

УДК 512.554.3

**КОММУТАТИВНЫЕ ИДЕАЛЫ НАИБОЛЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ
НИЛЬТРЕУГОЛЬНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЕМ¹****Е. А. Кириллова, Г. С. Сулейманова**

Пусть N — нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле. В статье изучается проблема описания коммутативных подалгебр наибольшей размерности подалгебры N над произвольным полем. Доказывается, что N содержит коммутативный идеал этой размерности. Найдены все такие идеалы. Также описаны максимальные коммутативные идеалы подалгебры N для типов G_2 и F_4 . Как следствие, найдена наибольшая размерность коммутативных подалгебр во всех подалгебрах N .

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, коммутативные идеалы и идеалы наибольшей размерности.

E. A. Kirillova, G. S. Suleimanova. Highest dimension commutative ideals of a niltriangular subalgebra of a Chevalley algebra over a field.

Let N be a niltriangular subalgebra of a Chevalley algebra. We study the problem of describing commutative ideals of N of the highest dimension over an arbitrary field. It is proved that N contains a commutative ideal of this dimension, and all such ideals are found. In addition, all maximal commutative ideals of N are described for the types G_2 and F_4 . As a consequence, the highest dimension of commutative subalgebras in all subalgebras of N is found.

Keywords: Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, commutative ideals and highest dimension ideals.

MSC: 17B05, 17B30**DOI:** 10.21538/0134-4889-2018-24-3-98-108**Введение**

И. Шур [1] указал наибольшую размерность абелевых подгрупп группы $SL(n, \mathbb{C})$ и доказал, что абелевы подгруппы этой размерности при $n > 3$ автоморфны. В 1945 г. А. И. Мальцев [2] исследовал задачу описания абелевых подгрупп максимальной размерности во всех конечномерных комплексных простых группах Ли, применяя переход к комплексным алгебрам Ли.

Методы [2] модифицировались и применялись к проблеме описания больших абелевых подгрупп конечной группы Шевалле и редуционной задаче для унипотентного радикала U ее подгруппы Бореля, [3–10]. *Большой \mathcal{P} -подгруппой* конечной группы (\mathcal{P} — любое теоретико-групповое свойство) называют все ее \mathcal{P} -подгруппы наибольшего порядка.

Пусть $L_\Phi(K)$ — алгебра Шевалле над произвольным полем K , ассоциированная с системой корней Φ [11, § 4.4]. Базу Шевалле в ней составляют элементы e_r ($r \in \Phi$) и подходящая база подалгебры Картана. Элементы e_r ($r \in \Phi^+$) образуют базу нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры $L_\Phi(K)$. Свою задачу А. И. Мальцев решил редукицией к аналогичной задаче для алгебр Ли $N\Phi(\mathbb{C})$.

В [12] наряду с обобщенной задачей Мальцева записана следующая задача.

Обобщенная редукионная задача. *Описать коммутативные подалгебры наибольшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K .*

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00707).

Разработка в [13] решения этой задачи развивает схему [9], использующую методы А. И. Мальцева и Е. П. Вдовина. В настоящей статье (теорема 7) подтверждается высказанная в [13] гипотеза.

Гипотеза (А). *Всякий коммутативный идеал наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является ее коммутативной подалгеброй наибольшей размерности.*

Вместе с тем для алгебры Ли $N\Phi(K)$ указаны явно наибольшие размерности коммутативных подалгебр и завершено описание коммутативных идеалов наибольшей размерности (табл. 1 и 2).

1. Предварительные замечания и тип G_2

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K , ассоциированную с системой корней Φ евклидова пространства, характеризуют [11, §4.4] базой Шевалле, состоящей из элементов e_r ($r \in \Phi$) вместе с подходящей базой подалгебры Картана. Элементы e_r ($r \in \Phi^+$) образуют базу максимальной нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$. По теореме Шевалле о базисе если $r, s \in \Phi^+$, то

$$e_r * e_s = N_{rs}e_{r+s}, \quad N_{sr} = -N_{rs} \quad (r + s \in \Phi), \quad e_r * e_s = 0 \quad (r + s \notin \Phi),$$

где $N_{rs} = \pm 1$, или $|r| = |s| < |r + s|$ и $N_{rs} = \pm 2$, или Φ типа G_2 и $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3 .

Сумму $\text{ht}(r)$ коэффициентов в разложении корня r по базису называют *высотой корня*. В алгебре $N\Phi(K)$ выделяют идеалы $L_i = \langle Ke_r \mid r \in \Phi^+, \text{ht}(r) \geq i \rangle$. Через $\{r\}^+$ обозначаем множество корней $s \in \Phi^+$ таких, что в разложении $s - r$ по базису все коэффициенты неотрицательны, через $T(r)$ и $Q(r)$ — подалгебры в $N\Phi(K)$ с базисами $\{e_s \mid s \in \{r\}^+\}$ и $\{e_s \mid s \in \{r\}^+ \setminus \{r\}\}$ соответственно. Если $H \subseteq T(r_1) + T(r_2) + \dots + T(r_m)$ и включение нарушается при любой замене $T(r_i)$ на $Q(r_i)$, то назовем $\{r_1, r_2, \dots, r_m\} = \mathcal{L}(H)$ *множеством углов для H* .

