

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
институт

Межинститутская базовая кафедра
«Прикладная физика и космические технологии»
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
В.Е. Косенко
подпись инициалы, фамилия
« _____ » _____ 2019 г

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«Повышение точности радиоконтроля орбит за счет использования
измерений по линии космический аппарат – космический аппарат»
тема

01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

01.04.02.04 «Навигация и управление движением»
код и наименование магистерской программы

<u>Научный руководитель</u>	_____	Профессор МБК ПФиКТ, д-р техн. наук _____	<u>В.И. Кудымов</u> инициалы, фамилия
	подпись, дата	должность, ученая степень	
<u>Выпускник</u>	_____		<u>С.В. Семенюк</u> инициалы, фамилия
	подпись, дата		
<u>Рецензент</u>	_____	Начальник сектора АО «ИСС», канд. техн. наук _____	<u>Е.В. Ислентьев</u> инициалы, фамилия
	подпись, дата	должность, ученая степень	
<u>Нормоконтролер</u>	_____		<u>Е.С. Сидорова</u> инициалы, фамилия
	подпись, дата		

Красноярск 2019

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
институт

Межинститутская базовая кафедра
«Прикладная физика и космические технологии»
кафедра

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

В.Е. Косенко

подпись инициалы, фамилия

« 05 » октября 2018 г

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
в форме магистерской диссертации

Студенту Семенюку Сергею Викторовичу

фамилия, имя, отчество

Группа ИМ 17-08М Направление (специальность) 01.04.02

номер

код

«Прикладная математика и информатика»

наименование

Тема выпускной квалификационной работы: Повышение точности радиоконтроля орбит за счет использования измерений по линии космический аппарат – космический аппарат

Утверждена приказом по университету № 678/с от 22.01.2017

Руководитель ВКР: В. И. Кудымов, профессор, д-р техн. наук,

МБК «Прикладная физика и космические технологии»

инициалы, фамилия, должность, ученое звание и место работы

Исходные данные для ВКР: параметры элементов орбиты (радиус Земли $R = 6371$ км, высота орбиты $h = 19400$ км, наклонение $i = 64,8^\circ$, гравитационный параметр $\mu = 398600,4415 \text{ м}^3/\text{с}^2$, период обращения СНС «ГЛОНАСС» = 11ч30мин, эксцентриситет $e = 0,001$, средняя аномалия $M_0 = 0^\circ$, долгота восходящего узла $\Omega = 0^\circ$, аргумент перицентра $\omega = 0^\circ$), источники параметров СНС «ГЛОНАСС», литература по радиоконтролю, навигации КА и литература по аналитическим и численным методам.

Перечень разделов ВКР:

- 1) невозмущенное движение искусственных спутников Земли;
- 2) представление численной и аналитических моделей в поле сжатой Земли;
- 3) создание методики определения аргумента широты в аналитической форме представления в поле сжатой Земли.

Руководитель ВКР

подпись

инициалы и фамилия

Задание принял к исполнению

подпись, инициалы и фамилия студента

« ____ » _____ 20__ г.

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме: «Повышение точности радиоконтроля орбит за счет использования измерений по линии космический аппарат – космический аппарат» содержит 94 страницы текстового документа, 17 использованных источников.

РАДИОЛИНИЯ, МЕЖСПУТНИКОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ, ЛИНИЯ КА-КА, АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД, АРГУМЕНТ ШИРОТЫ, НАВИГАЦИЯ, БАЛЛИСТИКА, КОСМИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ОРБИТА, ГЛОНАСС.

Объектом исследования является аргумент широты, а предметом исследования - возмущения данного элемента в модели движения КА.

Основной целью является разработка методики, базирующейся на учете расхождения в элементе аргумента широты, которая позволит повысить точность радиоконтроля орбит при использовании измерений по линии КА-КА.

Для достижения цели были решены следующие задачи:

- 1) определен параметр аргумента широты на основе модели движения КА в центральном поле;
- 2) проведен анализ расхождения аргумента широты в аналитической и численной моделях движения КА центрального поля;
- 3) определен параметр аргумента широты на основе модели движения КА в поле сжатой Земли;
- 4) оценены расхождения и возмущения аргумента широты в аналитических моделях движения КА в поле сжатой Земли для дальнейшего использования характеристик элемента;
- 5) на основе оценки возмущений аргумента широты создана методика повышения точности радиоконтроля орбит в аналитическом представлении модели движения КА.

