Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(3), 319-326

УДК 512.54

Дифференцирования кольца финитарных треугольных матриц и ассоциированных колец Ли и Йордана

Николай В.Мальцев*

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.05.2009, окончательный вариант 25.06.2009, принята к печати 10.07.2009

В работе дано описание йорданова и лиева дифференцирования кольца финитарных треугольных матриц над ассоциативным кольцом с единицей.

Ключевые слова: финитарные треугольные матрицы, дифференцирование колец, йорданово и лиево дифференцирование колец.

Введение

Аддитивное отображение $\beta : R \to R$ произвольного кольца R называем дифференцированием, если оно удовлетворяет равенству $\beta(ab) = \beta(a)b + a\beta(b)$ для всех $a, b \in R$. С любым ассоциативным кольцом R ассоциируются йорданово кольцо $J(R)$ с йордановым умножением $a \circ b = ab + ba$ и лиево кольцо $\Lambda(R)$ с лиевым умножением $a * b = ab - ba$. Дифференцирование кольца $J(R)$ или $\Lambda(R)$ называют также йордановым или лиевым дифференцированием кольца R соответственно. И.Н.Херстейн [1] показал, что любое йорданово дифференцирование первичного кольца характеристики не 2 есть дифференцирование. Теорема Херстейна переносилась на полупервичные кольца (W.S.Martindale, W.E.Baxter, J.M.Cusack, M.Bresar, J.Vukman и др.); аналог теоремы изучался для различных алгебр или колец треугольных матриц [2, 3, 4 и др.]

Кольцо финитарных треугольных Γ-матриц над ассоциативным кольцом K с единицей с произвольной цепью Γ индексов обозначаем через $T(\Gamma, K)$ (или $T(n, K)$ при $\Gamma = \{1, 2, ..., n\}$), а его подкольцо Γ-матриц с нулевой главной диагональю – через $NT(\Gamma, K)$. В [5] описаны йордановы дифференцирования треугольной матричной алгебры $T(n, K)$. Дифференцирования треугольного кольца и близких с ним колец изучались в [4], когда кольцо K – кольцо с единицей и обратимым элементом 2. В первом параграфе статьи доказана

Теорема 1. *Любое дифференцирование кольца $T(\Gamma, K)$ для $|\Gamma| \geqslant 2$ есть сумма внутреннего дифференцирования и дифференцирования, индуцированного дифференцированием кольца K.*

Описание лиевых и йордановых дифференцирований кольца $T(\Gamma, K)$ устанавливает в § 2 теорема 2.

При условии коммутативности кольца K в [6] описаны дифференцирования ассоциированной с $NT(n, K)$ нильпотентной алгебры Ли. См. также [7]. В [8], [9] дифференцирования

*e-mail: n.v.malzev@mail.ru

кольца $NT(\Gamma, K)$ и ассоциированных с ним колец Ли и Йордана описаны над любым ассоциативным кольцом K с единицей.

Теоремы 1 и 2 используют продолжения на $T(\Gamma, K)$ соответствующих дифференцирований кольца $NT(\Gamma, K)$. Выявилось, что ненулевые центральные дифференцирования кольца $NT(\Gamma, K)$ не допускают продолжения до дифференцирования кольца $T(\Gamma, K)$.

1. Дифференцирования кольца треугольных матриц

Аддитивную группу всех дифференцирований произвольного кольца R обозначим через $\operatorname{Der} R$. В этом параграфе описаны дифференцирования кольца финитарных треугольных матриц.

Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, Γ — цепь или линейно упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$. Γ-матрицы $\| a_{ij} \|_{i,j\in\ \Gamma}$ над K с конечным числом ненулевых элементов называем *финитарными*. При условии (нижней) треугольности $a_{ij} = 0$, $i < j$ они образуют кольцо с обычными матричными умножением и сложением, обозначаемое через $T(\Gamma, K)$; через $NT(\Gamma, K)$ обозначают подкольцо всех финитарных Γ-матриц с условием нильтреугольности $a_{ij} = 0,\ i \leqslant j$. Обозначим через e_{ij} Γ-матричную единицу, через p и q, соответственно, первый и последний элементы Γ (если они существуют).

