

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
«Сибирский федеральный университет»

На правах рукописи

Корниенко Виктория Сергеевна

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ «СРЕДНЕГО
ПОЛЯ»**

Научно-квалификационная работа

Направление 09.06.01 – информатика и вычислительная техника;
Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ.

Квалификация «Исследователь. Преподаватель - исследователь»

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Шайдуров В.В. / _____

Красноярск – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. Математические модели управления и оптимизации со стратегией «игры среднего поля»	12
1.1. Анализ модели «Игры среднего поля»	12
1.2. Обзор подхода «Игры среднего поля».....	18
1.3. Схема численного решения игры среднего поля	20
1.4. Обзор полулагранжевых методов численного решения дифференциальных уравнений.....	22
1.5. Выводы к главе 1.....	26
Глава 2. Задачи «среднего поля» с неквадратичным контролем	28
2.1. Постановка одномерной задачи	28
2.2. Численное решение задачи оптимизации с неквадратичным контролем .	31
2.2.1. Аппроксимация уравнения Фоккера-Планка.....	31
2.2.2. Оптимальное управление для дискретной задачи оптимизации.....	37
2.2.3. Вычислительный алгоритм.....	42
2.3. Вычислительный эксперимент	45
2.3.1. Постановка модельной задачи.....	45
2.3.2. Численное моделирование	47
2.4. Выводы по главе 2.....	53
Глава 3. Конечно-разностное решение задачи планирования достижения заданного состояния	54
3.1. Постановка задачи планирования.....	54
3.2. Численное решение задачи планирования	56

3.3. Вычислительный эксперимент.....	59
3.4. Выводы по главе 3	59
Глава 4. Двумерные модели «игр среднего поля».....	63
4.1. Математическая модель	63
4.2. Построение вычислительной схемы	65
4.2. Вычислительный эксперимент.....	78
4.3.1. Торговля квотами на эмиссию в терминах игры «среднего поля».....	78
4.3.2. Численное решение задачи	81
4.4. Выводы по главе 4.....	86
Глава 5. Двумерные задачи «среднего поля» со смешанным контролем....	87
5.1. Математическая модель.....	87
5.2. Построение вычислительной схемы	88
5.3. Численное моделирование.....	93
5.4. Выводы по главе 5.....	96
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	98
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Исследование разностных схем для одномерного уравнения Фоккера-Планка	99
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Проверка порядка аппроксимации для схемы с ненулевой корреляцией.....	102
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Копия свидетельства о регистрации программы для ЭВМ	106
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	107

ВВЕДЕНИЕ

Модели, описывающие поведение мультиагентных систем, учитывающих макроскопическое взаимодействие агентов как результат совокупности предпринимаемых ими решений и действий, находят свое применение в различных областях науки: от моделирования взаимодействия больших социологических групп в сети Интернет [1] до оптимизации добычи и обработки исчерпаемых ресурсов (например, таких как нефть) среди большого числа производителей [2]. В основе такого моделирования лежит принцип наименьшего действия [3], предпосылки к которому для физических систем были заложены еще Эйлером: поведение популяции складывается из отдельных действий, которые должны быть оптимальными в отношении к какой-либо цели, общей для популяции. Такая связь присутствует в любой системе, где пространство состояний каждого отдельно взятого индивидуума определяется стратегиями и состояниями остальных агентов. Таким образом, моделирование поведения мультиагентных систем должно отражать зависимость между распределением всей совокупности агентов и действиями ее отдельно взятых индивидуумов. Один из подходов к моделированию, отвечающий вышеизложенным критериям, получил название «Игры среднего поля» («Mean Field Games» в оригинале), возникший как раздел теории некооперативных игр, который рассматривает взаимодействие агентов (игроков) в асимптотическом пределе, когда число агентов стремится в бесконечность.

Структура игры «среднего поля» традиционно выражена в виде связанной пары дифференциальных уравнений в частных производных: уравнения Фоккера-Планка (Колмогорова), эволюционирующего вперед во времени и определяющего распределение агентов по пространству состояний; и Гамильтона-Якоби-Беллмана, эволюционирующего назад во времени, которое отвечает за оптимальность выбранной игроком стратегии.

Теория «игр среднего поля» позволяет также преодолевать ограничения альтернативных методов прогнозирования. Фундаментальные методы прогнозирования (например, динамическое программирование) учитывают взаимодействие только с локальным окружением (иначе задача становится вычислительно невыполнимой) и могут столкнуться с трудностями при объяснении некоторых явлений, происходящих в результате неявной оптимизации [4]. Более того, представление агентов в качестве распределения некой эмпирической характеристики означает, что подход можно масштабировать до произвольных размеров популяции, что позволяет имитировать явления, происходящие в реальной жизни. Таким образом, относительная новизна теории и её широкая применимость приводят к поиску эффективных вычислительных методов решения как классических «игр среднего поля», так и их модификаций.

Целью данной работы является адаптация математических моделей, используемых в международном экономическом сообществе и описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, к оптимизации затрат, доходов, достижению поставленных социальных и экономических целей, прогнозированию критических ситуаций для выбранной области моделирования; а также разработка и обоснование эффективных численных методов решения задач, описываемых такими математическими моделями.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие **задачи**.

1. Адаптировать математические модели «Игры среднего поля» для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей и регионов для достижения заданных социальных и экономических целей и прогноза критических ситуаций.
2. Использовать модели для прогнозирования мезо- и макроповедения больших популяций (население, пользователи, клиенты или предприятия) в различных внешних условиях (экономические, социальные, экологические, политические), включая угрозы и критические ситуации.

3. Разработать и обосновать эффективные численные методы решения задач «среднего поля», описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных с новыми формулировками данных.

