

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий

Кафедра «Прикладная математика и компьютерная безопасность»

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ А.А. Кытманов \_\_\_\_\_

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

01.03.04 Прикладная математика

Построение минимальных кубатурных формул по поверхности тора  
методом воспроизводящего ядра

Руководитель	_____	доцент каф. ПМКБ, канд. физ.-мат. наук	И.М. Федотова
Выпускник	_____	студент группы КИ15-18Б	А.Н. Водальчук

Красноярск 2019

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Построение минимальных кубатурных формул по поверхности тора методом воспроизводящего ядра» содержит 47 страниц текстового документа, 14 использованных источников, 10 рисунков, 1 приложение.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, ВОСПРОИЗВОДЯЩЕЕ ЯДРО, ПОВЕРХНОСТЬ ТОРА, НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, МЕТОД НЬЮТОНА, MAPLE 12.

Целью работы является построение минимальных кубатурных формул второй степени точности для приближенного интегрирования по поверхности тора, используя метод воспроизводящего ядра.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи.

- изучить теоретический материал по выбранной теме;
- овладеть алгоритмом приближенного интегрирования;
- запрограммировать решение нелинейной системы уравнений для вычисления узлов и коэффициентов кубатурной формулы.

В ходе выполнения данной работы были построены минимальные кубатурные формулы по поверхности тора методом воспроизводящего ядра. Для этого в первой части работы был разобран весь необходимый теоретический материал. Во второй части был реализован метод воспроизводящего ядра. В итоге, создана программа для автоматизации нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы в системе компьютерной алгебры Maple 12.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Теоретические сведения .....	7
2 Построение минимальных кубатурных формул для поверхности тора второй степени точности.....	15
2.1 Пример 1 нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы .....	21
2.2 Пример 2 нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы .....	24
2.3 Пример 3 нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы .....	26
3 Проведение экспериментов.....	29
Заключение .....	45
Список использованных источников .....	46
Приложение А .....	48

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время вычислительные технологии находят широкое применение во многих отраслях нашей жизни, тем самым способствуя развитию теории приближенного интегрирования. Интеграл – одно из важнейших понятий математического анализа, а различные методы интегрирования интереснейшая сфера для изучения. Часто встречаются такие примеры, когда точное вычисление определенного интеграла невозможно. Именно поэтому задача о приближенном вычислении определенного интеграла является крайне актуальной.

Основной идеей приближенного интегрирования является замена подынтегральной функции на близкую к ней, интеграл от которой легче вычислить. Обычно это интерполяционный многочлен, он совпадает с заменяемой функцией в некоторых точках  $x_i$  – узлах интерполяции. Если число узлов  $n = 1$ , то формулы приближенного интегрирования называют квадратурными. Если  $n \geq 2$ , то это кубатурные формулы.

Квадратурные формулы появились достаточно давно и используются в настоящее время, это формулы: Гаусса, Чебышева, Ньютона-Котеса и другие.

Кубатурные формулы, наоборот, появились сравнительно недавно, но также нашли широкое применение в различных областях науки и техники.

Общая задача такого приближенного интегрирования – вычисление интеграла с помощью кубатурной формулы

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{\Omega} p(x)f(x)dx = \int_{\Omega} p(x_1, \dots, x_n)f(x_1, \dots, x_n)dx \cong \\ &\cong \sum_{i=1}^N c_i f(x^i) = \sum_{i=1}^N c_i f(x_1^i, \dots, x_n^i) = S(f), \end{aligned}$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – область интегрирования,  $p(x)$  – весовая функция,  $x^i$  – узлы,  $c_i$  – коэффициенты,  $i = 1, \dots, N$ .

Разность между интегралом и кубатурной суммой называется погрешностью кубатурной формулы

$$L[f] = I[f] - S[f]$$

и является линейным ограниченным функционалом в векторном пространстве всех многочленов.

Относительно нормы функционала  $L$  можно поставить задачу оптимизации кубатурной формулы при заданном числе узлов.

Теория кубатурных формул развивалась в работах Н. С. Бахвалова [1], С. Л. Соболева [12], [13] и М. Д. Рамазанова [11].

Будем рассматривать построение формул гауссова типа для поверхности тора в  $\mathbb{R}^3$

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 - a^2)^2 + 4R^2Z^2 - 4R^2a^2 = 0.$$

Существование таких формул зависит от параметров  $a$  и  $R$ .

Таким образом целью данной работы является построение минимальных кубатурных формул для приближенного интегрирования по поверхности тора, используя метод воспроизводящего ядра.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

- изучить теоретический материал по выбранной теме;
- овладеть алгоритмом приближенного интегрирования;
- запрограммировать решение нелинейной системы уравнений для вычисления узлов и коэффициентов кубатурной формулы.

При исследовании данной темы использовались знания из разных областей: математический анализ, численные методы, программирование.

Исследований о существовании минимальных кубатурных формул для поверхности тора не так много, известны минимальные кубатурные формулы

третьей степени точности и любого радиуса и второй степени точности с ограниченным диапазоном радиуса. Именно поэтому выбранное направление можно считать весьма актуальным.

## 1. Теоретические сведения

Для начала введем основные обозначения и определения.

Пусть  $\mathbb{R}$  – множество вещественных чисел;  $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное вещественное пространство;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – некоторое множество;  $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n'}$  – наименьшее алгебраическое многообразие, содержащее  $\Omega$ ;  $k$  – целое неотрицательное число.

$P$  – линейное пространство многочленов от  $n$  переменных с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ ;

$P_k$  – подпространство  $P$ , состоящее из многочленов степени  $\leq k$ ;

$L_k$  – подпространство  $P_k$ , состоящее из четных многочленов при четном  $k$  и нечетных многочленов при нечетном  $k$ ;

$L_k^0$  – подпространство  $L_k$ , состоящее из многочленов с нулевым свободным коэффициентом;

$\mathcal{P}, \mathcal{P}_k, \sigma, \sigma_k^0$  – линейные пространства сужений на  $\Omega$  функций  $P, P_k, L_k, L_k^0$  соответственно;

$\tau$  – канонический эпиморфизм  $P$  на  $\mathcal{P}$ ,  $\tau(f) = f/\Omega (f \in P)$ .

Пусть  $\mathcal{E}_\Omega: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  – некоторый линейный функционал. Введем в  $\mathcal{P}$  скалярное произведение следующей формулой

$$(\varphi, \omega) = \mathcal{E}_\Omega(\varphi\omega) \quad (\varphi, \omega \in \mathcal{P}).$$

Композиция  $I_\Omega = \mathcal{E}_\Omega \circ \tau: P \rightarrow \mathbb{R}$  является линейным функционалом; мы будем рассматривать приближенные представления этого функционала, имеющие вид

$$I_\Omega \approx Q = \sum_{j=1}^N c_j f(x^j), \quad \in \mathbb{R}^n, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1)$$

**Определение 1.** Представление (1) называется  $d$ -точным ( $d \in \mathbb{N}$ ), если  $I_\Omega(f) = Q(f)$  для любого  $f \in P_d$ .

**Определение 2.** Симметричным случаем называется выполнение следующего условия:  $I_\Omega(f) = 0$  для любого нечетного многочлена  $f$ .

Положим для четного  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d = 2k$ ,

$$N_d = \dim \mathcal{P}_k;$$

Для нечетного  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d = 2k + 1$ , пусть

$$N_d = 2 \dim \sigma_k \text{ и } N_d^0 = \begin{cases} 2 \dim \sigma_k + 1, & k - \text{нечетно,} \\ 2 \dim \sigma_k^0 + 1, & k - \text{четно.} \end{cases}$$

**Определение 3.** Пусть  $d \in \mathbb{N}$  четно. Будем называть  $d$ -точное представление (1) минимальным, если  $N = N_d$ .

**Определение 4.** Пусть  $d \in \mathbb{N}$  нечетно. Будем называть  $d$ -точное представление (1) минимальным, если  $N = N_d$ .

**Определение 5.** Приближенное представление (1) соответствующего функционала  $I_\Omega$  будем называть кубатурной формулой, параметры  $x^j$ ,  $c_j$  этого представления – соответственно набором узлов и коэффициентов (весов) кубатурной формулы.

Для полноценного понимания кубатурных формул нам понадобятся дополнительные теоретические сведения помимо тех, которые описаны во введении.

Нас будет интересовать вопрос из разделов численного интегрирования, связанных с построением кубатурных формул на основе их алгебраической точности. А именно ситуация, когда при заданном числе узлов формула будет точна на многочленах степени не выше  $d$ , но при этом по возможности большем  $d$ .



В случае  $n = 1$  задача построения квадратурных формул уже решена. Для кубатурных же формул данная задача осложняется тем, что в теории приближенного вычисления кратных интегралов существует многообразие областей интегрирования. Именно поэтому алгебраический подход для  $n > 1$  реализован на таких областях интегрирования, как куб, сфера, шар. Такие формулы называются формулами повышенной точности (формулы гауссова типа).

Дадим определение кубатурной формулы алгебраической точности  $d$  [10].

**Определение 6.** Будем говорить, что данная кубатурная формула имеет алгебраический порядок точности  $d$  (или просто порядок  $d$ ), если она точна на всех многочленах степени не выше  $d$  и не точна хотя бы на одном многочлене степени  $d+1$ .

Вопрос об уменьшении числа узлов при сохранении алгебраической степени точности является крайне актуальным, так как приводит к сокращению вычислений и уменьшению погрешности.

Также затронем метод воспроизводящего ядра, с помощью которого и будут производиться вычисления в дальнейшем [3].

**Определение 7.** Действительная функция  $K(x, y)$  с областью определения  $X \times X$ , называется воспроизводящим ядром пространства  $H$ , если выполняется следующее условие:

для любой функции  $f(x) \in H$  и любого  $y \in X$

$$f(y) = (f(x), K(x, y))_x.$$

Индекс  $x$  в скалярном произведении показывает, что функции  $f$  и  $K$  рассматриваются как функции, зависящие от  $x$ .

Здесь  $H$  – гильбертово пространство,  $(x, y)$  – скалярное произведение в  $H$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы существовало воспроизводящее ядро  $K$  пространства  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $y_0 \in H$  существовала положительная постоянная  $C_{y_0}$ , зависящая от  $y_0$ , такая что

$$|f(y_0)| \leq C_{y_0} \|f\| \text{ для всех } f \in X.$$

Воспроизводящее ядро является симметрической функцией относительно своих аргументов. Пусть  $y, z \in X$ , тогда

$$K(y, z) = (K(x, z), K(x, y))_x = (K(x, y), K(x, z))_x = K(z, y).$$

Для конечномерного пространства воспроизводящее ядро можно найти с помощью матрицы Грама.

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  – базис конечномерного пространства  $H$  и  $G = (g_{ij})$  – матрица Грама, где  $g_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$ .

Воспроизводящее ядро  $K(x, y)$  примет вид

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y),$$

так как является элементом  $H$  по каждому из своих переменных и  $c_{ij}$  – коэффициенты разложения  $K(x, y)$  по базисам  $\varphi_i(x), 1 \leq i \leq N$  и  $\varphi_j(y), 1 \leq j \leq N$ .

Используя определения воспроизводящего ядра, можно сделать вывод, что для произвольной функции  $f(y)$  справедливо

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(y) = (f(x), K(x, y))_x = \\ &= \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x), \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y) \right)_x = \\ &= \sum_{j=1}^N \varphi_j(y) \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_k c_{ij} g_{ki}. \end{aligned}$$

В силу того, что  $\alpha_i, 1 \leq i \leq N$  могут принимать произвольные значения и  $\varphi_i(y), 1 \leq i \leq N$  линейно независимы

$$\sum_{i=1}^N c_{ij} g_{ki} = \delta_{jk},$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера.

