Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(2), 245-252

УДК 517.9

Задача идентификации двух функций в системе уравнений турбулентного пограничного слоя

Ирина В.Степанова*
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Получена 18.03.2009, окончательный вариант 20.04.2009, принята к печати 10.05.2009

Для системы уравнений плоского турбулентного пограничного слоя решена задача групповой классификации относительно функций турбулентного трения и градиента давления. Найдены все специализации произвольных элементов, при которых происходит расширение основной алгебры операторов, допускаемых исследуемой системой.

Ключевые слова: турбулентность, пограничный слой, групповой анализ, групповая классификация.

Введение

Проблема изучения систем дифференциальных уравнений в частных производных в настоящее время имеет различные направления. С одной стороны, эта проблема может рассматриваться в рамках анализа, где основным предметом исследований является определение решений уравнений при условии корректной постановки задач. С другой стороны, благодаря работам Софуса Ли, взгляды на дифференциальные уравнения в частных производных стали развиваться в новых направлениях. Предметом интересов стала сама структура уравнений. Такой подход к исследованию систем дифференциальных уравнений получил название метода группового анализа или симметрии [1, 2]. Следует отметить, что этот метод, направленный на проведение "качественных" исследований систем уравнений в частных производных, по его конечной информативности в некотором смысле уступает методам, которые ориентированы на построение решений для конкретных задач. Речь идет прежде всего о сравнении с численными методами решения уравнений. Однако к преимуществам метода группового анализа относятся более широкие возможности для организации системного подхода к изучению явления или процесса, моделируемого дифференциальными уравнениями, возможность замены математической модели процесса более простой моделью или моделью, представленной в специальной, удобной форме, в некоторых случаях — возможность получения точных решений. На самом деле численное решение позволяет получить конкретный ответ на конкретный вопрос, но не дает представления о структуре решения. Поэтому интерес к выделению классов решений, зависящих от произвольных параметров и функций, возрос именно в связи с появлением большого численного материала расчетов, нуждающихся в интерпретации. Таким образом, метод группового анализа дополняет методы численного моделирования и часто является предварительным этапом задачи получения решений системы дифференциальных уравнений.

*e-mail: stepiv@icm.krasn.ru

В работе рассматриваются уравнения нестационарного турбулентного пограничного слоя в случае заданного градиента давления:

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + \theta = (\nu + \tau_{u_y})u_{yy} + \tau_y, \\ &u_x + v_y = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ — проекции вектора скорости на оси x, y, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\theta(t,x)$ — произвольная функция, определяющая градиент давления, $\tau(y, u_y)$ — произвольная функция, определяющая дополнительное турбулентное трение.

На самом деле пристеночная турбулентность является предметом экспериментального и теоретического исследования уже в течение многих лет [3]. Трудности при математическом описании таких процессов объясняются сложностью гидродинамических явлений, происходящих в непосредственной близости от стенки.

Здесь будут изучены вопросы групповой классификации и вычисления наиболее широких групп непрерывных преобразований, допускаемых уравнениями (1) в каждом конкретном случае специализации $\theta(t,x)$, $\tau(y,u_y)$. Необходимо сказать, что каждой группе непрерывных преобразований ставится во взаимнооднозначное соответствие алгебра операторов, допускаемых исследуемой системой уравнений, и на самом деле в результате анализа, проведенного в данной работе, найдены спецификации классифицируемых функций $\theta(t,x)$, и $\tau(y,u_y)$, а также алгебры операторов, допускаемых исследуемыми уравнениями при каждой специализации произвольных элементов. Восстановить непрерывные группы преобразований из алгебр операторов не составляет труда [1].

1. Построение определяющих уравнений

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой (1), ищем в виде

$$X = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v}, \tag{2}$$

где $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2$ — функции переменных t, x, y, u, v. Заметим, что подробно алгоритм построения определяющих уравнений описан в [1].