Научная новизна: разработаны численные методы решения задач, описываемых математическими моделями игр «среднего поля», превосходящие по быстродействию известные вычислительные алгоритмы. Построены новые модели, основанные на традиционной постановке задач «среднего поля», но более адаптированные для реальных физических приложений.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей, достижения социально-экономических целей и прогноза макроповедения мультиагентных систем под воздействием различных внешних условий, как экономических, социальных, экологических, так и политических.

Методология и методы исследования: В настоящее время использование аппарата «игры среднего поля» в основном оправдано при прогнозировании макроповедения большого числа агентов во внешнеэкономической среде с учетом личной финансовой выгоды [5]. В некоторых работах, например в [6], анализируется также ситуация оптимизации затрат при покупке квот на выбросы диоксида углерода в атмосферу. В то же время теория «игр среднего поля» содержит возможности прогнозирования затрат (финансовых и организационных) для достижения других определенных экономических, экологических и социальных целей путем некоторой переформулировки известных динамических моделей. В качестве метода исследования в основном используется вычислительный эксперимент, включающий в себя следующие этапы: математическая формулировка задачи, построение численного алгоритма, его программная реализация, проведение расчетов и анализ полученных результатов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. математическая модель, основанная на теории «игр среднего поля» и применимая к оптимизационным задачам с неквадратичным контролем;
2. математическая модель, основанная на теории «игр среднего поля» и применимая к оптимизационным задачам с ограничениями на финальное состояние агентов;
3. вычислительные алгоритмы, предложенные для одно- и двумерных оптимизационных задач, основанные на полулагранжевом приближении, превосходящие по быстродействию известные вычислительные алгоритмы.

Достоверность полученных результатов подтверждена проверкой и обоснованием сходимости численных методов, сравнением полученных результатов с известными в научной литературе результатами других авторов, строгим выводе используемых моделей и обеспечением законов сохранения при построении вычислительных схем.

Апробация работы. Основные результаты работы изложены в виде докладов:

1. Доклад «Поиск равновесия по Нэшу для задачи загрязнения атмосферы диоксидом углерода» на XIX всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Кемерово, 2018;
2. Доклад «Применение методов статистической физики к оптимизационным задачам с большим числом игроков» на Открытой конференции молодых ученых ИВМ СО РАН по математическому моделированию и информационным технологиям, Красноярск ИВМ СО РАН, 2019;
3. Доклад «Numerical Methods for Mean Field Game with Discontinuous Control function» на XI международной конференции по применению математических подходов в технических и естественных науках (AMiTaNS'19), Албена, Болгария, 2019;
4. Доклад «Computation of mean-field equilibria for various optimization problem with non-symmetric control» на международной конференции «Актуальные

проблемы вычислительной и прикладной математики 2019» (АПВПМ 2019), Новосибирск, 2019.

5. Доклад «The finite-difference solving the planning problem of oncoming to a given state» на XII международной конференции по применению математических подходов в технических и естественных науках (AMiTaNS'20), Болгария, 2020;

Научно-квалификационная работа (НКР) докладывалась также на совместном семинаре Института вычислительного моделирования СО РАН и базовой кафедры вычислительных и информационных технологий Института математики и фундаментальной информатики Сибирского Федерального университета.

Разные этапы работы поддерживались следующими проектами:

1. Проект РФФИ № 17-01-00270 «Построение и обоснование новых эрмитовых конечных элементов для численного решения задач математической физики»;
2. Проект РФФИ № 20-01-00090 «Эйлерово-лагранжевы (полулагранжевы) методы конечных разностей и конечных элементов со специальными свойствами»;
3. Проект РФФИ № 20-61-46017 «Развитие динамических математических моделей прогноза критических социально-экономических ситуаций и создание эффективных численных методов решения таких моделей».

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в прямом участии в исследовании применимости полулагранжева метода к решению задач прогнозирования, оценке сходимости полученных методов, разработке вычислительного алгоритма и комплекса программ, проведении расчетов, обработке и анализе полученных результатов, подготовке научных статей и докладов по теме диссертационной работы. Научному руководителю Шайдурову В.В. принадлежат постановка задачи и общая оригинальная идея использования полулагранжева подхода в применении к моделям «игр среднего поля».

Публикации. Основные результаты по теме НКР опубликованы в 10 печатных изданиях, из которых 1 издана в журнале, рекомендованном ВАК, 5 – в тезисах докладов, 2 индексируются в базах данных Web Of Science, 4 – в базах Scopus, 2 публикации ранга ВАК и Scopus переданы в печать.

Список наиболее важных публикаций:

1. Kornienko V., Computation of Mean-Field Equilibria with Correlated Stochastic Processes / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Finite Difference Methods. Theory and Applications. FDM 2018. Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – V. 11386. – P. 468-475. DOI: 10.1007/978-3-030-11539-5_54
2. Kornienko V.S., “Mean Field Games” as mathematical models for control and optimization of business activity / V.V. Shaydurov, V.S. Kornienko // J. Sib. Fed. Univ. Humanit. soc. Science. – 2019 – V. 12(4). P. 701–715. DOI: 10.17516/1997–1370–0418.
3. Kornienko V., Approximations of two-dimensional Mean Field Games with non-symmetric controls / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – V.367, №112461. DOI: 10.1016/j.cam.2019.112461
4. Kornienko V., Mean Field Game Problem with non-quadratic control function / V. Shaydurov, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2019. – V.2164, №110012. DOI: 10.1063/1.5130857
5. Корниенко В.С., Шайдуров В.В., Карепова Е.Д. Конечно-разностный аналог задачи равновесия «среднего поля» / Вычислительные технологии (принята в печать)
6. Shaydurov V., Kornienko V., S. Zhang. The Euler-Lagrange Approximation of the Mean Field Game for the Planning Problem, Lobachevskii Journal of Mathematics (на рецензии)

Объём и структура работы. НКР состоит из введения, пяти глав, заключения и трех приложений. Полный объём диссертации составляет 121 страницы, включая 16 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 161 наименование.