Если  $C = (c_{ij})$  – матрица коэффициентов разложения  $K(x, y)$ , то

$$CG = E,$$

где  $E$  – единичная матрица порядка  $N$ .

Пусть  $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x))$  – матрица-строка, тогда

$$K(x, y) = \varphi(x)G^{-1}\varphi(y)^T.$$

В силу не вырожденности  $G$ , воспроизводящее ядро всегда существует.

Если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  является ортогональным базисом  $H$ , то воспроизводящее ядро

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) \varphi_i(y).$$

Теперь рассмотрим взаимосвязь между минимальными кубатурными формулами и воспроизводящим ядром [3], [7].

Зафиксируем  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и линейный функционал  $\mathcal{E}_\Omega: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие условию

$$\mathcal{E}_\Omega(\varphi^2) > 0,$$

где  $\varphi \in \mathcal{P}, \varphi \neq 0$ .

Рассмотрим два случая:  $d = 2k$  и  $d = 2k + 1$ .

1. Пусть  $\{\varphi_s\}_{s=1}^{N_d}$  – некоторый ортонормированный базис  $\mathcal{P}_k$ , а многочлены  $f_s \in \mathcal{P}_k$  таковы, что  $\tau(f_s) = \varphi_s$  ( $\tau$  – канонический эпиморфизм  $\mathcal{P}$  на  $\mathcal{P}$ ,  $\tau(f) = f/\Omega$  ( $f \in \mathcal{P}$ )). Тогда воспроизводящее ядро для пространства  $\mathcal{P}_k$  имеет вид

$$K_d(x, x') = \sum_{s=1}^{N_d} f_s(x)f_s(x') \quad (x, x' \in \mathbb{R}^n).$$

2. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $d = 1k + 1$ ,  $\mathcal{E}_\Omega: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяют условию

$$\mathcal{E}_\Omega(\varphi^2) > 0,$$

где  $\varphi \in \sigma_k$ ,  $\varphi \neq 0$ .

Пусть  $\{\varphi_s\}_{s=1}^{N_d/2}$  – некоторый ортонормированный базис  $\sigma_k$ , а многочлены  $f_s \in L_k$  таковы, что  $\tau(f_s) = \varphi_s$ . Определим функцию  $K_d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  формулой

$$K_d(x, x') = \sum_{s=1}^{N_d/2} f_s(x)f_s(x') \quad (x, x' \in \mathbb{R}^n).$$

Сужение  $K_d$  на  $\Omega$  является воспроизводящим узлом для пространства  $\sigma_k$ .

Более подробно остановимся на случае  $d = 2k$ , так как именно он будет рассматриваться в дальнейшей работе.

**Теорема 2.** Если в кубатурной формуле (1) число узлов  $N = N_d$ , то следующие условия эквивалентны:

$$1) I_\Omega(f_s f_{s'}) = S(f_s f_{s'}) \quad (1 \leq s, s' \leq N_d);$$

$$2) K_d(x^j, x^{j'}) = 0 \quad (1 \leq j < j' \leq N).$$

$$K_d(x^j, x^j) = c_j^{-1} \quad (1 \leq j \leq N)$$

**Теорема 3.** Если кубатурная формула (1) степени  $d$  является минимальной, то выполнено условие 2) Теоремы 2.

**Теорема 4.**  $K_d(x^j, x^{j'}) > 0$  для любого  $x \in \Omega'$ . Если  $x^j \in \Omega'$  и числа  $c_j \in \mathbb{R}^*$  удовлетворяют условию 2) Теоремы 2, причем  $N = N_d$ , то наборы  $\{x^j\}_{j=1}^N, \{c_j\}_{j=1}^N$  определяют минимальную кубатурную формулу степени  $d$ .

Далее определим нижнюю границу числа узлов кубатурной формулы обладающей  $d$ -свойством для тора [3].

Возьмем уравнение тора  $T$  в  $\mathbb{R}^3$

$$T: (X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 - a^2)^2 + 4R^2Z^2 - 4R^2a^2 = 0. \quad (2)$$

Введем замену переменных  $X = ax, Y = ay, Z = az, R = ar$ , получим

$$T: (a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 - a^2r^2 - a^2)^2 + 4a^2r^2a^2z^2 - 4a^2r^2a^2 = 0.$$

Приведем подобные и вынесем общий множитель из скобки

$$\begin{aligned} & (a^2(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 1))^2 + 4a^4r^2z^2 - 4a^4r^2 = \\ & = a^4(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 1)^2 + 4a^4r^2z^2 - 4a^4r^2 = 0. \end{aligned}$$

Сократим все на  $a^4$ , получим уравнение, которое является нормированным относительно (2)

$$T: (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 1)^2 + 4r^2z^2 - 4r^2 = 0, r \geq 1. \quad (3)$$

Из него видно, что одночлен  $z^4$  на поверхности  $T$  линейно выражается через функции  $x^2, y^2, z^2, x^2y^2, x^2z^2, y^2z^2, x^4, y^4$  и постоянные. Возьмем в качестве базиса пространства сужений многочленов от переменных  $x, y, z$  на  $T$  сужения тех многочленов, которые не содержат  $z^4$ . Число всех одночленов от  $n$  переменных не выше  $m$  равно  $M(n, m) = \frac{(n+m)!}{n!m!}$ , поэтому размерность линейного пространства  $\mathcal{P}_m$  сужений на  $T$  многочленов степени не выше  $m$  равна

$$\begin{aligned} M(3, m) - M(3, m-4) &= \frac{(3+m)!}{3!m!} - \frac{(3+m-4)!}{3!(m-4)!} = \\ &= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{6} = \\ &= \frac{(m^3 + 6m^2 + 11m + 6) - (m^3 - 6m^2 + 11m - 6)}{6} = 2(m^2 + 1), \end{aligned}$$

где при  $m < 4$  число  $M(3, m-4)$  равно 0. Тогда

$$\dim \mathcal{P}_m = 2(m^2 + 1), m = 1, 2, \dots, \mathcal{P}_0 = 1.$$

Посчитаем размерность подпространства  $\sigma_m$  пространства  $\mathcal{P}_m$ , порождённого сужением четности  $m = 2k$

$$\dim \sigma_m = \dim \mathcal{P}_m - \dim \sigma_{m-1} = m^2 + m + 1.$$

Из оценки нижней границы числа узлов получим  $N_d \geq 2(k^2 + 1)$ , при  $d = 2k$ .

## 2. Построение минимальных кубатурных формул для поверхности тора второй степени точности

Возьмем нормированное уравнение тора  $T$  в  $\mathbb{R}^3$  (3)

$$T: (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 1)^2 + 4r^2 z^2 - 4r^2 = 0, r \geq 1.$$

Построим кубатурную формулу

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_T f(x, y, z) dS \approx \sum_{i=1}^N c_i f(x_i, y_i, z_i)$$

Нижняя граница числа узлов  $N_d$  для  $d = 2$  равна 4. Зададим скалярное произведение для функций  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$ , определенных на  $T$ .

$$(f, g) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_T f(x, y, z) g(x, y, z) dS.$$

Ортонормируем систему многочленов  $1, x, y, z$ .

Построим ортонормированный базис, отталкиваясь от некоторого исходного базиса, используя алгоритм, который называется процесс ортогонализации Грама-Шмидта [2], [6].

Пусть  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) = (1, x, y, z)$  – исходный базис, нужно построить новый базис  $f_{\perp} = (f_{1\perp}, f_{2\perp}, f_{3\perp}, f_{4\perp})$ , который будет ортонормированным. Будут выполнены следующие шаги:

$$1) f_{1\perp} = f_1 = 1;$$

$$2) f_{2\perp} = f_2 + e_{11} f_{1\perp} = x + e_{11} = x, \text{ где } e_{11} = -\frac{(f_2, f_{1\perp})}{\|f_{1\perp}\|^2} = -\frac{(x, 1)}{\|1\|^2} = 0;$$

$$3) f_{3\perp} = f_3 + e_{21} f_{1\perp} + e_{22} f_{2\perp} = y + e_{21} + e_{22} x = y, \text{ где}$$

$$e_{21} = -\frac{(f_3, f_{1\perp})}{\|f_{1\perp}\|^2} = -\frac{(y, 1)}{\|1\|^2} = 0, \quad e_{22} = -\frac{(f_3, f_{2\perp})}{\|f_{2\perp}\|^2} = -\frac{(y, x)}{\|x\|^2} = 0;$$

$$4) f_{4\perp} = f_4 + e_{31}f_{0\perp} + e_{32}f_{1\perp} + e_{33}f_{2\perp} = z + e_{31} + e_{32}x + e_{33}y = z, \text{ где}$$

$$e_{31} = -\frac{(f_4, f_{1\perp})}{\|f_{1\perp}\|^2} = -\frac{(z, 1)}{\|1\|^2} = 0, \quad e_{32} = -\frac{(f_4, f_{2\perp})}{\|f_{2\perp}\|^2} = -\frac{(z, x)}{\|x\|^2} = 0,$$

$$e_{33} = -\frac{(f_4, f_{3\perp})}{\|f_{3\perp}\|^2} = -\frac{(z, y)}{\|y\|^2} = 0.$$

Получился ортогональный базис  $f_{\perp} = (1, x, y, z)$ , проортонормируем его:

$$\|f_{i\perp}\| = (f_{i\perp}, f_{i\perp}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_T f_{i\perp}^2 dS, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Все интегралы будут вычисляться с помощью перехода к полярной системе координат, где  $x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, dx dy = RdRd\varphi, r - 1 \leq R \leq r + 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

$$S: z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r\right)^2 = 1,$$

откуда  $z = \pm\sqrt{1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r\right)^2}$ , поэтому квадрат нормы будет считаться как сумма двух интегралов (в одном из них  $z$  будет иметь положительный знак, а в другом отрицательный). Данный факт не будет влиять на значение интегралов, так как от  $z$  берутся производные, значения которых в дальнейшем возводятся в квадрат. Далее выполняем следующие преобразования:

$$1) \frac{1}{\|f_{1\perp}\|^2} = \frac{1}{\|1\|^2} = 1, \text{ где}$$

$$\|1\|^2 = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S 1 dS + \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S 1 dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 r} \left( \iint 1 \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy + \iint 1 \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 r} \left( \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \frac{RdRd\varphi}{\sqrt{1-(R-r)^2}} + \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \frac{RdRd\varphi}{\sqrt{1-(R-r)^2}} \right) = 1;$$



$$2) \frac{x}{\|f_{2\perp}\|^2} = \frac{x}{\|x\|^2} = \frac{2}{w}x, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S x dS + \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S x dS = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} (\iint x \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy + \iint x \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \left( \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \frac{R^3 \cos^2 \varphi dR d\varphi}{\sqrt{1-(R-r)^2}} + \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \frac{R^3 \cos^2 \varphi dR d\varphi}{\sqrt{1-(R-r)^2}} \right) = \frac{r^2 + \frac{3}{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$3) \frac{y}{\|f_{3\perp}\|^2} = \frac{y}{\|y\|^2} = \frac{2}{w}y, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S y dS + \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S y dS = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} (\iint y \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy + \iint y \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \left( \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \frac{R^3 \sin^2 \varphi dR d\varphi}{\sqrt{1-(R-r)^2}} + \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \frac{R^3 \sin^2 \varphi dR d\varphi}{\sqrt{1-(R-r)^2}} \right) = \frac{r^2 + \frac{3}{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$4) \frac{z}{\|f_{4\perp}\|^2} = \frac{z}{\|z\|^2} = 2z, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S z dS + \frac{1}{4\pi^2 r} \int_S z dS = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} (\iint z \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy + \iint z \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \left( \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \sqrt{1-(R-r)^2} R dR d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{r-1}^{r+1} \sqrt{1-(R-r)^2} R dR d\varphi \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } f_1 = 1, f_2 = \sqrt{\frac{2}{w}}x, f_3 = \sqrt{\frac{2}{w}}y, f_4 = \sqrt{2}z, \text{ где } w = r^2 + \frac{3}{2}.$$

Воспроизводящее ядро примет вид

$$K_2(x^i, x^j) = 1 + \frac{2}{w}x_i x_j + \frac{2}{w}y_i y_j + 2z_i z_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j.$$

В соответствии с теоремами 3 и 4 наборы  $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^4$  являются наборами узлов некоторой минимальной 2-точной кубатурной формулы тогда и только тогда, когда

$$1 + \frac{2}{w}x_i x_j + \frac{2}{w}y_i y_j + 2z_i z_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j, \quad (4)$$

а коэффициенты кубатурной формулы имеют вид:

$$c_i = \frac{w}{w + 2x_i^2 + 2y_i^2 + 2wz_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Пусть узлы кубатурной формулы лежат на поверхности тора

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r^2 - 1)^2 + 4r^2z_i^2 - 4r^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

В силу осевой симметрии относительно  $Oz$  примем за узлы кубатурной формулы точки  $M_1(x_1, 0, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3), M_4(x_4, y_4, z_4)$ .

