

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ /В.М. Левчук
« _____ » _____ 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ПОРОЖДАЮЩИЕ ТРОЙКИ ИНВОЛЮЦИЙ
ГРУПП $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ ДЛЯ МАЛЫХ n

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор

_____ /Я.Н. Нужин

Выпускник

_____ /Т.Б. Шаипова

Красноярск 2020

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи теории групп и смежных разделов математики сводятся к нахождению порождающих элементов, удовлетворяющих некоторым свойствам. Для конечных простых групп особый интерес представляют порождающие множества минимальной мощности относительно заданных свойств. Порождающее множество группы, по определению — это подмножество, такое что каждый элемент может быть записан как произведение конечного числа элементов и их обратных.

В 2008 г. Д.В. Левчук и Я.Н. Нужин [?, ?] доказали, что при $n \geq 7$ проективная специальная линейная группа $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Причем порождающие указывались явно и при $n \neq 4k + 2$ они брались из $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Следовательно, при $n \neq 4k + 2$ и группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. С другой стороны, группа $SL_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ обладает только одной инволюцией и поэтому она не порождается никаким множеством инволюций, а группа $SL_3(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ не может порождаться тремя инволюциями, две из которых перестановочны, поскольку такими тройками не порождается ее гомоморфный образ $PSL_3(9)$ (простая конечная группа). Совсем недавно Я.Н.Нужин [?] установил, что группы $SL_3(D)$ и $SL_6(D)$, где D — область целостности характеристики отличной от 2, не порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Таким образом, анализ вышеуказанных работ показал, что при малых $n \leq 6$ остаются открытыми следующие вопросы:

А) *Порождаются ли при $n = 3, 4, 5, 6$ группы $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями (без условия перестановочности двух из них)?*

Б) *Порождаются ли группы $SL_4(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ и $SL_5(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

В диссертации рассматривается только вопрос А.

Объект исследования диссертации — специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ над кольцом целых Гауссовых чисел $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. Рассматривается задача её порождения при малых n тремя инволюциями, то есть матрицами обратными самим себе. Это минимально возможное число порождающих инволюций.

Основным результатом является

Теорема 1. *При $n = 3$ и $n = 5$ группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями.*

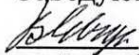
Доказательство теоремы 1 состоит в том, что порождающие тройки инволюций указываются явно и, применяя методы работы 1, из них получаются уже известные порождающие множества группы $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.

Текст диссертации организован следующим образом. В параграфе 1 вводятся необходимые обозначения и определения, формулируются известные результаты о порождающих множествах специальных линейных групп над евклидовыми кольцами. В параграфах 2, 3 доказывается теорема 1 для размерностей 3 и 5 соответственно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] *Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N.* On the generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute / D. V. Levchuk , Ya. N. Nuzhin // Journal of Siberian Federal University, Math and Physics. – 2008 – Vol. 1, № 2. – P. 133–139.
- [2] *Левчук Д. В.,* О порождаемости группы $PSL_7(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны / Д.В. Левчук // Вестник НГУ. – 2009. **9** № 1, – С.35-38.
- [3] *Ван дер Варден Б.Л.,* Алгебра. Определения, теоремы, формулы. 3-е изд., стер. / Б.Л. Ван дер Варден. – СПб.: Издательство „Лань“, 2004. – 624 с.
- [4] *Стейнберг Р.,* Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975. – 264 с.
- [5] *Нужин, Я.Н.,* О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны / Я.Н. Нужин // Владикавказский матем. журнал, – 2008, – Т. 10, вып. 1 – С. 42–49.
- [6] *Нужин Я. Н.,* Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп, Труды ИММ УрО РАН (представлена).

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики


УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
 /В.М. Левчук
«25» 06 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ПОРОЖДАЮЩИЕ ТРОЙКИ ИНВОЛЮЦИЙ
ГРУПП $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ ДЛЯ МАЛЫХ n


Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная
математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор

 /Я.Н. Нужин

Выпускник

 /Т.Б. Шаипова

Красноярск 2020