Описание коммутативных идеалов наибольшей размерности в алгебре Ли $N\Phi(K)$ над произвольным полем K естественно получать, по аналогии с [9], из решения более общей задачи:

(Б) *Описать максимальные коммутативные идеалы алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем K .*

Решение задачи **(Б)** для типа G_2 , а при $2K = K$ также для типа F_4 анонсировалось ранее в [14]. Мы используем представление из [15, табл. IX] системы корней типа G_2 с базой $\{a, b\}$, где $|a| < |b|$.

Теорема 1. *Все максимальные коммутативные идеалы алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 исчезают при $6K = K$ идеал L_3 , при $3K = 0$ идеалы L_2 и*

$$K(e_b + de_{b+3a}) + Ke_{b+a} + Ke_{b+2a} + L_5 \quad (d \in K), \quad (1.1)$$

наконец, при $2K = 0$ идеалы L_3 , $Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$, $K(e_{b+a} + de_{b+2a}) + L_4$ ($d \in K$, $d \neq 0$) и

$$K(e_b + ce_{2a+b} + de_{b+3a}) + K(e_{a+b} + ce_{b+3a}) + L_5 \quad (c, d \in K). \quad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем произвольный максимальный коммутативный идеал M в $N\Phi(K)$. Он обязан совпадать со своим централизатором $C(M) = \{\beta \in N\Phi(K) \mid \beta * M = 0\}$.

Предположим, $M \not\subseteq L_3$. Тогда в M существует элемент α с углом $a + b$:

$$\alpha = \sum_{r \in \Phi^+} c_r e_r \in M, \quad c_a = c_b = 0, \quad c_{a+b} \neq 0.$$

Если M имеет простой угол, то такой элемент можно выбрать в $M * e_b$ или в $M * e_a$. Учитывая коммутативность идеала M , приходим к равенствам

$$0 = (e_a * \alpha) * \alpha = \pm 2c_{b+a}(e_{b+2a} * \alpha) = \pm 6c_{b+a}^2 e_{b+3a} \pmod{L_5}.$$

При $6K = K$ это дает противоречие с условием $c_{a+b} \neq 0$. Поэтому здесь $M = L_3$.

Пусть $3K = 0$. Тогда L_2 — коммутативный идеал. Кроме того, $Ke_{b+2a} + L_5$ есть центр в $NG_2(K)$, и поэтому он лежит в M . Если M имеет простой угол a , то произведение $M * \alpha$ имеет угол $2a + b$, т. е. является ненулевым; это противоречит коммутативности M . Следовательно, $M \subseteq T(b)$ и централизатор $C(M) = M$ содержит централизатор $C(T(b)) = Ke_{a+b} + Ke_{2a+b} + L_5$ идеала $T(b)$ в $NG_2(K)$. При $M \not\subseteq L_2$ любой элемент из M по модулю централизатора $C(T(b))$ записывается в виде $xe_b + x'e_{3a+b} = \beta(x)$ для некоторых $x, x' \in K$, причем $\beta(1) \in M$. Соотношения

$$0 = \beta(1) * \beta(x) = \pm(x' - xd)e_{3a+2b}, \quad d = 1',$$

дают равенство $x' = xd$, так что M совпадает с идеалом (1.1).

Допустим, что $2K = 0$. Пусть вначале в M существует элемент γ с простым углом a . Тогда произведение $M * e_{2a+b}$ имеет угол $3a + b$, и поэтому в M нет элемента с углом b . Отсюда

$$T(a) \supseteq M = C(M) \supseteq C(T(a)) = L_4, \quad M \supset K(\gamma * e_b) + L_4 \supset Ke_{a+b}.$$

Следовательно, элемент $\gamma \in M$ можно выбрать в виде $\gamma = e_a + ce_{2a+b}$, где $c \in K$. Соотношения $0 = e_{a+b} * \gamma = ce_{3a+b}$ сразу же дают равенства $c = 0$ и $M = Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$.

Если идеал M имеет элемент γ с простым углом b , то аналогично находим включения

$$T(b) \supseteq M = C(M) \supseteq C(T(b)) = L_5, \quad M \supseteq L_5 + K\alpha + K\gamma.$$

Элементы α, γ здесь можно выбрать для некоторых $c, d \in K$ в виде

$$\gamma = e_b + ce_{2a+b} + de_{3a+b}, \quad \alpha = \gamma * e_a = e_{a+b} + ce_{3a+b}.$$

Легко видеть, что подалгебра с базой $\gamma, \gamma * e_a, e_{3a+2b}$ алгебры Ли $NG_2(K)$ является коммутативным идеалом при любом выборе $c, d \in K$. Таким образом, M есть идеал вида (1.2).