Из (4) и (5) получим нелинейную систему уравнений для нахождения координат узлов:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2}{w}x_1x_2 + 2z_1z_2 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_1x_3 + 2z_1z_3 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_1x_4 + 2z_1z_4 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_2x_3 + \frac{2}{w}y_2y_3 + 2z_2z_3 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_2x_4 + \frac{2}{w}y_2y_4 + 2z_2z_4 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_3x_4 + \frac{2}{w}y_3y_4 + 2z_3z_4 = 0, \\ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r^2 - 1)^2 + 4r^2z_i^2 - 4r^2 = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Система зависит от параметра  $r$ , имеет 10 уравнений и 11 неизвестных.

Уравнение тора переписываем в виде  $z_i^2 + \left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r\right)^2 = 1$  для

вычисления координат точки  $M_1$ .

Предположим, что  $z_1 = 1$ , тогда точка  $M_1$  имеет координаты  $(r, 0, 1)$ , так как  $1 + (\sqrt{x_1^2} - r)^2 = 1$ ,  $x_1 = r$ .

Тогда система из первых трех уравнений (6) примет вид:

$$\begin{cases} 1 + \frac{2}{w}rx_2 + 2z_2 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w}rx_3 + 2z_3 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w}rx_4 + 2z_4 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Выразим  $x_2, x_3, x_4$  из (7),  $y_2, y_3, y_4$  из (6):

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-(2z_2 + 1)w}{2r}, y_2 = \pm \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1 - z_2^2}\right)^2 - x_2^2}, \\ x_3 &= \frac{-(2z_3 + 1)w}{2r}, y_3 = \pm \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1 - z_3^2}\right)^2 - x_3^2}, \\ x_4 &= \frac{-(2z_4 + 1)w}{2r}, y_4 = \pm \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1 - z_4^2}\right)^2 - x_4^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим (8) в (6), получим новую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_2+1)w}{2r} \frac{(2z_3+1)w}{2r} \pm \\ \pm \frac{2}{w} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_2^2}\right)^2 - x_2^2} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_3^2}\right)^2 - x_3^2} + 2z_2z_3 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_2+1)w}{2r} \frac{(2z_4+1)w}{2r} \pm \\ \pm \frac{2}{w} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_2^2}\right)^2 - x_2^2} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_4^2}\right)^2 - x_4^2} + 2z_2z_4 = 0, \\ 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_3+1)w}{2r} \frac{(2z_4+1)w}{2r} \pm \\ \pm \frac{2}{w} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_3^2}\right)^2 - x_3^2} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_4^2}\right)^2 - x_4^2} + 2z_3z_4 = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (9) и обозначим его левую часть за  $F_1(z_2, z_3)$ .

$$\begin{aligned} F_1(z_2, z_3) &= 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_2+1)w}{2r} \frac{(2z_3+1)w}{2r} \pm \\ &\pm \frac{2}{w} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_2^2}\right)^2 - x_2^2} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_3^2}\right)^2 - x_3^2} + 2z_2z_3 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

тогда оно примет вид  $F_1(z_2, z_3) = 0$ .

Аналогично поступим со вторым и третьим уравнением системы (9).

$$\begin{aligned} F_2(z_2, z_4) &= 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_2+1)w}{2r} \frac{(2z_4+1)w}{2r} \pm \\ &\pm \frac{2}{w} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_2^2}\right)^2 - x_2^2} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_4^2}\right)^2 - x_4^2} + 2z_2z_4 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_3(z_3, z_4) &= 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_3+1)w}{2r} \frac{(2z_4+1)w}{2r} \pm \\ &\pm \frac{2}{w} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_3^2}\right)^2 - x_3^2} \sqrt{\left(r \pm \sqrt{1-z_4^2}\right)^2 - x_4^2} + 2z_3z_4 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $F_2(z_2, z_4) = 0$  и  $F_3(z_3, z_4) = 0$ .

Теперь попробуем решить систему уравнений (10)–(12), учитывая разные знаки. Сначала графически найдем начальное приближение, а затем уточним полученный результат, используя метод Ньютона [14]. Подробное описание реализации графического построения и метода Ньютона будут представлены в приложении А.

В ходе экспериментов были определены конкретные знаки уравнений  $F_1(z_2, z_3)$ ,  $F_2(z_2, z_4)$  и  $F_3(z_3, z_4)$ .

$$F_1(z_2, z_3) = 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_2+1)w}{2r} \frac{(2z_3+1)w}{2r} - \\ - \frac{2}{w} \sqrt{\left(r + \sqrt{1 - z_2^2}\right)^2 - x_2^2} \sqrt{\left(r + \sqrt{1 - z_3^2}\right)^2 - x_3^2} + 2z_2z_3 = 0,$$

$$F_2(z_2, z_4) = 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_2+1)w}{2r} \frac{(2z_4+1)w}{2r} - \\ - \frac{2}{w} \sqrt{\left(r + \sqrt{1 - z_2^2}\right)^2 - x_2^2} \sqrt{\left(r - \sqrt{1 - z_4^2}\right)^2 - x_4^2} + 2z_2z_4 = 0,$$

$$F_3(z_3, z_4) = 1 + \frac{2}{w} \frac{(2z_3+1)w}{2r} \frac{(2z_4+1)w}{2r} + \\ + \frac{2}{w} \sqrt{\left(r + \sqrt{1 - z_3^2}\right)^2 - x_3^2} \sqrt{\left(r - \sqrt{1 - z_4^2}\right)^2 - x_4^2} + 2z_3z_4 = 0.$$

Именно такая расстановка знаков позволила в дальнейшем рассчитать узлы и коэффициенты кубатурной формулы по предложенному алгоритму.

## 2.1 Пример 1 нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы

Пусть  $r = 2$ , тогда для нахождения начального приближения строим графики функций  $F_1(z_2, z_3) = 0$ ,  $F_2(z_2, z_4) = 0$  и  $F_3(z_3, z_4) = 0$  (рисунки 1–3).

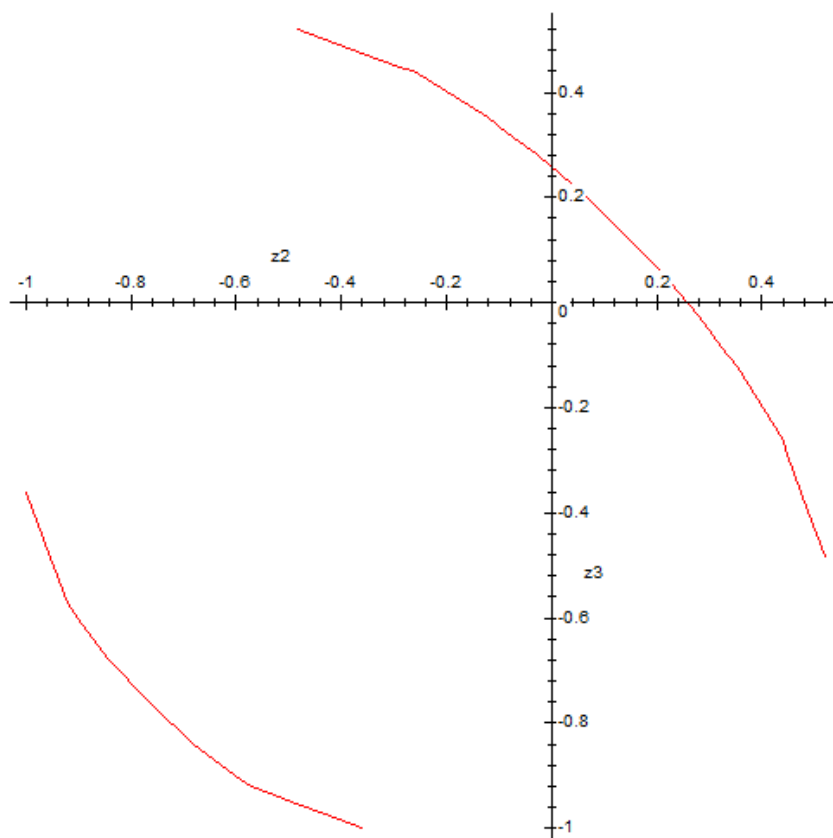


Рисунок 1 – График функции  $F_1(z_2, z_3) = 0$ .

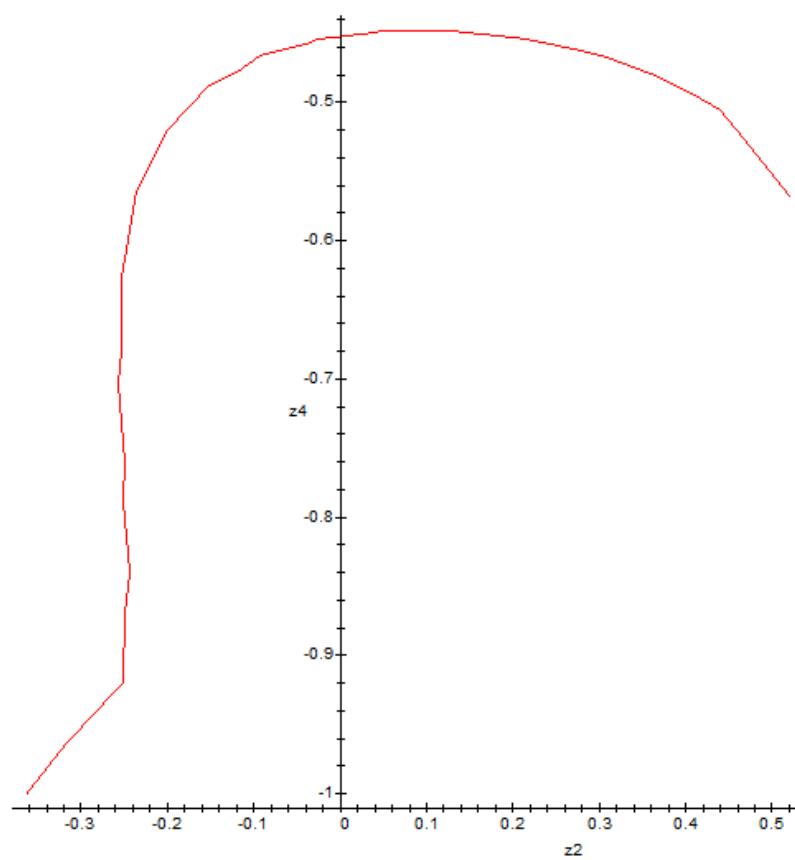


Рисунок 2 – График функции  $F_2(z_2, z_4) = 0$ .

