УДК 517.95

Об одной обратной задаче для уравнения Максвелла-Больцмана

Дмитрий Г.Орловский*
Московский инженерно-физический институт,
Каширское ш. 31, Москва, 115409,
Россия

Получена 18.05.2009, окончательный вариант 20.06.2009, принята к печати 30.06.2009

Рассмотрена обратная задача для уравнения Максвелла-Больцмана в ограниченной области трехмерного пространства. Получена теорема существования и единственности слабого и сильного решений. Изучение задачи проводится на основе теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с применением теории сильно непрерывных полугрупп.

Ключевые слова: обратная задача, банахово пространство, полугруппа, слабое решение.

Пусть в пространстве R^3 задана ограниченная выпуклая область Ω с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Для функции $u = u(x, v, t)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in R^3$, $t \geqslant 0$, рассмотрим уравнение Максвелла-Больцмана

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v, \nabla_x u) + (a, \nabla_v u) =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^3} K(x, v, v')u(x, v', t)dv' - \nu(x, v)u + F(x, v, t), \tag{1}$$

где

$$a(x, v) = \frac{e}{m}\left(E(x) + \frac{1}{c}\,[v, B(x)]\right). \tag{2}$$

С точки зрения приложений уравнение (1) описывает поведение распределения электронной компоненты плазмы, занимающей область Ω. Величины e и m имеют соответственно смысл заряда и массы электрона, c – скорость света, а вектор-функции $E(x)$ и $B(x)$ представляют собой напряженность электрического и индукцию магнитного полей, функция $\nu(x, v)$ носит название частоты столкновений.

В классической постановке для уравнения (1) задаются начальные и граничные данные

$$u(x, v, 0) = u_0(x, v), \quad x \in \Omega, \quad x \in R^3, \tag{3}$$

$$u(x, v, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (v, n_x) < 0, \tag{4}$$

где n_x – единичная внешняя нормаль к границе области Ω в точке x.

Предположим, что в уравнении (1) функция F (плотность источников) неизвестна, но имеет следующую структуру:

$$F(x, v, t) = f(x, v, t)h(t) + g(x, v, t), \tag{5}$$

*e-mail: odg@bk.ru

причем функции f и g известны. Для определения неизвестной функции h рассмотрим дополнительную информацию:

$$\int\limits_{\Omega\times R^3} u(x,v,t)\omega(x,v)dxdv = \varphi(t). \tag{6}$$

Таким образом, необходимо найти пару функций (u, h), удовлетворяющую соотношениям (1)–(6). Поставленная задача относится к категории обратных задач для уравнений математической физики. Обзор различных постановок обратных задач и относящихся к ним результатов можно найти в [1–9]. Для уравнения Больцмана обратная задача была впервые рассмотрена в [10,11].

Теорема 1. *Пусть* E, $B \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $u_0 \in \mathrm{L}_p(\Omega\times R^3)$, *функция* ν *непрерывна и ограничена в* $\Omega\times R^3$, *функция* ω *непрерывно дифференцируема и финитна в* $\Omega\times R^3$, *функция* $\varphi \in C^1[0,T]$, *функции*

$$f, g \in C\left([0,T], \mathrm{L}_p(\Omega\times R^3)\right), \quad p > 1,$$

конечны величины

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = \sup\limits_{x,v} \int\limits_{R^3} |K(x,v,v')|dv' \\ c_2 = \sup\limits_{x,v'} \int\limits_{R^3} |K(x,v,v')|dv, \end{array}\right. \tag{7}$$

выполнено условие согласования

$$\int\limits_{\Omega\times R^3} u_0(x,v)\omega(x,v)dxdv = \varphi(0) \tag{8}$$

и, кроме того, при всех $t \in [0,T]$

$$\int\limits_{\Omega\times R^3} f(x,v,t)\omega(x,v)dxdv \neq 0. \tag{9}$$

Тогда существует и единственно (обобщенное) решение обратной задачи (1)–(6) в классе

$$u \in C\left([0,T], \mathrm{L}_p(\Omega\times R^3)\right), \quad h \in C[0,T].$$

Доказательство. Рассмотрим сначала прямую задачу (1)–(4). Мы будем трактовать уравнение (1) как абстрактное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве

$$\mathrm{X} = \mathrm{L}_p(\Omega\times R^3)$$

и будем рассматривать u как функцию переменной t со значениями в X. Полагая

$$\mathcal{A}u = -(v, \nabla_x u) - (a, \nabla_v u) + \int\limits_{\mathbf{R}^3} K u dv' - \nu u,$$