Во **введении** кратко описан объект исследования, сформулирована цель диссертационной работы, а также выделены её задачи. Обоснована актуальность работы, теоретическая и практическая значимость, а также достоверность полученных результатов. Перечислены основные публикации по теме диссертации и дана общая характеристика работы.

В **первой главе** приведен исторический обзор развития моделей «игр среднего поля». Сформулированы актуальные проблемы использования таких моделей. Представлен общий математический подход к их построению. Представлена общая схема численного решения таких задач, используемая в последующих главах. Показана применимость и преимущество применения полулагранжевых методов к решению таких задач. Представлен краткий обзор развития полулагранжевых методов численного решения дифференциальных уравнений.

Вторая глава содержит постановку одномерной дифференциальной игры «среднего поля» с неквадратичной функцией контроля. Для её решения предложен численный алгоритм, основанный на полулагранжевом приближении, и показано условие выбора оптимальной стратегии, предоставляющее наискорейший спуск к минимуму функционала стоимости. Определены границы применимости метода. Численный алгоритм апробирован на задаче экономического взаимодействия в условиях наличия альтернативных ресурсов. Рассмотрены случаи разрывного управления.

В **третьей главе** сформулирована модель с ограничением на финальное распределение агентов. Для ее численного решения предложен алгоритм последовательного приближения к финальному состоянию.

Четвертая глава посвящена постановке двумерной игры «среднего поля» и обобщению численного алгоритма, рассмотренного во второй главе, на двумерный случай. Показана сходимость метода и условия наискорейшего спуска к минимуму функционала стоимости. Предложенный метод применен к анализу ситуации торговли квотами на эмиссию в условиях различной налоговой политики.

В пятой главе рассмотрены двумерные модели «игр среднего поля» со смешанным контролем, к которым неприменим алгоритм, предложенный в четвертой главе. Для решения таких задач предложены эффективные вычислительные схемы.

В заключении дано краткое обобщение полученных результатов. Показано, что намеченные задачи решены и поставленная цель достигнута. Проведена оценка новизны результатов.

В приложениях рассмотрены вопросы аппроксимации предложенных разностных схем и представлена копия свидетельства о регистрации программного обеспечения.

[Изъято 95 страниц в соответствии с правом интеллектуальной собственности]

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bauso, D. Raffaele Pesenti, and Marco Tolotti. Opinion dynamics and stubbornness via multipopulation mean-field games / D. Bauso, D. R. Pesenti, M. Tolotti // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2016.– V.170. №1. P.№ 266293.
2. Gueant, O. A reference case for mean field games models / O. Gueant. // *J. Math. Pures Appl.* – 2009. – V. 92. №3. P.276–294.
3. Полак Л.С. Гамильтон и принцип стационарности действия. / Л.С. Полак. – Москва: АН СССР, 1936. — 272 с.
4. Yang, J. Learning Deep Mean Field Games for Modeling Large Population Behavior / J. Yang, X. Ye, R. Trivedi, H. Xu, H. Zha // *ICLR 2018 Mathematics, Computer Science*. — 2018. – 15 p.
5. Shaydurov, V.V. “Mean Field Games” as mathematical models for control and optimization of business activity / V.V. Shaydurov, V.S., Kornienko. // *J. Sib. Fed. Univ. Humanit. soc. sci.* – 2019. – V. 12. №4. P. 701–715.
6. Zhang, S. Modeling and computation of mean field equilibria in producers’ game with emission permits trading / S. Zhang, X. Wang, A. Shananin. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2016. – №37. 17 p.
7. Huang, M. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle / M. Huang, R. P. Malham’e, P. E. Caines // *Commun. Inf. Syst.* – 2006. – Т. 6, №3. – P. 221–251.
8. Huang, M. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized –Nash equilibria / M. Huang, R. P. Malham’e, P. E. Caines // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 2007. – Т. 52, №9. – P. 1560–1571.
9. Lasry, J.-M. Jeux `a champ moyen I. [Игры среднего поля I] / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*. – 2006. – Т. 343, №9. – P. 619–625.

10. Lasry, J.-M. Jeux `a champ moyen II. Horizon fini et contrˆole optimal. [Игры среднего поля II. Конечный горизонт и оптимальное управление] / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2006. – Т. 343, №10. – P. 679–684.
11. Lasry, J.-M. Mean field games. / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // Jpn. J. Math. – 2007. – Т. 2, №1. – P. 229 – 260.
12. Lasry, J.-M. Mean field games. / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // Cahiers de la Chaire Finance et D'evloppement Durable. [Курс лекций] – 2007.
13. Friedman, A. Differential games / A. Friedman. – NY: Wiley, 1971. – 368 p.
14. Петросян, Л.А. Теория игр. / Л.А.Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.В. Шевкопляс. – СПб: БЧВ-Петербург, 2012. – 432 с.
15. Buckdahn, R. Some Recent Aspects of Differential Game Theory / R. Buckdahn, P. Cardaliaguet, M. Quincampoix. // Dyn. Games Appl. – 2011. – №1. P. 74–114.
16. Gomes, D. Continuous time finite state mean-field games / D. Gomes, J. Mohr, R. Souza. // Appl. Math. and Opt. – 2013.– Т. 68, №1. – P. 99–143.
17. Kolokoltsov, V.N., Li, J.J., Yang, J.J. Mean field games and nonlinear Markov processes, 2011, URL: <https://arxiv.org/abs/1112.3744>.
18. Kolokoltsov, V.N., Yang W. Sensitivity analysis for HJB equations with an application to a coupled backward-forward system, 2013, URL: <https://arxiv.org/abs/1303.6234>.
19. Ellis, R.S. Newman, Limit theorems for sums of dependent random variables occurring in statistical mechanics/ R.S. Ellis, C.M. Wahrseh. // Verw. Geb. – 1978. – № 44. P. 117-139.
20. L□onard, C. Large deviations and law of large numbers for a mean field type interacting particle systems / C. L□onard. // Stochastic Processes and their Applications. – 1987. – № 25. P. 215-235.
21. Nash, J. Equilibrium points in n-person games / J. Nash. // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 1950. – №36. P. 48–49.
22. Nash, J. Non-cooperative games / J. Nash. // Annals of Mathematics. – 1951. – №54. P. 286 – 295.