Формулы продолжения оператора (2) строятся с помощью оператора полного дифференцирования $D = (D_t, D_x, D_y)$, имеющего компоненты

$$D_t = \partial_t + u_t\partial_u + v_t\partial_v + ..., \quad D_x = \partial_x + u_x\partial_u + v_x\partial_v + ...,$$

$$D_y = \partial_y + u_y\partial_u + v_y\partial_v + ... + u_{yy}\partial_{u_y} + ...,$$

где явно указаны только слагаемые, фактически участвующие в построении определяющих уравнений. Для формирования этих уравнений нужно подействовать продолженным оператором (2) на уравнения (1) и перейти на многообразие, задаваемое системой (1). Зададим это многообразие следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_t = -uu_x - vu_y - \theta + (\nu + \tau_{u_y})u_{yy} + \tau_y, \\ &u_x = -v_y. \end{aligned} \tag{3}$$

Вначале конкретизируем функциональный вид оператора X, подчинив его лишь условию, чтобы он допускался вторым уравнением системы (1). Действуя продолженным оператором $\underset{1}{X}$ на уравнение $u_x + v_y = 0$, переходя на многообразие (3) и расщепляя полученное равенство относительно производных от функций u, v, получим, что ξ^0 зависит только от t, x. Кроме того, выполнены соотношения

$$\xi^2_v + \xi^1_u = 0, \tag{4}$$

$$\eta^1_v - \xi^1_y = 0, \tag{5}$$

$$\xi^0_x(\nu + \tau_{u_y}) = 0, \tag{6}$$

$$-\eta^1_u - u\xi^0_x + \xi^1_x + \eta^2_v - \xi^2_y = 0, \tag{7}$$

$$v\xi^0_x - \xi^2_x + \eta^2_u = 0, \tag{8}$$

$$\eta^1_x + \eta^2_y - (\tau_y - \theta)\xi^0_x = 0, \tag{9}$$

составляющие часть определяющих уравнений для нахождения координат оператора X. Далее с учетом вышесказанного, действуя дважды продолженным оператором $\underset{2}{X}$ на первое уравнение системы (1), переходя на многообразие (3), производя расщепление полученного равенства относительно производных функций u, v и анализа этих уравнений, получим зависимости

$$\xi^0 = \xi^0(t, x),\ \xi^1 = \xi^1(t, x),\ \xi^2 = \xi^2(t, x, y, u),\ \eta^1 = \eta^1(t, x, u),\ \eta^2 = \eta^2(t, x, y, u, v).$$

Кроме этого, по-прежнему выполнены соотношения (6)— (9), а также выведены определяющие уравнения

$$\eta^1 = u(\xi^1_x - \xi^0_t - u\xi^0_x) + \xi^1_t, \tag{10}$$

$$\xi^2_u \tau_{u_y u_y} = 0, \tag{11}$$

$$\xi^2_{uu}(\nu + \tau_{u_y}) = 0, \tag{12}$$

$$2(\nu + \tau_{u_y})\xi^2_u - \tau_{u_y u_y}(\eta^1_u - \xi^2_y) = 0, \tag{13}$$

$$\xi^2_u \tau_{y u_y} - (\nu + \tau_{u_y})(\eta^1_{uu} - 2\xi^2_{yu}) = 0, \tag{14}$$

$$\xi^2 \tau_{y u_y} + (\nu + \tau_{u_y})(-2\xi^2_y + \xi^0_t + u\xi^0_x) = 0, \tag{15}$$

$$\eta^1_t + (\tau_y - \theta)(\eta^1_u - \xi^0_t - u\xi^0_x) + u\eta^1_x + \xi^0\theta_t + \xi^1\theta_x - \xi^2\tau_{yy} = 0. \tag{16}$$

$$v(\xi^0_t + u\xi^0_x - \xi^2_y) - (\tau_y - \theta)\xi^2_u - \xi^2_t - u\xi^2_x + \eta^2 - \tau_{y u_y}(\eta^1_u - \xi^2_y) = 0. \tag{17}$$

Среди них есть уравнения, играющие роль ограничений на широту допускаемой группы непрерывных преобразований в пространстве переменных (t, x, y, u, v). Это соотношения (6), (9), (11)— (17).

