УДК 519.1

О РАЗМЕЩЕНИИ КЛАПАНОВ НА ЛИНЕЙНОМ УЧАСТКЕ ТРУБОПРОВОДА

Ким О.Э.,

научный руководитель канд. техн. наук Быкова В.В.

Институт математики и фундаментальной информатики

Сибирский Федеральный Университет

Современным средством транспортировки опасных жидкостей и газов являются сети трубопроводов. Из-за влияния внешних факторов и эрозии труб возникают аварийные ситуации, приводящие к разгерметизации системы и как следствие к попаданию вредных веществ в окружающую среду. Каждая труба обычно оснащена запорной аппаратурой (клапанами) для контроля возможного разлива. Клапаны автоматически разделяют трубопроводную сеть на секции, когда происходит разгерметизация сети. Поэтому количество опасных жидкостей и газов, потенциально покидающих сеть пропорционально общей длине труб в поврежденном секторе сети, разделенной клапанами. В большинстве случаев разгерметизация одновременно происходит только на одном участке, ограниченном с обеих сторон клапанами. Одновременный разрыв нескольких участков трубопровода маловероятен. Возникает следующая задача. Задана сеть трубопроводов и число клапанов для расстановки. Известны также точки соединения участков отдельных труб между собой и веса (длины) этих участков. Считается, что клапаны могут размещаться только в точках соединения труб. Предполагается, что при разгерметизации какого-либо одного участка трубы между клапанами объем утечки опасных жидкостей и газов равен весу соответствующего участка трубы. Требуется найти такое размещение клапанов, которое минимизирует максимально возможный объем разлива нефти.

1 Формулировка задачи о размещении клапанов для линейного участка трубопровода на языке теории графов

Сети трубопроводов обычно имеют довольно сложную структуру, обусловленную географией местности. Поэтому, возникает интерес рассматривать более простые с точки зрения теории графов участки сети. Наиболее распространенным участком является магистраль – линейный участок сети (в терминах теории графов - цепь). В работе [3] была поставлена задача о размещении клапанов в терминах теории графов для произвольного связного неориентированного графа. Придерживаясь терминов и обозначений работы [3] рассмотрим случай, когда граф является цепью. Пусть $G = (V, E)$ − связный неориентированный граф, изображающий сеть трубопроводов, где $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ − множество вершин графа, $n = |V|$ − количество вершин графа, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ − множество ребер графа. Пусть k есть число клапанов, заданных для размещения в трубопроводе, причем $0 \le k \le n - 2$. Всякое ребро $e \in E$ задает определенный участок трубы. Вершины степени 1 представляют собой источники и стоки. Вершины степени 2 – точки соединения труб между собой. Предполагается, что каждый из k заданных клапанов может быть установлен в любой вершине степени 2. Полагается, что в вершинах степени 1 (в данном случае их две, одна − источник, другая − сток) клапаны установлены изначально. Обозначим вес участка трубы $e \in E$ через $w_e \in Z^+$. Требуется найти k-элементный сепаратор $V' \subseteq V$, минимизирующий величину максимального разлива. Напомним, что $V' \subseteq V$ является k-элементным сепаратором связного графа $G = (V, E)$, если $G = (V \setminus V')$ несвязен и $|V'| = k$. Обозначим через

$$V_1, V_2, \ldots, V_s$$

области связности графа $G(V \setminus V')$, где $s \geq 1$. Пусть $N_G(V_i)$ определяет окрестность множества вершин V_i и граф G^* построен из $G(V \setminus V')$ добавлением в него всех окрестностей $N_G(V_i)$, $i = 1, \ldots, s$. Графы

$$G_i = G(Y_i) = (Y_i, E_i) \;\; Y_i = V_i \cup N_G(V_i))$$

($i = 1, \ldots, s$) задают компоненты связности в G^* относительно сепаратора V'. Для любых двух таких компонент связности G_i и G_j верно включение

$$Y_i \cap Y_j \subseteq V', \;\; 1 \leq i < j \leq s.$$

Тогда функцию, определяющую максимальный разлив, можно выразить следующим образом:

$$W(V') = \max_{1 \leq i \leq s} \textstyle\sum_{e \in Ei} w_e. \qquad (1.1)$$

Таким образом, задача о размещении клапанов для линейного участка трубопровода состоит в нахождении k-элементного сепаратора V', минимизирующего значение величины $W(V')$.

