Об одной некорректной задаче для параболической системы типа Ламе

Пузырев Р.Е.,
научный руководитель д. физ.-мат. наук, профессор Шлапунов А.А.
Сибирский федеральный университет

Пусть $Q_T = \{x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$ — ограниченный открытый цилиндр высоты $T > 0$ в $(n+1)$ – мерном пространстве, основанием которого является область Ω.

Пусть также $\Gamma \subset \partial\Omega$ — непустое связное открытое подмножество $\partial\Omega$. Обозначим через Γ_T множество $\Gamma \times (0,\ T)$.

Рассмотрим следующий оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \mu\Delta - (\lambda + \mu)\nabla\,\mathrm{div} \tag{1.1}$$

с некоторыми постоянными $\mu \neq 0,\ \lambda \neq -2\mu$.

Обозначим через $T(x,\ \Omega)$ *оператор напряжения*, то есть матрицу $(T(x,\Omega))_{ij=1,\dots,n}$ с компонентами

$$T_{ij}(x,\Omega) = \mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial\nu} + \lambda\nu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \mu\nu_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \dots,\ n),$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu}$ – нормальная производная относительно $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующие задачи.

Пусть заданы вектор-функции $u_0(x) \in \left[C(\overline{\Gamma})\right]^3$, $u_1(x,\ t) \in \left[C^{1,\ 0}(\overline{\Gamma_T})\right]^3$, $u_2(x,\ t) \in \left[C(\overline{\Gamma_T})\right]^3$, $f(x,\ t) \in \left[C(\overline{Q_T})\right]^3$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,\ t) \in [C^{2,\ 1}(Q_T) \cap C^{1,\ 0}(Q_T \cup \Gamma_T) \cap C(\overline{Q_T})]^3$ такую, что

$$Lu = f(x,\ t) \ \text{ в } Q_T \tag{1}$$

и граничным условиям

$$u = u_1(x,\ t) \ \text{ на } \overline{\Gamma_T} \tag{2}$$

$$Tu = u_2(x,\ t) \ \text{ на } \overline{\Gamma_T}. \tag{3}$$

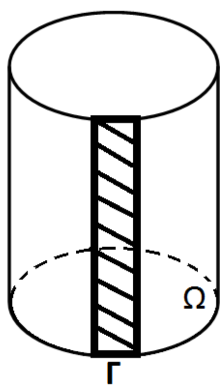

Рисунок 1

На рисунке 1 изображено множество, где заданы данные задачи 1 (для двух пространственных переменных)

Задача 2. Найти функцию $u(x,\ t) \in [C^{2\ 1}(\Omega_T) \cap C^{1,\ 0}(\Omega_T \cup \overline{\Gamma}_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)]^3$, удовлетворяющую (1), граничным условиям (2), (3) и начальному условию

$$u(x,\ 0) = u_0(x) \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

На рисунке 2 изображено множество, где заданы данные задачи 2 (для двух пространственных переменных).

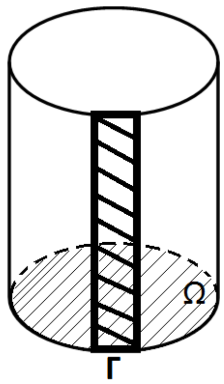

Рисунок 2

Замечание. Задачи 1 и 2 некорректны. Тогда далее мы будем исследовать только задачу 1, поскольку задача 2 помимо краевых условий (1)–(3) требует выполнения еще и начального условия (4).

Теорема 1.1 (единственности). *Если Γ имеет хотя бы одну внутреннюю точку (на $\partial\Omega$), то задача (1), (2), (3) не может иметь более одного решения.*

Пусть $\Phi(x,\ t) = (\Phi_{jk}(x,\ t))_{jk=1,\dots,\ n}$ — фундаментальное решение (фундаментальная матрица) параболичекой системы Ламе [1], где

$$\Phi_{jk}(x,\ t) = \delta_{jk} K(x,\ \mu t) + \int_{\mu t}^{(\lambda+2\mu)t} \frac{\partial K(x,\ s)}{\partial x_j \partial x_k} ds,$$

$K(x,\ t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Далее рассмотрим функции

$$G(f) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \Phi(x-y,\ t-\tau) f(y,\ \tau) dy d\tau,$$

$$V_\Gamma(u_2) = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \Phi(x-y,\ t-\tau) u_2(y,\ \tau) dS_y d\tau,$$

$$W_\Gamma(u_1) = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma T(y,\Omega)\Phi(x-y,\ t-\tau) u_1(y,\ \tau) dS_y d\tau,$$

которые называются объемным потенциалом, потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя соответственно, где $\Phi(x-y,\ t-\tau)$ – фундаментальное решение параболической системы Ламе.

Пусть Γ – открытое множество. Выберем Ω^+ так, чтобы множество $\Omega \cup \Gamma \cup \Omega^+$ было ограниченной областью. Обозначим $Q_T^+ = \Omega^+ \times (0,\ T)$.

Теорема 1.2 (Критерий существования). *Пусть* Γ *– открытое множество (на* $\partial\Omega$*) и заданы функции* $f \in \left[C^{\lambda}(\overline{Q_T})\right]^3$, $u_1 \in \left[C^{1+\lambda,\ \lambda}(\overline{\Gamma_T})\right]^3$, $u_2 \in \left[C^{\lambda}(\overline{\Gamma_T})\right]^3$. *Задача (1), (2), (3) разрешима тогда и только тогда, когда существует функция* $F \in \left[C^{2,\ 1}(Q_T \cup Q_T^+ \cup \Gamma_T) \cap C(\overline{Q_T} \cup Q_T^+)\right]^3$, *которая удовлетворяет следующим условиям:*

1. $LF = 0$ *в* $Q_T \cup Q_T^+ \cup \Gamma_T$,

2. $F = G(f) + V_\Gamma(u_2) + W_\Gamma(u_1)$ *в* Q_T^+.

Список литературы

[1] С. Д. Эйдельман, “Параболические уравнения”, Дифференциальные уравнения с частными производными – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 63, ВИНИТИ, М., 1990, 201–313.

[2] V. A. Solonnikov, “On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form”, Boundary value problems of mathematical physics. Part 3. On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form, Trudy Mat. Inst. Steklov., 83, 1965, 3–163

[3] Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа. / А. Фридман; пер. с англ. Л. А. Гусарова. – М.: Мир, 1968.