Положим $R = T(\Gamma, K)$. Кольцо R аддитивно порождается элементами xe_{ij} ($x \in K, i, j \in \Gamma, i \geqslant j$), которые подчиняются обычным правилам сложения и умножения элементарных матриц. Как обычно, для фиксированного элемента $\gamma \in R$, отображение

$$\delta_\gamma : \alpha \to \alpha\gamma - \gamma\alpha = \alpha * \gamma, \quad \alpha \in R$$

является дифференцированием кольца R, которое называется *внутренним*. Всякое внутреннее дифференцирование кольца R является дифференцированием и при ограничении на подкольцо $NT(\Gamma, K)$; построенные дифференцирования называем треугольными.

Определим стандартные *индуцированные* дифференцирования. Для произвольного дифференцирования θ кольца коэффициентов положим

$$\overline{\theta} : ||a_{ij}|| \to ||\theta(a_{ij})||, \qquad ||a_{ij}|| \in T(\Gamma, K).$$

Отображение $\overline{\theta}$ есть дифференцирование кольца R и называется *индуцированным*. Очевидно, что отображение $\overline{\theta}$ является индуцированным дифференцированием подкольца $U = NT(\Gamma, K)$, и наоборот, всякое индуцированное дифференцирование подкольца U поднимается до дифференцирования кольца R доопределением его на диагональных элементах. Множество индуцированных дифференцирований кольца R будем обозначать $\overline{\operatorname{Der}} K$. Наконец, дифференцирование, совпадающее с нулевым по модулю центра кольца, будем называть *центральным*.

Теорема 1. *Любое дифференцирование кольца $R = T(\Gamma, K)$ для $|\Gamma| \geqslant 2$ есть сумма дифференцирования из $\overline{\operatorname{Der}} K$ и внутреннего дифференцирования.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если дифференцирование Ψ кольца R совпадает с нулевым на элементах xe_{i+1i} для всех $x \in K$ и всех возможных $i \in \Gamma$, то Ψ совпадает с нулевым на $NT(\Gamma, K)$.*

Доказательство. Для любых $k, m \in \Gamma$ с условием $k - m \geqslant 2$ имеем

$$xe_{km} = xe_{kk-1} \cdot e_{k-1m}.$$

Индукция по $k - m$ завершает доказательство леммы. □

Далее, для любых $i, j \in \Gamma$ с условием $i > j$ положим

$$N_{ij} = \langle Ke_{uv} | v \leq j, u \geq i, v \leq u \rangle.$$

Множества N_{ij}, очевидно, идеалы кольца R.

Лемма 2. *Любой идеал N_{ij}, $i, j \in \Gamma, i > j$ кольца $T(\Gamma, K)$ является (*$\mathrm{Der}\, R$*) — инвариантным.*

Доказательство. Пусть Ψ — произвольное дифференцирование кольца R. Лемма будет доказана, если мы установим включения $\Psi(ke_{ij}) \subseteq N_{ij}$ для всех $i, j \in \Gamma$ таких, что $i > j$. Доказательство будем вести индукцией по $i - j$.

Пусть $i, i-1 \in \Gamma$. Выберем произвольно $k \geqslant i$. Тогда $e_{ii-1}e_{ki-1} = 0$, и поэтому для произвольного $x \in K$ имеем

$$0 = \Psi(0) = \Psi(xe_{ii-1}e_{ki-1}) = \Psi(xe_{ii-1})e_{ki-1} + xe_{ii-1}\Psi(e_{ki-1})$$

или

$$\Psi(xe_{ii-1})e_{ki-1} = -(xe_{ii-1})\Psi(e_{ki-1}).$$

В матрице с левой (правой) стороны равенства все столбцы (строки), кроме $(i-1)$-го (i-й), нулевые, а $(i-1)$-й (i-я) столбец (строка) равен k-му столбцу ($(i-1)$-й строке) матрицы $\Psi(xe_{ii-1})$ (соответственно $\Psi(e_{ki-1})$). Следовательно, все элементы k-го столбца матрицы $\Psi(xe_{ii-1})$, кроме, быть может, элемента x_{ik} из i-й строки и k-го столбца, равны нулю. Покажем, что $x_{ik} = 0$. Действительно, если $k > i$, то требуемое равенство следует из включения $\Psi(xe_{ii-1}) \in R$. Если $k = i$, то $xe_{ii-1}e_{ii} = 0$, откуда

$$0 = \Psi(xe_{ii-1})e_{ii} + xe_{ii-1}\Psi(e_{ii}) =$$

$$= \ldots + x_{ii}e_{ii} \cdot e_{ii} + \ldots + xe_{ii-1} \cdot 0e_{i-1i} = \ldots + x_{ii}e_{ii} + \ldots.$$

Значит, k-й столбец матрицы $\Psi(xe_{ii-1})$ нулевой для всех $k \geqslant i$.

