Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
__________ А.А.Кытманов
__________ ______ 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 Прикладная математика

Многомерное фундаментальное соответствие для
преобразования Меллина алгебраических функций

Руководитель __________ Профессор каф. ПМКБ, д.-р. физ.-мат. наук И.А. Антипова

Выпускник __________ А.В. Малькanова

Красноярск 2019

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Многомерное фундаментальное соответствие для преобразования Меллина алгебраических функций» содержит 27 страниц текстового документа, 23 формулы, 12 использованных источников, 1 приложение.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ, ГАММА-ФУНКЦИЯ, ВЫЧЕТ

Целью работы является исследование многомерного фундаментального соответствия для преобразования Меллина алгебраических функций.

В работе отражена эффективность фундаментального соответствия преобразования Меллина функции одной переменной в исследовании асимптотических сумм. Многомерное фундаментальное соответствие получено на основе интегрального представления Меллина-Барнса для решения общего алгебраического уравнения и применения техники теории многомерных вычетов. В результате получены разложения в ряды Лорана-Пюизо, представляющие аналитическое продолжение главного решения алгебраического уравнения. В частном случае реализована процедура нахождения коэффициентов и носителей степенных рядов в системе компьютерной алгебры MAPLE.

Результат работы имеет теоретическую ценность и может быть использован в учебном процессе при чтении курса «Решение полиномиальных уравнений. Теория и алгоритмы».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

1. Фундаментальное соответствие в одномерном случае 8

 1.1 Прямое преобразование Меллина. Фундаментальная полоса 8

 1.2 Прямое фундаментальное соответствие 9

2. Многомерные преобразования Меллина 10

 2.1 Предварительные сведения 10

 2.2 Определение многомерных преобразований Меллина 13

 2.3 Классы функций M_{Θ}^{U} и W_{U}^{Θ}. Теоремы обращения 13

3. Применение преобразования Меллина к решению алгебраических уравнений 14

 3.1 Алгебраическая функция 14

 3.2 Интеграл Меллина-Барнса 16

 3.3 Преобразование Меллина решения алгебраических уравнений 20

4. Многомерное фундаментальное соответствие 21

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 26

Список использованных источников 27

ПРИЛОЖЕНИЕ А 29

ВВЕДЕНИЕ

Преобразования Меллиназарекомендовали себя эффективным инструментом исследований асимптотических сумм, возникающих в комбинаторике, дискретных вероятностных моделях, анализе алгоритмов и структур данных[11], [10]. Эти приложения основаны на фундаментальном соответствии между асимптотическими разложениями функции-оригинала в нуле, бесконечности и особенностями преобразования Меллина этой функции [10].

Прямое преобразование Меллина локально интегрируемой по Лебегу функции на интервале$(0; +\infty)$ функции$f(x)$определяется интегралом вида

$$\mathcal{M}[f](z) = \int_{0}^{+\infty} f(x) x^{z-1} dx. \tag{0.1}$$

Наибольшая открытая полоса, в которой интеграл (0.1) сходится, называется фундаментальной полосой преобразования Меллина.

Проиллюстрируем применение фундаментального соответствия к исследованию асимптотики модифицированной тэта-функции

$$\theta_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n},$$

возникающей в анализе алгоритма сортировки [10]. Её преобразование Меллина равно

$$\mathcal{M}[\theta_1](z) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z+1).$$

Здесь дзета-функция Римана $\zeta(z+1)$ имеет единственный простой полюс в точке $z = 0$, а гамма-функция Эйлера $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ имеет полюсы во всех неположительных четных целых точках. Таким образом, функция

$\mathcal{M}[\theta_1](z)$имеет двукратный полюс в точке $z = 0$ и главная часть разложения Лорана в этой точке имеет вид:

$$\frac{1}{z^2} + \frac{\gamma}{2z},$$

где γ – постоянная Эйлера. В четных отрицательных целых точках функция $\mathcal{M}[\theta_1](z)$ имеет простые полюсы, в частности, в точках $z = -2, -4$ главные части разложения Лорана имеют вид:

$$\frac{1}{12}\frac{1}{z+2}, \frac{1}{240}\frac{1}{z+4}$$

соответственно. По этой информации о полюсах преобразования Меллина функции $\theta_1(x)$ в точках $z = 0, -2, -4$ восстанавливаются первыенесколько слагаемых ее асимптотического разложения в нуле:

$$\theta_1(x) = -\log x + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{240}x^4 + \cdots.$$

Преобразования Меллина нашли широкое применение в финансовой математике [8]и теоретической физике[9], а именно в задачах квантовой электродинамикии оптики.

Роль преобразований Меллина в теории алгебраических функций впервые была отмечена самим Я.Меллином в работе [12], где приведено интегральное представление и разложение в ряд Тейлора для ветви главного решения алгебраического уравнения

$$y^{m_{n+1}} + x_n y^{m_n} + \cdots + x_1 y^{m_1} - 1 = 0, 0 < m_1 < \cdots < m_n < m_{n+1}. \quad (0.2)$$

Цель бакалаврской работы – исследовать многомерное фундаментальное соответствие для преобразования Меллина алгебраических функций. Более точно, рассматривается преобразование Меллина$\mathcal{M}[y](z)$ главного решения $y(x)(y(0) = 1)$ алгебраического уравнения (0.2).

Основным результатом работы является Теорема 4.1, в которой представлено соответствие между:

- множеством вершин $\{v^{(j)}\}$ многогранника $U \subset \mathbb{R}^n$, определяющего область аналитичности прямого преобразования Меллина главного решения алгебраического уравнения (0.2);
- множеством всех подмножеств из n элементовмножества полярных гиперплоскостей преобразования Меллина $\mathcal{M}[y](z)$;
- степенными разложениями $\{\sigma^{(j)}(x)\}$, представляющими аналитические продолжения главного решения алгебраического уравнения(0.2).

