Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(3), 312-318

УДК 519.142.1

Мощность классов Райзера и взвешенные пути Моцкина

Владислав С.Кроткин*
Олег В.Кузьмин†
Институт математики, экономики и информатики,
Иркутский государственный университет,
Карла Маркса 1, Иркутск, 664003,
Россия

Получена 18.05.2009, окончательный вариант 20.06.2009, принята к печати 30.06.2009

Рассматривается задача о вычислении мощности классов квадратных матриц, состоящих из нулей и единиц, с фиксированным значением строчных и столбцевых сумм. Получено рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить мощность данных классов и устанавливающее связь этой задачи с вопросами о перечислении взвешенных путей Моцкина. Приведены примеры использования найденного соотношения.

Ключевые слова: (0,1)-матрицы, классы Райзера, пути Моцкина.

Введение

В работе изучаются (0,1)-матрицы с заданным значением сумм элементов в строках и столбцах. Такие матрицы применяются при решении ряда задач в различных областях дискретной математики [1]. Бинарная структура данных матриц позволяет рассматривать их в качестве матриц инцидентности различных комбинаторных конфигураций. Обычно важные в теоретическом и прикладном отношениях конфигурации подчиняются ограничениям на величины подмножеств и числа появлений элементов в этих подмножествах. Поэтому наибольший интерес представляют матрицы с заданным распределением положительных элементов по строкам и столбцам.

Будем следовать обозначениям [1]. (0,1)-матрицей называется матрица, состоящая из нулей и единиц. Пусть $A = [\alpha_{ij}]$ — (0,1)-матрица размера $m \times n$, r_i — сумма единиц в строке i, s_j — сумма единиц в столбце j, где $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Матрице A поставим в соответствие $R = (r_1, r_2, ..., r_m)$ и $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ — два целочисленных неотрицательных вектора, состоящих из значений строчных и столбцевых сумм. Классом Райзера $\mathfrak{A}^{n,m}(R, S)$ называется совокупность (0,1)-матриц размера $m \times n$ с заданными векторами R и S строчных и столбцевых сумм соответственно. Требуется определить $|\mathfrak{A}^{n,m}(R, S)|$ — мощность класса Райзера, то есть точное число матриц в классе $\mathfrak{A}^{n,m}(R, S)$. В случае, если рассматриваются квадратные матрицы с одним фиксированным числом нулей и единиц в каждой строке и каждом столбце, имеем $m = n$, $R = S = (k, k, ..., k)$ и обозначаем $\mathfrak{A}^n(k)$. Известны различные оценки мощности классов $\mathfrak{A}^{n,m}(R, S)$, а также несколько вычислительных формул для определения точного числа матриц в заданном классе $\mathfrak{A}^n(k)$ (см., например, [2]).

В данной работе рассмотрен частный случай $\mathfrak{A}^n(k)$, когда $k = 2$. Получено рекуррентное соотношение, устанавливающее связь проблемы Райзера с задачей перечисления путей

*e-mail: vlad.krotkin@gmail.com
†e-mail: quz@irk.ru

на плоскости. Такие пути, начинающиеся обычно в начале координат, являются последовательностями точек целочисленной решетки плоскости с некоторыми ограничениями на приращение координат при переходе от одной точки к следующей. Доказано, что $|\mathfrak{A}^n(2)|$ равно суммарному весу всех путей Моцкина с заданными весовыми коэффициентами. Ряд соотношений, связывающих пути Моцкина с известными комбинаторными числами, имеется в [3]. В заключение приводятся примеры, иллюстрирующие использование полученной формулы.

1. Вычисление мощности классов Райзера и пути Моцкина с заданными весовыми коэффициентами

В [4] приведена следующая теорема, которая дает способ вычисления $|\mathfrak{A}^n(k)|$.

