УДК 519.1

АЛГЕБРА ЛОГИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Кулиев Е.В.,
Научный руководитель доктор пед. наук Осипова С.И.
Сибирский федеральный университет

Человек, как существо социальное постоянно находится в общении с другими людьми. Речь людей не является строго регламентированной, часто избыточной и имеющей множество смыслов. В математике, как в строгой и логичной науке возникла проблема описания действий над математическими объектами в строгой форме. Так возникла математическая логика.

Понятие логики как науки появилось ещё в XIX в. Элементы математической логики можно найти уже в работах древнегреческих философов. В XVII в. Г. В. Лейбниц высказал идею о том, что рассуждения могут быть сведены к механическому выполнению определенных действий по установленным правилам. Однако как самостоятельный раздел математики логика начала формироваться только с середины XIX в. Для того чтобы рассуждать, человеку необходим какой-либо язык. Не удивительно, что математическая логика начиналась с анализа того, как говорят и пишут люди на естественных языках. Этот анализ привёл к тому, что выяснилось существование формулировок, которые невозможно разделить на истинные и ложные, но, тем не менее, выглядят осмысленным образом. Это приводило к возникновению парадоксов, в том числе в одной из фундаментальных наук математики. Тогда было решено создать искусственные формальные языки, лишённого «вольностей» языка естественного.

Алгебру логику называют также алгеброй Буля**,** или булевой алгеброй, по имени английского математика Джорджа Буля, разработавшего в XIX веке ее основные положения. В булевой алгебре высказывания принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, X, Y. В алгебре Буля введены три основные логические операции с высказываниями? Сложение, умножение, отрицание. Определены аксиомы алгебры логики для выполнения этих операций. Действия, которые производятся над высказываниями, записываются в виде логических выражений.

Для того чтобы рассуждать, человеку необходим какой-либо язык. Не удивительно, что математическая логика начиналась с анализа того, как говорят и пишут люди на естественных языках. Этот анализ привёл к тому, что выяснилось существование формулировок, которые невозможно разделить на истинные и ложные, но, тем не менее, выглядят осмысленным образом. Это приводило к возникновению парадоксов, в том числе в одной из фундаментальных наук математики. Тогда было решено создать искусственные формальные языки, лишённого «вольностей» языка естественного.

Формулы алгебры логики

С помощью логических операций из заданной совокупности высказываний можно строить различные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками.

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, называется *формулой алгебры логики*.

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется ранее, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется ранее, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит отрицание, то скобки тоже опускаются.

Логические значения формулы полностью определяются логическими значениями входящими значениями в нее элементарных высказываний. Например, если $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, то $\overline{x \& y} \vee \overline{z} = 1$.

Все возможные логические значения формулы могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности. Например, для формулы $\overline{x} \vee \overline{y} \rightarrow x \& y$ таблица истинности имеет вид

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	$x \& \overline{y}$	$\overline{x} \vee y \rightarrow x \& \overline{y}$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Булевы функции

Функции $f: E_2^n \rightarrow E_2$, где $E_2 = \{0; 1\}$, называются функциями алгебры, или *булевыми функциями.*

Основные булевы функции двух переменных представлены в таблице:

функция	Значение переменных				Примечание
	X				
	0	0	1	1	
	Y				
	0	1	0	1	
$\Phi_0(x, y) = 0$	0	0	0	0	Нуль
$\Phi_1(x, y) = x \& y$	0	0	0	1	Конъюнкция
$\Phi_2(x, y) = \overline{x \rightarrow y}$	0	0	1	0	Отрицание
$\Phi_3(x, y) = x$	0	0	1	1	Возвращает значение X
$\Phi_4(x, y) = \overline{y \rightarrow x}$	0	1	0	0	-
$\Phi_5(x, y) = y$	0	1	0	1	Возвращает значение Y
$\Phi_6(x, y) = x + y = \overline{x \leftrightarrow y}$	0	1	1	0	Сложение по модулю 2
$\Phi_7(x, y) = x \vee y$	0	1	1	1	Дизъюнкция
$\Phi_8(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$	1	0	0	0	Стрелка Пирса
$\Phi_9(x, y) = x \leftrightarrow y$	1	0	0	1	Эквивалентность
$\Phi_{10}(x, y) = \overline{y}$	1	0	1	0	-
$\Phi_{11}(x, y) = y \rightarrow x$	1	0	1	1	-
$\Phi_{12}(x, y) = \overline{x}$	1	1	0	0	-
$\Phi_{13}(x, y) = x \rightarrow y$	1	1	0	1	Импликация
$\Phi_{14}(x, y) = x \mid y = \overline{x \& y}$	1	1	1	0	Штрих Шеффера
$\Phi_{15}(x, y) = 1$	1	1	1	1	Единица

Преобразование выражений, состоящих из булевых функций

От перестановки мест аргументов результат не изменяется:

A & B = B & A

(A & B) & C = A & (B & C)

Так же существуют некоторые тождества, опирающиеся на особые свойства функций, например:

A & (~A) = ЛОЖЬ

(~A) & (~B) = ~ (A & B)

Аналогично, сложение и логическое “ИЛИ”:

A v B = B v A

(A v B) v C = A v (B v C)

Можно выносить общий множитель за скобки:

(A & B) v (C & B) = B & (A v C)

И также некоторые собственные законы:

A v (~A) = ИСТИНА

(~A) v (~B) = ~ (A v B)

Когда вычисляется значение булевого выражения, то выполняется определенная очередность действий: на очередность влияют скобки, сначала считаются “И”, зачет “ИЛИ”.

Даны простые высказывания на естественном языке.

1. Если светит солнце, то для того, чтобы не было дождя, достаточно, чтобы дул ветер.
2. Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.
3. Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.

Попробуем перевести их на язык алгебры логики. Для этого введем обозначения обозначим элементарные высказывания заглавными буквами:

Пусть: С – солнце,
Д – дождь,
В – ветер,
П – погода.

Теперь предложения можно записать, используя обозначения, которые мы ввели:

1) С & В $\equiv \overline{Д}$
2) В v $\overline{Д} \rightarrow$ С
3) П $\equiv \overline{В \, \& Д}$

Выводы и результаты.

1. На основе изучения теории усвоил действия над высказываниями(дизъюнкция, конъюнкция,).
2. Привел примеры перевода естественного языка на язык алгебры логики.