23. Lions, P.-L. College de france course on mean-field games. [Курс лекций] – 2007 –2011.
24. Nourian, M. e-Nash mean field game theory for nonlinear stochastic dynamical systems with major and minor agents / M. Nourian, P.E. Caines.// SIAM J. Control Optim. – 2013. – Т. 51, №4. P. 3302–3331.
25. Fischer, M. On the connection between symmetric N-player games and mean field games, 2015, URL: <https://arxiv.org/abs/1405.1345>.
26. Lacker, D. A general characterization of the mean field limit for stochastic differential games, 2014, URL: <https://arxiv.org/abs/1408.2708>
27. Cardaliaguet, P. Notes on Mean Field Games from lectures at College de France / P. Cardaliaguet. – Dauphine: University of Paris, 2012. – 59 p. URL: <https://www.ceremade.dauphine.fr/cardalia/MFG20130420.pdf>.
28. Kloeden P.E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations/ P.E. Kloeden, E. Platen. Berlin: Springer, 1992, 629 p.
29. Bensoussan, A. Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory / A. Bensoussan, J. Frehse, P. Yam. – New York: Springer-Verlag, 2013. – 128 p.
30. Bellmann, R. Dynamic Programming / R. Bellmann. – New Jersey: Princeton University Press, 1957. 342 p.
31. Diamond, D.W. Bank runs, deposit insurance, and liquidity. The Journal of Political Economy / D.W. Diamond, P.H. Dybvig. // The Journal of Political Economy. – 1983. – № 91. P. 401–419
32. Vives, X. Nash equilibrium with strategic complementarities / X. Vives. // Journal of Mathematical Economics. – 1990. – №19. P. 305–321.
33. Milgrom, P. Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities / P. Milgrom, J. Roberts. // Econometrica. – 1990. – №58. P. 1255–1277
34. Adlakha, S. Mean field equilibrium in dynamic games with strategic complementarities. / S. Adlakha, R. Johari. // Operations Research. – 2013. – № 61. P. 971–989.

35. Gomes, D.A. Mean field games models - a brief survey / D.A. Gomes, J. Saude // *Dynamic Games and Applications*. – 2014.– №4. P.110–154.
36. Lachapelle, A. On a mean field game approach modeling congestion and a version in pedestrian crowds / A. Lachapelle, M.T. Wolfram. // *Transportation Research Part B: Methodological*. – 2011. – № 45. P. 1572–1589.
37. Gueant, O. Mean Field Games and Applications to Economics. Ph.D. Thesis / O. Gueant – Universit  Paris Dauphine, Paris, 2009 – .
38. Gueant, O. A reference case for mean field games models / O. Gueant. // *J. Math. Pures Appl.* – 2009. – V. 92. №3. P.276–294.
39. Bardi, M. The derivation of ergodic mean field game equations for several populations of players / M. Bardi, E. Feleqi. // *Dynamic Games and Applications*. – 2013. – №.3. P.523 – 526.
40. Balandat, M. On efficiency in mean field differential games / M. Balandat, C. Tomlin. // In 2013 American Control Conference. – Washington: DC, 2013. P. 2527-2532.
41. Gomes, D.A. Mean-field games with logistic population dynamics / D. A. Gomes, R. de Lima Ribeiro // In 52nd IEEE Conference on Decision and Control. – Florence, 2013. P. 2513-2518.
42. Nourian, M. Nash, social and centralized solutions to consensus problems via mean field control theory / M. Nourian, P. Caines, R. P. Malhamé, M. Huang // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 2013. – V.58, №3. P.639–653.
43. Tembine, H. Energy-constrained mean field games in wireless networks / H. Tembine. // *Journal of Strategic Behavior and the Environment*. – 2014. – V.4. №2. P. 187–211.
44. Guéant, O. Mean field games and oil production / O. Guéant, J.-M. Lasry, P.-L. Lions. // Technical report. – Paris: College de France, 2010.
45. Lachapelle, A. Efficiency of the price formation process in presence of high frequency participants: a mean field game analysis / A. Lachapelle, J.-M. Lasry, C.-A. Lehalle, P.-L. Lions. // *Mathematics and Financial Economics*. – 2016. – № 10. P. 223–262.