Теорема 1. *Количество всевозможных (0,1)-матриц размера $n \times n$, в каждой строке и каждом столбце которых ровно k единиц и $n-k$ нулей, определяется следующим соотношением:*

$$|\mathfrak{A}^n(k)| = A_n(0,0,...,0),$$

где

$$A_n(n_1,n_2,...,n_k) = \sum_{i_1+...+i_k=k} \binom{n-n_1}{i_1} \cdot \binom{n_1-n_2}{i_2} \cdot ... \cdot \binom{n_{k-1}-n_k}{i_k} \times$$
$$\times A_n(n_1+i_1, n_2+i_2, ..., n_k+i_k),$$

суммирование ведется по всем композициям натурального k на k целых неотрицательных слагаемых, а $A_n(n,n,...,n) = 1$.

Рассмотрим случай, когда $k=2$. Получена следующая

Теорема 2. *Количество всевозможных (0,1)-матриц размера $n \times n$, в каждой строке и каждом столбце которых ровно 2 единицы и n-2 нулей, определяется следующим соотношением:*

$$|\mathfrak{A}^n(2)| = \frac{n!}{2} G_{n-2}(0),$$

где $G_n(k) = \frac{1}{2}G_{n-1}(k+1) + 2(k+1)G_{n-1}(k) + (2k+1)(k+1)G_{n-1}(k-1)$, $G_0(k) = \delta_{k0}$.

Доказательство. Для удобства разобьем доказательство на пункты.

1. Из теоремы 1 для $k=2$ имеем:

$$|\mathfrak{A}^n(2)| = A_n(0,0), \qquad (1)$$

где $A_n(n_1,n_2) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{n-n_1}{i_1} \cdot \binom{n_1-n_2}{i_2} \cdot A_n(n_1+i_1, n_2+i_2)$, а $A_n(n,n) = 1$.

Запишем рекуррентное соотношение (1) в виде произведения по индексу j:

$$|\mathfrak{A}^n(2)| = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} \prod_{j=2}^{n} \sum_{i_1^j+i_2^j=2} \binom{n-i_1^1-...-i_1^{j-1}}{i_1^j} \cdot \binom{i_1^1+...+i_1^{j-1}-i_2^1-...-i_2^{j-1}}{i_2^j}, \qquad (2)$$

с условиями

$$i_1^j + i_2^j = 2, \sum_{i=1}^{n} i_1^j = \sum_{i=1}^{n} i_2^j = n, i_1^1 = 2, i_2^1 = 0, i_2^n = 2, i_1^n = 0. \tag{3}$$

Перемножив в (2) суммы биномиальных коэффициентов и для наглядности расписав произведение в явном виде, получим:

$$\begin{gathered}|\mathfrak{A}^n(2)| = \sum_{i_1^j + i_2^j = 2} \tbinom{n}{i_1^1} \cdot \tbinom{0}{i_2^1} \cdot \tbinom{n-i_1^1}{i_1^2} \cdot \tbinom{i_1^1-i_2^1}{i_2^2} \cdot \tbinom{n-i_1^1-i_1^2}{i_1^3} \cdot \tbinom{i_1^1+i_1^2-i_2^1-i_2^2}{i_2^3} \cdot \tbinom{n-i_1^1-i_1^2-\ldots-i_1^{n-2}}{i_1^{n-1}} \cdot \\ \cdot \tbinom{i_1^1+i_1^2+\ldots+i_1^{n-2}-i_2^1-i_2^2-\ldots-i_2^{n-2}}{i_2^{n-1}} \tbinom{n-i_1^1-i_1^2-\ldots-i_1^{n-1}}{i_1^n} \cdot \tbinom{i_1^1+i_1^2+\ldots+i_1^{n-1}-i_2^1-i_2^2-\ldots-i_2^{n-1}}{i_2^n},\end{gathered} \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем наборам (i_1^j, i_2^j) , удовлетворяющим условиям (3).