В результате проведенной работы создана методика для построения аналитической модели движения космических аппаратов на орбите.

По итогу работы установлено, что при построении данной методики можно достичь необходимой точности определения элемента орбиты, чтобы в дальнейшем разработать полноценную аналитическую модель движения космического аппарата в полном поле. Выявлены основные недостатки при математических преобразованиях в создаваемой модели. Проработан вопрос дальнейшего применения методики и возможности ее использования в реальных системах. Предложены дальнейшие возможные пути развития в направлении создания аналитической модели движения космического аппарата в поле сжатой Земли.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	9
1 Невозмущенное движение искусственных спутников Земли	12
1.1 Определение аргумента широты на основе аналитической модели движения космического аппарата в центральном поле	16
1.2 Определение аргумента широты на основе численной модели движения космического аппарата в центральном поле	18
1.3 Расхождение между численным и аналитическим представлением аргумента широты в центральном поле.....	23
1.4 Преобразование численной модели центрального поля в поле сжатой Земли	25
1.5 Вывод по первой главе	28
2 Представление численной и аналитических моделей в поле сжатой Земли	29
2.1 Определение аргумента широты на основе численной модели движения космического аппарата в поле сжатой Земли	30
2.2 Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели по методу Проскурина-Батракова в поле сжатой Земли	31
2.2.1 Формульное представление аналитической модели по методу Проскурина-Батракова	31
2.2.2 Характеристика аргумента широты в аналитической модели по методу Проскурина-Батракова	35
2.3 Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели по методу Козаи в поле сжатой Земли.....	43
2.3.1 Формульное представление аналитической модели по методу Козаи	43
2.3.2 Характеристика аргумента широты в аналитической модели по методу Козаи	46

2.4	Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели, учитывающей возмущения 2-го порядка в поле сжатой Земли	49
2.4.1	Формульное представление аналитической модели, учитывающей возмущения 2-го порядка.....	50
2.4.2	Характеристика аргумента широты по аналитической модели, учитывающей возмущения 2-го порядка	52
2.5	Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели движения в поле сжатой Земли с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений.....	54
2.5.1	Формульное представление аналитической модели, с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений.....	54
2.5.2	Формульное представление аналитической модели, с учетом вековых возмущений	56
2.5.3	Характеристика аргумента широты по аналитической модели, с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений	56
2.5.4	Характеристика аргумента широты в аналитической модели, с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений, после преобразования уравнений Лагранжа	60
2.5.5	Вывод по аналитической модели движения в поле сжатой Земли с коротко- и долгопериодическими возмущениями с учетом измененных уравнений Лагранжа.....	64
2.6	Вывод по второй главе	64
3	Создание методики определения аргумента широты в аналитической форме представления в поле сжатой Земли.....	65
3.1	Определение возмущений в элементе большой полуоси.....	65
3.2	Определение возмущений в элементе эксцентриситета.....	77
3.3	Определение возмущений в элементе средней аномалии.....	79
3.4	Определение возмущений в аргументе перицентра	81

3.5 Характеристика аргумента широты по разрабатываемой методике в аналитической форме представления	83
3.6 Оценка аргумента широты по разрабатываемой методике в аналитической форме представления после преобразования уравнений Лагранжа	84
3.7 Вывод по третьей главе	89
Заключение	90
Список сокращений	92
Список использованных источников	93

ВВЕДЕНИЕ

Глобальная навигационная спутниковая система (ГЛОНАСС) предназначена для определения местоположения, скорости движения, точного времени морских, воздушных, сухопутных и космических потребителей, а также для выполнения дополнительных информационных функций.

В настоящее время перед учёными стоит задача повышения точности и надёжности координатно-временных определений на основе использования спутниковой навигационной системы (СНС) «ГЛОНАСС». В связи с этим проводится работа по модернизации системы во всех её сегментах. В частности, для эффективного решения поставленной задачи требуется глубокая переработка технологии эфемеридно-временного обеспечения (ЭВО) [1-3]. ЭВО является важнейшим направлением, определяющим точность и надёжность позиционирования объектов потребителя на основе СНС «ГЛОНАСС». Одно из направлений модернизации ЭВО связано с переходом основного источника информации о состоянии орбитальной группировки СНС «ГЛОНАСС» на совершенно новую технологию радиоконтроля орбит за счет использования измерений по линии «космический аппарат – космический аппарат» (КА-КА). Главной задачей ЭВО, которую необходимо решать на основе этой технологии, является определение орбит навигационных спутников, входящих в состав СНС «ГЛОНАСС», то есть оценка их текущих навигационных параметров. Актуальность исследования заключается в глубокой переработке технологии ЭВО, получении новых методов, средств повышения точности и автономности баллистического обеспечения спутниковых навигационных систем [4].