2. Групповая классификация уравнений

Сначала найдем основную алгебру операторов, допускаемую системой (1) для произвольных значений функций θ, τ. Понятно, что в этом случае для выполнения равенства (16) необходимо, чтобы $\xi^0 = \xi^1 = \xi^2 = 0$, тогда из (10) и (17) следует, что $\eta^2 = \eta^1 = 0$.

Тем самым основная группа в данном случае тривиальна и не содержит ни одного преобразования координат, допускаемого уравнениями (1) при произвольных значениях классифицируемых функций.

Необходимо отметить, что уравнения (1) сохраняют свой вид при преобразованиях переменных вида:

$$\bar{t} = a_1 t + a_2,\ \bar{x} = a_3 x + g_0(t),\ \bar{y} = a_4 y + a_5,\ \bar{u} = a_1^{-1} a_3 u + g_{0t},\ \bar{v} = a_1^{-1} a_4 v. \qquad (18)$$

При этом произвольные функции преобразуются так:

$$\bar{\tau} = a_1^{-2} a_3 a_4 \tau + a_6 y + a_7,\ \bar{\theta} = a_1^{-2} a_3 \theta + a_6 - g_{0tt}. \qquad (19)$$

Здесь $a_i,\ i = \overline{1,7}$ — произвольные постоянные, $g_0(t)$ — произвольная гладкая функция. Две системы (1), переходящие одна в другую посредством преобразований (18), (19), будем называть эквивалентными. Групповая классификация будет устанавливаться с точностью до такой эквивалентности.

Замечание 1. *При решении уравнений (6), (9), (11)–(17) будем полагать, что* $\nu+\tau_{u_y} \neq 0$. *В случае* $\nu + \tau_{u_y} = 0$ *можно показать, что система (1) интегрируется в квадратурах в лагранжевых координатах.*

При условии выполнения *замечания 1* уравнения (6), (9), (11)–(17) упрощаются до следующих:

$$\xi^0_x = 0, \qquad (20)$$

$$-\eta^1_u + \xi^1_x + \eta^2_v - \xi^2_y = 0, \qquad (21)$$

$$-\xi^2_x + \eta^2_u = 0, \qquad (22)$$

$$\eta^1_x + \eta^2_y = 0, \qquad (23)$$

$$\eta^1 = u(\xi^1_x - \xi^0_t) + \xi^1_t, \qquad (24)$$

$$\xi^2_u \tau_{u_y u_y} = 0, \qquad (25)$$

$$2(\nu + \tau_{u_y})\xi^2_u - \tau_{u_y u_y}(\eta^1_u - \xi^2_y) = 0, \qquad (26)$$

$$\xi^2_{uu} = 0, \qquad (27)$$

$$\xi^2_u \tau_{y u_y} - (\nu + \tau_{u_y})(\eta^1_{uu} - 2\xi^2_{yu}) = 0, \qquad (28)$$

$$\xi^2 \tau_{y u_y} + (\nu + \tau_{u_y})(-2\xi^2_y + \xi^0_t) = 0, \qquad (29)$$

$$v(\xi^0_t - \xi^2_y) - (\tau_y - \theta)\xi^2_u - \xi^2_t - u\xi^2_x + \eta^2 - \tau_{y u_y}(\eta^1_u - \xi^2_y) = 0. \qquad (30)$$

$$\eta^1_t + (\tau_y - \theta)(\eta^1_u - \xi^0_t) + u\eta^1_x + \xi^0\theta_t + \xi^1\theta_x - \xi^2\tau_{yy} = 0. \qquad (31)$$

Из (24) следует $\eta^1_{uu} = 0$, из (22) — $\eta^2_{uv} = 0$, из (21) — $\xi^2_{uy} = 0$. Тем самым равенства (25), (28) дают три классифицирующие возможности:

A.$\tau_{u_y u_y} = 0$. **B.** $\tau_{y u_y} = 0$. **C.** $\xi^2_u = 0$.

Рассмотрим последовательно каждую из них.