Пусть

$$p_j(i_1^j, i_2^j) = \binom{n - i_1^1 - i_1^2 - \ldots - i_1^{j-1}}{i_1^j} \cdot \binom{i_1^1 + i_1^2 + \ldots + i_1^{j-1} - i_2^1 - i_2^2 - \ldots - i_2^{j-1}}{i_2^j}, \quad j \in \{2, \ldots, n\},$$

$$p_1(i_1^1, i_2^1) = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2}, \qquad p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, \ldots, i_1^n, i_2^n) = \prod_{j=1}^{n} p_j(i_1^j, i_2^j).$$

Учитывая введенные обозначения, получаем:

$$|\mathfrak{A}^n(2)| = \sum_{i_1^j + i_2^j = 2} p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, \ldots, i_1^n, i_2^n) = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} \sum_{i_1^j + i_2^j = 2} \prod_{j=2}^{n} p_j(i_1^j, i_2^j). \tag{5}$$

2. Из всех возможных значений $(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, \ldots, i_1^n, i_2^n)$ выделим базовый набор переменных и вычислим значение $p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, \ldots, i_1^n, i_2^n)$ на этом наборе. В качестве элементов базового набора фиксируем $i_1^j = i_2^j = 1$, $j = 2, \ldots, n-1$ (кроме $i_1^1 = 2$, $i_2^1 = 0$ и $i_1^n = 0$, $i_2^n = 2$). Подсчитаем искомое значение на этом наборе.

Так как $p_j(1,1) = \binom{n-j}{1} \cdot \binom{2}{1}$, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, имеем:

$$\begin{gathered} p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, \ldots, i_1^n, i_2^n) = p(2,0,1,1,\ldots,1,1,0,2) = \\ = p_1(2,0) \cdot p_2(1,1) \cdot \ldots \cdot p_{n-1}(1,1) \cdot p_n(0,2) = \\ = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} \cdot \frac{(n-2)!2(n-3)!2 \ldots (3)!2(n-2)!2(2)!2(1)!2}{(n-3)!(n-4)! \ldots (2)!(1)!(0)!} = \frac{n!}{2} \cdot 2^{n-2}. \end{gathered}$$

3. Рассмотрим, как меняется значение $p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, \ldots, i_1^n, i_2^n)$ при изменении в наборе переменных $(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, \ldots, i_1^n, i_2^n)$.

Для выполнения условий (3) элементы в базовом наборе изменяем следующим образом:

1. Заменяем $p_x(1,1)$ на $p_x(2,0)$, а $p_j(1,1)$ на $p_j(0,2)$, где $2 \leqslant x < j \leqslant n-1$.
2. И наоборот, $p_x(1,1)$ на $p_x(0,2)$, а $p_j(1,1)$ на $p_j(2,0)$, где $2 \leqslant x < j \leqslant n-1$.

3.1. Рассмотрим подробнее первый случай. Заменим $p_{x_1}(1,1)$ на $p_{x_1}(2,0)$, а $p_{j_1}(1,1)$ на $p_{j_1}(0,2)$, где $2 \leqslant x_1 < j_1 \leqslant n-1$.

При этом, учитывая формулы (4) и (5), будем иметь:
$p_i(1,1) = \binom{n-i}{1} \cdot \binom{2}{1}, \quad 2 \leqslant i < x_1, \quad j_1 < i \leqslant n-1,$
$p_{x_1}(2,0) = \binom{n-x_1}{2} \cdot \binom{2}{0},$
$p_i(1,1) = \binom{n-(i+1)}{1} \cdot \binom{4}{1}, \quad x_1 < i < j_1,$
$p_{j_1}(0,2) = \binom{n-(j_1+1)}{0} \cdot \binom{4}{2}.$
Расписав произведение биномиальных коэффициентов, получим:

$$p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n) = p(2,0,1,1,...,2,0,...,0,2,...,1,1,0,2) =$$

$$= \frac{n!}{2} \cdot 2^{x_1-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^{j_1-x_1-1} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 2^{n-j_1-1}.$$