В основе исследования лежит интегральное представление Меллина-Барнса, предложенное в [12] и детально изученное в [1]. Вычисление интеграла проведено с помощью техники теории многомерных вычетов (см., например,[3]).

1 Фундаментальное соответствие в одномерном случае

1.1 Прямое преобразование Меллина. Фундаментальная полоса

Определение 1.1.*Преобразованием Меллина* функции $f(x)$, определенной на полуоси $x \geq 0$, называется функция

$$\mathcal{M}[y](z) = \int_{0}^{+\infty} f(x)x^{z-1}\,dx, \tag{1.1}$$

где $x^z = e^{z \ln x}, x > 0$.

Асимптотическое поведение функции $f(x)$ в нуле и бесконечности определяет область, в которой преобразование Меллина голоморфно. Об этом говорит теорема.

Теорема 1.1.[7] Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x > 0$ и удовлетворяет оценкам:

$$|f(x)| \leq C_1 x^{-\alpha}, 0 < x \leq 1, \tag{1.2}$$
$$|f(x)| \leq C_1 x^{-\beta}, 1 < x \leq \infty,$$

где $\alpha < \beta$. Тогда преобразование Меллина является функцией, голоморфной в полосе $\alpha < Re\, z < \beta$.

Определение 1.2. *Фундаментальной полосой* преобразования Меллина называется наибольшая открытая полоса $\langle\alpha, \beta\rangle = \{\alpha < Re\, z < \beta\}$, в которой интеграл (1.1) сходится.

Согласно Теореме 1.1, фундаментальная полоса преобразования Меллина функции $f(x)$ определяется показателями α и β условия (1.2).

1.2 Прямое фундаментальное соответствие

Опишем соответствие между асимптотическими разложениями функции оригинала $f(x)$ и сингулярными разложениями ее преобразования Меллина .

Пусть $M \subset \mathbb{C}, a -$ предельная точка M.

Определение 1.4. Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}, n = 0,1,2 \dots, x \in M$, называется *асимптотической последовательностью* (при $x \to a, x \in M$), если для любого n

$$\varphi_{n+1}(x) = o\big(\varphi_n(x)\big), x \to a, x \in M.$$

Определение 1.5. Пусть $\{\mathrm{\varphi_n(x)}\}$ асимптотическая последовательность при $\mathrm{x \to a, x \in M}$. Формальный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x), \;\; a_n = const, \tag{3.3}$$

называется *асимптотическим разложением функции*$f(x)$, если для любого $\mathrm{N} \geq 0$

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\varphi_N)\,, x \to a, x \in M.$$

Ряд (1.3) называют также *асимптотическим разложением для функции* и используется обозначение

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)\,, x \to a, x \in M.$$

Заметим, что асимптотический ряд может быть расходящимся. Эта возможность заложена в определении. Разумеется, сходящиеся ряды также являются асимптотическими.

Теорема 1.2. [10] Пусть функция $f(x)$имеет преобразование Меллина $\mathcal{M}[y](z)$ с непустой фундаментальной полосой $\alpha < \mathcal{R}e\, z < \beta$. Предположим, что $f(x)$имеет следующие разложения:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^{\alpha_k}, x \to 0, \tag{1.4}$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} d_k x^{\beta_k}, x \to \infty, \tag{1.5}$$

где $\alpha_k \to +\infty$, $\beta_k \to -\infty$. Тогда преобразование Меллина $\mathcal{M}[y](z)$есть мероморфная функция во всей комплексной плоскости с полюсами в точках $-\alpha_k$ и $-\beta_k$:

$$M[f](z) \sim \frac{c_k}{z+\alpha_k}, z \to -\alpha_k,$$

$$M[f](z) \sim -\frac{d_k}{z+\beta_k}, z \to -\beta_k.$$

2 Многомерные преобразования Меллина

2.1 Предварительные сведения

Определимn-*мерное комплексное пространство*. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Его точки это упорядоченные наборы$2n$ вещественных чисел $(x_1, \dots, x_{2n})$. Рассмотрим в нем следующую структуру. Положим $z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$. Обозначим $x_{n+\nu} = y_\nu$, так что $z_\nu = x_\nu + iy_\nu, \nu = 1, \dots, n$. Пространство, точки которого представляют собой упорядоченные наборы из n комплексных точек $z = (z_1, \dots, z_n)$, называют *n-мерным комплексным пространством* и обозначают $\mathbb{C}^n$.

Также нам понадобится понятие *трубчатой области* в $\mathbb{C}^n$. Область, в которую вместе с каждой ее точкой $z^0 = \{z_\nu^0\}$ входит и точка $z = \{z_\nu^0 + iy_\nu\}, -\infty < y_\nu < \infty$, называется трубчатой областью. Трубчатую область можно записать в виде $T = U + i\mathbb{R}^n(y)$, где U –область в$\mathbb{R}^n$.

Напомним, что из себя представляет риманова поверхность функции$Ln\, z$. Функция$Ln\, z$ является многозначной и задается формулой:

$$Ln\, z = ln|z| + i\mathrm{arg}z,$$

где значение $\mathrm{arg}z$определяется по формуле: $\mathrm{arg}z = (\mathrm{arg}z)_0 + 2\pi k,\ -\pi < (\arg z)_0 < \pi, k \in \mathbb{Z}$.Таким образом, функция $Ln\, z$ является многозначной за счет многозначности ее аргумента. Она имеет точки ветвления 0 и ∞. Рассмотрим областьD, которая представляет собой плоскость $\mathbb{C}$, с разрезом вдоль луча $(-\infty; 0]$. Обозначим верхний берег разреза этой плоскостиl^+, нижний берег –l^-. В этой области функция распадается на бесконечное число ветвей:

$$Ln\, z = ln|z| + i(\mathrm{arg}z)_0 + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим бесконечное множество $\{\mathrm{D}_k\}$ экземпляров D с разрезами $l_k^\pm$. Пусть $z = x < 0$, тогда

$$(Lnx)_k = ln|x| + i\pi + i2\pi k = ln|x| + i(2k+1)\pi, x \in l_k^+,$$

$$(Lnx)_k = ln|x| - i\pi + i2\pi k = ln|x| + i(2k-1)\pi, x \in l_k^-.$$

«Склеим» берега l_k^+ и l_{k+1}^-: $(Lnx)_k|_{l_k^+} = (Lnx)_{k+1}|_{l_{k+1}^-}$. Таким образом, получим бесконечную поверхность, на которой $Ln\, z$ будет однозначной функцией. Такая поверхность называется *римановой поверхностью или римановой областьюфункции Lnz* (рис.1).