Равенство нулю строк матрицы $\Psi(xe_{ii-1})$ с номерами $m < i$ доказывается аналогично. Для этого следует продифференцировать соотношение $e_{im}e_{ii-1} = 0$ и $e_{i-ii-i}e_{ii-1} = 0$.

Таким образом, включения $\Psi(Ke_{ii-1}) \subseteq N_{ii-1}$ можно считать доказанным. Индукция по $i - j$ и соотношения $(i - j \geqslant 2)$

$$\Psi(xe_{ij}) = \Psi(xe_{ii-1}e_{i-1j}) = \Psi(xe_{ii-1})e_{i-1j} + xe_{ii-1}\Psi(e_{i-1}j) \in$$

$$\in N_{ii-1}e_{i-1j} + xe_{ii-1}N_{i-1j} \subseteq N_{ij} + N_{ij} \subseteq N_{ij}$$

завершают доказательство леммы. □

Так как подкольцо U является объединением ($\mathrm{Der}\, R$)-инвариантных идеалов N_{ii-1}, то оно само будет $\mathrm{Der}\, R$-инвариантным. Отсюда, в частности, следует, что любое дифференцирование кольца R — также дифференцирование и подкольца U.

Доказательство теоремы 1. Пусть Ψ — произвольное дифференцирование кольца R и Ψ' — его ограничение на подкольцо U. По теореме 1 из [3], Ψ' является суммой треугольного I', индуцированного φ' и центрального C дифференцирований, то есть

$$\Psi' = I' + \varphi' + C'.$$

Обозначим через I и φ соответствующие внутреннее и индуцированное дифференцирования кольца R и положим

$$\Theta = \Psi - I - \varphi.$$

Покажем, что Θ совпадает с внутренним дифференцированием на U. По теореме 1 из [3] Θ действует на элементах подкольца U как центральное дифференцирование и совпадает с нулевым, если цепь Γ бесконечная. Пусть цепь Γ конечна. Тогда

$$\Theta(xe_{ii-1}) = x^{\lambda_i} e_{qp}, \quad x \in K, \quad \lambda_i \in \mathrm{End}(K^+)$$

для всех возможных i. Однако

$$\Theta(xe_{ii-1}) = \Theta(xe_{ii-1}e_{i-1i-1}) = \Theta(xe_{ii-1})e_{i-1i-1}+$$

$$+xe_{ii-1}\Theta(e_{i-1i-1}) = x^{\lambda_i} e_{qp} e_{i-1i-1} + xe_{ii-1}\Theta(e_{i-1i-1}),$$

откуда следует, что $x^{\lambda_i} = 0$, если $i-1 \neq p$ и $i \neq q$. Далее, дифференцируя соотношение $e_{qq}xe_{p+1p} = 0$, получим, что $x^{\lambda_{p+1}} = -ax$ для некоторого $a \in K$. Аналогично, из соотношения $xe_{qq-1}e_{pp} = 0$ следует, что $x^{\lambda_q} = -xb$ для некоторого $b \in K$. Обозначим через δ_A внутреннее дифференцирование с матрицей $A = be_{q-1p} - ae_{qp+1}$ и положим $\Phi = \Theta + \delta_A$. Нетрудно видеть, что $\Phi(Ke_{ii-1}) = 0$ для всех возможных $i \in \Gamma$. По лемме 1, Φ совпадает с нулевым дифференцированием на U.