В случае идеала M с углом $a + b$ имеем

$$T(a + b) \supseteq M = C(M) \supseteq C(T(a + b)) = L_4.$$

Поэтому M содержит элемент $\alpha = e_{a+b} + de_{2a+b}$ для некоторого $d \in K$. Если M содержит также элемент $\beta = xe_{a+b} + x'e_{2a+b}$ ($x, x' \in K$), то из соотношения

$$0 = \alpha * \beta = (x' + xd)e_{3a+2b}$$

получаем равенство $x' = xd$ и, следовательно, $M = K(e_{b+a} + de_{b+2a}) + L_4$. Остается заметить, что этот идеал при $d = 0$ лежит в коммутативном идеале с простым углом a .

Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Наибольшая размерность коммутативных идеалов алгебры Ли $NG_2(K)$ равна 4, когда K — поле характеристики 2 или 3, и равна 3 при $6K = K$. Такие идеалы исчерпывают идеалы L_2 и (1.1) при $3K = 0$, идеал $Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$ при $2K = 0$ и идеал L_3 при $6K = K$.*

Аналогичный подход мы применим в следующем разделе к алгебрам Ли $N\Phi(K)$ типа F_4 . В общем случае для исследования гипотезы (А) эффективным оказывается использование метода, который А. И. Мальцев применял в исследованиях алгебры Ли $L_\Phi(C)$ и $N\Phi(C)$. Он называет подмножество корней $\Psi \subseteq \Phi$ коммутативным, если $r + s \notin \Phi \cup \{0\}$ для любых корней $r, s \in \Psi$ [2]. Е. П. Вдовин [8] обобщает это понятие. Подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ он называет p -коммутативным для простого числа p , если в алгебре Ли $N\Phi(K)$ над любым полем K характеристики p имеем $e_r * e_s = 0$ при всех $r, s \in \Psi$.

В [9] подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ названо нормальным, если для любого корня $s \in \Psi$ выполняется включение $\{s\}^+ \subseteq \Psi$. Если $p(\Phi) := \max\{(r, r)/(s, s) \mid r, s \in \Phi^+\}$ и $p(\Phi)!K = K$ (в частности,

когда элементы 2 и 3 обратимы в поле K), понятия p -коммутативности и коммутативности совпадают.

Как и в [11, Lemma 5.3.1], далее используем *регулярное упорядочение корней* $>$; в этом случае из неравенства $\text{ht}(r) > \text{ht}(s)$ следует $r > s$. *Первым углом* произвольного ненулевого элемента $a \in N\Phi(K)$ назовем корень s , если в разложении $a = \sum_{r \in \Phi^+} \lambda_r e_r$ по базе, упорядоченной согласно возрастанию корней, первым ненулевым коэффициентом является λ_s . Множество первых углов всех элементов подмножества $M \subseteq N\Phi(K)$ обозначим через $\mathcal{L}_1(M)$.

Опираясь на методы работ [2; 8], приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Наибольшая размерность коммутативных подалгебр алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем K характеристики p равна наибольшему порядку p -коммутативных множеств корней в Φ .*

Доказательство. Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Если M — коммутативная подалгебра алгебры $N\Phi(K)$ над полем K характеристики p , то множество корней $\mathcal{L}_1(M)$ является p -коммутативным.*

Доказательство. Если множество $\mathcal{L}_1(M)$ коммутативно, то оно p -коммутативно для любого простого числа p . Поэтому рассмотрим случай, когда существуют корни $s_1, t_1 \in \mathcal{L}_1(M)$ такие, что сумма $s_1 + t_1$ является корнем. Выберем в M элементы α и β с первыми углами s_1 и t_1 соответственно:

$$\alpha = a_1 e_{s_1} + a_2 e_{s_2} + \dots + a_n e_{s_n}, \quad a_1 \neq 0, \quad \beta = b_1 e_{t_1} + b_2 e_{t_2} + \dots + b_m e_{t_m}, \quad b_1 \neq 0.$$

Так как $s_1 + t_1$ — наименьший из всевозможных корней $s_i + t_j$, то произведение

$$\alpha * \beta = \sum_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m} a_i b_j (e_{s_i} * e_{t_j})$$

имеет при базисном элементе $e_{s_1+t_1}$ коэффициент $a_1 b_1 N_{s_1, t_1}$. В силу коммутативности подалгебры M произведение $\alpha * \beta$ равно 0. Отсюда $e_{s_1} * e_{t_1} = N_{s_1, t_1} e_{s_1+t_1} = 0$ и $p = |N_{s_1, t_1}|$ — простое число, равное $p = \text{char } K$. Таким образом, множество корней $\mathcal{L}_1(M)$ является p -коммутативным.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Размерность подалгебры M алгебры $N\Phi(K)$ равна порядку множества $\mathcal{L}_1(M)$.*

Доказательство. Положим $n = |\mathcal{L}_1(M)|$; корни $\{r_1, \dots, r_n\}$, составляющие $\mathcal{L}_1(M)$, располагаем в порядке возрастания. Выберем в M элементы $\{a_1, \dots, a_n\}$ так, что при любом i корень r_i есть первый угол элемента a_i . Нам достаточно показать, что элементы a_i образуют базу в M .

