Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ /В.М. Левчук
«____»________ 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

КОМБИНАТОРНЫЕ ВОПРОСЫ, ПОРОЖДЁННЫЕ СОБИРАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ Ф. ХОЛЛА

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ____________ /С.Г. Колесников

Выпускник ____________ /В.М. Леонтьев

Красноярск 2020

АННОТАЦИЯ

Цель работы — обобщить комбинаторный результат Ф. Холла, используемый при доказательстве собирательной формулы Холла, а именно, найти выражение для количества элементов декартова произведения

$$M_1 \times \cdots \times M_r = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \mid \lambda_i \in M_i, i \in \overline{1, r}\}$$

конечных подмножеств произвольного линейно упорядоченного множества, удовлетворяющих произвольному условию C, где C — пропозициональная формула, состоящая из высказываний типа $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$. Такие условия будем называть L-условиями. Когда $M_1 = \cdots = M_r = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, и C получено с помощью логического сложения и умножения условий типа $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$, имеет место результат Ф. Холла.

В магистерской диссертации получены следующие результаты. Доказана теорема о количестве элементов декартова произведения $M_1 \times \cdots \times M_r$, удовлетворяющих произвольному L-условию ранга не выше r, где $M_1, \ldots, M_r$ суть непустые конечные подмножества некоторого линейно упорядоченного множества, удовлетворяющие ограничениям:

$$M = M_1 \cap \cdots \cap M_r \neq \varnothing; \qquad [\min M, \max M] \cap (M_i \backslash M) = \varnothing, \quad i \in \overline{1, r}.$$

На основе этой теоремы были доказаны утверждения, в которых обнаруживается связь между L-условиями — инструментом, использованным Ф. Холлом при доказательстве собирательной формулы, и функцией ω — функцией бинарного веса числа, с помощью которой была параметризована несобранная часть собирательной формулы Холла в бакалаврской работе автора настоящей диссертации.

Как следствие этих результатов, найдены показатели степеней для двух серий коммутаторов:

$$[y, {}_u x, {}_v y], \quad u \geqslant 0, v \geqslant 0, \text{ где } v = 0 \text{ при } u = 0; \qquad [[y, {}_u x], [y, {}_v x]], \quad u > v \geqslant 0,$$

из собирательной формулы Холла для $(xy)^n$ в виде $a_1\binom{n}{1} + \cdots + a_w\binom{n}{w}$, где w — вес коммутатора, коэффициенты $a_k \in \mathbb{N}_0$ не зависят от n. Это, в свою очередь, позволило легко вычислить эти показатели по модулю n, когда n — простое число. Вместе с тем, выведены собирательные формулы в явном виде для выражения $(xy)^n$, соответственно, для групп ступени разрешимости 2 и для групп, в которых коммутант нильпотентен ступени 2 и элемент y перестановочен с любым элементом коммутанта.

Ключевые слова: собирательная формула Холла, коммутатор, бинарный вес числа, биномиальный коэффициент, декартово произведение.

ANNOTATION

Let $M_1, \ldots, M_r$ be nonempty finite sets of any totally ordered set. The aim of the thesis is to generalize P. Hall's combinatorial result that is used in the proof of Hall's collection formula, namely, to find an expression for the number of elements of the Cartesian product

$$M_1 \times \cdots \times M_r = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \mid \lambda_i \in M_i, i \in \overline{1, r}\}$$

that satisfy an arbitrary condition C, where C is a propositional formula constructed from such propositions as $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$. Such conditions will be called L-conditions. If $M_1 = \cdots = M_r = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, and C is obtained by logical sum and product of such conditions as $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i < \lambda_j$, then we get P. Hall's result.

In this thesis, we proved a theorem on the number of elements of the Cartesian product $M_1 \times \cdots \times M_r$ that satisfy some L-condition of rank at most r, where $M_1, \ldots, M_r$ are nonempty finite sets of any totally ordered set that satisfy the following restrictions:

$$M = M_1 \cap \cdots \cap M_r \neq \varnothing; \qquad [\min M, \max M] \cap (M_i \backslash M) = \varnothing, \quad i \in \overline{1, r}.$$

Taking into account that theorem, we proved statements that provide the connection between L-conditions (the instrument used by P. Hall in the proof of the collection formula) and the binary weight function ω, which was used in the parametrization of uncollected part of Hall's collection formula by the author of the thesis in his diploma work.

Based on the gained results, we found the exponents for two series of the commutators:

$$[y, {}_u x, {}_v y], \quad u \geqslant 0, v \geqslant 0, \text{ где } v = 0 \text{ при } u = 0; \qquad [[y, {}_u x], [y, {}_v x]], \quad u > v \geqslant 0,$$

in Hall's collection formula for $(xy)^n$ in the form $a_1\binom{n}{1} + \cdots + a_w\binom{n}{w}$, where w is the weight of the commutator, the coefficients $a_k \in \mathbb{N}_0$ do not depend on n. Relying on that, we easily compute the exponents modulo n when n is a prime number. Moreover, two collection formulas for the expression $(xy)^n$ were obtained in an explicit form, respectively, for solvable groups of class 2 and for groups in which the commutator subgroup is nilpotent of class 2 and the element y belongs to the centralizer of the commutator subgroup.

Key words: Hall's collection formula, commutator, binary weight of an integer, binomial coefficients, Cartesian product.

СОДЕРЖАНИЕ

[Изъято 29 страниц]

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Hall P. A contribution to the theory of groups of prime-power order // Proc. London Math. Soc. – 1934. – Vol. 2, № 36. – P. 29–95.

[2] Холл М. Теория групп – Москва : Издательство иностранной литературы, 1962. – 468 с.

[3] Krause E. On the collection process // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 3, № 15. – P. 497–504.

[4] Krause E. Groups of exponent 8 satisfy the 14th Engel congruence // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 3, № 15. – P. 491–496.

[5] Скопин А. И. Тождество Якоби и собирательная формула Ф. Холла в трансметабелевых группах двух типов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1989. – Т. 175. – С. 106–112.

[6] Леонтьев В. М. Собирательные формулы Холла при некоторых ограничениях на коммутант группы [Электронный ресурс] // Конкурс Августа Мёбиуса. – 2016. – Режим доступа: www.moebiuscontest.ru/files/2016/leontiev.pdf

[7] Kolesnikov S., Leontiev V., Egorychev G. Two collection formulas // Journal of Group Theory. – 2020. – Vol. 23, № 4. – P. 607–628.

[8] Leontiev V. M. On Divisibility of Some Sums of Binomial Coefficients Arising From Collection Formulas // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2018. – Vol. 11, № 5. – P. 603–614.

[9] Schmidt J. Commutator formulas [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.ms.uky.edu/~jack/2013-06-21-Commutator.pdf.

[10] Леонтьев В. М. Комбинаторные вопросы, связанные с собирательным процессом Ф. Холла // Сибирские электронные математические известия. – 2020. – Т. 17. – С. 873–889.

[Изъята 1 страница]

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______/В.М. Левчук
«25» 06 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

КОМБИНАТОРНЫЕ ВОПРОСЫ, ПОРОЖДЁННЫЕ СОБИРАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ Ф. ХОЛЛА

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор _______ /С.Г. Колесников
22.06.2020

Выпускник _______/В.М. Леонтьев
22.06.2020

Красноярск 2020