получим уравнение

$$u'(t) = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{F}(t), \tag{10}$$

где $\mathcal{F}$ представляет функцию F, рассматриваемую как функцию переменной t со значениями в X. Краевое условие (4) при операторном подходе к дифференциальным уравнениям принято включать в область определения оператора $\mathcal{A}$ (описание этой области определения будет дано позже). Начальные данные $u_0(x)$ также трактуются как элемент пространства X, и условие (3) принимает следующий вид:

$$u(0) = u_0. \tag{11}$$

Таким образом, прямая задача (1)–(4) с точки зрения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве записывается в форме (10)–(11). Для решения задачи (10)–(11) воспользуемся теорией полугрупп. Для этого необходимо установить, что оператор $\mathcal{A}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы. Этот оператор можно разбить в сумму неограниченной и ограниченной составляющих $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, где

$$\mathcal{A}_1 u = -(v, \nabla_x u) - (a, \nabla_v u), \tag{12}$$

$$\mathcal{A}_2 u = \int\limits_{\mathbf{R}^3} K u dv' - \nu u. \tag{13}$$

Вопрос о порождении оператором $\mathcal{A}_1$ сильно непрерывной полугруппы был рассмотрен в работах [12, 13]. Эта полугруппа представляет собой операторы сдвига вдоль характеристик уравнения (1), которые являются решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -\eta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -a(\xi, \eta)\,. \end{cases} \tag{14}$$

Решение системы (14), отвечающее данным Коши

$$\xi(0) = x\,, \quad \eta(0) = v,$$

обозначим через $\xi(t; x, v)$, $\eta(t; x, v)$. Тогда полугруппа $T(t)$, порожденная оператором $\mathcal{A}_1$, действует по формуле

$$[T(t)u](x, v) = \begin{cases} u(\xi(t; x, v), \eta(t; x, v))\,, & \xi(t; x, v) \in \Omega\,, \\ 0\,, \quad \xi(t; x, v) \notin \Omega\,. \end{cases}$$

Область определения $D(\mathcal{A}_1)$ оператора $\mathcal{A}_1$ состоит из всех функций $u \in \mathrm{L}_p(\Omega \times R^3)$, для которых почти при всех $(x, v) \in \Omega \times R^3$ существует правая производная вдоль характеристик

$$\frac{du^+}{dt}(x, v) = \lim_{t \to 0+0} \frac{u(\xi(t; x, v), \eta(t; x, v)) - u(x, v)}{t}.$$

Эта производная также принадлежит пространству $\mathrm{L}_p(\Omega \times R^3)$, а сама функция u удовлетворяет граничному условию (4). При этом действие генератора полугруппы совпадает с правой производной вдоль характеристик

$$\mathcal{A}u = \frac{du^+}{dt}.$$

Таким образом, дифференциальное соотношение (1) остается в силе при замене его на абстрактный аналог, если выражение

$$-(v, \nabla_x u) - (a, \nabla_v u)$$

понимать как производную вдоль характеристик.

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_2$. Он является суммой двух операторов

$$\mathcal{A}_{21} : u(x,v) \longrightarrow \int\limits_{\mathbf{R}^3} K(x,v,v')u(x,v',t)dv',$$

$$\mathcal{A}_{22} : u(x,v) \longrightarrow \nu(x,v)u(x,v).$$

Из условий (7) следует, что оператор $\mathcal{A}_{21}$ ограничен в пространстве X (см., например, [14]), причем

$$\|\mathcal{A}_{21}\| \leqslant c_1^{\frac{1}{p}} c_2^{1-\frac{1}{p}}.$$

Для ограниченности оператора $\mathcal{A}_{22}$ в X достаточно, чтобы функция u была измерима и ограничена в $\Omega \times R^3$, что следует из условий теоремы 1. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_2$ ограничен как сумма ограниченных операторов.

По известной теореме о возмущении полугрупп (см., например, [15]) отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}$ с областью определения $D(\mathcal{A})$, совпадающей с областью определения оператора $\mathcal{A}_1$, также является генератором сильно непрерывной полугруппы, которую мы обозначим $V(t)$.

Рассмотрим прямую задачу в абстрактной формулировке (10), (11). Из теории полугрупп известно, что если функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mathcal{F} \in C([0,T],\mathrm{X})$, то формула

$$u(t) = V(t)u_0 + \int\limits_0^t V(t-s)\mathcal{F}(s)ds \tag{15}$$

определяет (единственное) слабое решение $u \in C([0,T],X)$ задачи (10)–(11).