46. Lucas, R.E. Knowledge growth and the allocation of time / R. E. Lucas, B. Moll // *Journal of Political Economy*. – 2014. – V. 122. №1. P. 1–51.
47. Santambrogio, F. A modest proposal for MFG with density constraints / F. Santambrogio. // *Netw. Heterog. Media*. – 2012. – V.7 №2. P. 337–347.
48. Caines, P.E. Mean Field Games / P. E. Caines, M. Huang, R. P. Malhamé. // Chapter in *Handbook of Dynamic Game Theory*. – Berlin: Springer, 2018, P. 345-372.
49. Kizilkale, A.C. A class of collective target tracking problems in energy systems: Cooperative versus non-cooperative mean field control solutions / A.C. Kizilkale, R.P. Malhame. // *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. – 2014. – P. 3493- 3498.
50. Kizilkale, A.C. Collective target tracking mean field control for electric space heaters / A.C. Kizilkale, R.P. Malhame. // *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*. – 2014. – P. 829-834.
51. Kizilkale, A.C. Collective target tracking mean field control for markovian jumpdriven models of electric water heating loads / A.C. Kizilkale, R.P. Malhame. // *IFAC World Congress 19*. – 2014. – P. 1867–1872.
52. Kolokoltsov, V.N, Yang, W. Inspection games in a mean field setting, 2015, URL: <http://arxiv.org/abs/1507.08339>
53. Kolokoltsov, V.N. Mean field game model of corruption / V. N. Kolokoltsov, O. Malafeyev. // *Dynamic Games and Applications*. – 2017. – №7. P. 34–47.
54. Kolokoltsov, V.N. Existence of solutions to path-dependent kinetic equations and related forward-backward systems / V.N. Kolokoltsov, W. Yang. // *Open Journal of Optimization*. – 2013. – №2. P. 39–44.
55. Kolokoltsov, V.N. Nonlinear Markov processes and kinetic equations. Volume 182 of *Cambridge Tracts in Mathematics* / V.N. Kololotsov. – New York: Cambridge University Press, 2010 – 373 p.
56. Bardi, M. Nonlinear elliptic systems and mean field games / M. Bardi, E. Feleqi. // *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* – 2016. – № 23. P. № 44.

57. Gomes, D.A. Continuous time finite state mean field games / D.A. Gomes, J. Mohr, R. Souza. // *Appl. Math. Optim.* – 2013. – V. 68. №1. P. 99–143.
58. Cardaliaguet, P. Weak solutions for first order mean field games with local coupling / P. Cardaliaguet. // *Analysis and Geometry in Control Theory and its Applications.* – 2013. – №11. P. 111-158.
59. Huang, M. Large-population LQG games involving a major player: the Nash certainty equivalence principle / M. Huang // *SIAM J. Control Optim.* – 2009. – V. 48. №5. P. 3318–3353.
60. Huang, M. Mean Field Stochastic Games with Discrete States and Mixed Players / M. Huang // Chapter in *Game Theory for Networks. GameNets 2012. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*, vol 105. – Berlin: Springer, 2012. P. 138–152.
61. Nguyen, S.L. Linear-quadratic-gaussian mixed games with continuum-parametrized minor players / S. L. Nguyen, M. Huang. // *SIAM J. Control Optim.* – 2012. – V. 50 №5. P. 2907–2937.
62. Carmona, R. Delarue, F. Mean field forward-backward stochastic differential equations, 2013, URL: <http://arxiv.org/abs/1211.4186v1>
63. Carmona, R. Probabilistic analysis of mean-field games / R. Carmona, F. Delarue // *SIAM J. Control Optim.* – 2013. – №51. P. 2705 – 2734.
64. Carmona, R. A probabilistic weak formulation of mean field games and applications / Carmona R., D. Lacker. // *Ann. Appl. Probab.* – 2015. – V.25. №3. P. 1189 – 1231.
65. Bensoussan, A. Linear-quadratic mean field games / A. Bensoussan, K. Sung, S. Yam, S. Yung. // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 2016. – № 169. P. 496 – 529.
66. Huang, M. The NCE (mean field) principle with locality dependent cost interactions/ M. Huang, P. Caines, R.P. Malham. // *IEEE Trans. Automat. Control.* – 2010. – V.55. №12. P. 2799– 2805.
67. Bardi, M. LQG mean-field games with ergodic cost / M. Bardi, F. Priuli. // *52nd IEEE Conference on Decision and Control.* – 2013. – P. 2493 – 2498.

68. Li, T. Asymptotically optimal decentralized control for large population stochastic multiagent systems / T. Li, J. Zhang // *IEEE Trans. Automat. Control.* – 2008. – V.53 №7. P.1643–1660.
69. Bensoussan, The master equation in mean field theory / A. A. Bensoussan, J. Frehse, S. Yam. // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* – 2015. – V.103. №6. P. 1441-1474.
70. Cardaliaguet, P., Delarue, F., Lasry, J.-M., Lions, P.-L. The master equation and the convergence problem in mean field games, 2015, URL: <http://arxiv.org/abs/1509.02505>
71. Carmona, R. Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I. Mean Field FBSDEs, Control and Games. / R. Carmona, F. Delarue. – Berlin: Springer, 2018, 721 p.
72. Carmona, R. Mean field games with common noise / R. Carmona, F. Delarue, D. Lacker. // *In Ann. Probab.* – 2016. – V.44. №6. P. 3740–30803.
73. Carmona, R. Mean field games with common noise / R. Carmona, F. Delarue, D. Lacker. // *In Ann. Probab.* – 2016. – V.44. №6. P. 3740–30803.
74. Lachapelle, A. Computation of mean field equilibria in economics / A. Lachapelle, J. Salomon, G. Turinici. // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.* – 2010. № 20. P. 567-588.
75. Achdou, Y. Mean field games: numerical methods / Y. Achdou, I. Capuzzo-Dolcetta // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2010. – V. 48, №3. P. 1136–1162.
76. Achdou, Y. Finite difference methods for mean field games / Y. Achdou. // Chapter in *Hamilton-Jacobi Equations: Approximations, Numerical Analysis and Applications. Lecture Notes in Mathematics.* – Berlin: Springer, 2013. – 47 p.
77. Achdou, Y. Mean field games: numerical methods for the planning problem / Y. Achdou, F. Camilli, I. Capuzzo-Dolcetta. // *SIAM J. Control Optim.* – 2012. – V. 50. №1. P.77–109.
78. Achdou, Y. Iterative strategies for solving linearized discrete meanfield games systems/ Y. Achdou, V. Perez. // *Netw. Heterog. Media.* – 2012. – V.7. №2. P. 197–217.

