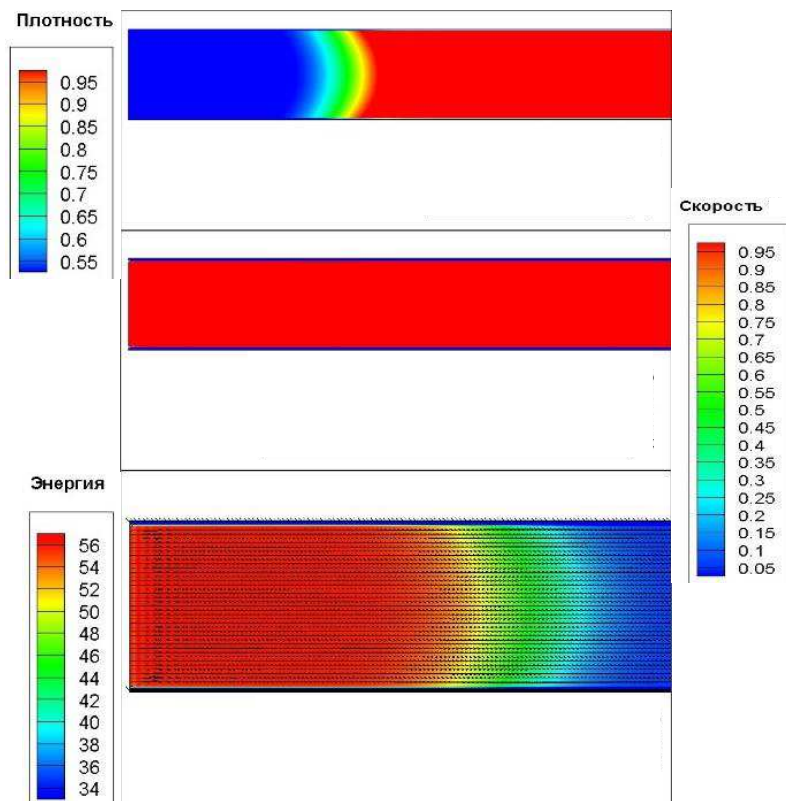


Рисунок 6 – Численный снимок решения для $t=1.0$

Приложение В.

$$\begin{aligned}
 I_{01}^1 &= \int_{D_{01}} \tau_{11} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} d\Omega \approx \frac{h}{4} \left(\tau_{11}|_{(i-1,j)} + \tau_{11}|_{(i,j)} \right) = \frac{h}{4} \frac{2}{3\text{Re}} \mu_{i-1,j} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i-1,j)} + \\
 &+ \frac{h}{4} \frac{2}{3\text{Re}} \mu_{i,j} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i,j)} = \frac{h}{6} \frac{2}{3\text{Re}} \mu_{i-1,j} \left(2 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}}{h} \right) + \\
 &+ \frac{h}{6} \frac{2}{3\text{Re}} \mu_{i,j} \left(2 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h} \right) = \frac{1}{3\text{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{i,j}) u_{ij} - \frac{1}{3\text{Re}} (\mu_{i-1,j} + \mu_{i,j}) u_{i-1,j} - \\
 &- \frac{1}{6\text{Re}} \mu_{i-1,j} v_{i-1,j+1} + \frac{1}{6\text{Re}} \mu_{i-1,j} v_{i-1,j} - \frac{1}{6\text{Re}} \mu_{i,j} v_{i,j+1} + \frac{1}{6\text{Re}} \mu_{i,j} v_{i,j} \\
 I_{10}^1 &= \int_{D_{10}} \tau_{11} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} d\Omega \approx \frac{h_y}{4} \frac{2}{3\text{Re}} \left(-\mu_{ij} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i,j)} - \mu_{i+1,j} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i+1,j)} \right) = \\
 &= -\frac{h_y}{4} \frac{2}{3\text{Re}} \left(\mu_{i,j} \left(2 \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \right) + \mu_{i+1,j} \left(2 \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - \frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{h_y} \right) \right) = \\
 &= -\frac{h_y}{6\text{Re}} \left(\frac{2}{h_x} \mu_{ij} u_{i+1,j} - \frac{2}{h_x} \mu_{ij} u_{i,j} - \frac{1}{h_y} \mu_{ij} v_{i,j} + \frac{1}{h_y} \mu_{ij} v_{i,j-1} \right) - \\
 &- \frac{h_y}{6\text{Re}} \left(\frac{2}{h_x} \mu_{i+1,j} u_{i+1,j} - \frac{2}{h_x} \mu_{i+1,j} u_{i,j} - \frac{1}{h_y} \mu_{i+1,j} v_{i+1,j} + \frac{1}{h_y} \mu_{i+1,j} v_{i+1,j-1} \right) = \\
 &= \frac{1}{3\text{Re}} \left((\mu_{ij} + \mu_{i+1,j}) u_{ij} - (\mu_{ij} + \mu_{i+1,j}) u_{i+1,j} \right) + \frac{1}{6\text{Re}} \left(\mu_{ij} (v_{ij} - v_{i,j-1}) + \mu_{i+1,j} (v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}) \right) \\
 I_{11}^1 &= \int_{D_{11}} \tau_{11} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} d\Omega \approx \frac{h_y}{4} \frac{2}{3\text{Re}} \left(-\mu_{ij} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i,j)} - \mu_{i+1,j} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{(i+1,j)} \right) = \\
 &= -\frac{h_y}{4} \frac{2}{3\text{Re}} \left(\mu_{i,j} \left(2 \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_y} \right) + \mu_{i+1,j} \left(2 \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{h_y} \right) \right) = \\
 &= -\frac{h_y}{6\text{Re}} \left(\frac{2}{h_x} \mu_{ij} u_{i+1,j} - \frac{2}{h_x} \mu_{ij} u_{i,j} - \frac{1}{h_y} \mu_{ij} v_{i,j+1} + \frac{1}{h_y} \mu_{ij} v_{i,j} \right) - \\
 &- \frac{h_y}{6\text{Re}} \left(\frac{2}{h_x} \mu_{i+1,j} u_{i+1,j} - \frac{2}{h_x} \mu_{i+1,j} u_{i,j} - \frac{1}{h_y} \mu_{i+1,j} v_{i+1,j+1} + \frac{1}{h_y} \mu_{i+1,j} v_{i+1,j} \right) = \\
 &= \frac{1}{3\text{Re}} (\mu_{ij} + \mu_{i+1,j}) (u_{i,j} - u_{i+1,j}) + \frac{1}{6\text{Re}} \mu_{ij} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + \frac{1}{6\text{Re}} \mu_{i+1,j} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j})
 \end{aligned}$$

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

 / В.В. Шайдуров

«29» июня 2020 г.


МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПОЛУЛАГРАНЖЕВЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Направление 02.04.01 Математика. Компьютерные науки

Магистерская программа 02.04.01.02 Вычислительная математика

Научный руководитель


26.06.2020

доцент, к.ф.–м.н. Е.В. Кучунова

Выпускник


26.06.2020

А.С. Кондратов

Красноярск 2020