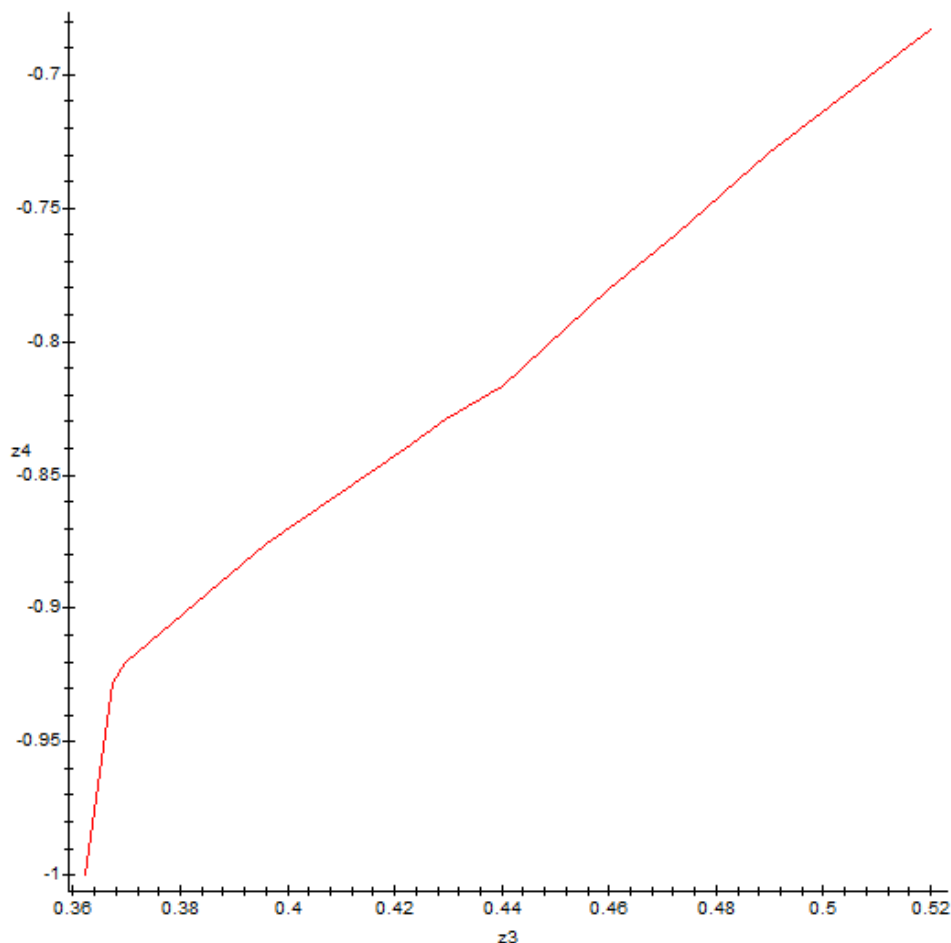


Рисунок 3 – График функции  $F_3(z_3, z_4) = 0$

По графикам видно, что за начальное приближение можно взять значения  $z_{20}, z_{30}, z_{40}$  равные  $z_{20} = -0.244, z_{30} = 0.43, z_{40} = -0.8$ .

Решив эту систему методом Ньютона, получим более точные значения  $z_2 = -0.2453514353, z_3 = 0.4300998017, z_4 = -0.8304035045$ .

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы примут вид отраженный в таблице 1.

Таблица 1 – Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при  $r = 2$

Узлы	Коэффициенты
(2, 0, 1)	0.2325894113
(-0.7002835477, 2.885678851, -0.2453514372)	0.2311191461
(-2.557774450, 1.372563083, 0.4300997999)	0.2255288551
(0.908609637, 1.120807147, -0.8304035044)	0.3188622058

## 2.2 Пример 2 нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы

Пусть  $r = \frac{3}{2}$ , тогда для нахождения начального приближения строим графики функций  $F_1(z_2, z_3) = 0$ ,  $F_2(z_2, z_4) = 0$  и  $F_3(z_3, z_4) = 0$ . Данные графики отображены на рисунках 4–6.

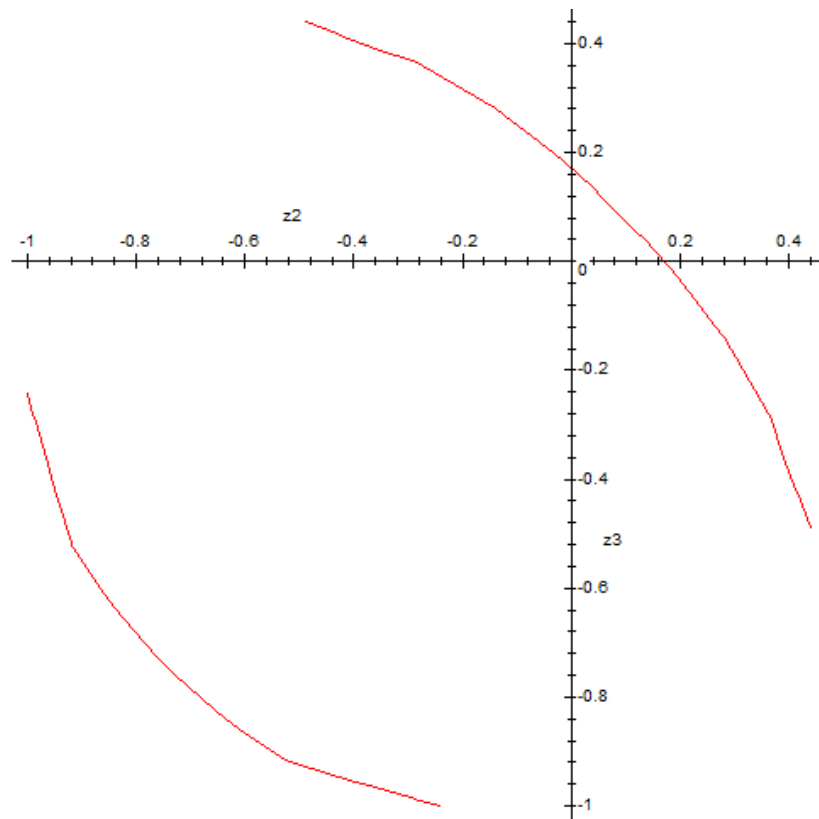


Рисунок 4 – График функции  $F_1(z_2, z_3) = 0$



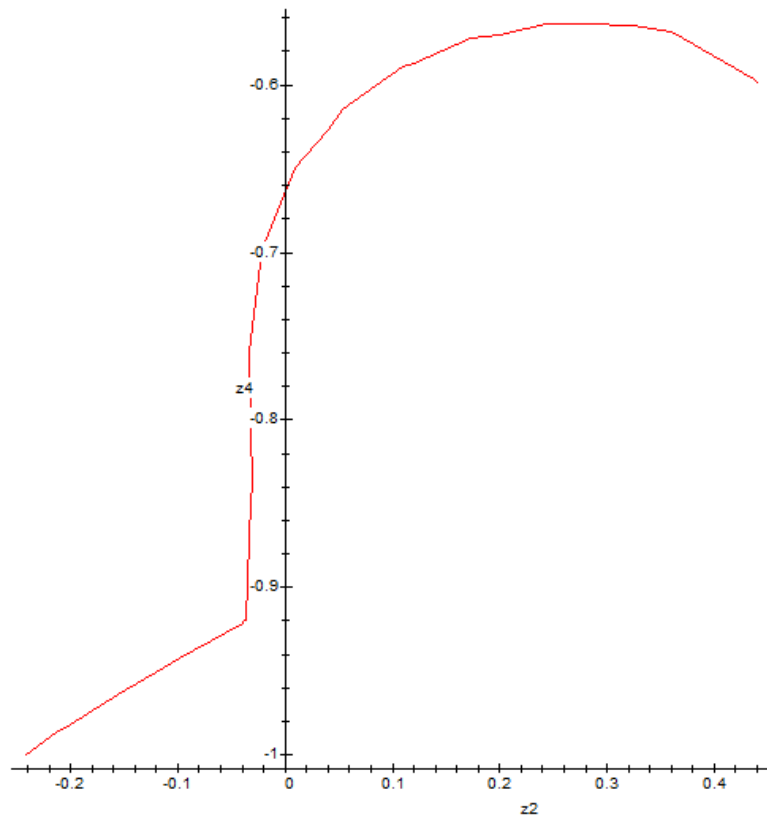


Рисунок 5 – График функции  $F_2(z_2, z_4) = 0$

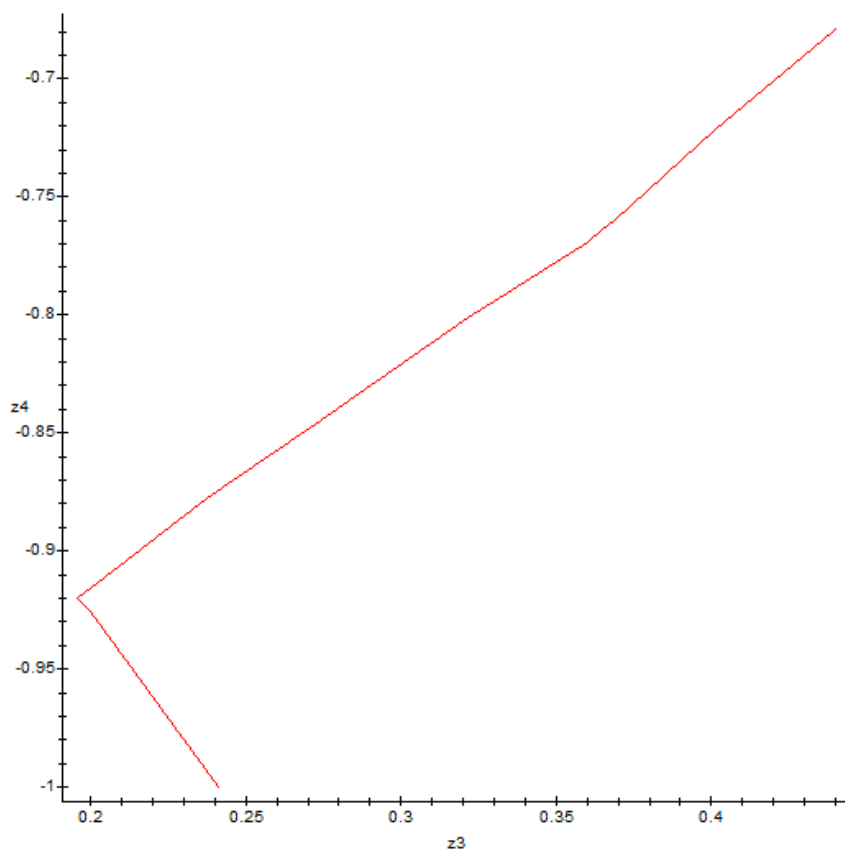


Рисунок 6 – График функции  $F_3(z_3, z_4) = 0$

По графикам видно, что за начальное приближение можно взять значения  $z_{20}, z_{30}, z_{40}$  равные  $z_{20} = -0.03, z_{30} = 0.19, z_{40} = -0.9$ .

Решив эту систему методом Ньютона, получим более точные значения  $z_2 = -0.3421853489, z_3 = 0.1998360073, z_4 = -0.9146375060$ .

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы примут вид отраженный в таблице 2.

Таблица 2 – Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при  $r = \frac{3}{2}$

Узлы	Коэффициенты
$(3/2, 0, 1)$	0.2234117804
$(1.164453663, 2.211587639, -0.3421853489)$	0.2307276820
$(1.749590018, 1.757409575, 0.1998360073)$	0.2293772214
$(-1.036593765, 0.3550869724, -0.9146375060)$	0.3018001767

### 2.3 Пример 3 нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы

Пусть  $r = 3$ , тогда для нахождения начального приближения строим графики функций  $F_1(z_2, z_3) = 0, F_2(z_2, z_4) = 0$  и  $F_3(z_3, z_4) = 0$ , графики изображены на рисунках 7–9.