79. Carlini, E. A, Silva, F.J. Fully-discrete Semi-Lagrangian scheme for a first order mean field game problem, 2013, URL: <http://arxiv.org/abs/1212.4757v2>
80. Gomes, D. Discrete time, finite state space mean field games / D. Gomes, J. Mohr, and R.R. Souza. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 2010. – V. 93. №2. P. 308–328.
81. Ferreira, R. On the convergence of finite state mean-field games through Γ -convergence / R. Ferreira, D. Gomes. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2014. –V. 418. №1. P. 211-230.
82. Gueant, O. An existence and uniqueness result for mean field games with congestion effect on graphs / O. Gueant. // Applied Mathematics and Optimization. – 2015. – № 72. P. 291–303.
83. Gueant, O. From infinity to one: The reduction of some mean field games to a global control problem, 2013, URL: <http://arxiv.org/abs/1110.3441v2>
84. Wang, J. Maximal use of central differencing for Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs in finance / J. Wang, P.A. Forsyth. // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2008. – №46. P. 1580–1601.
85. Wang, J. Numerical solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman formulation for continuous time mean variance asset allocation / J. Wang, P.A. Forsyth. // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2010. – №34. P. 207–230.
86. Shaidurov, V. Semi-Lagrangian difference approximations for distinct transfer operators / V. Shaidurov, A. Efremov, L. Gileva // AIP Conference Proceedings, 2025. – 2018. – V. 2025. P.№020004.
87. Shaidurov, V. Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements / Shaidurov V., Vyatkin A., Kuchunova E. // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2018. – V.33. №2. P. 123-135.
88. Shaydurov, V. Computation of Mean-Field Equilibria with Correlated Stochastic Processes / Shaydurov V., Zhang S., Kornienko V. // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – №11386. P. 468–475.

89. Ewing, R.E. A summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations / Ewing R.E., Wang H.J. // *Comput. Applied Mathematics*. – 2001.– №128. P. 423–445.
90. Morton K.W. On the analysis of finite volume methods for evolutionary problems / K.W. Morton // *SIAM J. Numer. Analysis*. – 1998.– №35. P.2195–2222.
91. Quarteroni, A. Numerical approximation of partial differential equations / A. Quarteroni, A.Valli. – Heidelberg: Springer, 1994. 543 p.
92. Douglas, J. Numerical methods for convectiondominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures / J. Douglas, T.F. Russell. // *SIAM Journal of Numerical Analysis*. – 1982. – №19. P. 871–885.
93. Staniforth, A. Semi-lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review / A. Staniforth, J. Coté. // *Monthly Weather Review*. –1991.– №119. P. 2206–2223.
94. Bercovier, M. Finite Elements and Characteristics for Some Parabolic-Hyperbolic Problems / M. Bercovier, O. Pironneau, V. Sastri // *Applied Mathematical Modelling*. – 1983. – №7. P. 89 – 96.
95. Hirt, C.W. An arbitrary Lagrangian – Eulerian computing method for all flow speeds / C.W. Hirt, A.A. Amsden, J.L. Cook. // *Journal of Computational Physics*. – 1979. – №14. P. 227-245.
96. Dukowicz, J.K. Accurate conservative remapping (rezoning) for arbitrary Lagrangian-Eulerian computations / J.K. Dukowicz, J.W. Kodis // *J. Meteorol. Soc. Jpn.* –1987. – V.8. №3. P.305–321.
97. Laprise, J.P., Plante R. A class of semi-Lagrangian integrated-mass (SLIM) numerical transport algorithms / J.P. Laprise, R. Plante. // *Monthly Weather Review*. – 1995. – №123. P.553-565.
98. Machenhauer, B. The implementation of the semi-implicit scheme in cell-integrated semi-Lagrangian models / B. Machenhauer, M. Olk. // *Atmosphere – Ocean*. – 1997.–V.35. №1. P.103-126.

99. Machenhauer, B. Design of semi-implicit cell-integrated semi-Lagrangian model / B. Machenhauer, M. Olk. // Max Planck Institute for Meteorology Tech. Rep. – 1998. – №265. P.76-85.
100. Dukowicz, J.K. Incremental Remapping as a Transport/Advection Algorithm. J.K. Dukowicz, J.R. Baumgardner // Journal of Computational Physics. – 2000. – №160. P. 318–335.
101. Courant, R. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences / R. Courant, E. Isaacson, M. Rees. // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1952. – №5. P. 243–255.
102. Fjørtoft, R. On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation/ R. Fjørtoft // Tellus. –1952.– №4. P.179–194.
103. Økland, H. On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation/ H. Økland. // Geofysike Publikasjoner, Geophysica Norvegica. –1961.– №22. P. 1–10.
104. Krishnamurthi, T.N. Numerical integration of primitive equation by a quasi-Lagrangian advective scheme / T.N. Krishnamurthi. // Journal of Applied Meteorology. – 1962. – №1. P.508–521.
105. Sawyer, J.S. A semi-lagrangian method of solving the vorticity advection equation / J.S. Sawyer // Tellus. – 1963. – №15. P. 336–342.
106. Ansorge, R. Die Adams-Verfahren als Charakteristikenverfahren höherer Ordnung zur Lösung von hyperbolischen Systemen halblinerer Differentialgleichungen [Метод Адамса как характеристический метод высшего порядка для решения гиперболических систем полулинейных дифференциальных уравнений] / R. Ansorge. // Numerische Mathematik [Вычислительная математика]. – 1963. – №5. P. 443–460.
107. Leith, C.E. Lagrangian advection in an atmospheric model/ C.E. Leith. // Technical Note. – 1965. – №66. P.№ 4643790.
108. Pironneau, O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations / O. Pironneau. // Numerische Mathematik [Вычислительная математика]. – 1982. – №38. P. 309–332.