Покажем, наконец, что $\Phi = 0$, если цепь Γ бесконечная, и Φ совпадает с внутренним дифференцированием, если цепь конечная. Зафиксируем $i \in \Gamma$, и пусть

$$\Phi(xe_{ii}) = \sum_{l,m\in\Gamma} k^i_{lm} e_{lm}, \quad x \in K.$$

Покажем сначала, что $\Phi(xe_{ii}) = 0$, когда $i \neq p$ и $i \neq q$. Для $u \neq i$ и $v \neq i$ имеем

$$0 = \Phi(xe_{ii} \cdot ye_{vv}) = \ldots + k^i_{uv} e_{uv} + \ldots,$$

откуда $k^i_{uv} = 0$. Равенства $k^i_{ui} = 0$ при $u \neq i$ и $k^i_{iv} = 0$ при $v \neq i$ вытекают из соотношений

$$0 = \Phi(xe_{ii-1}) = \Phi(xe_{ii} \cdot e_{ii-1}) = \ldots + k^i_{ui} e_{ui-1} + \ldots,$$

$$0 = \Phi(xe_{i+1i}) = \Phi(e_{i+1i} \cdot xe_{ii}) = \ldots + k^i_{iv} e_{i+1v} + \ldots.$$

Таким образом, $\Phi = 0$, когда цепь Γ бесконечная.

Предположим, что цепь Γ конечная. Пусть $i = p$. Для $m > p$ имеем

$$0 = \Phi(xe_{pp} \cdot e_{mm-1}) = \ldots + k^p_{lm} e_{lm-1} + \ldots,$$

откуда $k^p_{lm} = 0$. Если $m = p$ и $l \neq q$, то

$$0 = \Phi(e_{l+1l} \cdot xe_{pp}) = \ldots + k^p_{lp} e_{l+1p} + \ldots$$

и, следовательно, $k^p_{lp} = 0$.

Пусть $i = q$. Для $l < q$ имеем

$$0 = \Phi(e_{l+1l} \cdot xe_{qq}) = \ldots + k^q_{lm} e_{l+1m} + \ldots,$$

откуда $k^q_{lm} = 0$. Если $l = q$ и $m \neq p$, то

$$0 = \Phi(xe_{qq} \cdot e_{mm-1}) = \ldots + k^q_{qm} e_{qm-1} + \ldots$$

и, значит, $k^q_{qm} = 0$. Таким образом, можно считать, что $\Phi(xe_{pp}) = f(x)e_{qp}$ и $\Phi(ye_{qq}) = g(y)e_{qp}$. Определим функции $f(x)$ и $g(y)$. С одной стороны, $\Phi(ye_{qq} \cdot xe_{pp}) = 0$, с другой,

$$\Phi(ye_{qq} \cdot xe_{pp}) = g(y)e_{qp}xe_{pp} + ye_{qq}f(x)e_{qp} = g(y)xe_{qp} + yf(x)e_{qp},$$

откуда $g(y)x + yf(x) = 0$. Полагая $g(1) = \alpha$, найдем, что $f(x) = -\alpha x$ и $g(y) = y\alpha$. Остается заметить, что Φ является внутренним дифференцированием с матрицей αe_{qp}. □

2. Дифференцирования колец $\Lambda(R)$ и $J(R)$

В данном параграфе дано описание йорданова и лиева дифференцирования кольца $R = T(\Gamma, K)$.

Для каждого из следующих случаев:

$$p \lhd i < q, \quad p \lhd i \lhd m < q, \quad p < j \lhd q, \quad p < h \lhd j \lhd q \tag{1}$$

определим эндоморфизмы аддитивной группы R^+ при $a, c \in K$ таким образом:

$$\sigma_a : xe_{ip} \to axe_{qi}, \quad \delta_a : xe_{ip} \to axe_{qm}, \quad xe_{mp} \to axe_{qi}$$

$$\acute{\sigma}_c : xe_{qj} \to xce_{jp}, \quad \acute{\delta}_c : xe_{qj} \to xce_{hp}, \quad xe_{qh} \to xce_{jp},\ x \in K$$

(q — последний элемент цепи Γ, p — первый элемент цепи).

