Серия «Математика»
20–. Т. –. С. 1—7

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.64+512.55+519.1
MSC 15 +16
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.20–.24.1

Детерминанты как комбинаторные формулы суммирования над алгеброй с единственной n-арной операцией

Г. П. Егорычев

Сибирский федеральный университет

Аннотация. С конца 1980-годов автор опубликовал серию результатов по матричным функциям, полученным с помощью производящих функций, смешанных дискриминантов (смешанных объёмов в $\mathbb{R}^n$), и известной теоремы поляризации (ее формулировка в наибольшей общности приведена в “Известиях ИГУ” в 2017 году). Эта теорема позволяет получать для полиаддитивной и симметрической функции множество вычислительных формул (полиномиальных тождеств), содержащих семейство свободных переменных. В 1979-1980 годах автор получил первое полиномиальное тождество для перманентов над коммутативным кольцом, а в 2013 году полиномиальное тождество нового типа для детеминантов над некоммутативным кольцом с ассоциативными степенями.

В заметке дано общее определение функции детерминанта, названного автором e-детерминантом над алгеброй с единственной n-арной f-операцией. Это определение отлично от хорошо известного определения некоммутативного детерминанта Гельфанда. Показано, что при естественных ограничениях на f-операцию e-детерминант сохраняет основные свойства классического детерминанта над полем $\mathbb{R}$. Получено семейство полиномиальных тождеств для e-детерминантов. В заключении автор выражает уверенность, что представляет интерес получение подобных полиномиальных тождеств для фунций Шура, смешанных дискриминантов, результантов и других матричных функций над различными алгебраическими системами. Особенно интересен, по его мнению, ответ на следующий вопрос: *для каких n-арных f-операций возможно быстрое вычисление e-детерминантов с помощью квантовых компьютеров?*

Ключевые слова: детерминанты и перманенты, некоммутативные и мультиоператорные алгебры, теоремы поляризации и включения-исключения, квантовый компьютер.

1. Введение

Понятие определителя матрицы с действительными либо комлексными членами связано с именами Г. Лейбница, Г. Крамера, О. Коши, А. Кэли, Т. Мюира и многих других известных математиков [16]. Наиболее часто используется следующее определение детерминанта над коммутативным кольцом K (полями $\mathbb{R}, \mathbb{C}$.) Детерминант $Det(A)$ (определитель) квадратной $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ над коммутативным кольцом K определяется следующей суммой : $Det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n\sigma(n)}$, где S_n – множество всех перестановок $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ n-множества $\{1, \ldots, n\}$, и $\gamma(\sigma)$ – число инверсий в σ. Другими словами,

$$Det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} a_{\tau(1)\sigma(1)} \times \ldots \times a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} Sym\{a_{1\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n\sigma(n)}\}, \qquad (1.1)$$

где $Sym\{a_{1\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n\sigma(n)}\} = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} a_{\tau(1)\sigma(1)} \times \ldots \times a_{\tau(n)\sigma(n)}$.

Пусть Ψ аддитивная коммутативная полугруппа, G абелева группа с делением на целые числа, $\Psi^{(n)} = \Psi \times \Psi \times \ldots \times \Psi$; Φ - алгебра с единственной n-арной операцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \Psi^{(n)} \to G$.

Определение 1. *e-Детерминант $eDet(A, f)$ квадратной $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ над алгеброй Φ определяется следующей суммой:*

$$eDet(A, f) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} f(a_{\tau(1)\sigma(1)}, \ldots, a_{\tau(n)\sigma(n)}) \qquad (1.2)$$

Другими словами,

$$eDet(A, f) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} Sym\{f(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)})\}, \qquad (1.3)$$

где оператор симметризации

$$Sym\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n\} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right),$$

и $Sym\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если операция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрична.

Если операция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрична, то

$$eDet(A, f) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\gamma(\sigma)} f(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}).$$

2. Результаты

Основные (характеристические) свойства e-детерминанта $eDet(A,f)$ как функции строк и столбцов матрицы A непосредственно зависят от свойств общего члена сумм (1.2) – (1.3), то есть от свойств *n-арной операции* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n):\Psi^{(n)}\to G$. Справедливо следующее простое утверждение, которое понадобится нам при доказательстве основного результата теоремы 1.