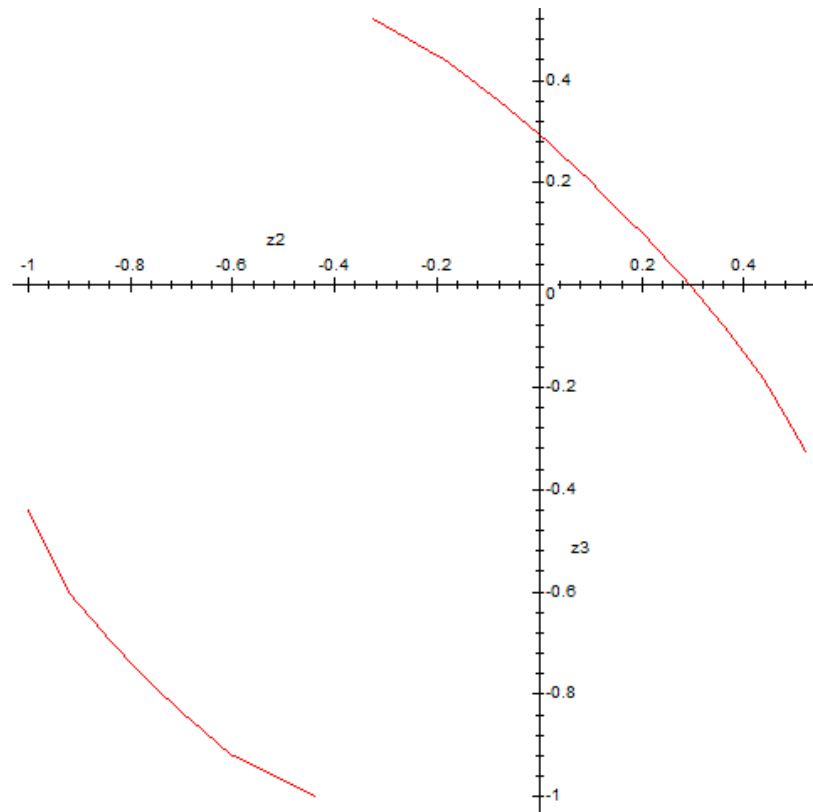


Рисунок 7 – График функции  $F_1(z_2, z_3) = 0$

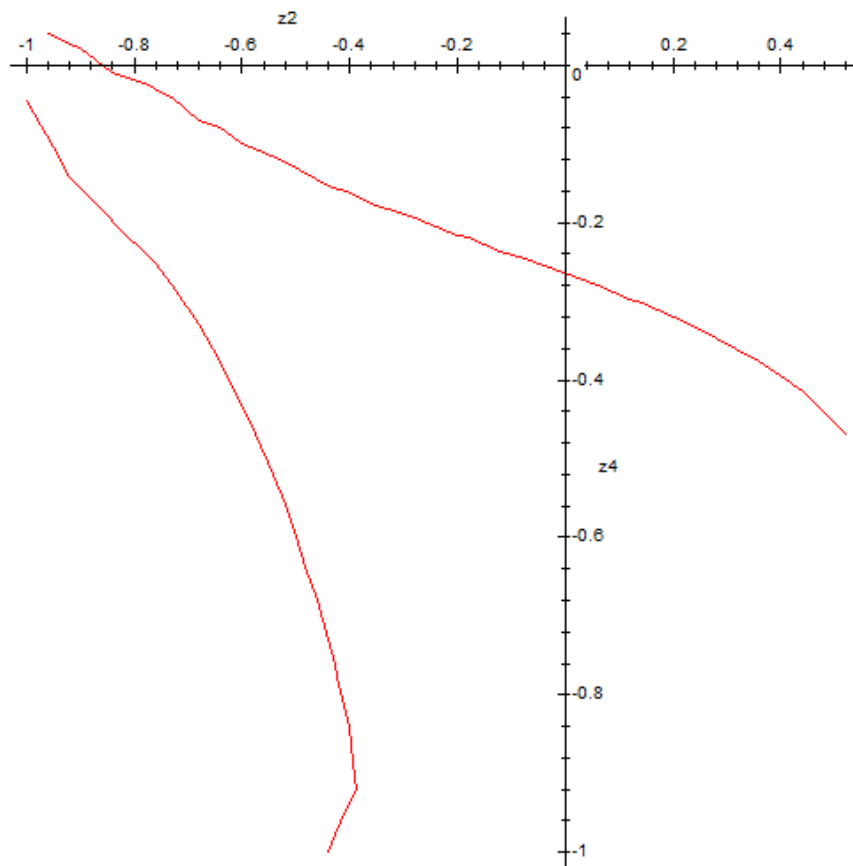


Рисунок 8 – График функции  $F_2(z_2, z_4) = 0$

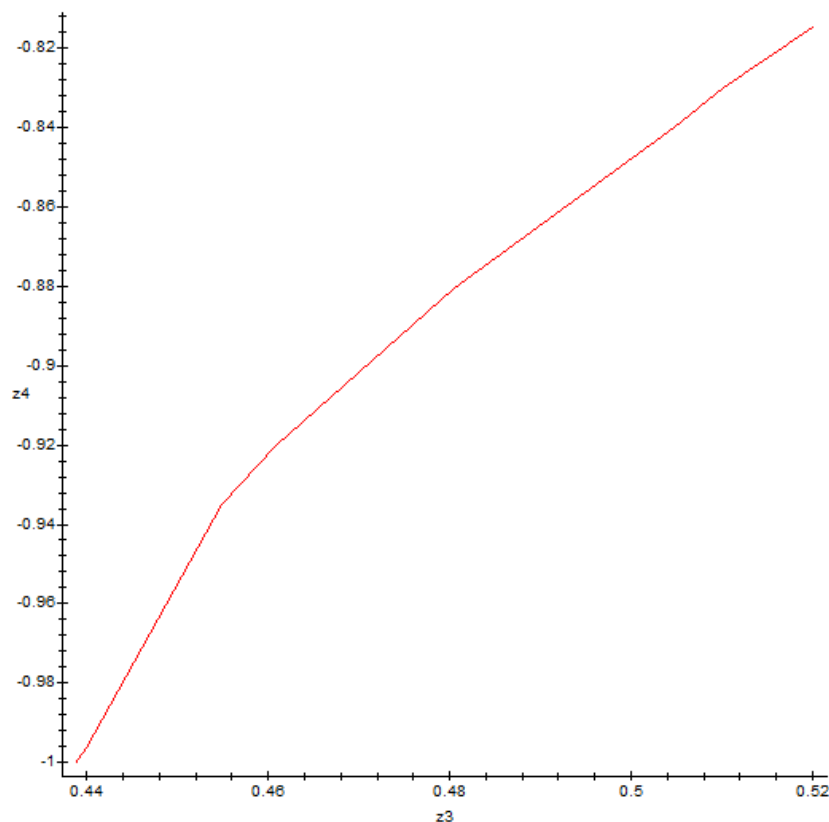


Рисунок 9 – График функции  $F_3(z_3, z_4) = 0$

По графикам видно, что за начальное приближение можно взять значения  $z_{20}, z_{30}, z_{40}$  равные  $z_{20} = -0.44, z_{30} = 0.56, z_{40} = -0.71$ .

Решив эту систему методом Ньютона, получим более точные значения  $z_2 = -0.4449444295, z_3 = 0.5651742962, z_4 = -0.7182127168$ . Узлы и коэффициенты кубатурной формулы примут вид представленный в таблице 3.

Таблица 3 – Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при  $r = 3$

Узлы	Коэффициенты
(3, 0, 1)	0.2304364216
(0.192694497, 3.890789428, -0.4449444295)	0.2332906488
(3.728110037, 0.8553377754, 0.5651742962)	0.2259586651
(-0.763744509, 2.173918851, -0.7182127168)	0.3286294737

Теперь, полноценно овладев необходимым алгоритмом, можно без труда проводить множество экспериментов с различными значениями, которые будут описаны далее.

### 3. Проведение экспериментов

Для более подробного изучения полученных кубатурных формул по поверхности тора рассмотрим множество разновидностей точки  $M_1(x_1, 0, z_1)$ , подставляя различные значения  $-1 \leq z_1 \leq 1$  с приростом 0.1, и проанализируем их. Помимо изменения последней координаты мы будем рассматривать два глобальных случая, когда  $x_1 = r - \sqrt{1 - z_1^2}$  и  $x_1 = r + \sqrt{1 - z_1^2}$ .

**Первый случай**  $x_1 = r - \sqrt{1 - z_1^2}$ .

Начнем по порядку с самого маленького, но значительного варианта  $z_1 = 0.1$ , тогда координаты точки  $M_1$  примут вид  $(r - 0.9949, 0, 0.1)$ . Теперь будем изменять значения радиуса, начиная с  $r = 1.1$ , для данной фиксированной точки. При первых значениях  $r \in [1.1, 1.4]$  невозможно рассчитать значения коэффициентов кубатурной формулы, так как при построении графиков для нахождения приблизительных значений координат  $z_2, z_3, z_4$ , программе не удалось построить графики  $F_1(z_2, z_3)$  и  $F_2(z_2, z_4)$ . Начиная с  $r = 1.5$  и до  $r = 2.8$ , не строится ни один из графиков  $F_1(z_2, z_3)$ ,  $F_2(z_2, z_4)$  и  $F_3(z_3, z_4)$ . Для  $r = 2.9$  и так далее не строится график  $F_3(z_3, z_4)$ . Из этого следует, что для данной точки рассчитать узлы и коэффициенты кубатурной формулы не возможно при всевозможных значениях радиуса.

Возьмем значение  $z_1 = 0.2$ , тогда  $M_1(r - 0.979795, 0, 0.2)$ . С  $r = 1.1$  и до  $r = 1.3$  не строятся графики  $F_1(z_2, z_3)$  и  $F_2(z_2, z_4)$ . Для  $r \in [1.4, 2.7]$  не строится ни один график. Для  $r = 2.8$  не строятся два последних графика. Начиная с  $r = 2.9$  и до  $r = 4.7$ , с  $r = 4.9$  и так далее не строится  $F_3(z_3, z_4)$ . При  $r = 4.8$  получается слишком маленький график  $F_3(z_3, z_4)$ , по которому невозможно определить приблизительные значения переменных. Вывод остается прежним, как и при исследовании предыдущей точки.

Пусть  $z_1 = 0.3$ , тогда  $M_1(r - 0.953939, 0, 0.3)$ . При  $r = 1.1$  и  $r = 1.2$  не строятся два первых графика. С  $r = 1.3$  и до  $r = 2.5$  не строится ни один из

графиков. Для  $r \in [2.6, 4.1]$  не строится  $F_3(z_3, z_4)$ .  $r = 4.2$  – нет ни одного графика. Далее для  $r \in [4.3, 5.8]$  не строится  $F_3(z_3, z_4)$ . При  $r = 5.9$  первый раз получаем все нужные построения, но подбирая приблизительные значения различным образом, алгоритм Ньютона не получает решение системы без комплексных чисел. Аналогичная ситуация складывается и для радиусов 6, 6.1, 6.3, 6.4, 7, 7.1, 7.2. При дальнейшем увеличении радиуса программа перестает строить график  $F_3(z_3, z_4)$ . Уже для третьей точки мы не получаем ни одного решения.