Пусть M_i ($1 \leq i < n$) есть подалгебра в M , которую линейно порождают $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$, и $M_n = 0$. Зафиксируем произвольный элемент $b \in M$. Согласно определению множества $\mathcal{L}_1(M)$ существует и единствен скаляр λ_1 такой, что первый угол элемента $b - \lambda_1 a_1$ больше корня r_1 . Более того, пользуясь индукцией, однозначно определяем скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что

$$b - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \cdots - \lambda_i a_i \in M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ и $\{a_1, \dots, a_n\}$ — база в M .

Лемма доказана.

Теорема 2 непосредственно вытекает из лемм 1 и 2.

Поясним введенные понятия на примере идеалов M из теоремы 1. Множество корней $\mathcal{L}_1(M)$ здесь нормально только при $M = L_3$ и $M = L_2$, причем в первом случае оно коммутативно, а во втором — 3-коммутативно, как и для идеала (1.1). Для остальных идеалов M из теоремы 1 множество $\mathcal{L}_1(M)$ является p -коммутативным только при $p = 2$.

2. Максимальные коммутативные идеалы алгебры $NF_4(K)$

В этом разделе задача (Б) решена для типа F_4 . Как и в [15], через $abcd$ обозначаем корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — простые корни системы корней типа F_4 .

Перенесением теоремы 5.1 из [9] решение при $2K = K$ устанавливает (см. [14]) следующую теорему.

Теорема 3. *Максимальные коммутативные идеалы алгебры $NF_4(K)$ над полем $K = 2K$ исчерпывают идеал $T(1221) + T(0122)$ размерности 9 и идеалы $T(1221) + K(e_{1220} + de_{1122})$, $d \in K$, размерности 8.*

Следствие 2. *Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $NF_4(K)$ над полем K при $\text{char } K \neq 2$ исчерпываются идеалом $T(1221) + T(0122)$ размерности 9.*

Заметим, что при $p(\Phi)!K = K$ описания больших абелевых подгрупп группы U и коммутативных идеалов наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ в большинстве случаев совпадают. В общем случае это не так. Например, для случая $\Phi = F_4$, $\text{char } K = 2$, все большие абелевы подгруппы группы U лежат в U_3 , а для соответствующей алгебры $N\Phi(K)$ существуют коммутативные идеалы наибольшей размерности с углом высоты 2.

Исследуем случай $2K = 0$. Выделим подалгебры

$$K(e_{1100} + ce_{1122} + de_{1242}) + K(e_{1220} + ce_{1242}) + Ke_{1110} + Ke_{1111} \\ + Ke_{1121} + Ke_{1221} + Ke_{1222} + Ke_{1231} + Ke_{1232} + Ke_{1342} + Ke_{2342}, \quad c, d \in K; \quad (2.1)$$

$$K(e_{1110} + ce_{0120} + de_{0121}) + K(e_{1111} + ce_{0121}) \\ + Ke_{1120} + Ke_{1220} + Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231), \quad c \neq 0; \quad (2.2)$$

$$K(e_{1110} + ce_{0122}) + T(1111), \quad c \neq 0; \quad (2.3)$$

$$Ke_{1110} + K(e_{1120} + c_1e_{1122} + c_2e_{1220} + c_3e_{1222}) \\ + K(e_{1220} + c_1e_{1222}) + Ke_{1111} + Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231), \quad c_1, c_2, c_3 \in K; \quad (2.4)$$

$$Ke_{1110} + K(e_{1220} + ce_{1122}) + Ke_{1111} + Ke_{1121} + T(1221), \quad c \in K; \quad (2.5)$$

$$Ke_{0120} + Ke_{1120} + Ke_{0121} + Ke_{1220} + Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231); \quad (2.6)$$

$$K(e_{1120} + ce_{1222}) + K(c_1e_{1111} + c_2e_{0121}) + Ke_{1220} + Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231), \\ (c_1, c_2) \neq (0, 0), \quad c \in K; \quad (2.7)$$

$$K(c_1e_{1111} + c_2e_{0121}) + K(d_1e_{0122} + d_2e_{1220}) + T(1121), \quad (c_1, c_2) \neq (0, 0), \quad (d_1, d_2) \neq (0, 0); \quad (2.8)$$

$$K(c_1e_{1111} + c_2e_{0121}) + K(d_1e_{1122} + d_2e_{1220}) + Ke_{1121} + T(1221), \\ (c_1, c_2) \neq (0, 0), \quad (d_1, d_2) \neq (0, 0); \quad (2.9)$$

$$T(0121). \quad (2.10)$$

Теорема 4. *Максимальные коммутативные идеалы алгебры $NF_4(K)$ над полем K характеристики 2 исчерпываются идеалами (2.1)–(2.10).*

Доказательство. Пусть M — максимальный коммутативный идеал. Согласно [14] $M \subseteq T(1100) + T(0120)$. Под r -проекцией множества M будем понимать множество r -проекций всех элементов из M .