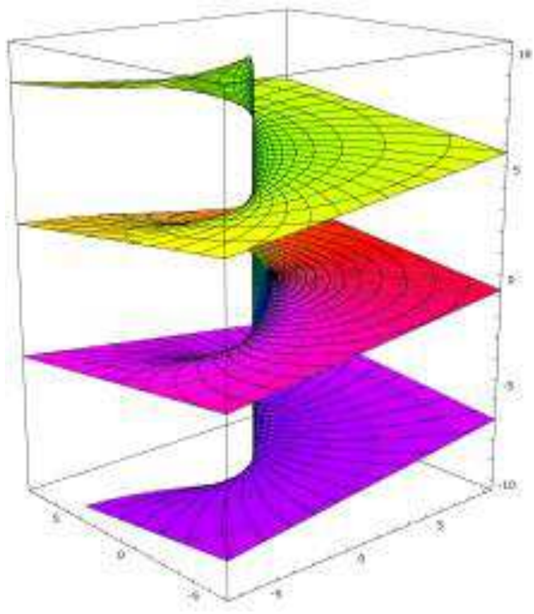

Рисунок 1 - Риманова поверхность функции $f(z) = Lnz$

Введем понятие секториальной области. *Секториальная область* – это подмножество в множестве

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n,$$

являющееся римановой областью над комплексным алгебраическим тором $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^n$. Точки $x = (r, \theta) \in \mathcal{S}(r \in \mathbb{R}_+^n, \theta \in \mathbb{R}^n)$ проектируются в векторы

$$re^{i\theta} = \left(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}\right).$$

Таким образом, *секториальная область над областью*$\Theta \subset \mathbb{R}^n$– это множество вида

$$\mathcal{S}_\Theta = \{x \in \mathcal{S}: \theta \in \Theta\}.$$

2.2 Определение многомерных преобразований Меллина

Прямое преобразование Меллина функции $\Phi(x)$, заданной в ортанте$\mathbb{R}_+^n$(произведении положительных вещественных полуосей), определяется интегралом

$$\mathcal{M}[y](z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(x) x^{z-I} dx,$$

где $x^{z-I} = x_1^{z_1-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{z_n-1}$.

Обратное преобразование Меллина функции $F(z)$, заданной в мнимом подпространстве $a + i\mathbb{R}^n$, a – фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$, определяется следующим интегралом:

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathrm{F}](x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} \mathrm{F}(z) x^{-z} dz,$$

где $x^{-z} = x_1^{-z_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{-z_n}$.

2.3Классы функцийM_Θ^U и W_U^Θ. Теоремы обращения

Введем два класса голоморфных функций от n переменных M_Θ^U и W_U^Θ, между которыми $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{-1}$осуществляют изоморфизм [1]. Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$ переменных u и θ. Выберем в них выпуклые области $U \subset \mathbb{R}^n, \Theta \subset \mathbb{R}^n$, причем Θ ограничена и содержит начало координат: $0 \in \Theta$. Сопоставим области Uтрубчатую область$U + i\mathbb{R}^n$, области Θ – секториальную область$\mathcal{S}_\Theta$.

Классы функций определим следующим образом:

M_{Θ}^{U} – векторное пространство функций $\Phi(x)$, голоморфных в какой либо секториальной области

$$\mathcal{S}_{k\Theta} = \{x \in \mathcal{S}: |\arg x| < k\Theta\}, k > 1,$$

и удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)| \leq C(a)|x^{-a}|\ \forall x \in \mathcal{S}_{k\Theta}, a \in U;$$

W_{U}^{Θ} – векторное пространство функций $\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(u + iv)$голоморфных в трубчатой области $U + i\mathbb{R}^n$ и убывающих в ней экспоненциально по v:

$$|\mathrm{F}(u + iv)| \leq K(u)e^{-kH_{\theta}(v)}, k > 1,$$

где $H_{\Theta}(v) \coloneqq sup_{\theta\in\Theta}\langle\theta, v\rangle$ – опорная функция областиΘ.

Теорема 2.1.[1]Если $\Phi(x) \in M_{\Theta}^{U}$, то ее преобразование Меллина существует, принадлежит классу W_{U}^{Θ} и справедлива формула:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} x^{-z} dz \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(\zeta)\zeta^{z-I} d\zeta = \Phi(x), x \in \mathcal{S}_{k\Theta}, a \in U.$$

Теорема 2.2. [1]Если $\mathrm{F}(z) \in W_{U}^{\Theta}$, то ее обратное преобразование Меллина существует, принадлежит классу M_{Θ}^{U} и справедлива формула:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} x^{z-1} dx \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} \mathrm{F}(t)x^{-t} dt = \mathrm{F}(z), z \in a + i\mathbb{R}^n, a \in U.$$