A. Если $\tau_{u_y u_y} = 0$, тогда $\tau = \alpha_1(y)u_y + \alpha_2(y)$, где $\alpha_1,\ \alpha_2$ — произвольные гладкие функции переменной y. При подстановке этого представления в (26) получим

$$2(\nu + \alpha_1)\xi^2_u = 0,$$

из которого следует либо $\nu + \alpha_1 = 0$, что противоречит *замечанию 1*, либо $\xi^2_u = 0$, а это случай **C** и будет разобран далее как более общий.

B. $\tau_{yu_y}=0$, тогда $\tau=\alpha_(u_y)+\alpha_2(y)$, где $\alpha_1,\ \alpha_2$ — произвольные гладкие функции своих переменных. При подстановке данного представления τ в (25), (26) получим снова две возможности: либо $\alpha_2=-\nu u_y+const$, что приводит к противоречию с *замечанием 1*, либо снова $\xi^2_u=0$.

C. $\xi^2_u=0$. Решая в данном случае уравнения (20) — (31), получим координаты оператора X

$$\begin{gathered}\xi^0=2f_0(t),\ \ \xi^1=(f^0_t+c_0)x+f^1(t),\ \ \xi^2=(c_0-f^0_t)y+f^2(t,x),\\ \eta^1=(c_0-f^0_t)u+f^0_{tt}x+f^1_t,\ \ \eta^2=(c_0-3f^0_t)v-f^0_{tt}y+uf^2_x+f^2_t,\end{gathered}$$

где c_0 — произвольная постоянная, $f^0(t),f^1(t),f^2(t,x)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов. Для определения классифицируемых функций $\tau,\ \theta$ остаются два равенства:

$$((c_0-f^0_t)y+f^2)\tau_{yu_y}+2(\nu+\tau_{u_y})(2f^0_t-c_0)=0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}&f^0_{ttt}x+f^1_{tt}+(\tau_y-\theta)(c_0-3f^0_t)+2f^0\theta_t+\\&+((f^0_t+c_0)x+f^1)\theta_x-((c_0-f^0_t)y+f^2)\tau_{yy}=0.\end{aligned} \tag{33}$$

Как видно, уравнение (32) является уравнением только на функцию τ, поэтому сначала следует решить его, а затем, подставляя найденное выражение для τ в уравнение (33), получить уравнение для нахождения θ.

При решении уравнения (32) необходимо рассмотреть следующие возможности:

I. $\tau=0$. **II**. $c_0-f^0_t=c_0-2f^0_t=f^2=0$. **III**.$c_0-f^0_t=c_0-2f^0_t,\ f^2\neq 0$.

IV. $c_0-f^0_t,\ c_0-2f^0_t\neq 0,\ f^2\neq 0$. **V**. $c_0-f^0_t\neq 0$.

Дальнейшее изложение посвящено последовательному анализу этих случаев.

I. Когда $\tau=0$, уравнения (1) описывают течение в ламинарном пограничном слое. Этот случай описан в [1], где подробно изучены групповые свойства уравнений модели при заданном градиенте давления $\theta(t,x)$. Здесь считаем, что τ в ноль не обращается.

II. Здесь τ — произвольная функция. Из (33) получаем классифицирующее уравнение на θ:

$$f^1_{tt}+2c_1\theta_t+f^1\theta_x=0, \tag{34}$$

а координаты оператора X перепишутся в виде

$$\xi^0=2c_1,\ \ \xi^1=f^1(t),\ \ \xi^2=0,\ \ \eta^1=f^1_t,\ \ \eta^2=0,$$

где c_1 — произвольная постоянная.

III. $\tau=\alpha(u_y)+\beta(y)$, $\alpha(u_y)\neq \mathrm{const}$ — произвольная гладкая функция; при подстановке в (33) получаем соотношение

$$f^1_{tt}+2c_1\theta_t+f^1\theta_x-f^2\beta_{yy}=0. \tag{35}$$

Следует заметить, что равенство (35) является классифицирующим уравнением не только на $\theta(t,x)$, но и на функцию $\beta(y)$. Координаты оператора X преобразуются в следующие:

$$\xi^0=2c_1,\ \ \xi^1=f^1(t),\ \ \xi^2=f^2(t,x),\ \ \eta^1=f^1_t,\ \ \eta^2=uf^2_x+f^2_t,$$

при этом c_1 — произвольная постоянная.