Рассмотрим случай, когда $M \not\subseteq L_3$, т.е. M имеет угол 1100. Покажем, что в этом случае $M \subseteq T(1100)$. Если M имеет угол 0120, то множество $M * e_{0001} \subseteq M$ имеет угол 0121 и содержится в $T(1111) + T(0121)$. Множество

$$(M * e_{0010}) * e_{0001} \subseteq M$$

имеет единственный угол 1111, следовательно, множество

$$(M * e_{0001}) * ((M * e_{0010}) * e_{0001})$$

имеет ненулевую 1231-проекцию, что противоречит коммутативности M . Таким образом, $M \subseteq T(1100) + T(0121)$.

Аналогично, если M имеет угол 0121, то множество

$$M * ((M * e_{0010}) * e_{0001})$$

имеет ненулевую 1232-проекцию, что противоречит коммутативности M . Таким образом, $M \subseteq T(1100) + T(0122)$. Наконец, если M имеет угол 0122, то множество $(M * e_{0010}) * M$ имеет ненулевую 1232-проекцию. Таким образом, $M \subseteq T(1100)$.

Кроме того, 1120-проекция множества M нулевая, так как в противном случае множество $M * (M * e_{0122})$ будет иметь ненулевую 1342-проекцию, что противоречит коммутативности M .

Заметим, что идеал

$$I = Ke_{1110} + Ke_{1111} + Ke_{1121} + Ke_{1221} + Ke_{1222} + Ke_{1231} + Ke_{1232} + Ke_{1342} + Ke_{2342}$$

централизует M , следовательно, содержится в M в силу его максимальности. Запишем произвольный элемент $a \in M$ в виде

$$a = a_{1100}e_{1100} + a_{1220}e_{1220} + a_{1122}e_{1122} + a_{1242}e_{1242} \pmod I.$$

Так как $a * xe_{0120} = xa_{1100}e_{1220} + xa_{1122}e_{1242} \pmod I$, $x \in K$, то из соотношения $M * (M * e_{0120}) = 0$ получаем, что $a_{1122} = ca_{1100}$ для некоторого $c \in K$, т.е.

$$M \supseteq K(e_{1220} + ce_{1242}). \quad (2.11)$$

Рассмотрим произвольный элемент $b \in M$ с углом 1220. Запишем его в виде

$$b = b_{1220}e_{1220} + b_{1122}e_{1122} + b_{1242}e_{1242} \pmod I.$$

Так как $a * b = (a_{1100}b_{1242} + ca_{1100}b_{1220})e_{2342} = 0$, то $b_{1242} = cb_{1220}$. Тогда $b_{1122} = 0$, поскольку в противном случае, учитывая соотношение (2.11), получаем $M \supseteq Ke_{1122}$, но $Ke_{1122} * K(e_{1220} + ce_{1242}) \neq 0$. Таким образом, M совпадает с идеалом (2.1).

Рассмотрим случай, когда $M \subseteq L_3$ и M имеет угол высоты 3. Пусть M имеет угол 1110. Тогда идеал

$$Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231)$$

централизует M , следовательно, содержится в M в силу его максимальности.

Рассмотрим элемент $a \in M$ вида

$$a = a_{1110}e_{1110} + a_{0120}e_{0120} \pmod L_4, \quad a_{1110} \neq 0.$$

Тогда

$$a * e_{0001} = a_{1110}e_{1111} + a_{0120}e_{0121} \pmod Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231).$$

Если M содержит элемент $b = b_{0120}e_{0120} \pmod{L_4}$, $b_{0120} \neq 0$, то произведение $(a * e_{0001}) * b$ имеет ненулевую 1231-проекцию. Следовательно, $a_{0120} = ca_{1110}$ для некоторого $c \in K$. Кроме того, в силу коммутативности M имеем $a_{0121} = da_{1110}$ для некоторого $d \in K$.

Предположим, что M имеет еще угол 0120. Тогда при ненулевой 0122-проекции множества M множество $M * (M * e_{1000})$ имеет ненулевую 1242-проекцию, что противоречит коммутативности M . Таким образом, 0122-проекция множества M нулевая. Следовательно,

$$M * Ke_{1000} = Ke_{1120} \pmod{Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231)},$$

откуда в силу коммутативности 1222-проекция (а следовательно, и 1122-проекция) в M нулевые. Таким образом, M совпадает с идеалом (2.2).

Если 0120-проекция в M нулевая, то

$$M \supseteq M * Ke_{0001} \supseteq Ke_{1111} \pmod{Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231)},$$

откуда в силу коммутативности 0121-проекция в M нулевая. При ненулевой 0122-проекции M совпадает с идеалом (2.3), а при нулевой — с одним из идеалов (2.4) или (2.5).