3 Применение преобразования Меллина к решению алгебраических уравнений

3.1 Алгебраическая функция

Алгебраическая функция – функция вида $y = f(x_1, \dots, x_n)$ переменных $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющая уравнению

$$F(y, x_1, \dots, x_n) = 0, \tag{3.1}$$

где F – неприводимый многочлен от переменных $y, x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из некоторого поля $\mathbb{K}$ [4]. Многочлен $F(y, x_1, \dots, x_n)$ часто записывают по степеням переменного y, так что уравнение (3.1) приобретет вид

$$P_k(x_1, \dots, x_n)y^k + P_{k-1}(x_1, \dots, x_n)y^{k-1} + \dots + P_0(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где $P_k(x_1, \dots, x_n), \dots, P_0(x_1, \dots, x_n)$ – многочлены от $x_1, \dots, x_n$, причем $P_k(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$. Число k называется степенью алгебраической функции. В случае $k = 1$алгебраическая функция может быть представлена в виде отношения

$$y = -\frac{P_0(x_1, \dots, x_n)}{P_1(x_1, \dots, x_n)}$$

и называется рациональной функцией от $x_1, \dots, x_n$. При $k = 2, 3, 4$ функция может быть выражена через квадратные и кубические. При $k > 4$ это, вообще говоря, невозможно.

Исторически сложились три подхода к исследованиюалгебраических функций: теоретико-функциональный, арифметико-алгебраический и алгебро-геометрический. Первое направление в теории алгебраических функций одного переменного связано с изучением алгебраических функций над полем комплексных чисел и рассмотрением их как мероморфных функций на римановых поверхностях и комплексных многообразиях.

Над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраическая функция одного переменного $y = f(x)$ является k-значной аналитической функцией. Если обозначить через $D(x)$дискриминант многочлена

$$F(x, y) = P_k(x)y^k + P_{k-1}(x)y^{k-1} + \dots + P_0(x) = 0, \tag{3.2}$$
$$P_k(x) \not\equiv 0$$

для которого $F(x, f(x)) = 0$,

и составить уравнение

$$P_k(x)D(x) = 0,$$

то корни $x_1, \dots, x_m$ этого уравнения называются *критическими значениями* алгебраической функции $y = f(x)$. Дополнительное множество $G = \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ называется *некритическим множеством*. Для любой точки $x_0 \in G$ уравнение (3.2) имеет kразличных корней $y_0^1, \dots, y_0^k$, причем выполняются условия

$$\frac{\partial F\left(x_0, y_0^j\right)}{\partial y} \neq 0, j = 1, \dots, k.$$

В этой ситуации применима теорема о неявной функции, согласно которой в окрестности точки x_0 существует kоднозначных аналитических функций$f_0^1(x), \dots, f_0^k(x)$, удовлетворяющих условиям

$$f_0^j(x_0) = y_0^j, F\left(x, f_0^j(x)\right) = 0$$

и разлагающихся в сходящие ряды

$$f_0^j(x) = y_0^j + \alpha_1^j(x - x_0) + \alpha_2^j(x - x_0) + \cdots. \quad (3.3)$$

Таким образом, для каждой точки $x_0 \in G$ строится k элементов аналитических функций. Для любых двух точек$x_1, x_2 \in G$ любые элементы $f_1^i(x)$ и $f_2^j(x)$ с центрами, соответственно, в x_1 и x_2, получаются друг из друга аналитическим продолжением вдоль некоторой кривой, лежащей в G. В частности, таким способом связаны и любые два элемента с одним центром.

3.2 Интеграл Меллина-Барнса

Под *n-мерным интегралом Меллина-Барнса* будем понимать интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\langle a^j, z\rangle + b_j)}{\prod_{k=1}^{q} \Gamma(\langle c^k, z\rangle + d_k)} x_1^{-z_1} \dots x_n^{-z_n} dz, \tag{3.4}$$

где $a^j, c^k \in \mathbb{R}^n$ – вещественные параметры, $b_j, d_k \in \mathbb{R}$, а точка $\gamma \in \mathbb{R}^n$ выбрана так, что вертикальное подпространство интегрирования не пересекает полюсы подынтегральной функции, состоящие из семейства плоскостей

$$\langle a^j, z\rangle + b_j = -\nu, \nu = 0,1, \dots, j = 1, \dots, p.$$

Метод вычисления интеграла (3.4) был представлен в [2], [3]. Основой метода является *принцип разделяющихся циклов* в теории многомерных вычетов. В формулировке этого принципа речь идет о вычислении интегралов

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Delta_g} \frac{h(z)dz}{f_1(z) \cdot \ldots \cdot f_n(z)} \tag{3.5}$$

типа Гротендика, где полюсы подынтегральной мероморфной формы ассоциированы с голоморфным собственным отображением $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, а множество интегрирования Δ_g есть остов полиэдра $\prod_g$, ассоциированного с другим голоморфным собственным отображением $g = (g_1, \dots, g_n): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. В случае, когда отображения f и g совпадают, то в качестве полиэдра $\prod_f$ берется множество

$$\prod_f = \{z: |f_1(z)| < r_1, \dots, |f_n(z)| < r_n\}. \tag{3.6}$$

*Вычет Гротендика*подынтегральных форм ω в (3.5) в изолированном нуле

$a \in f^{-1}(0)$ отображения f определяется интегралом

$$res_{f,a}\omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_a(f)} \omega,$$

где $\Gamma_a(f)$ – локальный цикл, определенный в малой окрестности U_a точки f в виде трубки:

$$\Gamma_a(f) = \{z \in U_a: |f_1(z)| = \varepsilon_1, \dots, |f_n(z)| = \varepsilon_n\}, \varepsilon_j \ll 1.$$

Вслучае,когдаa–простойнульотображенияf (т.е.якобианJ_fнеравеннулю в точке a), данныйвычет вычисляется по формуле

$$res_{f,a}\omega = \frac{h(a)}{J_f(a)}. \tag{3.7}$$

В одномерном случае формула (3.7) – это хорошо известная формула для вычета мероморфной функции в простом полюсе. Остов полиэдра $\prod_f$ задается в виде

$$\Delta_f = \{z: |f_1(z)| = r_1, \dots, |f_n(z)| = r_n\}. \tag{3.8}$$

Замена лишь одного неравенства $< r_j$ на равенство $= r_j$ в (3.6) определяет j-ю гипергрань для $\prod_f$.