IV. $\tau = -\nu u_y + \alpha(u_y)e^{\delta y} + \beta(y)$, $\delta = \pm 1$, $\alpha \neq \mathrm{const}$ — произвольная гладкая функция. Для определения функций $\theta(t,x)$, $\beta(y)$ остается уравнение

$$f^1_{tt} + 2c_0\theta + 2(c_0t + c_1)\theta_t + (2c_0x + f^1)\theta_x + 2c_0\left(\frac{\beta_{yy}}{\delta} - \beta_y\right) = 0. \tag{36}$$

Координаты оператора X примут вид

$$\xi^0 = 2(c_0t + c_1), \quad \xi^1 = 2c_0x + f^1(t), \quad \xi^2 = -\frac{2c_0}{\delta}, \quad \eta^1 = f^1_t, \quad \eta^2 = -2c_0v,$$

где c_1 — произвольная постоянная.

V. $\tau = -\nu u_y + \alpha(u_y)y^n + \beta(y)$, $n \neq 0$, $\alpha \neq \mathrm{const}$ — произвольная гладкая функция, кроме того, от равенства (32) остается соотношение

$$(4-n)f^0_t + c_0(n-2) = 0,$$

откуда следует необходимость выделения случаев

Va. $n = 4$. **Vb**. $n = 2$. **Vc**. $n \neq 4$, $n \neq 2$.

В случае **Va** уравнение (33) преобразуется к виду

$$f^0_{ttt}x + f^1_{tt} + 3f^0_t\theta + 2f^0\theta_t + (f^0_tx + f^1)\theta_x + f^0_t(y\beta_{yy} - 3\beta_y) = 0, \tag{37}$$

координаты оператора X запишутся как

$$\begin{gathered} \xi^0 = 2f_0(t), \quad \xi^1 = f^0_tx + f^1(t), \quad \xi^2 = f^0_ty, \\ \eta^1 = f^0_tu + f^0_{tt}x + f^1_t, \quad \eta^2 = -3f^0_tv - f^0_{tt}y. \end{gathered}$$

В случае **Vb** равенство (33) перейдет в

$$f^1_{tt} - c_0\theta + 2c_1\theta_t + (c_0x + f^1)\theta_x + c_0(\beta_y - y\beta_{yy}) = 0, \tag{38}$$

а оператор X будет иметь следующие координаты:

$$\xi^0 = 2c_1, \quad \xi^1 = c_0x + f^1(t), \quad \xi^2 = c_0y, \ \eta^1 = c_0u + f^1_t, \quad \eta^2 = c_0v$$

с некоторой произвольной постоянной c_1.

Наконец, в случае **Vc** уравнение (33) запишется как

$$\begin{gathered} (4-n)f^1_{tt} - 2(n-1)c_0\theta + 2((2-n)c_0t + (4-n)c_1)\theta_t + \\ + ((6-2n)c_0x + (4-n)f^1)\theta_x + 2c_0((n-1)\beta_y - y\beta_{yy}) = 0. \end{gathered} \tag{39}$$

Координаты оператора примут вид

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2\left(\frac{2-n}{4-n}c_0t + c_1\right), \quad \xi^1 = \frac{6-2n}{4-n}c_0x + f^1(t), \quad \xi^2 = \frac{n-1}{4-n}c_0y, \\ &\eta^1 = \frac{n-1}{4-n}c_0u + f^1_t, \quad \eta^2 = \frac{2n-2}{4-n}c_0v, \end{aligned}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Последовательно анализируя классифицирующие уравнения (34) — (39), получим всевозможные спецификации функций $\theta(t,x), \beta(y)$, при которых происходит расширение алгебры допускаемых системой (1) операторов. Для удобства результат групповой классификации представлен в виде табл. 1.

Далее можно для полученных конкретных представителей классифицируемых функций на соответствующих операторах, представленных в табл. 1, строить инвариантные или частично инвариантные решения системы уравнений (1), выбирая при этом такие специализации произвольных элементов, которые могут быть продиктованы зависимостями, полученными экспериментально.