Заменим $p_{x_2}(1,1)$ на $p_{x_2}(2,0)$, а $p_{j_2}(1,1)$ на $p_{j_2}(0,2)$.
В случае, если $2 \leqslant x_1 < j_1 < x_2 < j_2 \leqslant n-1$, рассуждения аналогичны. Получим

$$p\left(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n\right) = p\left(2,0,1,1,...,2,0,...,0,2,...,2,0,...1,1,0,2\right) =$$

$$= \frac{n!}{2} \cdot 2^{x_1-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^{j_1-x_1-1} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 2^{x_2-j_1-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^{j_2-x_2-1} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 2^{n-j_2-1}.$$

В случае, если $2 \leqslant x_1 < x_2 < j_2 < j_1 \leqslant n-1$, будем иметь:
$p_i(1,1) = \binom{n-(i+1)}{1} \cdot \binom{4}{1}$, $x_1 < i < x_2$, $j_2 < i < j_1$,
$p_{x_2}(2,0) = \binom{n-(x_2+1)}{2} \cdot \binom{4}{0}$,
$p_i(1,1) = \binom{n-(i+2)}{1} \cdot \binom{6}{1}$, $x_2 < i < j_2$,
$p_{j_2}(0,2) = \binom{n-(j_2+2)}{0} \cdot \binom{6}{2}$.
В итоге получим:

$$p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n) =$$

$$= \frac{n!}{2} \cdot 2^{x_1-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^{x_2-x_1-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6^{j_2-x_2-1} \cdot \frac{6\cdot 5}{2} \cdot 4^{j_1-j_2-1} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 2^{n-j_1-1}.$$

Рассуждая таким же образом, когда заменяем $p_{x_k}(1,1)$ на $p_{x_k}(2,0)$, а $p_{j_k}(1,1)$ на $p_{j_k}(0,2)$ при $2 \leqslant x_1 < x_2 < ... < x_k < j_k < ... < j_2 < j_1 \leqslant n-1$, будем иметь:
$p_i(1,1) = \binom{n-(i+k-1)}{1} \cdot \binom{2k}{1}$, $x_{k-1} < i < x_k$, $j_k < i < j_{k-1}$,
$p_{x_k}(2,0) = \binom{n-(x_k+k-1)}{2} \cdot \binom{2k}{0}$,
$p_i(1,1) = \binom{n-(i+k)}{1} \cdot \binom{2k+2}{1}$, $x_k < i < j_k$,
$p_{j_k}(0,2) = \binom{n-(j_k+k)}{0} \cdot \binom{2k+2}{2}$.
В итоге получим:

$$p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n) = \frac{n!}{2} \cdot 2^{x_1-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^{x_2-x_1-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6^{j_2-x_2-1} \cdot ...$$
$$... \cdot (2k)^{x_k-x_{k-1}-1}\frac{1}{2} \cdot (2k+2)^{j_k-x_k-1} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} \cdot (2k)^{j_{k-1}-j_k-1} \cdot ...$$
$$... \cdot \frac{6\cdot 5}{2} \cdot 4^{j_1-j_2-1} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 2^{n-j_1-1}.$$

3.2. Рассмотрим второй случай.

Заменим $p_x(1,1)$ на $p_x(0,2)$, а $p_j(1,1)$ на $p_j(2,0)$, где $2 \leqslant x < j \leqslant n-1$.

Рассмотрим случай, когда $p_{x-1}(1,1) = \binom{n-(x-1)}{1} \cdot \binom{2}{1}$.

Учитывая формулы (4) и (5), имеем:

$$p_x(0,2) = \binom{n-(x-1)}{0} \cdot \binom{2}{2} \quad \text{и} \quad p_j(i_1^j, i_2^j) = \binom{n-j}{i_1^j} \cdot \binom{0}{i_2^j}, \quad x < j \leqslant n-1.$$

Поскольку $\binom{0}{\alpha} = \delta_{0\alpha}$, то единственный вариант, при котором значение $p_j(i_1^j, i_2^j)$ не станет равным нулю, — когда $i_2^j = 0$. Поэтому сразу после элемента $p_x(0,2)$ должен следовать элемент $p_{x+1}(2,0)$.