Лемма 1. *(a) $eDet(A,f)=eDet(A^T,f)$.*

(b) $eDet(A,f)$ –кососимметрическая функция строк (столбцов) матрицы A.

(c)Если n-арная операция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: $\Psi^{(n)}\to G$ полиаддитивна, то $eDet(A,f)$ полиаддитивная функция строк (столбцов) матрицы A.

В общем случае формулы Лапласа для $eDet(A,f)$ несправедливы.

Доказательство. Справедливость утверждений (a) – (c), используя определения (1.2) и (1.3) для $eDet(A,f)$ и допущений на n-арную операцию $f(x_1,x_2,\ldots,x_n):\Psi^{(n)}\to G$, проводится здесь по стандартной и хорошо изученной схеме доказательства аналогичных утверждений для детерминанта над коммутативным кольцом K (ср.[3], [6], [4]). □

Пусть $A=(a_{ij})$ – $n\times n$ матрица с элементами из кольца K, и пусть $S_n^{(e)}$ и $S_n^{(o)}$, соответственно, подмножества чётных и нечётных перестановок из S_n. Последовательность элементов $a_{1\sigma(1)},\ldots,a_{n\sigma(n)}$ назовём диагональю $l(\sigma)$ матрицы A, а последовательность элементов $a_{i_1\sigma(i_1)},\ldots,a_{i_k\sigma(i_k)}$, $1\le i_1<\ldots<i_k\le n$,–поддиагональю l длины k этой матрицы. Через $L_k^{(e)}$ $\left(L_k^{(o)}\right)$ мы обозначим множество всех поддиагоналей длины k для множества чётных (нечётных) диагоналей $S_n^{(e)}$ $\left(S_n^{(o)}\right)$, $k=1,\ldots,n$. Функция $su(l)$ для поддиагонали (диагонали) $l=diag(a_{i_1\sigma(i_1)},\ldots,a_{i_k\sigma(i_k)})$ есть сумма её элементов, то есть $su(l):=\sum_{s=1}^k a_{i_s\sigma(s)}$. Положим, для краткости, $F(x)=f(x,...,x):\Psi\to G$.

Теорема 1. *Если n-арная операция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: $\Psi^n\to G$ полиаддитивна, то справедлива следующая формула для $eDet(A,f)$ над алгеброй Φ:*

$$eDet(A,f)=\frac{1}{n!}\{[\sum_{l\in L_n^{(e)}}F(\gamma+su(l))-\sum_{l\in L_n^{(o)}}F(\gamma+su(l))]-$$

$$-[\sum_{l\in L_{n-1}^{(e)}}F(\gamma+su(l))-\sum_{l\in L_{n-1}^{(o)}}F(\gamma+su(l))]\},\ \gamma\in\Psi. \tag{2.1}$$

В частности, при $\gamma = 0$

$$eDet(A,f) = \frac{1}{n!}\{[\sum_{l\in L_n^{(e)}} F(u(l)) - \sum_{l\in L_n^{(o)}} F(su(l))] -$$

$$-[\sum_{l\in L_{n-1}^{(e)}} F(su(l)) - \sum_{l\in L_{n-1}^{(o)}} F(su(l))]\}.$$

Доказательство. В силу предположений теоремы общий член $Sym\left\{f(a_{1\sigma(1)},\ldots,a_{n\sigma(n)}\right\}$ суммы (1.3) для $eDet(A,f)$ симметричен и полиаддитивен относительно своих переменных. Если применить к каждому из этих $n!$ членов известную формулу поляризации [4], и заменить в каждой из $n!$ полученных формул свободный элемент γ_σ на $\gamma \in \Psi$, то с учётом очевидного равенства $Sym\{f(x,x,\ldots,x)\} = F(x)$ мы получим следующее равенство

$$Sym\left\{f(a_{1\sigma(1)},\ldots,a_{n\sigma(n)}\right\} = \frac{(-1)^n}{n!}\{F(\gamma) - \sum_{i=1}^{n} F\left(\gamma + a_{i\sigma(i)}\right) +$$

$$+\sum_{1\le i<j\le n}^{n} F\left(\gamma + a_{i\sigma(i)} + a_{j\sigma(j)}\right) + \ldots + (-1)^n F(\gamma + \sum_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)})\},\ \sigma \in S_n.$$