В вопросе о представлении интеграла (3.5) суммой вычетов Гротендика в точках $a \in f^{-1}(0) \cap \prod_g$ важную роль играет следующее понятие.

Определение 3.1. Полиэдр $\prod_g$ называется согласованным с семейством гиперповерхностей (дивизоров)$D_j = \{f_j = 0\}, j = 1, \dots, n,$ если j–я гипергрань полиэдра $\prod_g$ не пересекает D_j для всех j от 1 до n. Если $\prod_g$ согласован с дивизорами $D_1, \dots, D_n$, то будем говорить, что его остов Δ_g разделяет эти дивизоры.

Теорема 3.1.(принцип разделяющих циклов)[3]Если полиэдр $\prod_g$ ограничен и согласован с семейством полярных дивизоров D_j , то интеграл (3.5) равен сумме вычетов Гротендика в области $\prod_g$.

В случае неограниченных полиэдров, кроме уравнения согласованности полиэдра и семейства полярных дивизоров, надо требовать достаточно быстрого убывания в подынтегральной форме $\prod_g$, подобно тому как это делается в классической лемме Жордана, где в качестве $\prod_g$ выступает полуплоскость. Это условие описано в [3]. Оно состоит в *неконфлоэнтности*интеграла (3.4)

$$\sum_{j=1}^{p} a^j = \sum_{k=1}^{q} c^k.$$

Первоначально заданный интеграл (3.4) можно привести к каноническому виду (3.5) следующим образом. Вертикальное подпространство интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^n$ можно интерпретировать как остов некоторого полиэдра, причем в случае $n = 1$ оно может быть остовом лишь двух полиэдров – левой и правой полуплоскости с разделяющей линией $\gamma + i\mathbb{R}^n$. Однако в случае $n > 1$ это подпространство может служить остовом бесконечного числа полиэдров, в нашем случае задача состоит в том, чтобы разбить все множество полярных гиперплоскостей на nдивизоров и одновременно подклеить к $\gamma + i\mathbb{R}^n$ полиэдр, согласованный с этим семейством дивизоров В качестве полиэдров будем брать следующие:

$$\prod_g = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \Re\, g_j(z) < r_j, j = 1, \dots, n\right\},$$

где $g_j(z)$ – линейные функции с вещественными коэффициентами. Будем считать эти функции линейно независимыми.

3.3Преобразование Меллина решения алгебраических уравнений

Рассмотрим общее приведенное алгебраическое уравнение

$$y^{m_{n+1}} + x_n y^{m_n} + \cdots + x_1 y^{m_1} - 1 = 0, 0 < m_1 < \cdots < m_n < m_{n+1} \qquad (3.9)$$

с переменными коэффициентами $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Ветвь решения *y(x)* уравнения (3.9), выделенную условием $y(0) = 1$, будем называть *главным решением* уравнения.

Преобразование Меллина главного решения определяется интегралом

$$\mathcal{M}[y](z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} y(x) x^{z-I}\, dx, \qquad (3.10)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$, $x^{z-I} = x_1^{z_1-1} \dots x_n^{z_n-1}$. Интеграл (3.10) вычислен в следующем утверждении.

Предложение 3.2. [1]Преобразование Меллина главного решения уравнения (3.9) выражается через значения гамма-функций:

$$\mathcal{M}[y](z) = \frac{1}{m_{n+1}} \frac{\Gamma(z_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(z_n) \Gamma\left(\frac{1}{m_{n+1}} - \frac{1}{m_{n+1}} \langle \alpha, z \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_{n+1}} + \frac{1}{m_{n+1}} \langle \beta, z \rangle + 1\right)}, \qquad (3.11)$$

где $\alpha = (m_1, \dots, m_n), \beta = (m_{n+1} - m_1, \dots, m_{n+1} - m_n)$. Интеграл (3.10) сходится для всех $z \in \mathring{U} + i\mathbb{R}^n$, где

$$U = \{u \in \mathbb{R}_{\geq}^n : \langle \alpha, u \rangle \leq 1\}. \qquad (3.12)$$

Теорема 3.1. [1]Главное решение уравнения (3.9) представляется интегралом Меллина-Барнса следующего вида:

$$y(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} \frac{1}{m_{n+1}} \frac{\Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_n) \Gamma\left(\frac{1}{m_{n+1}} - \frac{1}{m_{n+1}} \langle \alpha, z \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_{n+1}} + \frac{1}{m_{n+1}} \langle \beta, z \rangle + 1\right)} x^{-z}\, dz, \qquad (3.13)$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathring{U}$. Область сходимости интеграла (3.13) в переменных $\theta = \arg x$ определяется неравенствами

$$|\theta_\nu| < \frac{\pi m_\nu}{d}, \left|m_j \theta_k - m_k \theta_j\right| < \pi m_j, j, k \in 1, \dots, n, j < k. \tag{3.14}$$

4 Многомерное фундаментальное соответствие

Для удобства формулировки результата перепишем интеграл Меллина-Барнса (3.13) в следующем виде:

$$y(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a + i\mathbb{R}^n} \frac{1}{m_{n+1}} \frac{\Gamma\big(l_1(z)\big) \cdot \ldots \cdot \Gamma\big(l_n(z)\big)\Gamma\big(l_{n+1}(z)\big)}{\Gamma(l_{n+1}(z) + |z| + 1)} x^{-z} dz, \tag{4.1}$$

где $l_1(z) = z_1, \dots ,\ l_n(z) = z_n,\ l_{n+1}(z) = \frac{1}{m_{n+1}} - \frac{1}{m_{n+1}} \langle \alpha, z \rangle, |z| = z_1 + \dots + z_n$.