В итоге после однократной замены $p_x(1,1) \cdot p_{x+1}(1,1)$ на $p_x(0,2) \cdot p_{x+1}(2,0)$ получим

$$p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n) = p(2,0,1,1,...,0,2,2,0,...,1,1,0,2) =$$
$$= p_1(2,0) \cdot p_2(1,1) \cdot ... \cdot p_x(0,2) \cdot p_{x+1}(2,0) \cdot ... \cdot p_{n-1}(1,1) \cdot p_n(0,2) = \frac{n!}{2} \cdot \frac{2^{n-2}}{2^3}.$$

Случай, когда $p_{x-1}(1,1) \neq \binom{n-(x-1)}{1} \cdot \binom{2}{1}$, относится к заменам, рассмотренным в пункте 3.1.

4. Устанавливаем общий закон, по которому меняется значение $p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n)$ при изменении в наборе переменных $(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n)$, и вычисляем сумму

$$\sum_{i_1^j + i_2^j = 2} p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n).$$

Для этого будем использовать графовую интерпретацию предложенного в пункте 3 алгоритма варьирования наборов $(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n)$.

Рассмотрим плоскую прямоугольную решётку, которая состоит из множества вершин $\{V(j,k)\}$ с заданными координатами j и k.

Соединим вершины ориентированными ребрами следующим образом:

$p_j(1,1)$ будет соответствовать горизонтальное ребро, соединяющее вершину $V(j,k)$ с вершиной $V(j+1,k)$;

$p_j(2,0)$ будет соответствовать ребро, соединяющее вершину $V(j,k)$ с вершиной $V(j+1,k+1)$ ("подъем");

$p_j(0,2)$ будет соответствовать ребро, соединяющее вершину $V(j,k)$ с вершиной $V(j+1,k-1)$ ("спуск").

Каждому ребру данного ориентированного графа присваиваем весовой коэффициент, который зависит от уровня вершин, соединяемых данным ребром. В соответствии с полученными в пунктах 3.1 и 3.2 выводами об изменении в $p(i_1^1, i_2^1, i_1^2, i_2^2, ..., i_1^n, i_2^n)$ при замене $p_j(1,1)$ на $p_j(2,0)$ или $p_j(0,2)$ получим следующее значение весовых коэффициентов:

$\alpha_k = \dfrac{1}{2}$ для подъема,

$\beta_k = 2(k+1)$ для горизонтального ребра,

$\gamma_k = (2k+1)(k+1)$ для спуска (рис. 1).

Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$G_j(k) = \alpha_k G_{j-1}(k+1) + \beta_k G_{j-1}(k) + \gamma_k G_{j-1}(k-1)$$

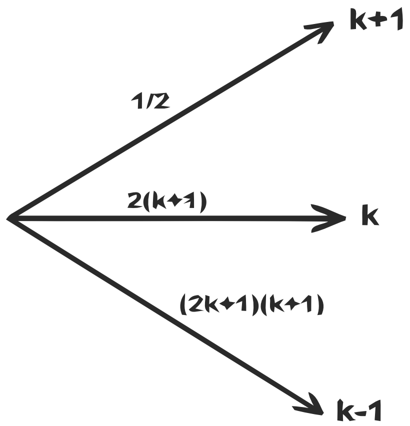

Рис. 1.

с указанными весовыми коэффициентами α_k, β_k и γ_k, которое, при заданных начальных и конечных условиях, представляет собой суммарную весовую характеристику всех путей ориентированного графа (рис. 2), ведущих из начальной вершины $V(0,0)$ в конечную $V(j,0)$. Такие пути называются путями Моцкина с заданными весовыми коэффициентами.