Перейдем к обратной задаче. В пространстве X рассмотрим функционал, определяемый равенством

$$Lu = \int\limits_{\Omega\times R^3} u(x,v)\omega(x,v)dxdv. \tag{16}$$

Для непрерывности этого функционала достаточно, чтобы функция

$$\omega \in \mathrm{L}_q(\Omega \times R^3), \quad (p^{-1}+q^{-1}=1).$$

Это условие выполнено в силу предположений теоремы. Обозначим через $\Phi(t)$ оператор умножения на функцию $f(x,v,t)$ (рассматриваемую при фиксированном t как функцию переменных x и v). Этот оператор действует из одномерного пространства R в банахово пространство X по формуле

$$\Phi(t)h = f(x,v,t)h.$$

Из условий теоремы следует, что при каждом фиксированном t функция $f(x,v,t) \in \mathrm{X}$. Этого достаточно для непрерывности рассматриваемого оператора из R в X. Более того, операторная функция $\Phi \in C([0,T],\mathcal{L}(R,\mathrm{X}))$.

Функцию $g(x,v,t)$, рассматриваемую как функцию переменной t со значениями в X, обозначим через $g(t)$. Согласно условию теоремы 1 функция $g \in C([0,T],\mathrm{X})$.

Используя введенные обозначения, мы можем записать обратную задачу в абстрактном виде:

$$\begin{cases} u'(t) = \mathcal{A}u(t) + \Phi(t)h(t) + g(t), \\ u(0) = u_0, \\ Lu(t) = \varphi(t). \end{cases} \tag{17}$$

Лемма 1. *Замыкание $L\mathcal{A}$ является ограниченным функционалом в пространстве* X.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_2$ – ограниченный оператор в X, то достаточно проверить ограниченность замыкания функционала $L\mathcal{A}_1$. Так как результатом применения оператора $\mathcal{A}_1$ является правая производная вдоль характеристик, то для любой непрерывно дифференцируемой функции u величина $\mathcal{A}_1 u = -(v, \nabla_x u) - (a, \nabla_v u)$. Отсюда следует, что

$$L\mathcal{A}_1 u = -\int\limits_{\Omega\times R^3} (v, \nabla_x u)\omega(x,v)dxdv - \int\limits_{\Omega\times R^3} (a, \nabla_v u)\omega(x,v)dxdv.$$

Так как функция $\omega(x,v)$ непрерывно дифференцируема и финитна, то после интегрирования по частям получаем

$$L\mathcal{A}_1 u = \int\limits_{\Omega\times R^3} u(x,v)(v, \nabla_x \omega)dxdv + \int\limits_{\Omega\times R^3} u(x,v)\mathrm{div}_v(\omega a)dxdv.$$

Полагая $b(u,v) = (v, \nabla_x\omega) + \mathrm{div}_v(\omega a)$, получаем равенство

$$L\mathcal{A}_1 u = \int\limits_{\Omega\times R^3} u(x,v)b(u,v)dxdv. \tag{18}$$

Из условий теоремы следует, что функция $b(u,v)$ непрерывна и финитна в $\Omega\times R^3$, следовательно, правая часть равенства (18) является ограниченным функционалом в пространстве $\mathrm{X} = \mathrm{L}_p(\Omega\times R^3)$, и поэтому

$$\overline{L\mathcal{A}_1} u = \int\limits_{\Omega\times R^3} u(x,v)b(u,v)dxdv,$$

что доказывает лемму 1. □

Рассмотрим оператор $L\Phi$. Непосредственно из определения функционала L и оператора Φ следует, что при каждом фиксированном значении $t \in [0,T]$ оператор $L\Phi$ есть оператор умножения на число

$$\int\limits_{\Omega\times R^3} f(x,v,t)\omega(x,v)dxdv$$

и в силу соотношения (9) при каждом $t \in [0,T]$ произведение $L\Phi$ является обратимым оператором в R (т. е. отождествимо как оператор в R с ненулевым числом), а $(L\Phi)^{-1}$ как числовая функция переменной t непрерывна на отрезке $[0,T]$. Кроме того, из условия (8) следует, что $Lu_0 = \varphi(0)$. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть L и замыкание оператора $L\mathcal{A}$ являются ограниченными функционалами в пространстве* X, $\Phi \in C([0,T], \mathcal{L}(R,\mathrm{X}))$, $g \in C([0,T],\mathrm{X})$, $\varphi \in C^1[0,T]$; *кроме того, при каждом $t \in [0,T]$ произведение $L\Phi$ является обратимым оператором в R и $(L\Phi)^{-1}$ как числовая функция переменной t непрерывна на отрезке* $[0,T]$, $Lu_0 = \varphi(0)$. *Тогда существует и единственно решение обратной задачи в классе*

$$u \in C([0,T],X), \quad h \in C[0,T].$$

Прежде чем перейти к *доказательству* леммы 2, нам потребуются некоторые свойства полугруппы $V(t)$, связанные с функционалом L. Сформулируем их в виде лемм.