Кроме того, введем целочисленные векторы

$$\alpha^{[j]} = \Bigg(m_1, \dots, \underbrace{m_{n+1}}_{j}, \dots, m_n\Bigg), j = 1, \dots, n$$

и линейные функции

$$l_{n+1}^{[j]}(z) = \frac{1}{m_j} - \frac{1}{m_j} \langle \alpha^{[j]}, z \rangle, j = 1, \dots, n.$$

Функцию $l_{n+1}(z)$ для единообразия будем обозначать $l_{n+1}^{[n+1]}(z)$, имея ввиду, что $\alpha^{[n+1]} = \alpha$.Многогранник U – это n-мерный симплекс. Перенумеруем его вершины$v^{(1)}, \dots, v^{(n)}, v^{(n+1)}$ таким образом, что

$$v^{(j)} = \left(0, \dots, \frac{1}{m_j}, \dots, 0\right), j = 1, \dots, n,$$

$$v^{(n+1)} = (0, \dots, 0).$$

Нам понадобится следующее определение.

Определение 4.1.Полиэдральнымконусом в $\mathbb{R}^n$ называется конус C, порожденный конечным набором векторов $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$, а именно,

$$C = C(u_1, \dots, u_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i : \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Пусть $C^{(j)}$ – минимальный конус с вершиной $v^{(j)} \in U$ такой, что $U \subset C^{(j)}$. Противоположный конус к $C^{(j)}$обозначим $-C^{(j)}$.

Теорема 4.1.Каждой вершине$v^{(j)}, j = 1, \dots, n$ многогранника Uсоответствует:

1) представление преобразования Меллина $\mathcal{M}[y](z)$ вида

$$\mathcal{M}^{(j)}(z) = \Phi^{(j)}(z) \prod_{k \neq j} \Gamma\big(l_k(z)\big),$$

где $\Phi^{(j)}(z)$ – функция, голоморфная в трубчатой области $-\mathring{C}^{(j)} + i\mathbb{R}^n$;

2) рядЛорана-Пюизо

$$\sigma^{(j)}(x) = x_j^{-\frac{1}{m_j}} + \frac{1}{m_j} \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \prod_{s=1}^{|\nu|-1} \left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu) - s \right) x^{\beta^j(\nu)}, j = 1..n,$$
$$\sigma^{(n+1)}(x) = 1 + \frac{1}{m_{n+1}} \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \prod_{s=1}^{|\nu|-1} (l_{n+1}(-\nu) - s)\, x^{\nu}, \tag{4.2}$$

где$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in N^n$,$|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$,$\beta^j(\nu) = \left(\nu_1, \dots, -l_{n+1}^{[j]}(-\nu), \dots, \nu_n\right)$.

Ряды $\sigma^{(1)}(x), \dots, \sigma^{(n)}(x)$ являются аналитическим продолжением ряда Тейлора $\sigma^{(n+1)}(x)$ главного решения *y(x)* уравнения (3.9).

Доказательство. Обозначим подынтегральнуюформуинтеграла (4.1) через ω. Форма ω имеет $n + 1$семейств полярныхгиперплоскостей:

$L_1^{\nu} = \{l_1(z) = -\nu\}$,

……………………

$L_n^\nu = \{l_n(z) = -\nu\}$,

$L_{n+1}^\nu = \{l_{n+1}(z) = -\nu\}, \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Зафиксируем вершину $v^{(j)}$симплекса U. Сформируем n полярных дивизоров$D_1^{(j)}, \dots, D_n^{(j)}$ формы ω. Если $j = n+1$, то дивизор $D_k^{(n+1)}$ $(k = 1, \dots, n)$включает семействоL_k^ν, при этом семейство L_{n+1}^ν может быть добавлено к любому из $D_k^{(n+1)}$. Если $j \neq n+1$, то дивизор $D_k^{(j)}$ $(k \neq j)$включает L_k^ν, дивизор $D_j^{(j)}$включает L_{n+1}^ν. Семейство L_j^νможет быть добавлено в любойиз дивизоров$D_k^{(j)}$, при $k \neq j$.

Обозначим через $\pi^{(j)}$ сдвиг конуса $-C^{(j)}$с вершиной в точке $a \in \mathrm{U}$ (a – произвольная, но фиксированная). В конусе $\pi^{(j)}$ пересекаются гиперплоскости n семейств: $L_1^\nu, \dots [j] \dots, L_{n+1}^\nu$, то есть полярные множества гамма-функций $\Gamma\big(l_k(z)\big), k \neq j$. Таким образом, относительно вершины $v^{(j)}$Г-множители преобразования Меллина $\mathcal{M}[y](z)$ перегруппировываются следующим образом:

$$\mathcal{M}[y](z) = \mathcal{M}^{(j)}(z) = \Phi^{(j)}(z) \prod_{k \neq j} \Gamma\big(l_k(z)\big),$$

где $\Phi^{(j)}(z) = \frac{1}{m_{n+1}} \frac{\Gamma\left(l_j(z)\right)}{\Gamma(l_{n+1}(z)+|z|+1)}$. В области $\mathring{\pi}^{(j)} + i\mathbb{R}^n$ функция $\Phi^{(j)}$ голоморфна.