Так как мы рассматриваем изменение наборов $p_j(i_1^j, i_2^j)$ при $j = 2, ..., n-1$, то получаем

$$|\mathfrak{A}^n(2)| = \frac{n!}{2} G_{n-2}(0),$$

где $G_n(k) = \frac{1}{2}G_{n-1}(k+1) + 2(k+1)G_{n-1}(k) + (2k+1)(k+1)G_{n-1}(k-1)$, $G_0(k) = \delta_{k0}$. Что и требовалось доказать.

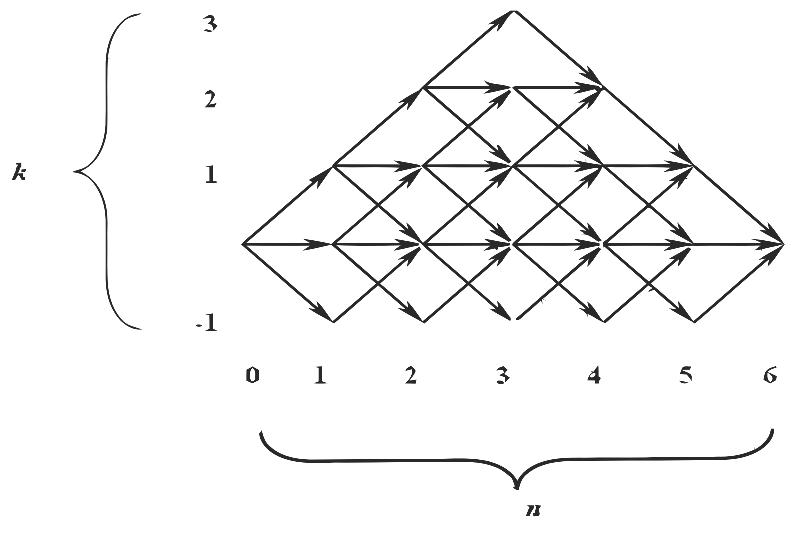

Рис. 2.

2. Примеры

Приведем несколько примеров использования полученного соотношения для вычисления $|\mathfrak{A}^n(2)|$.

Пример 1

$$\left|\mathfrak{A}^2(2)\right| = \frac{2!}{2} \cdot G_0(0) = 1.$$

Пример 2

$$\left|\mathfrak{A}^3(2)\right| = \frac{3!}{2} \cdot G_1(0) = 3\left(\frac{1}{2}G_0(1) + 2G_0(0) + G_0(-1)\right) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Пример 3

$$\left|\mathfrak{A}^4(2)\right| = \frac{4!}{2} \cdot G_2(0) = 12\left(\frac{1}{2}G_1(1) + 2G_1(0) + G_1(-1)\right) =$$
$$= 12\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}G_0(2) + 4G_0(1) + 6G_0(0)\right) + 2\left(\frac{1}{2}G_0(1) + 2G_0(0) + G_0(-1)\right) +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2}G_0(0) + 0G_0(-1) + 0G_0(-2)\right)\right) = 12\left(\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) = 90.$$

Список литературы

[1] В.Н.Сачков, В.Е.Тараканов, Комбинаторика неотрицательных матриц, М., ТВП, 2000.

[2] B.Y.Wang, F.Zhang, On the precise number of (0, 1)-matrices in U(R, S), *Discrete Mathematics*, **187**(1998), 211-220.

[3] О.В.Кузьмин, Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения, Новосибирск, Наука, 2000.

[4] В.С.Кроткин, О.В.Кузьмин, Рекуррентное соотношение для вычисления мощностей классов Райзера, *ОПиПМ*, **16**(2009), №1, 120-122.

Cardinality of the Ryser Classes and the Motzkin Paths with Weights

Vladislav S.Krotkin,
Oleg V.Kuzmin

We consider the problem of computation of the cardinality of matrix classes with fixed row and column sums. We obtain a new recurrence formula for the cardinality of these classes which gives a connection between this problem and the Motzkin paths. Examples of using the obtained recurrence relation are furnished.

Keywords: (0,1)-matrix, the Ryser classes, the Motzkin paths.