Лемма 3. *Для любого элемента $u_0 \in X$ функция $g(t) = LV(t)u_0$ непрерывно дифференцируема и*

$$g'(t) = \overline{L\mathcal{A}}V(t)u_0.$$

Лемма 4. *Для любой непрерывной на отрезке $[0,T]$ функции $f(t)$ функция*

$$g(t) = L\int\limits_0^t V(t-s)f(s)ds$$

непрерывно дифференцируема и

$$g'(t) = \overline{L\mathcal{A}}\int_0^t V(t-s)f(s)ds + Lf(t).$$

Доказательство леммы 3. Пусть $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ и $u_1 = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}u_0$, тогда $u_1 \in D(\mathcal{A})$ и $(V(t)u_1)' = V(t)\mathcal{A}u_1$. С другой стороны,

$$g(t) = LV(t)(\mathcal{A} - \lambda I)u_1 = L\mathcal{A}V(t)u_1 - \lambda LV(t)u_1,$$

и поэтому

$$g'(t) = \overline{L\mathcal{A}}(V(t)u_1)' - \lambda L(V(t)u_1)' = \overline{L\mathcal{A}}V(t)\mathcal{A}u_1 - \lambda LV(t)\mathcal{A}u_1 =$$

$$= \overline{L\mathcal{A}}V(t)(\mathcal{A} - \lambda I)u_1 = \overline{L\mathcal{A}}V(t)u_0.$$

□

Доказательство леммы 4. Пусть $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ и $h(t) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}f(t)$. Тогда

$$\mathcal{A}h(t) = ((\mathcal{A} - \lambda I) + \lambda I)(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}f(t) = f(t) + \lambda(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}f(t).$$

Следовательно, функции h, $\mathcal{A}h \in C([0,T];X)$, и поэтому

$$\left(\int\limits_0^t V(t-s)h(s)ds\right)' = \int\limits_0^t V(t-s)\mathcal{A}h(s)ds + h(t).$$

С другой стороны,

$$g(t) = L\int\limits_0^t V(t-s)(\mathcal{A} - \lambda I)h(s)ds = (L\mathcal{A} - \lambda L)\int\limits_0^t V(t-s)h(s)ds.$$

Учитывая, что $L\mathcal{A} \subset \overline{L\mathcal{A}}$, находим

$$g'(t) = (\overline{L\mathcal{A}} - \lambda L)\left(\int\limits_0^t V(t-s)\mathcal{A}h(s)ds + h(t)\right) =$$

$$= \overline{L\mathcal{A}} \int\limits_0^t V(t-s)(\mathcal{A} - \lambda I)h(s)ds + (\overline{L\mathcal{A}} - \lambda L)h(t).$$

Из определения функции h следует, что $(\mathcal{A} - \lambda I)h(t) = f(t)$, поэтому $\mathcal{A}h(t) = \lambda h(t) + f(t)$. Ввиду того, что $h(t) \in D(\mathcal{A})$ при каждом $t \in [0, T]$, мы имеем равенство $\overline{L\mathcal{A}}h(t) = L\mathcal{A}h(t)$. Следовательно,

$$(\overline{L\mathcal{A}} - \lambda L)h(t) = L\mathcal{A}h(t) - \lambda Lh(t) = L(\lambda h(t) + f(t)) - \lambda Lh(t) = Lf(t),$$

и поэтому

$$g'(t) = \overline{L\mathcal{A}} \int_0^t V(t-s)f(s)ds + Lf(t).$$

□

Вернемся к *доказательству* леммы 2. Полагая $\mathcal{F}(t) = \Phi(t)h(t) + g(t)$ и используя формулу (15), получим, что обратная задача равносильна системе

$$u(t) = V(t)u_0 + \int\limits_0^t V(t-s)\Phi(s)h(s)ds + \int\limits_0^t V(t-s)g(s)ds, \tag{19}$$

$$L(V(t)u_0 + \int\limits_0^t V(t-s)\Phi(s)h(s)ds + \int\limits_0^t V(t-s)g(s)ds) = \varphi(t). \tag{20}$$