Рассмотрим полиэдр $\Pi^{(j)} = \mathring{\pi}^{(j)} + i\mathbb{R}^n$. Он согласован с соответствующим семейством полярных дивизоров $D_1^{(j)}, \dots, D_n^{(j)}$.Вычислим интеграл (4.1) как сумму вычетов по всем точкам$z = (z_1, \dots, z_n) \in \Pi^{(j)}$, в которых пересекаются полярные гиперплоскости множества функций$\Gamma\big(l_k(z)\big), k \in \{1, \dots [j] \dots, n+1\}$. Эти точки параметризируются в виде:

$$z_1 = -\nu_1,$$

…………………………..

$$z_j = \frac{1}{m_j}\left(1 + \langle \alpha^{[j]}, \nu \rangle\right)$$

…………………………..

$$z_n = -\nu_n, \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in (\mathbb{N} \cup 0)^n.$$

Вычет формы ω в точке $z = z(\nu)$ равен:

$$\underset{z(\nu)}{res}\, \omega = \frac{1}{m_j} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m_j}\left(1 + \langle \alpha^{[j]}, \nu \rangle\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_j}(1 + \langle \alpha^{[j]}, \nu \rangle) - |\nu| + 1\right)} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_j^{-\frac{1 + \langle \alpha^{[j]}, \nu \rangle}{m_j}} \cdot \dots \cdot x_n^{\nu_n},$$

где $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n, \nu! = \nu_1! \cdot \dots \cdot \nu_n!$.

Заметим, что $\frac{1}{m_j}\left(1 + \langle \alpha^{[j]}, \nu \rangle\right) = l_{n+1}^{[j]}(-\nu)$. Введем векторы

$$\beta^{(j)}(\nu) = \left(\nu_1, \dots, -l_{n+1}^{[j]}(-\nu), \dots, \nu_n\right)$$

и

$$\beta^{(n+1)}(\nu) = (\nu_1, \dots, \nu_n).$$

Суммируя по всем точкам $z = z(\nu) \in \Pi^{(j)}$, при $j \in \{1, \dots, n\}$ получим ряд:

$$\sigma^{(j)}(x) = x_j^{-\frac{1}{m_j}} + \frac{1}{m_j}\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}\frac{\Gamma\left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu)\right)x^{\beta_j(\nu)}}{\Gamma\left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu)-|\nu|+1\right)}$$

$$= x_j^{-\frac{1}{m_j}} + \frac{1}{m_j}\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}\frac{\Gamma\left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu)\right)x^{\beta_j(\nu)}}{\Gamma\left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu)-|\nu|\right)\left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu)-|\nu|\right)}$$

$$= x_j^{-\frac{1}{m_j}} + \frac{1}{m_j}\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}\frac{\prod_{s=1}^{|\nu|-1}\left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu)m_j - sm_j\right)}{m_j^{\,|\nu|-1}}x^{\beta_j(\nu)}$$

$$= x_j^{-\frac{1}{m_j}} + \frac{1}{m_j}\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}\prod_{s=1}^{|\nu|-1}\left(l_{n+1}^{[j]}(-\nu)-s\right)x^{\beta_j(\nu)}.$$

Если $j = n + 1$, то ряд имеет вид

$$\sigma^{(j)}(x) = 1 + \frac{1}{m_{n+1}}\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}\prod_{s=1}^{|\nu|-1}(l_{n+1}(-\nu)-s)\,x^{\nu}.$$

Таким образом, мы получили ряды$\sigma^{(1)}(x), \dots, \sigma^{(n+1)}(x)$, среди которых ряд $\sigma^{(n+1)}(x)$ есть ряд Тейлора для главного решения уравнения (3.9), выписанный еще Меллином в [12]. Область сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего главное решение, задается в терминах аргументов переменных коэффициентов x_i, то есть является секториальной областью. Поэтому ряды $\sigma^{(1)}(x), \dots, \sigma^{(n)}(x)$, сходящиеся в поликруговых областях, являются аналитическими продолжениями ряда $\sigma^{(n+1)}(x)$. В роли инструмента аналитического продолжения выступает интеграл Меллина-Барнса (4.1).

Теорема доказана. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе изучено многомерное фундаментальное соответствие для преобразования Меллина алгебраических функций. А именно:

- исследован набор полярных гиперплоскостей преобразования Меллина главного решения алгебраического уравнения;
- найдены разложения Лорана-Пюизо, представляющие аналитические продолженияглавного решения алгебраическогоуравнения;
- установлено соответствие междуполного набора полярных гиперплоскостей преобразования Меллина и указанными разложениями;
- в частном случае реализована процедура вычисления коэффициентов и носителей степенных рядов в системе компьютерной алгебры MAPLE.

Список использованных источников

1. Антипова, И.А. Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений [Текст] / И.А. Антипова // Матем. сб. – 2007. – Т. 198. – № 4. – С. 3–20.
2. Антипова, И. А. Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пюизо, Тр. /Антипова, И. А., Е. Н. Михалкин, //МИАН,2012,– С. 9–19.
3. Антипова И. А. Интегральные преобразования: учеб. пособие / И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, А. К. Цих. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2018. – 58 с.
4. Виноградов, И. М. Математическая энциклопедия. Том 1.— М.: Сов. энцикл., 1977—1985, 576 стр.
5. Жданов, О.Н. Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов [Текст] / О.Н. Жданов, А.К. Цих // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т.39. – № 2. – С. 282–298.
6. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ [Текст]: учебник для университетов по специальностям "Математика", "Механика": [в 2 ч.] / Б. В. Шабат; Московский университет [МГУ] им. М.В. Ломоносова. Ч. 2: Функции нескольких переменных. — 2004
7. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Лаборатория знаний, 2016. — 300 с.
8. Aguilar, J.-Ph. Option Pricing Models Driven by the Space-Time Fractional Diffusion: Series Representation and Applications/ J.-Ph. Aguilar, J.Korbel// Fractal Fract— 2018, 2(1), P. 15.
9. Erkinger,D. Refined swampland distance conjecture and exotic hybrid Calabi-Yaus/ D.Erkinger, J. Knapp // arXiv—1905.05225v1.
10. FlajoletPh. Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums/ Ph.Flajolet, X.Gourdon, Ph. Dumas // Theoretical Computer Science Is. 144 – 1995 – P. 3-58.