Если  $z_1 = 0.4$ , то  $M_1(r - 0.916515, 0, 0.4)$ . Для  $r = 1.1$  не строит  $F_1(z_2, z_3)$  и  $F_2(z_2, z_4)$ . С  $r = 1.2$  и до  $r = 2.1$  не строится ни один из графиков. При  $r = 2.2$  не строятся два последних графика. Для  $r \in [2.3, 3.7]$  не строится  $F_3(z_3, z_4)$ , как и для  $r \in [3.9, 4.6]$ ,  $r \in [5, 6]$ ,  $r = 7.6$ ,  $r = 8.3$ , начиная с  $r = 62$  и так далее. Строятся все графики, но не вычисляются корректные решения при  $r = 3.8, 4.7, 4.8, 4.9$ ,  $r \in [6.1, 7.5]$ ,  $r \in [7.7, 8.2]$ ,  $r \in [8.4, 10]$ . С  $r = 11$  и до  $r = 61$  последний график получается слишком маленький, для нахождения приблизительных значений переменных.

При  $z_1 = 0.5$ , получаем  $M_1(r - 0.866025, 0, 0.5)$ . С  $r = 1.1$  и до  $r = 1.6$  не строит ни один из графиков. При  $r = 1.7$  не строит  $F_2(z_2, z_4)$  и  $F_3(z_3, z_4)$ . Для  $r \in [1.8, 3.8]$  не строится  $F_3(z_3, z_4)$ , аналогично для значений радиуса  $r \in [4.1, 4.9]$  и  $r \in [5.9, 7.2]$ . Не получаем необходимых значений при решении системы методом Ньютона для  $r = 3.9, 4$ ,  $r \in [5, 5.8]$ ,  $r \in [7.3, 8.6]$ ,  $r \in [8.9, 9.9]$ . Значения графика  $F_3(z_3, z_4)$  слишком малы при  $r = 8.7, 8.8$ ,  $r \in [10.4, 11.6]$  и с  $r = 13.2$  и так далее, но при возможном решении в целых точках. Теперь рассмотрим несколько примеров, где сработал весь применяемый алгоритм, результаты представлены в таблицах 4–8.

Таблица 4 – Пример применения алгоритма при  $r = 9$ 

Узлы	Коэффициенты
(8.1339, 0, 0.5)	0.3221
(-2.3455, 9.5597, -0.53749)	0.2546
(-9.16638, 2.81835, 0.80749)	0.2205
(-0.0065, 8.94914, -0.9987)	0.2025

Таблица 5 – Пример применения алгоритма при  $r = 10$ 

Узлы	Коэффициенты
(9.13397, 0, 0.5)	0.32807
(-2.6187, 10.52801, -0.52868)	0.2578
(-10.0914, 3.17015, 0.81625)	0.22098
(-0.0288, 9.89817, -0.994806)	0.20367

Таблица 6 – Пример применения алгоритма при  $r = 15$ 

Узлы	Коэффициенты
(14.1339, 0, 0.5)	0.3063
(-3.9089, 15.3696, -0.5121)	0.2669
(-14.7906, 4.7454, 0.8459)	0.2192
(-0.2135, 14.7691, -0.9733)	0.2074

Таблица 7 – Пример применения алгоритма при  $r = 20$ 

Узлы	Коэффициенты
(19.1339, 0, 0.5)	0.3008
(-5.1671, 20.2115, -0.5075)	0.2715
(-19.5355, 6.2367, 0.8619)	0.2183
(-0.4262, 19.7132, -0.9593)	0.2093

Таблица 8 – Пример применения алгоритма при  $r = 100$ 

Узлы	Коэффициенты
(99.1339, 0, 0.5)	0.2885
(-25.163, 97.6761, -0.5011)	0.2827
(-95.9667, 29.6098, 0.9024)	0.2152
(-3.9201, 99.5363, -0.9222)	0.2134

При всех значениях радиуса после 13.2 вычисляются все необходимые данные – узлы и коэффициенты кубатурной формулы.

В случае  $z_1 = 0.6$ ,  $M_1(r - 0.8, 0, 0.5)$ . При  $r = 1.1$  не строится ни один график. При  $r = 1.2$  и  $r = 1.3$  не строятся два последних графика. С  $r = 1.4$  и до  $r = 3$ ,  $r \in [3.2, 3.7]$ ,  $r \in [4.1, 4.9]$  и  $r \in [6.8, 8.5]$  не строится  $F_3(z_3, z_4)$ . Не вычисляются необходимые значения при  $r = 3.1$ ,  $r \in [3.8, 4]$ ,  $r \in [5, 5.4]$ . Начиная с радиуса  $r = 5.5$  до  $r = 6.7$ , далее с  $r = 8.6$  до  $r = 33$  можно вычислить все необходимые данные, далее  $F_3(z_3, z_4)$  слишком мал. При  $r = 9.2$ ,  $r = 9.3$  и  $r = 9.4$  строится маленький последний график, но по нему также возможно определить начальное приближение (таблицы 9–11).

Таблица 9 – Пример применения алгоритма при  $r = 5.5$

Узлы	Коэффициенты
(4.7, 0, 0.6)	0.3213
(-1.0458, 6.2307, -0.5753)	0.2394
(-6.0364, 1.6379, 0.6559)	0.2312
(0.652, 5.3529, -0.9942)	0.2079

Таблица 10 – Пример применения алгоритма при  $r = 15$

Узлы	Коэффициенты
(14.2, 0, 0.6)	0.2856
(-2.5213, 15.6195, -0.5698)	0.259
(-15.2697, 3.4168, 0.7621)	0.2312
(0.5724, 14.5289, -0.8931)	0.2239

Таблица 11 – Пример применения алгоритма при  $r = 20$

Узлы	Коэффициенты
(19.2, 0, 0.6)	0.2811
(-3.2318, 20.5652, -0.5757)	0.2616
(-20.1963, 4.20907, 0.7763)	0.2311
(0.51308, 19.5077, -0.8742)	0.2259

При  $z_1 = 0.7$ , получаем  $M_1(r - 0.714142, 0, 0.7)$ . Для значений радиуса  $r = 1.1, 1.3, 1.4, 2.3, 2.4, 2.7, 2.8, r \in [3.3, 3.8]$  не вычисляются корректные значения. Не строится последний график  $F_3(z_3, z_4)$  для радиусов  $r = 1.2,$



$r \in [1.5, 2.2]$ ,  $r = 2.5$ ,  $r \in [3.9, 4.4]$ . Далее приведем примеры «хороших» построений и вычислений в таблицах 12–13.

Таблица 12 – Пример применения алгоритма при  $r = 4.5$

Узлы	Коэффициенты
(3.7858, 0, 0.7)	0.3032
(-0.6604, 5.29408, -0.55006)	0.2368
(-5.1331, 1.4241, 0.5621)	0.2357
(0.9755, 4.0948, -0.9568)	0.2241

Таблица 13 – Пример применения алгоритма при  $r = 6$

Узлы	Коэффициенты
(5.2858, 0, 0.7)	0.2881
(-0.7376, 6.7845, -0.5657)	0.2424
(-6.60704, 1.5552, 0.6161)	0.2371
(0.9587, 5.4966, -0.9073)	0.2321

До  $r = 6.9$  вычисляются аналогичные значения. Далее для  $r \in [7, 8.7]$  не строится последний график. С  $r = 8.8$  до  $r = 9.1$  –  $F_3(z_3, z_4)$  слишком мал. Между  $r = 9.2$  и  $r = 49$  – вычисляются все необходимые значения, но в граничных точках их нет. После  $r = 60$  последний график становится слишком мал для нахождения приближений. Рассмотрим примеры удачных вычислений в таблицах 14–15.

Таблица 14 – Пример применения алгоритма при  $r = 10$

Узлы	Коэффициенты
(9.2858, 0, 0.7)	0.2718
(-0.84606, 10.764, -0.6037)	0.2483
(-10.6015, 1.7266, 0.6713)	0.2395
(0.9393, 9.40609, -0.837)	0.2402

Таблица 15 – Пример применения алгоритма при  $r = 15$

Узлы	Коэффициенты
(14.2858, 0, 0.7)	0.2644
(-0.9373, 15.7488, -0.6298)	0.2505
(-15.6124, 1.8479, 0.6924)	0.2414
(0.9336, 14.3675, -0.7984)	0.2435

Если  $z_1 = 0.8$ , то  $M_1(r - 0.6, 0, 0.8)$ . Не вычисляются корректные значения для радиусов  $r = 1.1$ ,  $r \in [1.5, 2.5]$ . Для  $r = 1.2$  и  $r = 1.3$  не строятся два последних графика, а для  $r = 1.4$  не строится только  $F_3(z_3, z_4)$ , как и для  $r = 2.6$ ,  $r = 3.4$ . Между  $r = 2.7$  и  $r = 3.3$  строятся все графики и вычисляются необходимые значения (таблица 16).

Таблица 16 – Пример применения алгоритма при  $r = 3$

Узлы	Коэффициенты
(2.4, 0, 0.8)	0.2961
(-0.5292, 3.8443, -0.4737)	0.2392
(-3.67478, 1.3216, 0.4249)	0.2387
(1.14908, 2.44107, -0.9533)	0.2547

Далее с  $r = 3.5$  и до  $r = 5.7$  продолжается нахождение корректных значений (таблицы 17–18).

Таблица 17 – Пример применения алгоритма при  $r = 3.5$

Узлы	Коэффициенты
(2.9, 0, 0.8)	0.2854
(-0.4924, 4.3409, -0.4951)	0.2343
(-4.1785, 1.3102, 0.4766)	0.2356
(1.1134, 2.8981, -0.9185)	0.2445

Таблица 18 – Пример применения алгоритма при  $r = 4$

Узлы	Коэффициенты
(3.4, 0, 0.8)	0.2776
(-0.4463, 4.8356, -0.5166)	0.2364
(-4.6859, 1.2828, 0.51301)	0.2367
(1.087005, 3.3711, -0.8889)	0.24909

Необходимые значения вычисляются еще только на одном промежутке  $r \in [6.1, 10]$  (таблицы 19–20). При других значениях радиуса они либо не вычисляются без комплексных значений, либо не строится последний график ( $r = 5.8$  и  $r = 5.9$ ), либо величина последнего графика не достаточно велика, для нахождения начального приближения.

Таблица 19 – Пример применения алгоритма при  $r = 7$

Узлы	Коэффициенты
(6.4, 0, 0.8)	0.2562
(-0.1273, 7.7953, -0.6048)	0.2416
(-7.7337, 1.0139, 0.6001)	0.2421
(1.01284, 6.3001, -0.7854)	0.2599

Таблица 20 – Пример применения алгоритма при  $r = 10$

Узлы	Коэффициенты
(9.4, 0, 0.8)	0.2486
(-0.2274, 10.7563, -0.6513)	0.2421
(-10.7627, 0.6742, 0.6209)	0.2461
(0.9752, 9.27395, -0.7379)	0.2629

Пусть  $z_1 = 0.9$ , тогда  $M_1(r = 0.435889, 0, 0.9)$ . Не строится ни один график при радиусе  $r = 1.1$ . Не строятся два последних графика при  $r = 1.2$  и  $r = 1.3$ . Не строится последний график при  $r = 1.4$ . Далее с  $r = 1.5$  и до  $r = 1.7$  не вычисляются корректные значения. С  $r = 1.8$  и до  $r = 6$  приведем примеры удачных вычислений (таблицы 21–22).