Согласно леммам 3 и 4 уравнение (20) можно продифференцировать:

$$\overline{L\mathcal{A}}V(t)u_0 + \overline{L\mathcal{A}} \int\limits_0^t V(t-s)\Phi(s)h(s)ds + L\Phi(t)h(t) +$$

$$+ \overline{L\mathcal{A}} \int\limits_0^t V(t-s)g(s)ds + Lg(t) = \varphi'(t). \tag{21}$$

Ввиду условия согласования $Lu_0 = \varphi(0)$ уравнение (21) равносильно уравнению (20). Поэтому рассматриваемая обратная задача равносильна паре уравнений (19), (21). Уравнение (21) можно разрешить относительно неизвестной функции $h(t)$. Полагая

$$h_0(t) = (L\Phi(t))^{-1}(\varphi'(t) - \overline{L\mathcal{A}}V(t)u_0 - \overline{L\mathcal{A}} \int\limits_0^t V(t-s)g(s)ds - Lg(t)),$$

$$K(t,s) = -(L\Phi(t))^{-1}\overline{L\mathcal{A}}V(t-s)\Phi(s),$$

перепишем его в виде

$$h(t) = h_0(t) + \int\limits_0^t K(t,s)h(s)ds. \tag{22}$$

Уравнение (22) представляет интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным неоднородным членом $h_0(t)$ и сильно непрерывным операторным ядром $K(t, s)$. Следовательно, это уравнение имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Подставляя это решение в формулу (19) получим непрерывную функцию $u(t)$. Это доказывает лемму 2, что завершает и доказательство теоремы 1. □

Список литературы

[1] М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П.Шишатский, Некорректные задачи математической физики и анализа, М., Наука, 1980.

[2] А.И.Прилепко, Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнения переноса), *Мат. заметки,* **14**(1973), №5, 755-767.

[3] A.I.Prilepko, D.G.Orlovsky, I.A.Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York, Basel, Marcel Dekker, 2000.

[4] М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, В.Г.Васильев, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, Наука, 1969.

[5] А.И.Прилепко, Д.Г.Орловский, Обратные задачи для эволюционных полулинейных уравнений, *Докл. АН СССР*, **277**(1984), №4, 799-803.

[6] Д.Г.Орловский, Слабые и сильные решения обратных задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, *Дифф. уравнения*, **27**(1991), №5, 867-874.

[7] Д.Г.Орловский, Определение эволюции параметра в абстрактном квазилинейном параболическом уравнении, *Мат. заметки*, **50**(1991), №2, 111-119.

[8] Д.Г.Орловский, Определение параметра параболического уравнения в гильбертовой структуре, *Мат. заметки*, **55**(1994), №3, 109-117.

[9] А.И.Прилепко, Д.Г.Орловский, Определение эволюции параметра в абстрактном параболическом уравнении, *Дифф. уравнения*, **27**(1991), №1, 114-120.

[10] А.И.Прилепко, Д.Г.Орловский, О некоторых обратных задачах кинетической теории газа для состояний, близких к равновесным, *Докл. АН СССР*, **298**(1988), №6, 1334-1338.

[11] А.И.Прилепко, Д.Г.Орловский, О некоторых обратных задачах для линеаризованного уравнения Больцмана, *Журнал выч. мат. и мат. физ.*, **27**(1987), №11, 1690-1700.

[12] G.Bartolomaus, J.Wilhelm, Existence and Uniqueness of the Solution of the Non-stationary Boltzmann-Equation for the Electrons in a Collision Dominated Plasma by Means of Operator Semigroups, *Annalen der Physik*, **38**(1981), №3, 211-220.

[13] L.Arlotti, On the solutions of the linear Maxwell–Boltzmann equation, *Riv. Mat. Univ. Parma*, (1985), №11(4), 423-441.

[14] Л.И.Канторович, Г.П.Акилов, Функциональный анализ, М., Наука, 1977.

[15] Т.Като, Теория возмущений линейных операторов, М., Мир, 1972.

On an Inverse Problem for the Maxwell-Boltzmann Equation

Dmitry G.Orlovsky

We study the inverse problem for the Maxwell-Boltzmann equation in a bounded domain in R^3 *and prove the existence and uniqueness of its solution.*

Keywords: inverse problem, Banach space, semigroup, weak solution.