2 Метод полного перебора для решения задачи о размещении клапанов

Наиболее простым методом решения данной задачи является исчерпывающий перебор всех возможных вариантов расстановки клапанов, то есть всех различных k-элементных сепараторов графа $G = (V, E)$. Однако уже при $n \geq 17$ возникает проблема нехватки вычислительной мощности, так как приходится перебирать до C_{n-2}^k комбинаций. Поэтому был разработан алгоритм полного перебора с использованием кода Грея. В ходе исполнения алгоритма генерируются двоичные вектора, где единица соответствует наличию клапана в данной вершине, а ноль – отсутствию. Преимуществом данного алгоритма является последовательность подмножеств множества V, когда каждое следующее подмножество получается из предыдущего добавлением или удалением одного элемента, то есть происходит изменение лишь одного разряда в текущем двоичном векторе. Поэтому, для каждого нового подмножества значение максимального разлива вычисляется на основе предыдущего и тем самым сокращается объем вычислений.

3 Описание алгоритма

Рассмотрим подробнее алгоритм полного перебора. Входными данными являются: n – число вершин цепи, k – число клапанов для расстановки, $w[n-1]$ – массив весов ребер, где элемент $w[i]$ при $i = 1, \ldots, n-1$ отвечает весу ребра под номером i. Алгоритм сводится к выполнению следующей последовательности шагов.

Шаг 1. В качестве начального взять двоичный вектор $B[n-2] = (0, \ldots, 0)$. За оптимальный разлив принять сумму весов всех ребер цепи

$$W_{opt} = \textstyle\sum_{1 \leq i \leq n-1} w[i].$$

Задать начальный вектор разливов, то есть для всех $i = 1, \ldots, n-2$ выполнить $R[i] = 0$, а при $i = n - 1$ присвоить $R[i] = W_{opt}$.

Шаг 2. Положить $i = 0$, где i − число построенных двоичных векторов.

Шаг 3. Вычислить максимальный элемент массива разливов по формуле

$$W = \max_{1 \leq i \leq n-1} R[i]$$

и количество ненулевых элементов двоичного вектора $kol = \sum_{1 \leq i \leq n-2} B[i]$.

Шаг 4. Если $kol \leq k$ и $W = W_{opt}$, то добавить вектор B в список наилучших векторов.

Шаг 5. Если $kol \leq k$ и $W < W_{opt}$, то очистить список наилучших векторов и внести в него вектор B. Принять $W_{opt} = W$.

Шаг 6. Найти p − наибольшую степень двойки, которая делит нацело i.

Шаг 7. Если $p > n - 2$, то останов.

Шаг 8. Присвоить $B[p] = 1 - B[p]$.

Шаг 9. Если $B[p] = 1$, то $R[p] = R[p] + w[p]$ и из ближайшего справа ненулевого элемента массива R вычесть значение $w[p]$. Иначе $R[p] = R[p] - w[p]$ и к ближайшему слева ненулевому элементу массива R прибавить значение $w[p]$.

Шаг 10. Вернуться к шагу 3.

Результатом выполнения алгоритма являются: значение минимально максимально возможного разлива W_{opt}, наилучшие векторы B, в которых наличие единицы на i − ой позиции означает наличие клапана в i − ой вершине графа $G = (V, E)$ и ноль − отсутствие.

В данном случае число всевозможных вариантов размещения клапанов равно C_{n-2}^{k}. На обработку одного варианта требуется порядка $O(n)$ операций. Таким образом, время работы алгоритма составляет $O(n \cdot 2_{n-2}^{k})$.