109. Douglas, Jr. Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures / Jr. Douglas, T.F. Russell. // *SIAM Journal of Numerical Analysis*. – 1982. – №19. P. 871–885.
110. Moretti, G. A new and improved computational technique for 2D unsteady compressible flows / G. Moretti. // *AIAA Journal*. – 1984. – №22. P.758–765.
111. Morton, K.W. Characteristic Galerkin methods for hyperbolic problems / K.W. Morton. // *Proceedings of the 5th GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*. – 1983. – P. 243–250.
112. Morton, K.W. A comparison of flux-limited difference schemes and characteristic Galerkin methods for shock modelling / K.W. Morton, P. Sweby. // *Journal of Computational Physics*. – 1987. – №73. P. 203–230.
113. Robert, A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations / A. Robert. // *Atmosphere-Ocean*. – 1981. – №19. P. 35–46.
114. Robert, A. A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equations / A. Robert. // *Journal of the Meteorological Society of Japan*. – 1982. – №60. P. 319–325.
115. Bates, J.R. Multiply-upstream, semi-Lagrangian advective schemes: analysis and application to a multilevel primitive equation model / J.R. Bates, A. McDonald. // *Monthly Weather Review*. – 1982. – №110. P. 1832–1842.
116. Purnell, D.K. Solution of the advective equation by upstream interpolation with a cubic spline / D.K. Purnell. // *Monthly Weather Review*. – 1976. – №104. P. 42–48.
117. Pudykiewicz, J. Some properties and comparative performance of the semi-Lagrangian method of Robert in the solution of the advection diffusion equation / J. Pudykiewicz, A. Staniforth. // *Atmosphere-Ocean*. – 1984. – №22. P. 283–304.
118. McDonald, A. Improving the estimate of the departure point in a two time level semi-Lagrangian and semi-implicit model. A / McDonald, J.R. Bates // *Monthly Weather Review*. – 1987. – №115. P.737–739.

119. Temperton, C. An efficient two-time-level semi-lagrangian semi-implicit integration scheme / C. Temperton, A. Staniforth. // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 1987. – №113. P.1025–1039.
120. Falcone, M. Convergence analysis for a class of semilagrangian advection schemes / M. Falcone, R. Ferretti. // SIAM Journal of Numerical Analysis. – 1998. – №35. P. 909–940.
121. Williamson, D.L. Two dimensional semi-Lagrangian transport with shape preserving interpolation / D. L. Williamson, P. Rasch. // Monthly Weather Review. – 1989. – №117. P.102–129.
122. Shaidurov, V.V. Numerical simulation of supersonic flows in a channel / V.V. Shaidurov, G.I. Shchepanovskaya, V. Yakubovich. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2012. – V.27. №6. P. 585–601.
123. Lauritzen, P. H. A conservative semi -Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid / P.H. Lauritzen, R.D. Nair, P.A. Ullrich. // J. Comput. Phys. – 2010. – V. 229. №5. P. 1401–1424.
124. Dukowicz, J. K. Accurate conservative remapping (rezoning) for arbitrary Lagrangian-Eulerian computations / J.K. Dukowicz, J.W., J. Kodis. // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1987. – №8. P. 305–321.
125. Miura, H. An upwind-biased conservative advection scheme for spherical hexagonal-pentagonal grids. / H. Miura // Mon. Weather Rev. – 2007. – V.135. №12. P. 4038–4044.
126. Harris, L. M. A flux-form version of the conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid / L.M. Harris, P. H. Lauritzen, R. Mittal. // J. Comput. Phys.–2011.– V. 230. №4. P. 1215–1237.
127. Dukowicz, J.K. Incremental Remapping as a Transport Advection Algorithm. / J.K. Dukowicz, J.R. Baumgardner. // Journal of Computational Physics. – 2000. – №160. P. 318–335.
128. Lipscomb, W. H. An incremental remapping transport scheme on a spherical geodesic grid / W.H. Lipscomb, T. D. Ringler. // Mon. Weather Rev. – 2005. – V. 133. №8. P. 2335–2350.

129. Scroggs, J.S. A conservative semi-Lagrangian method for multidimensional fluid dynamics applications / J.S. Scroggs, F.H. Semazzi. // Numerical Methods for Partial Differential Equations. –1995. – V.11. № 5. P. 445–452.
130. Behrens, J. A parallel adaptive finite-element semi- lagrangian advection scheme for the shallow water equations. / J. Behrens. // Modeling and Computation in Environmental Sciences. – 1997. – №59. P. 49–60.
131. Klar, A. A semi-Lagrangian method for a Fokker-Planck equation describing fiber dynamics / A. Klar, P. Reuterswärd, M. Seaid. // Journal of Scientific Computing. – 2009. V.38. №3. P. 349–367.
132. Chen, H. Error estimates for triangular and tetrahedral finite elements in combination with a trajectory approximation of the first derivatives for advection-diffusion equations / H. Chen, Q. Lin, V.V. Shaidurov, J. Zhou. // Numerical Analysis and Applications. – 2011. – V.4, №4. P. 345–362.
133. Enright, D. A fast and accurate semi-Lagrangian particle level set method / D. Enright, F. Losasso, R. Fedkiw. // Computers and Structures. – 2005. – №83. P. 479–490.
134. Losasso, F. Simulating water and smoke with an octree data structure / F. Losasso, F. Gibou, R. Fedkiw. // ACM Trans. Graph. – 2004. – №23. P. 457–462.
135. Losasso, F. Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow. / F. Losasso, R. Fedkiw, S. Osher. // Computers and Fluids. – 2006. – №35. P. 995–1010.
136. Strain, J. Tree methods for moving interfaces / J. Strain. // J. Comput. Phys. – 1999. – №151. P. 616–648.
137. Irving, G. Efficient simulation of large bodies of water by coupling two and three dimensional techniques / G. Irving, E. Guendelman, F. Losasso, R. Fedkiw. // ACM Trans. Graph. – 2006. V.25. №3. P. 805–811.
138. Kim, B.-M. Using BFECC for fluid simulation / B.-M. Kim, Y. Liu, I. Llamas, J. Rossignac. // Conference: Proceedings of the Eurographics Workshop on Natural Phenomena. – 2005.– P. 51-56.