Если M содержится в $T(0120) + L_4$ и имеет угол 0120, легко показать, что M совпадает с идеалом (2.6).

Пусть $M \subseteq L_4$. Если M имеет угол 1120, то множество $M * e_{0100} \subseteq M$ содержит элемент с единственным углом 1220, следовательно, 1122-проекция в M нулевая и M совпадает с идеалом (2.7).

Наконец, если $M \subseteq T(1111) + T(0121) + T(1220)$, то M совпадает с одним из идеалов (2.8), (2.9) или (2.10).

Теорема доказана.

Следствие 3. Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $NF_4(K)$ над полем K характеристики 2 исчерпываются идеалами (2.1)–(2.6), (2.8) и (2.10) размерности 11.

3. Наибольшая размерность коммутативных подалгебр алгебры $N\Phi(K)$

Далее для исследования гипотезы (А) ограничимся описанием коммутативных идеалов наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$.

С этой целью в [13] используется специальное матричное представление из [16] алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов. Для типа A_{n-1} ее ассоциируют с алгеброй $NT_n(K)$ нильтреугольных $n \times n$ -матриц над K . Обычные матричные единицы e_{ij} здесь составляют базу Шевалле $\{e_r \mid r \in \Phi^+, e_r = e_{ij}\}$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ после соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$ ($1 \leq j < i \leq n$).

Алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n , C_n и D_n заданы в [16] базисом из “матричных единиц” e_{iv} с ограничениями $i \leq n$ и, соответственно,

$$-i < v < i, \quad -i \leq v < i \ (v \neq 0), \quad 1 \leq |v| < i.$$

При $e_r = e_{iv}$ полагаем $r = p_{iv}$ и $T(r) = T_{iv}$. Помимо сумм $p_{ij} + p_{jv} = p_{iv}$ (аналогично типу A_{n-1}) к суммам двух корней, являющимся корнем, здесь относят еще $p_{kv} + p_{m,-v} = p_{k,-m}$ при $k > m > |v|$, а для типа C_n — также при $k = m > |v|$. Структурные константы выписаны по теореме Шевалле о базисе [16, лемма 2].

В [13] приведена таблица (см. табл. 1) и установлена следующая теорема.

Теорема 5. Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ классического типа над полем K исчерпываются идеалами из табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ классических типов

Тип $N\Phi(K)$	Коммутативные идеалы наибольшей размерности	Наибольшая размерность
A_{2n-1}	$T_{n+1,n}$	n^2
$A_{2n}, n > 1$	$T_{n+1,n}, T_{n+2,n+1}$	$n(n+1)$
A_2	$L_2 + K\alpha, \alpha \notin L_2$	2
$B_n, 2K = K; n = 3$	T_{nn-1}	5
$n > 4$	$T_{2,-1} + T_{n0}$	$\binom{n}{2} + 1$
$n = 4$	$T_{2,-1} + T_{n0}, T_{nn-1}$	
$B_n, 2K = 0; n > 2$	T_{10}	$\binom{n+1}{2}$
$B_2 = C_2, 2K = 0$	$L_2 + K\alpha, \alpha \notin L_2$	3
$C_n; n > 2$ или $2K = K, n = 2$	$T_{1,-1}$	$\binom{n+1}{2}$
$D_n, n > 4$	$T_{3,-2} + \sum_{m=2}^n K(ae_{m1} + be_{m,-1}),$ $(a, b) \neq (0, 0)$ при $2K = 0$ и $(a, b) = (1, 0)$ или $(0, 1)$ при $2K = K$	$\binom{n}{2}$
$D_4, 2K = K$	$T(p_{2,-1}), T(p_{21}), T(p_{43})$	$\binom{4}{2}$
$D_4, 2K = 0$	$T_{3,-2} + \sum_{m=2}^4 K(e_{m1} + ae_{m,-1}), T_{2,-1}$ и их автоморфные образы	$\binom{4}{2}$

Т а б л и ц а 2

Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ исключительных типов

Тип $N\Phi(K)$	Коммутативные идеалы наибольшей размерности	Наибольшая размерность
E_6	$T(\alpha_1), T(\alpha_6)$	16
E_7	$T(\alpha_7)$	27
E_8	$T(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$	36
$F_4, 2K = K$	$T(1221) + T(0122)$	9
$F_4, 2K = 0$	идеалы (2.1)–(2.6), (2.8) и (2.10)	11
$G_2, 6K = K$	L_3	3
$G_2, 2K = 0$	$Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$	4
$G_2, 3K = 0$	$L_2, K(e_b + de_{b+3a}) + Ke_{b+a} + Ke_{b+2a} + L_5 \quad (d \in K)$	4

В следующей теореме приводится описание коммутативных идеалов наибольшей размерности для оставшегося случая $\Phi = E_n, n = 6, 7, 8$.