Следует отметить, что разработанный алгоритм может быть использован при решении задачи о размещении клапанов для графа произвольной структуры методом динамического программирования на основе дерева декомпозиции [1].

4 Решение прямой задачи для линейного участка сети методом динамического программирования

При решении прямой задачи для участка сети типа цепь можно применить классический алгоритм динамического программирования. Суть данного метода состоит в следующем.

Пусть функция $f(v, j)$ обозначает минимаксный разлив для первых v ребер цепи, когда j клапанов установлены только в первых v вершинах. Тогда рекуррентные соотношения, связывающие оптимальные решения возникших подзадач имеют вид:

$$f(v, j) = \min_{1 \le u \le v-1} \max\{f(u, j-1), \Sigma_{u \le \omega \le v-1} w_\omega\} \qquad (4.1)$$

для всех $2 \le v \le n$, $1 \le j \le k$,

$$f(v, 0) = \Sigma_{1 \le \omega \le v-1} w_\omega, \qquad (4.2)$$

где $2 \le v \le n$ и

$$f(1, j) = 0, \qquad (4.3)$$

где $0 \le j \le k$.

Установлено [2], что данные рекуррентные соотношения позволяют найти решение задачи за время $O(k\, n^2 \log w_{max})$, где $n = |V|$ и $w_{max} = \max_{e \in E} w_e$.

5 Применение эвристик

Любой участок сети типа цепь можно представить в виде некоторого отрезка целочисленной прямой. Длинна этого отрезка равна суммарному весу всех ребер:

$$L = \sum_{1 \le i \le n-1} w[i]. \qquad (5.1)$$

Возможным приближенным способом решения прямой задачи о размещении k клапанов в сети типа цепь является разделение данного отрезка на $k + 1$ равных интервалов. При этом следует учитывать специфику задачи (требование о размещении клапанов лишь в вершинах сети). Данная эвристика основана на здравом смысле. Был разработан алгоритм, реализующий эту эвристику.

Алгоритм основан на реализации деления отрезка длины L на $k + 1$ равных интервалов и нахождении мнимых точек расстановки клапанов. На следующем шаге осуществляется поиск ближайших к мнимым точкам вершин цепи. Основываясь на формуле (1.1), для полученных вариантов расположения клапанов вычисляются значения максимально возможных разливов. На заключительном шаге в качестве решения задачи выбирается такое расположение клапанов, которое обеспечивает наименьший из полученных максимальных разливов. Для выполнения данного алгоритма необходимо время $O(n \cdot 2^k)$.

6 Заключение

Следует отметить, что метод полного перебора и метод динамического программирования решают более широкую задачу, чем прямая задача о размещении клапанов. В результате их применения мы получаем различные оптимальные варианты размещения клапанов, при этом число клапанов не превышает заданного по условию.

Разработанные алгоритмы и программы могут быть использованы для оптимального размещения запорной аппаратуры при проектировании и эксплуатации трубопроводов. Сравнение алгоритмов позволяет сделать следующие выводы, относительно их практического применения:

- алгоритм полного перебора ввиду его высокой вычислительной сложности по n целесообразно использовать только при небольшом числе точек соединения труб между собой;
- время реализации метода динамического программирования зависит от значения w_{max}. Поэтому, данный метод целесообразно использовать, когда значение w_{max} полиномиально зависит от n;
- представленный эвристический алгоритм, имеет полиномиальное время выполнения относительно n, однако, дает лишь приближенное решение задачи. Алгоритм может быть использован при больших значениях n.

7 Список литературы

1 Быкова В.В. Вычислительные аспекты древовидной ширины графа // ПДМ/. 2011. №3. С. 65−79.

2 Grigoriev A., Grigorieva N.V. The valve location problem: Minimizing environmental damage of a spill in long oil pipelines // Computers & Industrial Engineering. 2009. V. 57. P. 976–982.

3 Ким О.Э. О размещении клапанов в трубопроводах // Труды XV Международной конференции по эвентологической математике и смежным вопросам. Красноярск, 2011. С. 100−101.