Полагаем, что образы оставшихся порождающих xe_{uv} нулевые. Обозначим $Ann^{(l)}_K(M)$ и $Ann^{(r)}_K(M)$, соответственно, левый и правый аннуляторы в кольце K подмножеством M. Легко проверить, что любой построенный эндоморфизм R^+ есть лиево или йорданово дифференцирование кольца R тогда и только тогда, когда $a \in Ann^{(l)}_K(K \circ K)$ (это эквивалентно отношениям $a(K * K) = 0$ и $2a = 0$) и $c \in Ann^{(r)}_K(K \circ K)$. Будем в дальнейшем называть такие дифференцирования *специальными*.

В аддитивной группе End (R^+) рассмотрим подгруппы:

$$\pounds_3 = \langle\ \delta_a \mid a \in Ann^{(l)}_K(K \circ K)\ \rangle, \qquad \pounds'_3 = \langle\ \delta'_c \mid c \in Ann^{(r)}_K(K \circ K)\ \rangle;$$

$$\pounds_2 = \langle\ \sigma_a \mid a \in Ann^{(l)}_K(K \circ K)\ \rangle, \qquad \pounds'_2 = \langle\ \sigma'_c \mid c \in Ann^{(r)}_K(K \circ K)\ \rangle;$$

$$\tilde{\pounds}_2 = \langle\ \sigma_b \mid b \in Ann^{(l)}_K(K * K)\ \rangle, \qquad \tilde{\pounds}'_2 = \langle\ \sigma'_d \mid d \in Ann^{(r)}_K(K * K)\ \rangle.$$

Лемма 3. *Подкольцо U из R инвариантно относительно любого йорданова или лиева дифференцирования Ψ кольца R. В частности, ограничение Ψ на U является лиевым или йордановым дифференцированием.*

Доказательство. Пусть Ψ — произвольное йорданово дифференцирование кольца R и пусть для любых $i, j \in \Gamma$ с условием $i \geqslant j$

$$\Psi(xe_{ij}) = \sum_{l \geqslant m} x_{lm}^{ij} e_{lm}, \quad x \in K.$$

Покажем сначала, что $\Psi(xe_{ii-1}) \in U$ для всех $i, i-1 \in \Gamma$. Продифференцировав соотношение $xe_{ii-1} \circ e_{i-1i-1} = xe_{ii-1}$, $x \in K$, и вычислив элементы, стоящие на месте $(i-1, i-1)$ у матриц с правой и левой сторон равенств, получим

$$x_{i-1i-1}^{ii-1} + x_{i-1i-1}^{ii-1} = x_{i-1i-1}^{ii-1},$$

откуда $x_{i-1i-1}^{ii-1} = 0$. Аналогично, продифференцировав равенство $e_{ii} \circ xe_{ii-1} = xe_{ii-1}$, получим $x_{ii}^{ii-1} = 0$.

Далее, для любого $t < i-1$ и любого $s > t$, продифференцировав равенства $(xe_{ii-1} \circ e_{i-1t}) \circ e_{i-1i-1} = 0$ и $(e_{si} \circ xe_{ii-1}) \circ e_{ii} = 0$, получим, соответственно, что $x_{tt}^{ii-1} = 0$ и $x_{ss}^{ii-1} = 0$.

Заменяя в рассмотренных соотношениях йорданово умножение на лиево, получим включение $\Psi(xe_{ii-1}) \in U$, когда Ψ — лиево дифференцирование.

Индукция по $i - j$ и соотношения

$$\Psi(xe_{ij}) = \Psi(xe_{ii-1} \circ e_{i-1j}) = \Psi(xe_{ii-1}) \circ e_{i-1j} + xe_{ii-1} \circ \Psi(e_{i-1}j) \in$$
$$\in U \circ e_{i-1j} + xe_{ii-1} \circ U \subseteq U + U \subseteq U,$$
$$\Psi(xe_{ij}) = \Psi(xe_{ii-1} * e_{i-1j}) = \Psi(xe_{ii-1}) * e_{i-1j} + xe_{ii-1} * \Psi(e_{i-1}j) \in$$
$$\in U * e_{i-1j} + xe_{ii-1} * U \subseteq U + U \subseteq U$$