Теорема 6. Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $NE_6(K)$ исчерпываются идеалами $T(\alpha_1), T(\alpha_6)$ размерности 16, алгебры $NE_7(K)$ – идеалом $T(\alpha_7)$ размерности 27, алгебры $NE_8(K)$ – идеалом $T(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$ размерности 36.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Базисные корни систем корней типа E_n обозначим через α_i , $i = 1, \dots, n$, [15]. Согласно [2] каждая система корней типа E_n имеет нормальное максимальное коммутативное подмножество корней. Для типа E_6 такими подмножествами являются $\{\alpha_1\}^+$ и $\{\alpha_6\}^+$ порядка 16, для типа E_7 это $\{\alpha_7\}^+$ порядка 27, а для типа E_8 это $\{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6\}^+$ порядка 36. Им можно сопоставить коммутативные идеалы соответствующих размерностей: $T(\alpha_1)$, $T(\alpha_6)$, $T(\alpha_7)$ и $T(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$.

Покажем, что приведенными выше идеалами исчерпываются все коммутативные идеалы наибольшей размерности. Пусть M — произвольный коммутативный идеал наибольшей размерности подалгебры $N\Phi(K)$ типа $\Phi = E_n$, ρ — максимальный корень системы E_n^+ . В случае $n = 6$ и $\mathcal{L}_1(M) = \{\alpha_1\}^+$ в силу соотношения

$$M \supseteq ((M * e_{\alpha_3}) * e_{\alpha_4}) * Ke_{\alpha_2} = Ke_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \pmod{Ke_\rho}$$

и коммутативности M получаем, что $(\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$ -проекция в M нулевая, и поэтому $M \subseteq T(\alpha_1)$. Случай $\mathcal{L}_1(M) = \{\alpha_6\}^+$ рассматривается аналогично. Для типа E_7 из соотношения

$$M \supseteq (((M * e_{\alpha_6}) * e_{\alpha_5}) * e_{\alpha_4}) * e_{\alpha_3}) * Ke_{\alpha_1} = Ke_{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7} \pmod{Ke_\rho}$$

получаем, что $(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$ -проекция в M является нулевой, и поэтому $M \subseteq T(\alpha_7)$. Для типа E_8 из включения

$$M \supseteq (M * e_{\alpha_7}) * Ke_{\alpha_8} = Ke_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8} \pmod{Ke_\rho}$$

вытекает, что $(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8)$ -проекция в M нулевая и $M \subseteq T(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$. Теорема доказана.

Резюмируем полученные результаты в табл. 2.

Гипотезу (А) подтверждает следующая теорема.

Теорема 7. *Всякий коммутативный идеал наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является ее коммутативной подалгеброй наибольшей размерности. Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ над полем K исчерпываются идеалами из табл. 1 и табл. 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 для проверки истинности гипотезы (А) для алгебры $N\Phi(K)$ над полем K характеристики p достаточно сравнить наибольшую размерность коммутативных идеалов этой алгебры и наибольший порядок p -коммутативных множеств корней в Φ .

Максимальный порядок коммутативных множеств корней системы типа G_2 равен 3 [2], а 2- и 3-коммутативных множеств корней — 4 [8], что подтверждает гипотезу при $\Phi = G_2$. Максимальный порядок коммутативных множеств корней системы типа F_4 равен 9 [2], а 2-коммутативных множеств корней — 11 [8]. Таким образом, для $\Phi = F_4$ справедливость гипотезы также доказана. Теорема 6 подтверждает гипотезу для типов E_n , с учетом описания максимальных коммутативных множеств корней для соответствующих типов из [2]. Остается заметить, что для классических типов подтверждение гипотезы вытекает из [9; 13].

Теорема доказана.