139. Kim, B.-M. Advections with significantly reduced dissipation and diffusion / B.-M. Kim, Y. Liu, I. Llamas, J. Rossignac. // *IEEE Trans. on Vis. and Comput. Graph.* – 2007. – V.13. №1. P.135–144.
140. Dupont, T. Back and forth error compensation and correction methods for semi-Lagrangian schemes with application to level set interface computations / T. Dupont, Y. Liu. // *J. Math. Comp.* – 2007. – V.76. №258. P. 647–668.
141. Dupont, T. Back and forth error compensation and correction methods for removing errors induced by uneven gradients of the level set function / T. Dupont, Y. Liu. // *J. Comput. Phys.* – 2003. – V.190. №1. P.311–324.
142. Selle, A. An unconditionally stable MacCormack method / A. Selle, R. Fedkiw, B. Kim, Y. Liu, J. Rossignac. // *J. of Sci. Comp.* – 2008. – V.35.№2. P. 350–371.
143. Shaydurov, V. Conservative difference schemes for the Computation of Mean-Field Equilibria / V. Shaydurov, S. Zhang, E. Karepova. // *AIP Conference Proceedings.* – 2017. – №1892. P. 20-35.
144. Efremov, A. Semi-Lagrangian method for advection problem with adaptive grid / A. Efremov, E. Karepova, V. Shaydurov, A. Vyatkin. *AIP Conference Proceedings.* – 2016. – №1773. P.№ 100003.
145. Bonaventura, L. An Introduction to Semi-Lagrangian Methods for Geo-physical Scale Flows / L. Bonaventura. // *Ercoftac leonhar euler lectures*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Swiss. – 2004. – P. 46.
146. Plemmons, R. J. M-matrix characterizations. I—nonsingular M-matrices / R. J. Plemmons. // *Linear Algebra and its Applications.* – 1977. – V.18. №2. P. 175-188.
147. McConnell, C. *Economic Principles, Problems, and Policies* / C. McConnell, S. Brue, S. Flynn. // New York: McGraw-Hill, 1969. 815 p.
148. Conte, S.D. *Elementary numerical analysis. An algorithmic approach* / S.D. Conte, C. Boor. – New York: McGraw-Hill, 1980. 432 p.
149. Акимова, Е.Н. Параллельные алгоритмы решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами на многопроцессорных вычислителях / Е.Н. Акимова, Д. В. Белоусов // *Вестник УГАТУ.* –2011. Т. 5. №45. С. 10.

150. Poretta, A. On the planning problem for a class of mean field games / A. Porretta. // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2013. – №351. P. 457–462.
151. Porretta, A. On the planning problem for the mean field games system / A. Porretta. // Dyn. Games Appl. – 2014. – V.4. №2. P.231-256.
152. Chang, S. Modeling and computation of mean field equilibria in producers game with emission permits trading / S. Chang, X. Wang. // Commun. Nonlinear Sci. Number Simulat. – 2016.– №37. P. 238-248.
153. Climate Change 101: Understanding and Responding to Global Climate Change. Cap and Trade: Key Terms Glossary, 2014. URL: <https://docplayer.net/20582252-Climate-change-101-cap-and-trade.html>
154. Chang, S. Modeling and computation in the valuation of carbon derivatives with stochastic convenience yields / S. Chang, X. Wang. // PLoS ONE. – 2015. №10. P.№ e0125679.
155. Baranzini, A. A future for carbon taxes / A. Baranzini, J. Goldemberg, S. Speck. // J. Ecological Economics. –2000.– №32. P. 395-412.
156. E.G. Metcalf, Designing a Carbon Tax to Reduce U.S. Greenhouse Gas Emissions / E.G. Metcalf. // Economics. – 2009. – №3. P. 63-83.
157. Marchuk, G.I. Difference Methods and Their Extrapolations / G.I. Marchuk, V.V. Shaidurov. – New York: Springer, 1983, 334 p.
158. Gomes, D. Regularity theory for mean-field game systems / D. Gomes, E. Pimentel, V. Voskanyan – Berlin: Springer, 2016, 118 p.
159. Guéant, O. Mean field games equations with quadratic Hamiltonian: a specific approach / O. Guéant. // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2012. – V.22. №9. № 1250022.
160. Guéant, O. Mean field games with a quadratic Hamiltonian: a constructive scheme / O. Guéant. // Advances in Dynamic Games. Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. – 2012. – №.12. P: 229 – 241.
161. Guéant, O. New numerical methods for mean field games with quadratic costs / O. Guéant. // Netw. Heterog. Media. – 2012. – V. 7. №.2. P: 315 – 336.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
«Сибирский федеральный университет»

На правах рукописи



Корниенко Виктория Сергеевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ «СРЕДНЕГО ПОЛЯ»

Научно-квалификационная работа

Направление 09.06.01 – информатика и вычислительная техника;
Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ.

Квалификация «Исследователь. Преподаватель - исследователь»

Научный руководитель:

член-корреспондент РАН,

доктор физико-математических наук, профессор

Шайдуров В.В. /



/

Красноярск – 2020