Таблица 21 – Пример применения алгоритма при  $r = 2$

Узлы	Коэффициенты
(1.5641, 0, 0.9)	0.2849
(-0.8172, 2.8395, -0.2973)	0.2298
(-2.5295, 1.5561, 0.2437)	0.2311
(1.28621, 1.1522, -0.9619)	0.2541

Таблица 22 – Пример применения алгоритма при  $r = 5$

Узлы	Коэффициенты
(4.5641, 0, 0.9)	0.2385
(-0.0808, 5.8203, -0.4951)	0.2375
(-5.7842, 0.7627, 0.4766)	0.2394
(0.9732, 4.2185, -0.9185)	0.2844

Далее происходит перерыв на недостаточно большое построение последнего графика с  $r = 6.1$  по  $r = 6.4$ . После чего продолжается подсчет  $r = 6.5$  и до  $r = 7.2$  (таблица 23).

Таблица 23 – Пример применения алгоритма при  $r = 7$

Узлы	Коэффициенты
(6.5641, 0, 0.9)	0.2311
(0.6228, 7.7387, -0.6455)	0.2369
(-7.8162, 0.2187, 0.5733)	0.2451
(0.8771, 6.2072, -0.6822)	0.2867

С  $r = 7.3$  и до  $r = 8.3$  не вычисляются корректные значения, аналогично  $r = 11, 12, 13$ , с  $r = 32$  по  $r = 40$ .  $F_3(z_3, z_4)$  дает недостаточно точные приближения при всех оставшихся значениях радиуса.

**Второй случай**  $x_1 = r + \sqrt{1 - z_1^2}$ .

Начнем с самого маленького варианта  $z_1 = 0.1$ , тогда координаты точки  $M_1$  примут вид  $(r + 0.9949, 0, 0.1)$ . Теперь будем изменять значения радиуса, начиная с  $r = 1.1$  для данной фиксированной точки (таблица 24).

Таблица 24 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$

Узлы	Коэффициенты
(2.0949, 0, 0.1)	0.2347
(-0.6666, 1.9789, -0.1532)	0.2344
(-0.7709, 1.1458, 0.9596)	0.2353
(-0.5218, 0.6578, -0.9655)	0.2954

При значениях  $r \in [1.2, 1.4]$  невозможно вычислить коэффициенты кубатурной формулы, так как последний график  $F_3(z_3, z_4)$  строится для слишком маленьких значений. Значение радиуса  $r = 1.5$  дает положительный результат (таблица 25).

Таблица 25 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.5$

Узлы	Коэффициенты
(2.4949, 0, 0.1)	0.2304
(-0.69507, 2.3251, -0.3754)	0.226
(-0.60401, 1.58116, -0.9812)	0.2245
(-0.8844, 0.53509, -0.8846)	0.3189

Для  $r = 1.6$  не удалось вычислить корректные значения. Далее для всех оставшихся значений радиуса программа не строит  $F_3(z_3, z_4)$ .

Возьмем  $z_1 = 0.2$ , тогда  $M_1(r + 0.979795, 0, 0.2)$ . При  $r = 1.1$  сразу находятся подходящие значения (таблица 26), как и для  $r = 1.2, 1.3$ .

Таблица 26 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$

Узлы	Коэффициенты
(2.0797, 0, 0.2)	0.23406
(-0.6679, 1.98883, 0.0631)	0.2349
(-0.9004, 1.0659, 0.9553)	0.2346
(-0.4002, 0.7327, -0.9642)	0.2963

Для  $r = 1.4$  и  $r = 1.5$  строится слишком маленький последний график.

Начиная с  $r = 1.6$  и до  $r = 1.8$ , не вычисляются корректные значения. Далее для всех значений радиуса программа не строит  $F_3(z_3, z_4)$ .

Пусть  $z_1 = 0.3$ , тогда  $M_1(r + 0.953939, 0, 0.3)$ . При  $r = 1.1$  находятся все необходимые значения до  $r = 1.6$  (таблицы 27–28).

Таблица 27 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$

Узлы	Коэффициенты
(2.0539, 0, 0.3)	0.2329
(-0.6611, 1.1993, 0.0036)	0.23503
(-1.0299, 1.02609, 0.9353)	0.23204
(-0.28001, 0.7679, -0.95931)	0.2999

Таблица 28 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.5$

Узлы	Коэффициенты
(2.4539, 0, 0.3)	0.2277
(-0.7301, 2.3881, -0.07407)	0.2305
(-1.220003, 1.0424, 0.9945)	0.2298
(-0.3528, 0.9973, -0.8969)	0.3119

Для  $r = 1.7$  строится слишком маленький  $F_3(z_3, z_4)$ . С  $r = 1.8$  и до  $r = 2.2$  не вычисляются необходимые значения. Далее для всех значений радиуса не строится последний график.

При  $z_1 = 0.4$ , получаем  $M_1(r + 0.916515, 0, 0.4)$ . Для  $r = 1.1, 1.3 - 1.6, 2.5, 2.6$  вычисляются все необходимые значения (таблицы 29–30).

Таблица 29 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$

Узлы	Коэффициенты
(2.0165, 0, 0.4)	0.2314
(-0.6508, 1.1995, -0.0392)	0.235
(-1.1562, 1.0079, 0.9009)	0.2293
(-0.1595, 0.7817, -0.9593)	0.3042

Таблица 30 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.5$ 

Узлы	Коэффициенты
(2.4165, 0, 0.4)	0.2255
(-0.7089, 2.3912, -0.1078)	0.2303
(-1.3811, 1.0287, 0.97501)	0.22306
(-0.22906, 1.0009, -0.8809)	0.32107

Таблица 31 – Пример применения алгоритма при  $r = 2.5$ 

Узлы	Коэффициенты
(3.4165, 0, 0.4)	0.2308
(-0.4165, 3.1681, -0.7081)	0.2147
(-0.2963, 2.8685, -0.9235)	0.2061
(-1.7858, 0.2562, 0.71815)	0.3482

Возможно построить все графики, но не получить решения для  $r \in [1.7, 2.4]$ ,  $r \in [2.7, 3.1]$ . При  $r = 1.2$  не строится последний график, как и для всех остальных радиусов с  $r = 3.2$ .

В случае  $z_1 = 0.5$ ,  $M_1(r + 0.866025, 0, 0.5)$ . С  $r = 1.1$  до  $r = 1.4$  и с  $r = 1.8$  до  $r = 2.1$  получаются необходимые коэффициенты и узлы кубатурной формулы (таблицы 32–33).

Таблица 32 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$ 

Узлы	Коэффициенты
(1.96602, 0, 0.5)	0.2297
(-0.6406, 1.9972, -0.70408)	0.2349
(-1.2758, 1.0063, 0.8511)	0.2274
(-0.0393, 0.7805, -0.9478)	0.3079

Таблица 33 – Пример применения алгоритма при  $r = 2$ 

Узлы	Коэффициенты
(2.86602, 0, 0.5)	0.2228
(-0.7112, 2.8794, -0.2587)	0.2308
(-1.91108, 0.9369, 0.9917)	0.2167
(-0.1833, 1.40014, -0.8089)	0.3296

При  $r = 1.5$  и  $r = 1.6$  не строит  $F_3(z_3, z_4)$ . Для  $r \in [2.1, 2.9]$  не вычисляются корректные значения. Далее, начиная с  $r = 3$ , программа строит слишком маленький  $F_3(z_3, z_4)$ .

Пусть  $z_1 = 0.6$ , тогда  $M_1(r + 0.8, 0, 0.5)$ . Начиная с  $r = 1.1$  и до  $r = 2.4$ , вычисляются корректные значения (таблицы 34–36).

Таблица 34 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$

Узлы	Коэффициенты
(1.9, 0, 0.6)	0.22809
(-0.6356, 1.9971, -0.0905)	0.2348
(-1.38402, 1.0226, 0.7839)	0.2265
(-0.0947, 0.7642, -0.94402)	0.3105

Таблица 35 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.5$

Узлы	Коэффициенты
(2.3, 0, 0.6)	0.2201
(-0.6604, 2.3981, -0.1582)	0.2298
(-1.6796, 1.0259, 0.8836)	0.21609
(-0.0249, 0.9874, -0.8588)	0.3338

Таблица 36 – Пример применения алгоритма при  $r = 2$

Узлы	Коэффициенты
(2.8, 0, 0.6)	0.2187
(-0.65308, 2.8872, -0.2791)	0.2302
(-2.1066, 0.9215, 0.9541)	0.2108
(-0.05305, 1.3837, -0.7883)	0.3401

Для  $r \in [2.5, 2.9]$  необходимые значения не вычисляются, как и для  $r \in [3.6, 3.7]$ ,  $r = 4.1$  и  $r = 4.2$ . Не строится график  $F_3(z_3, z_4)$  для  $r \in [3, 3.4]$ . Далее с  $r = 3.8$  до  $r = 4$ , и с  $r = 4.3$  значения последнего графика слишком малы для дальнейших вычислений.

Если  $z_1 = 0.7$ , то  $M_1(r + 0.714142, 0, 0.7)$ . Для значений радиуса  $r \in [1.1, 3.4]$  возможно вычислить все необходимое (таблицы 37–41).



Таблица 37 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$

Узлы	Коэффициенты
(1.8141, 0, 0.7)	0.2268
(-0.6445, 1.9935, -0.0978)	0.2348
(-1.4744, 1.0638, 0.6958)	0.2268
(-0.2387, 0.7278, -0.9425)	0.3115

Таблица 38 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.5$

Узлы	Коэффициенты
(2.2141, 0, 0.7)	0.2176
(-0.6437, 2.4003, -0.1712)	0.2297
(-1.8056, 1.049, 0.8087)	0.2158
(-0.1653, 0.9652, -0.8537)	0.3368

Таблица 39 – Пример применения алгоритма при  $r = 2$

Узлы	Коэффициенты
(2.7141, 0, 0.7)	0.2146
(-0.5946, 2.89503, -0.2951)	0.2298
(-2.2765, 0.9181, 0.8906)	0.2093
(-0.0883, 1.3671, -0.7765)	0.3461

Таблица 40 – Пример применения алгоритма при  $r = 2.5$

Узлы	Коэффициенты
(3.2141, 0, 0.7)	0.2152
(-0.5326, 3.3753, -0.3987)	0.2308
(-2.7739, 0.5124, 0.9291)	0.2061
(-0.0082, 2.2584, -0.7191)	0.3477

Таблица 41 – Пример применения алгоритма при  $r = 3$

Узлы	Коэффициенты
(3.7141, 0, 0.7)	0.21703
(-0.4595, 3.8487, -0.48207)	0.2311
(-3.2851, 0.5124, 0.9457)	0.2043
(-0.0826, 2.2584, -0.6725)	0.3475

Начиная с  $r = 3.5$  и до  $r = 4.2$  и далее  $r \in [4.8, 5.5]$ ,  $r \in [8.8, 9.5]$  не вычисляются необходимые значения узлов и коэффициентов. Строится слишком маленький график  $F_3(z_3, z_4)$  для  $r \in [4.3, 4.7]$ ,  $r \in [5.6, 8.7]$  и с  $r = 9.6$  и так далее.

Если  $z_1 = 0.8$ , то  $M_1(r + 0.6, 0, 0.8)$ . Программа вычисляет корректные значения для радиусов, начиная с  $r = 1.1$  и до  $r = 3.7$  (таблицы 42–47).