Для конечных групп Гилея типа почти всегда большие абелевы подгруппы группы U являются G -сопряженными с нормальными подгруппами группы U [9, Theorem 6.5]. Аналогично, для решения обобщенной редукционной задачи достаточно получить список коммутативных подалгебр наибольшей размерности с точностью до автоморфизмов алгебры Шевалле (см. также [17]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schur I.** Zur theorie der vertauschbaren matrizen // J. reine und angew. Math. 1905. Vol. 130. P. 66–76.
2. **Мальцев А.И.** Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1945. Т. 9, № 4. С. 291–300.
3. **Barry M. J.J.** Large Abelian subgroups of Chevalley groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. Vol. 27, no. 1. P. 59–87. doi: 10.1017/S1446788700016645.
4. **Wong W.J.** Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups // J. Austral. Math. Soc., Ser. A. 1982. Vol. 32, no. 2. P. 223–245. doi: 10.1017/S1446788700024575.
5. **Wong W.J.** Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups // J. Austral. Math. Soc., Ser. A. 1982. Vol. 33, no. 2. P. 331–344. doi: 10.1017/S1446788700018759.
6. **Кондратьев А.С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1 (247). С. 57–96.
7. **Вдовин Е.П.** Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 1. С. 53–76.
8. **Вдовин Е.П.** Большие абелевы унитарные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 523–544.
9. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349, iss. 1. P. 98–116. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.025.
10. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups // J. Siberian Federal University. Math. & Physics. 2013. Vol. 6, no. 1. P. 64–74.
11. **Carter R.** Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972. 332 p. ISBN 0-471-13735-9.
12. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** A problem of large abelian subgroups and the generalized Mal'cev problem // Proc. XII Intern. Conf. "Algebra and number theory". Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та, 2014. С. 108–111. ISBN: 978-5-87954-874-7.
13. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii J. Math. 2015. Vol. 86. No. 4. P. 384–388. doi: 10.1134/S1995080215040083.
14. **Кравцова Е.А.** Максимальные коммутативные идеалы подалгебры $N\Phi(K)$ алгебр Ли типа F_4 // Молодежь и наука: сб. материалов X Всерос. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Красноярск: Сиб. федеральный ун-т, 2014. ISBN: 978-5-7638-3102-3.
15. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли (гл. IV–VI). М.: Мир, 1976. 332 с.
16. **Левчук В. М.** Автоморфизмы унитарных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.
17. **Левчук В.М., Литаврин А.В.** Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 467–477.

Кириллова Евгения Алексеевна
аспирант

Поступила 10.06.2018

Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск
e-mail: kea92@bk.ru

Сулейманова Галина Сафиуллаевна
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры ПИМиЕД
Хакасский технический институт
(филиал Сибирского федерального университета),
г. Абакан
e-mail: suleymanova@list.ru

REFERENCES

1. Schur I. Zur theorie der vertauschbaren matrixen. *J. reine und angew. Math.*, 1905, vol. 130, pp. 66–76.
2. Mal'tsev A.I. Commutative subalgebras of semi-simple Lie algebras. *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1945, vol. 9, no. 4, pp. 291–300 (in Russian).
3. Barry M.J.J. Large Abelian subgroups of Chevalley groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 1979, vol. 27, no. 1, pp. 59–87. doi: 10.1017/S1446788700016645.
4. Wong W.J. Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups. *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, 1982, vol. 32, no. 2, pp. 223–245. doi: 10.1017/S1446788700024575.
5. Wong W.J. Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups. *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, 1982, vol. 33, no. 2, pp. 331–344. doi: 10.1017/S1446788700018759.
6. Kondrat'ev A.S. Subgroups of finite Chevalley groups. *Russian Math. Surveys*, 1986, vol. 41, no. 1, pp. 65–118. doi: 10.1070/RM1986v041n01ABEH003203.
7. Vdovin E.P. Maximal orders of Abelian subgroups in finite Chevalley groups. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 3–4, pp. 475–498. doi: 10.1023/A:1010256129959.
8. Vdovin E.P. Large Abelian unipotent subgroups of finite Chevalley groups. *Algebra and Logic*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 292–305. doi: 10.1023/A:1012549701336.
9. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type. *J. Algebra*, 2012, vol. 349, no. 1, pp. 98–116. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.025.
10. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups. *J. Siberian Federal. University. Math. & Physics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 63–73.
11. Carter R. *Simple groups of Lie type*. N Y: Wiley and Sons, 1972. 332 p. ISBN 0-471-13735-9.
12. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. A problem of large Abelian subgroups and the generalized Mal'cev problem. *Proceed. XII Intern. conf. "Algebra and number theory"*. Tula: Tul'sk. Gos. Ped. Univ. Publ., 2014, pp. 108–111. ISBN: 978-5-87954-874-7.
13. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. The generalized Mal'cev problem on Abelian subalgebras of the Chevalley algebras. *Lobachevskii J. Math.*, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 384–388. doi: 10.1134/S1995080215040083.
14. Kravtsova E.A. Maximal commutative ideals of subalgebra $NF(K)$ of Lie algebras of type F4. *Proc. 10th All-Russian Sci. Tech. Conf. "Molodezh' i nauka" (Youth and Science)*. Krasnoyarsk: Sib Fed. Univ. Publ., 2014 (in Russian). ISBN: 978-5-7638-3102-3.
15. Bourbaki N. *Groupes et algebres de Lie (Chapt. IV–VI)*. Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9. Translated to Russian under the title *Gruppy i algebrы Li (glavy IV–VI)*. Moscow: Mir Publ., 1976, 332 p.
16. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups in Chevalley groups. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 29, no. 3, pp. 211–224. doi: 10.1007/BF01979936.
17. Levchuk V.M., Litavrin A.V. Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 467–477 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.040.

The paper was received by the Editorial Office on June 10, 2018.

Evgeniya Alekseevna Kirillova, doctoral student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: kea92@bk.ru.

Galina Safiullanovna Suleimanova, Dr. Phys.-Math. Sci., Khakas Technical Institute — Branch of Siberian Federal University, Abakan, 655017 Russia, e-mail: suleymanova@list.ru.