завершают доказательство леммы. □

Теорема 2. *Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и $R = T(\Gamma, K)$. Тогда:*

$$\mathrm{Der}\ J(R) = \begin{cases} \pounds_2 + \pounds_2' + \pounds_3 + \pounds_3' + \mathrm{Der}\ R, & |\Gamma| > 3, \\ \pounds_2 + \pounds_2' + \mathrm{Der}\ R, & |\Gamma| = 3; \end{cases}$$

$$\mathrm{Der}\ \Lambda(R) = \begin{cases} \tilde{\pounds}_2 + \tilde{\pounds}_2' + \pounds_3 + \pounds_3' + \mathrm{Der}\ R, & |\Gamma| > 3, \\ \tilde{\pounds}_2 + \tilde{\pounds}_2' + \mathrm{Der}\ R, & |\Gamma| = 3. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть Ψ — йорданово (лиево) дифференцирование кольца R и Ψ' — его ограничение на подкольцо U. По теореме 7 из [3], Ψ' является суммой обычного Φ' и специального S' дифференцирований, то есть

$$\Psi' = \Phi' + S'.$$

Обозначим через S соответствующее специальное дифференцирование кольца R и рассмотрим разность $\Theta = \Psi - S$. Йорданово (лиево) дифференцирование Θ совпадает на U с обычным дифференцированием Θ'. Снова, применяя теорему 1 из [3], получаем

$$\Theta' = T' + I' + C',$$

где T' — треугольное, I' — индуцированное, C' — центральное дифференцирования. Обозначим через T и I соответствующие внутреннее и индуцированное дифференцирования кольца R и положим

$$\Delta = \Theta - T - I.$$

Покажем, что Δ совпадает с внутренним дифференцированием на U. В силу теоремы 1 из [3] Δ действует на элементах подкольца U как центральное дифференцирование и совпадает с нулевым, если цепь Γ бесконечная. Рассмотрим случай, когда цепь Γ конечна. Тогда

$$\Delta(xe_{ii-1}) = x^{\lambda_i}e_{qp}, \quad x \in K, \quad \lambda_i \in End(K^+)$$

для всех возможных i. С другой стороны,

$$\Delta(xe_{ii-1}) = \Delta(xe_{ii-1} \circ e_{i-1i-1}) = \Delta(xe_{ii-1}) \circ e_{i-1i-1}+$$

$$+xe_{ii-1} \circ \Delta(e_{i-1i-1}) = x^{\lambda_i}e_{qp} \circ e_{i-1i-1} + xe_{ii-1} \circ \Delta(e_{i-1i-1}),$$

откуда следует, что $x^{\lambda_i} = 0$, если $i-1 \neq p, q$ и $i \neq q$. Далее, дифференцируя соотношение $e_{qq} \circ xe_{p+1p} = 0$, получим, что $x^{\lambda_{p+1}} = -ax$ для некоторого $a \in K$. Аналогично, из соотношения $xe_{qq-1} \circ e_{pp} = 0$ следует, что $x^{\lambda_q} = -xb$ для некоторого $b \in K$. Обозначим через δ_A внутреннее дифференцирование с матрицей $A = be_{q-1p} - ae_{qp+1}$ и положим $\Phi = \Delta + \delta_A$. Получаем, что $\Phi(Ke_{ii-1}) = 0$ для всех возможных $i \in \Gamma$ и, как в лемме 1, Φ совпадает с нулевым дифференцированием на U.

Теперь покажем, что $\Phi = 0$, если цепь Γ бесконечная, и Φ совпадает с внутренним дифференцированием, если цепь конечная. Зафиксируем $i \in \Gamma$, и пусть

$$\Phi(xe_{ii}) = \sum_{l,m \in \Gamma} k^i_{lm}e_{lm}, \quad x \in K.$$

Покажем сначала, что $\Phi(xe_{ii}) = 0$, когда $i \neq p$ и $i \neq q$. Для $u \neq i$ и $v \neq i$ имеем

$$0 = \Phi(xe_{ii} \circ ye_{vv}) = \Phi(xe_{ii}) \circ ye_{vv} + xe_{ii} \circ \Phi(ye_{vv}) = \ldots + k^i_{uv}e_{uv} + \ldots,$$