Таблица 42 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$

Узлы	Коэффициенты
(1.7, 0, 0.8)	0.2266
(-0.6858, 1.9808, -0.0871)	0.2348
(-1.5347, 1.1464, 0.5784)	0.2284
(-0.4076, 0.6555, -0.9446)	0.3101

Таблица 43 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.5$

Узлы	Коэффициенты
(2.1, 0, 0.8)	0.2158
(-0.6471, 2.3993, -0.1719)	0.2297
(-1.9071, 1.10507, 0.71001)	0.2174
(-0.3263, 0.9228, -0.8534)	0.3369

Таблица 44 – Пример применения алгоритма при  $r = 2$

Узлы	Коэффициенты
(2.6, 0, 0.8)	0.21105
(-0.5973, 2.9022, -0.3015)	0.2296
(-2.4174, 0.9442, 0.8034)	0.2109
(-0.2495, 1.3419, -0.7724)	0.3483

Таблица 46 – Пример применения алгоритма при  $r = 2.5$

Узлы	Коэффициенты
(3.1, 0, 0.8)	0.21008
(-0.4319, 3.38507, -0.40902)	0.23042
(-2.9434, 0.7273, 0.8467)	0.20805
(-0.1726, 1.7888, -0.71133)	0.35143

Таблица 47 – Пример применения алгоритма при  $r = 3$ 

Узлы	Коэффициенты
(3.6, 0, 0.8)	0.2105
(-0.3005, 3.8565, -0.4962)	0.2302
(-3.4732, 0.4653, 0.8635)	0.20702
(-0.0855, 2.2485, -0.6616)	0.3521

С  $r = 3.8$  и до  $r = 4.6$  не вычисляются корректные значения, для  $r \in [5.2, 6.4]$ ,  $r \in [12, 16]$  аналогично. Для остальных значений радиуса строится слишком маленький график  $F_3(z_3, z_4)$ , а именно для  $r \in [4.7, 5.1]$ ,  $r \in [6.5, 11]$  и с  $r = 17$  и так далее.

Пусть  $z_1 = 0.9$ , тогда  $M_1(r + 0.435889, 0, 0.9)$ . Сразу же, начиная с  $r = 1.1$  и до  $r = 3.3$ , вычисляется все необходимое (таблицы 48–52).

Таблица 48 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.1$ 

Узлы	Коэффициенты
(1.5358, 0, 0.9)	0.2293
(-0.8186, 1.933, -0.04006)	0.2349
(-1.5209, 1.3224, 0.4022)	0.2313
(0.6313, 0.4871, -0.9531)	0.3042

Таблица 49 – Пример применения алгоритма при  $r = 1.5$ 

Узлы	Коэффициенты
(1.9358, 0, 0.9)	0.2165
(-0.7014, 2.3872, -0.1531)	0.2299
(-1.9686, 1.2258, 0.5736)	0.2209
(0.5323, 0.8361, -0.8609)	0.3326

Таблица 50 – Пример применения алгоритма при  $r = 2$ 

Узлы	Коэффициенты
(2.4358, 0, 0.9)	0.2093
(-0.5324, 2.9075, -0.2935)	0.2299
(-2.5256, 1.0267, 0.6873)	0.2151
(0.45131, 1.2949, -0.77764)	0.3456

Таблица 51 – Пример применения алгоритма при  $r = 2.5$ 

Узлы	Коэффициенты
(2.9358, 0, 0.9)	0.2064
(-0.3596, 3.3956, -0.40418)	0.2306
(-3.07519, 0.7852, 0.73884)	0.2131
(0.37852, 1.7605, -0.71488)	0.3497

Таблица 52 – Пример применения алгоритма при  $r = 3$ 

Узлы	Коэффициенты
(3.4358, 0, 0.9)	0.2053
(-0.1739, 3.8665, -0.4923)	0.2305
(-3.6157, 0.5056, 0.75909)	0.2131
(0.2994, 2.2326, -0.6644)	0.3509

При  $r \in [3.4, 4.7]$ ,  $r \in [5.3, 6.8]$  и  $r \in [12, 16]$  не вычисляются корректные значения, применяя метод Ньютона. Для остальных значений радиуса  $r \in [4.8, 5.2]$ ,  $r \in [6.9, 11]$  и все с  $r = 17$  программа строит недостаточно точный  $F_3(z_3, z_4)$ .

Теперь, стало возможно скомпоновать общие выводы о существовании кубатурных формул при различных значениях радиуса и одной зафиксированной координате первого узла.

В первом случае, где координата точки  $M_1(x_1, 0, z_1)$  имеет вид  $x_1 = r - \sqrt{1 - z_1^2}$ , для значений  $z_1 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  не удалось получить удовлетворительного результата. Не были найдены ни узлы, ни коэффициенты кубатурной формулы. Для оставшихся значений  $z_1 = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  получалось периодически подбирать верное начальное приближение для конкретных радиусов и далее вычислять узлы и коэффициенты без комплексных величин. Во втором случае, где координата точки  $M_1(x_1, 0, z_1)$  имеет вид  $x_1 = r + \sqrt{1 - z_1^2}$ , уже с первых значений  $z_1$  подобрать необходимое начальное приближение было не так сложно. Но в основном оно находилось только для маленьких радиусов, а далее графический способ подбора заходил в тупик.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, можно сказать, что цель данной выпускной квалификационной работы была достигнута. Построены минимальные кубатурные формулы по поверхности тора методом воспроизводящего ядра. Для этого в первой части работы был разобран весь необходимый теоретический материал. Во второй части был реализован метод воспроизводящего ядра с соответствующими математическими вычислениями. В итоге, создана программа для автоматизации нахождения узлов и коэффициентов кубатурной формулы в системе компьютерной алгебры Maple 12, с помощью которой было проделано множество экспериментов в третьей части работы.

Несмотря на все описанные достижения при степени точности  $d = 2$ , уже возникают вычислительные трудности в построении минимальных кубатурных формул для тора в пространстве  $R^3$ , и не удастся описать все кубатурные формулы порядка 2. Возможно, причиной этому является несимметричное расположение узлов кубатурной формулы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы. т. I / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
2. Канатников, А. Н. Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – М.: МГТУ им. Баумана. Электронное учебное издание, – 2012. – 44 с.
3. Мысовских, И. П. Интерполяционные кубатурные формулы / И.П. Мысовских. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 336 с.
4. Мысовских, И. П. О вычислении интегралов по поверхности сферы / И.П. Мысовских // ДАН СССР. – 1977. – С. 269-272.
5. Мысовских, И. П. О кубатурных формулах, инвариантных относительно групп преобразований / И.П. Мысовских // Методы вычислений. Вып. 11. – Л.: Из-во Ленингр. ун-та, 1978. – С. 3-21.
6. Напалков, В. В. Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром / В. В. Напалков. – Уфимский математический журнал, 2013. – Т.5. – С. 91-104.
7. Носков, М. В. Минимальные приближенные представления линейных функционалов, точные на алгебраических многочленах / М. В. Носков, Н. Н. Осипов // Кубатурные формулы и их приложения: Сборник трудов IV семинара-совещания. – Улан-Уде: ВСГТУ, 1997. – С. 57-75.
8. Носков, М. В. О приближенном интегрировании по поверхности тора / М. В. Носков // Вест. СПбГУ, Вып. 3. – Санкт-Петербург, 1992. – N 15. – Сер. 1. – С. 100-102.
9. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
10. Попов, А. С. Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений диэдра с инверсией  $D_6$  / А. С. Попов. –

Сибирский журнал вычислительной математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2013. – Т.16. – С. 57-62.

11. Рамазанов, М. Д. Лекции по теории приближенного интегрирования / М. Д. Рамазанов. – Уфа.: Из-во Башк. Гу, 1973. – 176 с.

12. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

13. Соболев, С. Л. Кубатурные формулы / С. Л. Соболев, В. Л. Васкевич. – Новосибирск: Из-во ИМ СО РАН, 1996. – 484 с.

14. Федотова, И. М. Кубатурные формулы для приближенного интегрирования по поверхности тора: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 / Федотова Ирина Михайловна. – Красноярск, 2003. – 88 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

В данном приложении рассмотрим более подробно реализацию графического метода построения функций и метода Ньютона для систем нелинейных уравнений в системе компьютерной алгебры Maple 12: Universities or Equivalent Degree Graduating Institutions 100+ users, New License Academic (Лицензионный сертификат Softline от 30.09.2008, бессрочно).

Для построения графических функций в программе используется пакет `plots`. Нам необходима команда `implicitplot`, которая строит неявно заданные функции (рисунок 10).

```
> with(plots);  
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal,  
conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot,  
fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal,  
interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot,  
listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot,  
pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus,  
semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot,  
textplot3d, tubeplot]  
> implicitplot(F1=0,z2=-1...1,z3=-1...1);  
> implicitplot(F2=0,z2=-1...1,z4=-1...1);  
> implicitplot(F3=0,z3=-1...1,z4=-1...1);
```

Рисунок 10 – Пример использования пакета `plots`

Для метода Ньютона сначала необходимо подключить пакет `linalg`, с помощью которого возможна работа с матрицами.

Далее зададим Якобиан для системы нелинейных уравнений. Найдем определитель матрицы Якоби и еще несколько определителей. Зададим начальное приближение для переменных  $z_{20}, z_{30}, z_{40}$  и организуем цикл для вычислений по методу Ньютона [9]. Выведем полученные нами результаты, с помощью которых появится возможность вычислить все интересующие нас



переменные, а именно координаты точек  $M_1(x_1, 0, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_2(x_3, y_3, z_3)$ ,  $M_2(x_4, y_4, z_4)$  – узлы и коэффициенты кубатурной формулы.

```

> with(linalg);
> J := matrix(3,3, [[diff(f1, z2), diff(f1, z3), diff(f1, z4)],
                   [diff(f2, z2), diff(f2, z3), diff(f2, z4)],
                   [diff(f3, z2), diff(f3, z3), diff(f3, z4)]]);
> Jn := (det(J)):
> An := det([[f1, diff(f1, z3), diff(f1, z4)],
             [f2, diff(f2, z3), diff(f2, z4)],
             [f3, diff(f3, z3), diff(f3, z4)]]):
> Bn := det([[diff(f1, z2), f1, diff(f1, z4)],
             [diff(f2, z2), f2, diff(f2, z4)],
             [diff(f3, z2), f3, diff(f3, z4)]]):
> Cn := det([[diff(f1, z2), diff(f1, z3), f1],
             [diff(f2, z2), diff(f2, z3), f2],
             [diff(f3, z2), diff(f3, z3), f3]]):
> z20 := -0.03; z30 := 0.19; z40 := -0.9; e := 0.00001; n := 0:
> while abs(subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, f1)) +
        +abs(subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, f2)) +
        +abs(subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, f3)) > e
do
    if abs(subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, Jn)) < 10-100 then break fi;
    if n = 50 then break fi;
z21 := z20 - subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, An)
        /subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, Jn);
z31 := z30 - subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, Bn)
        /subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, Jn);

```

```

z41 := z40 - subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, Cn)
          /subs(z2 = z20, z3 = z30, z4 = z40, Jn);
z20 := z21; z30 := z31; z40 := z41; n := n + 1
od;
> evalf(z21); evalf(z31); evalf(z41);
> x2 := subs(z2 = z21, x2); x3 := subs(z3 = z31, x3);
  x4 := subs(z4 = z41, x4);
> y2 := subs(z2 = z21, y2); y3 := subs(z3 = z31, y3);
  y4 := subs(z4 = z41, y4);
> c1 := w/(w + 2 * x1^2 + 2 * w * z1^2);
> c2 := w/(w + 2 * x2^2 + 2 * y2^2 + 2 * w * z21^2);
> c3 := w/(w + 2 * x3^2 + 2 * y3^2 + 2 * w * z31^2);
> c4 := w/(w + 2 * x4^2 + 2 * y4^2 + 2 * w * z41^2);

```

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий

Кафедра «Прикладная математика и компьютерная безопасность»

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой

  
А.А. Кытманов

« 8 » июля 2019 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

01.03.04 Прикладная математика

Построение минимальных кубатурных формул по поверхности тора  
методом воспроизводящего ядра


Руководитель

  
05.07.2019г.

доцент каф. ПМКБ,  
канд. физ.-мат. наук

И.М. Федотова

Выпускник

  
04.07.2019г.

студент группы КИ15-18Б

А.Н. Водальчук

Красноярск 2019