Таблица 1

Групповая классификация относительно функций турбулентного трения и градиента давления

№	$\tau(y, u_y)$	$\theta(t, x)$	Операторы
1	Произвольная	Произвольная	$L_0 = \{0\}$
2	Произвольная	0	$\partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u$
3	Произвольная	$\sigma(x)$	$\sin(\sqrt{\sigma'}t)\partial_x + \sqrt{\sigma'}\cos(\sqrt{\sigma'}t)\partial_u,\ \cos(\sqrt{\sigma'}t)\partial_x - \sqrt{\sigma'}\sin(\sqrt{\sigma'}t)\partial_u, \partial_t$
4	Произвольная	$\omega(t)x$	$\varphi(t)\partial_x + \varphi_t\partial_u$
5	$\beta(u_y)$	Произвольная	$h(t, x)\partial_y + (uh_x + h_t)\partial_v$
6	$\beta(u_y)$	0	$\partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, h(t, x)\partial_y + (uh_x + h_t)\partial_v$
7	$\beta(u_y) + \delta y^2$	0	$\partial_t, 2\delta f(t)\partial_x + f_{tt}\partial_y + 2\delta f_t\partial_u + f_{ttt}\partial_v$
8	$-\nu u_y + \alpha(u_y)e^{\delta y}$	0	$\partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + x\partial_x - \delta\partial_y - v\partial_v$
9	$-\nu u_y + \alpha(u_y)e^{\delta y}$	$\frac{1}{t}\gamma\left(\frac{x}{t}\right)$	$t\partial_t + x\partial_x - \delta\partial_y - v\partial_v$
10	$-\nu u_y + \alpha(u_y)y^n$	0	$\partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, (2-n)t\partial_t + (3-n)x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + (n-1)v\partial_v$
11	$-\nu u_y + \alpha(u_y)y^n$	$t^{\frac{1-n}{n-2}}\gamma\left(xt^{\frac{3-n}{n-2}}\right)$	$(2-n)t\partial_t + (3-n)x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + (n-1)v\partial_v$
12	$-\nu u_y + \alpha(u_y)y^4$	0	$\partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x - y\partial_y - u\partial_u - 3v\partial_v, t^2\partial_t + tx\partial_x - ty\partial_y + (-ut + x)\partial_u + (-3tv - y)\partial_v$
13	$-\nu u_y + \alpha(u_y)y^2$	0	$\partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v$
14	$-\nu u_y + \alpha(u_y)y^2$	$\omega(t)x$	$x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v, \varphi(t)\partial_x + \varphi_t\partial_u$
15	$-\nu u_y + \alpha(u_y)y^2$	$e^{\delta t}\gamma(xe^{-\delta t})$	$\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v$

В табл. 1 использованы следующие обозначения: $\alpha(u_y) \neq \text{const}$, $\beta(u_y) \neq -\nu u_y$, $\gamma \neq 0$, $\sigma(x) \neq \text{const}$, $\omega(t) \neq \text{const}$, $h(t, x) \neq 0$, $f(t) \neq 0$, $\varphi(t)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов, причем φ удовлетворяет уравнению $\varphi_{tt} + \omega(t)\varphi = 0$, $\delta = \pm 1$, $n \neq 0, \neq 2, \neq 4$ — произвольная постоянная, $\sigma' = \sigma_x$.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ 2260.2008.1 и интеграционного проекта СО РАН №65.

Список литературы

[1] Л.В.Овсянников, Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.

[2] П.Олвер, Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1989.

[3] Е.У.Репик, Ю.П.Соседко, Обзор экспериментальных исследований пристеночной турбулентности , Труды III Всесоюзного семинара по моделям механики сплошной среды, Новосибирск, 1976, 7-35.

The Identification Problem for two Functions in the system of Turbulent Boundary Layer Equations

Irina V.Stepanova

The problem of group classification for two-dimentional turbulent boundary layer equations is solved for the functions of turbulent friction and the gradient of pressure. The specializations arbitrary functions which basic algebra of operators extension is occured are found.

Keywords: turbulence, boundary layer, group analysis, group classification.