11. Knuth D.E. The Art of Computer Programming, Vol. 3: Sorting and Searching – Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
12. Mellin, Hj. Résolution de l’équationalgébriquegénéraleà l’aide de la fonction gamma // C.R. Acad. Sci., ParisSér. I Math. – 1921. – V. 172. – P. 658–661.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Реализация вычислений коэффициентов и носителей степенных рядов в системе компьютерной алгебры MAPLE:

restart

With(LenearAlgebra);

With(VectorCalculus);

With(plots);

$\alpha \coloneqq Vector([m_1, m_2]);$

$\beta \coloneqq Vector([d - m_1, d - m_2]);$

$t1 \coloneqq DotProduct(\alpha, z);$

$t2 \coloneqq DotProduct(\beta, z);$

$z_1 \coloneqq -v_1; z_2 \coloneqq -v_2;$

$z \coloneqq Vector([z_1, z_2]);$

$d \coloneqq 3;\ m_1 \coloneqq 1;\ m_2 \coloneqq 2; j \coloneqq 1; n \coloneqq 0; t \coloneqq 5;$

for *k***from** 0 **to***t***do**$n := n + k$**end do**;

$p1 := 0$;**for** *k***from** 0 **to***t***do for**v_1**from** 0 **to** k **do**$v_2 \coloneqq k - v_1;$

$p1 \coloneqq p1 + \frac{(-1)^{v_1+v_2}}{v_1! \cdot v_2! \cdot d^{v_1+v_2-1}} \cdot mul(1 + m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - s \cdot d, s = 1..v_1 + v_2 - 1) \cdot x_1^{v_1} \cdot x_2^{v_2}$**end do end do**;

$p2 := 0$;**for** *k***from** 0 **to***t***do for**v_2**from** 0 **to** k **do**$v_3 \coloneqq k - v_1;$

$p2 \coloneqq p2 + \frac{(-1)^{v_3+v_2}}{v_3! \cdot v_2! \cdot d^{v_3+v_2-1}} \cdot mul(1 + d \cdot v_3 + m_2 \cdot v_2 - s \cdot m_1, s = 1..v_3 + v_2 - 1) \cdot x_1^{\frac{-(1+d \cdot v_3 + m_2 \cdot v_2)}{m_1}} \cdot x_2^{v_2}$**end do end do**;

$p3 := 0$;**for** *k***from** 0 **to***t***do for**v_1**from** 0 **to** k **do**$v_3 \coloneqq k - v_1;$

$p3 \coloneqq p3 + \frac{(-1)^{v_3+v_1}}{v_3! \cdot v_1! \cdot d^{v_3+v_1-1}} \cdot mul(1 + d \cdot v_3 + m_1 \cdot v_1 - s \cdot m_2, s = 1..v_3 + v_1 - 1) \cdot x_1^{v_1} \cdot x_2^{\frac{-(1+d \cdot v_3 + m_1 \cdot v_1 - s \cdot m_2)}{m_2}}$ **end do end do**;

$$print\left(\frac{p1}{d}\right);\ print\left(\frac{p2}{m_1}\right);\ print\left(\frac{p3}{m_2}\right);$$

$$1-\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{9}x_2^2+\frac{1}{9}x_1x_2-\frac{2}{81}x_2^3+\frac{1}{27}x_1^2x_2+\frac{1}{81}x_1^3-\frac{5}{243}x_1x_2^3+\frac{1}{243}x_1^4$$
$$++\frac{2}{729}x_2^5+\frac{7}{729}x_1x_2^4-\frac{10}{729}x_1^3x_2^2-\frac{5}{729}x_1^4x_2;$$

$$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1^4}-\frac{x_2}{x_1^3}+\frac{3}{x_1^7}+\frac{5x_2}{x_1^6}+\frac{2x_2^2}{x_1^5}-\frac{12}{x_1^{10}}-\frac{28x_2}{x_1^9}-\frac{21x_2^2}{x_1^8}-\frac{5x_2^3}{x_1^7}+\frac{55}{x_1^{13}}+\frac{165x_2}{x_1^{12}}$$
$$+\frac{180x_2^2}{x_1^{11}}++\frac{84x_2^3}{x_1^{10}}+\frac{14x_2^4}{x_1^9}-\frac{273}{x_1^{16}}-\frac{1001x_2}{x_1^{15}}-\frac{1430x_2^2}{x_1^{14}}-\frac{990x_2^3}{x_1^{13}}$$
$$--\frac{330x_2^4}{x_1^{12}}-\frac{42x_2^5}{x_1^{11}};$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{2x_2^2}-\frac{1}{2}\frac{x_1}{x_2}+\frac{5}{4x_2^{7/2}}+\frac{3}{2}\frac{x_1}{x_2^{5/2}}+\frac{1}{4}\frac{x_1^2}{x_2^{3/2}}-\frac{4}{x_2^5}-\frac{6x_1}{x_2^4}-\frac{2x_1^2}{x_2^3}+\frac{231}{16x_2^{13/2}}$$
$$+\frac{105}{4}\frac{x_1}{x_2^{11/2}}++\frac{105}{8}\frac{x_1^2}{x_2^{9/2}}+\frac{5}{4}\frac{x_1^2}{x_2^{7/2}}-\frac{1}{16}\frac{x_1^4}{x_2^{5/2}}-\frac{56}{x_2^8}-\frac{120x_1}{x_2^7}--\frac{80x_1^2}{x_2^6}$$
$$-\frac{16x_1^3}{x_2^5}.$$

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
__________ А.А. Кытманов
8 июля 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 Прикладная математика

Многомерное фундаментальное соответствие для
преобразования Меллина алгебраических функций

Руководитель 05.07.19 Профессор каф. ПМКБ, д.-р. физ.-мат. наук И.А. Антипова

Выпускник 05.07.19 А.В. Малькaнова

Красноярск 2019