Если теперь подставить последнее выражение для $Sym\left\{f(a_{1\sigma(1)},\ldots,a_{n\sigma(n)}\right\}$ в сумму (1.3), то после приведения (сокращения) подобных членов точно по той же схеме, что и в [3], мы получим формулу (2.1). □

3. Заключение

Если ввести понятие е-перманента $ePer(A,f)$ квадратной матрицы A, положив $ePer(A,f)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} Sym\{f(a_{1\sigma(1)},\ldots a_{n\sigma(n)})\}$, то под это определение при соответствующих ограничениях на операцию f попадает ряд матричных функций, возникших ранее в работах различных авторов (см., например, матричные функции Мура, Барвинка [10], [9]). Представляет интерес получение с помощью теоремы поляризации полиномиальных тождеств (см. [1], [3], [4]) для функций Шура, смешанных дискриминантов, результантов и других матричных функций (плоской и пространственных матриц, [4]) над различными алгебраическими системами, возникших при решении трудных комбинаторных, алгебраических и геометрических проблем [16], [2]–[14], и многие другие. Особенно интересен, на мой взгляд, ответ на следующий вопрос: *для каких n-арных операций* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: $\Psi^n \to G$ и *одноарных операций*

$F(x) := f(x, x, \ldots, x) : \Psi \to G$ *возможны вычисления* $ePer(A, f)$ *и* $eDet(A, f)$ *с помощью квантовых компьютеров ?* (см., например, [12]).

Автор выражает признательность моим добрым коллегам Л. В. Кнауб, С. Г. Колесникову, В. М. Копытову, В. П. Кривоколеско, А. И. Созутову за помощь при работе над этой статьёй.

Список литературы

1. Егорычев Г.П. Новые формулы для перманента// Докл. АН СССР. 1980. Т. 265, № 4. С. 784–787.
2. Егорычев Г.П. Дискретная математика. Перманенты. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2007. 272 с.
3. Егорычев Г.П. Новые полиномиальные тождества для детерминантов над коммутативными кольцами// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 4. С. 16–20.
4. Егорычев Г.П. Теорема поляризации и полиномиальные тождества для матричных функций// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 21, № 4. С. 77–88.
5. Кочергин В.В. О сложности вычислений одночленов и степеней// Дискретный Анализ, ИМ СО РАН, Новосибирск. 1994. Т. 27. С. 94–107.
6. Курош А.Г. Мультиоператорные кольца и алгебры// Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, вып. 1(145). С. 3–15.
7. Пожидаев А.П. Простые фактор-алгебры и подалгебры алгебр якобианов// Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 593–599.
8. Филиппов В.Т. Об n-лиевойалгебре якобианов// Сиб. мат.журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 660–669.
9. Arvind V. On the hardness of noncommutative determinant// Electronic Colloquium on Computational Complexity. Report № 103. 2009. P. 1–18.
10. Barvinok A.I. New permanent estimators via non-commutative determinants// Preprint arXiv: math. /0007153. 2000. P. 1–13.
11. Burago Yu.D., Zalgaller V.A. Geometric Inequalities// N.Y.: Springer Verlag, 1988. 334p.
12. Clarhmakchuanes L., Cerf N.J., Garcia-Patron R. Guantum-inspired algorithm for estimating the permanent of positive semidefinite matrices// Preprint arXiv: quant-ph./ 1609.02416. 2017. P. 1–9.
13. Gelfand I.M., Retakh V.S. Determinants of matrices over noncommutative rings// Funct. Anal. Appl. 1991. Vol. 25, №2. P. 91–102.
14. Krattenthaler C. Advanced determinant calculus: A complement// Linear Algebra and Its Applications. 2005. Vol. 411. P. 68–166.
15. Krob D., Leclerc B. Minor identities for quasi-determinants and quantum determinants// Commun. Math. Phys. 1995. Vol. 169. P. 1–23.
16. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development// Vol. 1, part 1, London, 1890.
17. Zeilberger D. Proof of the alternating sign matrix conjecture// arXiv: math./ 9407211v, 1994. P. 1–84.