откуда $k^i_{uv} = 0$. Равенства $k^i_{ui} = 0$ при $u \neq i$ и $k^i_{iv} = 0$ при $v \neq i$ вытекают из соотношений

$$0 = \Phi(xe_{ii-1}) = \Phi(xe_{ii} \circ e_{ii-1}) = \Phi(xe_{ii}) \circ e_{ii-1} + xe_{ii} \circ \Phi(e_{ii-1}) = \ldots + k^i_{ui}e_{ui-1} + \ldots,$$

$$0 = \Phi(xe_{i+1i}) = \Phi(e_{i+1i} \circ xe_{ii}) = \Phi(e_{i+1i}) \circ xe_{ii} + e_{i+1i} \circ \Phi(xe_{ii}) = \ldots + k^i_{iv}e_{i+1v} + \ldots.$$

Таким образом, $\Phi = 0$, когда цепь Γ бесконечная.

Предположим, что цепь Γ конечная. Пусть $i = p$. Для $m > p$ имеем

$$0 = \Phi(xe_{pp} \circ e_{mm-1}) = \ldots + k^p_{lm}e_{lm-1} + \ldots,$$

откуда $k^p_{lm} = 0$. Если $m = p$ и $l \neq q$, то

$$0 = \Phi(e_{l+1l} \circ xe_{pp}) = \ldots + k^p_{lp}e_{l+1p} + \ldots$$

и, следовательно, $k^p_{lp} = 0$.
Пусть $i = q$. Для $l < q$ имеем

$$0 = \Phi(e_{l+1l} \circ xe_{qq}) = \ldots + k^q_{lm}e_{l+1m} + \ldots,$$

откуда $k^q_{lm} = 0$. Если $l = q$ и $m \neq p$, то

$$0 = \Phi(xe_{qq} \circ e_{mm-1}) = \ldots + k^q_{qm}e_{qm-1} + \ldots$$

и, значит, $k^q_{qm} = 0$. Таким образом, можно считать, что $\Phi(xe_{pp}) = f(x)e_{qp}$ и $\Phi(ye_{qq}) = g(y)e_{qp}$. Определим функции $f(x)$ и $g(y)$. С одной стороны, $\Phi(ye_{qq} \circ xe_{pp}) = 0$, с другой —

$$\Phi(ye_{qq} \circ xe_{pp}) = g(y)e_{qp}xe_{pp} + ye_{qq}f(x)e_{qp} = g(y)xe_{qp} + yf(x)e_{qp},$$

откуда $g(y)x + yf(x) = 0$. Полагая $g(1) = \alpha$, найдем, что $f(x) = -\alpha x$ и $g(y) = y\alpha$. Остается заметить, что Φ является внутренним дифференцированием с матрицей αe_{qp}. Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-00717)

Список литературы

[1] I.N.Herstein, Jordan derivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**(1957), 1104-1110.

[2] J.Zhang, W.Yu, Jordan derivations of triangular algebras, *Linear Algebra Appl.*, **419**(2006), 251-255.

[3] J.M.Cusack, Jordan derivations on rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53**(1975), №2, 321-324.

[4] N.Nader, M.Ghosseiri, Jordan derivations of some classes of matrix rings, *Taiwanese J. of Math.*, **11**(2007), №1, 51-62.

[5] D.Bencovic, Jordan derivations and antiderivations on triangular matrices, *Linear Algebra Appl.*, **397**(2005), 235-244.

[6] S.Ou, D.Wang, R.Yao, Derivations of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring, *Linear Algebra Appl.*, **424**(2007), 378-383.

[7] J.H.Chun, J.W.Park, Derivations on subrings of matrix rings, *Bull. Korean Math. Soc.*, **43**(2006), 635-644.

[8] В.М.Левчук, О.В.Радченко, Дифференцирования кольца финитарных нильтреугольных матриц и ассоциированных колец Ли и Йордана, Препринт №3, Красноярск, ИВМ СО РАН, (2008), 1-12.

[9] В.М.Левчук, Е.В.Минакова, Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально нильпотентных матричных групп и колец, *Докл. РАН*, **425**(2009), №2, 1-4.

Derivations of the Finitary Triangular Matrix Ring and the Associated Lie and Jordan Rings

Nikolai V.Maltsev

We describe the Jordan and Lie derivations of the ring of finitary triangular matrices over an associative ring with identity.

Keywords: finitary triangular matrix, derivation of rings, Jordan and Lie derivation of rings.