Егорычев Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт фундаментальной подготовки, Сибирский федеральный университет, 660074, Красноярск, ул. Киренского 26, каф. „МОДУС“ тел.: +7(391)2461609 (e-mail: gegorych@mail.ru)

G.P. Egorychev

Determinants as combinatorial formulas of summation over an algebra with a unique n-ary operation

Abstract. From the end 1980-th the author has published a siries of results on matrix functions obtained with the help of generating functions, mixed discriminants (mixed volumes in $\mathbb{R}^n$), and the known polarization theorem (this theorem in its greatest generality is published in "Izvestia IGU" in 2017). The polarization theorem allows to obtain for polyadditive and symmetric functions a set computing formulas (polynomial identities), containing a family of free variables. In 1979-1980 the author has found the first polynomial identity for permanets over a commutative ring, and in 2013 the polynomial identity of a new type for determinants over a noncommutative ring with associative powers.

The author gives a general definition for determinants (the e-determinants) over an algebra with a unique n-ary f-operation. This definition is distict from the well-known definition of the noncommutative Gelfand determinant. It is shown, that under natural restrictions on the f-operation the e-determinant keeps the basic properties of classical determinants over the fild $\mathbb{R}$. A family of polynomial identeties for the e-determinants is obtained. The author is assured that it is of interest to obtain similar polynomial identities for Schur functions, the mixed determinants, resultants and other matrix functions over various algebraic systems. According to the auther, an answer to the following questions is particularly interesting: *for wich n-ary f-operations a fast calcalation of e-determinants is possible with a help quantum computers?*

Keywords: determinants and permanents, noncommutative and multioperator algebras, polarization and inclusion-conclusion theorems, quantum computers.

References

1. Egorychev G.P. New formulas for the permanent. *Dokl. Acad. Nauk USSR,* 1980, vol.265, no 4, pp. 784–787. (in Russian)
2. Egorychev G.P. Discrete mathematics. Permanents. Krasnoyarsk, Siberian Federal Univ., 2007, 272 p. (in Russian)
3. Egorychev G.P. New polynomial identities for determinants over commutative rings. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Math.,* 2012, vol. 5, no 4, pp. 16–20. (in Russian)
4. Egorychev G.P. The polarization theorem and polynomial Identities for matrix functions. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Math.,* 2017, vol. 21, no. 4, pp. 16–20. (in Russian)
5. Kochergin V.V. About complexity of computation one-terms and powers. *Discrete Analysis,* IM SO RAN, Novosibirsk, 1994, vol. 27, pp.94–107. (in Russian)
6. Kurosh A.G. Multioperator rings and algebras. *Uspechi Math. Nauk,* 1969, vol. 24 issue 1(145), pp.3–15. (in Russian)
7. Pozhidaev A.P. A simple factor-algebras and subalgebras of Jacobians algebras. *Sibirsk. Math. Zh.,* 1998, vol. 39, no. 3, pp. 593–599. (in Russian)
8. Filippov V.T. On the n-Lie algebras of Jacobians. *Sibirsk. Math. Zh.,* 1998, vol. 39, no. 3, pp. 660–669.(in Russian)

9. Arvind V., Srinivasan S. On the hardness of noncommutative determinants. Electronic Colloquium on Computational Complexity. Report no. 103, 2009, pp. 1–18.
10. Barvinok A.I. New permanent estimators via non-commutative determinants. Preprint arXiv: math. /0007153, 2000, pp. 1–13.
11. Burago Yu.D., Zalgaller V.A. Geometric Inequalities. N.Y., Springer Verlag, 1988, 334p.
12. Clarhmakchuanes L., Cerf N.J., Garcia-Patron R. Guantum inspired algorithm for estimating the permanent of positive semidefinite matrices. Preprint arXiv: quant-ph. /1609.02416, 2017, pp. 1–9.
13. Gelfand I.M., Retakh V.S. Determinants of matrices over noncommutative rings. *Funct. Anal. Appl.,* 1991, vol. 25, no. 2, pp.91–102.
14. Krattenthaler C. Advanced determinant calculus: A complement. *Linear Algebra and Its Applications,* 2005, vol. 411, pp. 68–166.
15. Krob D., Leclerc B. Minor identities for quasi-determinants and quantum determinants. *Commun. Math. Phys.* 1995, vol. 169, pp.1–23.
16. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development. Vol. 1, part 1, London, 1890.
17. Zeilberger D. Proof of the alternating sign matrix conjecture. arXiv: math./ 9407211v, 1994, pp. 1–84.

Egorychev Georgy Petrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), professor, Siberian Federal University, 26, Kirenskogo St., Krasnoyarsk, 660074 tel.: +7(391)2461609 (e-mail: gegorych@mail.ru)