Существует метод повышения точности эфемеридной информации за счёт проведения измерений взаимного движения спутников в самой навигационной системе по линии КА-КА. По принципу функционирования,

СНС «ГЛОНАСС» распределена вокруг Земли достаточно равномерно. Осуществление измерений параметров взаимного движения спутников повышает избыточность доступных сведений в системе, что даёт возможность, в конечном счёте, повысить точность эфемеридной информации даже при недостаточно равномерном распределении наземных пунктов [5-6].

Другой важной задачей, которую позволяет решать система межспутниковых измерений по линии КА-КА, является повышение надёжности СНС «ГЛОНАСС». В случае выхода из строя части наземных пунктов контроля или при полном отсутствии поддержки системы с Земли, эфемеридная информация продолжает рассчитываться, но со временем точность имеющихся данных снижается, что приводит к неспособности системы решать поставленные задачи [7-11]. Межспутниковые измерения по линии КА-КА независимы от наземной поддержки, так как соответствующая аппаратура входит в состав СНС «ГЛОНАСС» и работает автономно. Это позволяет продлить срок её активного существования [12-13]. Основной целью работы является разработка методики, базирующейся на учете расхождения в элементе аргумента широты, которая позволит повысить точность радиоконтроля орбит при использовании измерений по линии КА-КА. В таком случае, объектом исследования является аргумент широты, а предметом исследования – возмущения данного элемента в модели движения КА.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) определить параметр аргумента широты на основе модели движения КА в центральном поле;
- 2) провести анализ расхождения аргумента широты в аналитической и численной моделях движения КА центрального поля;
- 3) определить параметр аргумента широты на основе модели движения КА в поле сжатой Земли;
- 4) провести оценку расхождений и возмущений аргумента широты в

аналитических моделях движения КА в поле сжатой Земли;

5) на основе оценки возмущений аргумента широты разработать методику повышения точности радиоконтроля орбит в аналитическом представлении модели движения КА.

В результате проведенных исследований была разработана методика повышения точности радиоконтроля орбит, основанная на использовании данных измерений по линии КА-КА. Было установлено, что наибольшее количество возмущений аргумента широты можно учесть при использовании унифицированного аналитического метода [14], позволяющего учитывать n -ое количество возмущающих гармоник [15-17]. Проведена оценка возможности последующего использования предлагаемого метода расчета возмущений при измерении по линии КА-КА. Представлены возможные дальнейшие пути для исследований в данном направлении.

1 Невозмущенное движение искусственных спутников Земли

Невозмущённое движение искусственных спутников Земли (ИСЗ) называют также Кеплеровым движением, так как оно подчиняется трём законам, открытым в 1609–1618 гг. немецким астрономом Иоганном Кеплером.

Положение ИСЗ на орбите относительно Земли может быть определено шестью Кеплеровыми элементами, два из которых характеризуют размеры и форму орбиты, три – ориентацию орбиты и направление движения ИСЗ, а шестой – положение спутника на орбите. Этими шестью элементами являются:

1) большая полуось a , которая равна среднему расстоянию ИСЗ от центра Земли;

2) эксцентриситет e – мера сплюснутости эллипса. Эксцентриситет орбит спутников радиосвязи, как правило, не превышает 0,5. При $e = 0$ орбита является круговой, для которой высоты апогея и перигея равны. По круговой орбите ИСЗ движется с постоянной скоростью. При движении по эллиптической орбите скорость движения спутника изменяется, достигая максимума в области перигея и минимума – в области апогея;

3) наклонение орбиты i к экваториальной плоскости Земли – угол пересечения плоскости орбиты ИСЗ с плоскостью экватора Земли. Отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть со стороны восходящего узла орбиты. Измеряется от 0° до 180° . Если наклонение не более 90° , то движение спутника считается прямым, если более 90° – то обратным;

4) аргумент перицентра ω – угол, отсчитываемый в плоскости орбиты ИСЗ от восходящего узла орбиты до точки перигея (точка, где расстояние между ИСЗ и центром Земли наименьшее). Угол отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса мира. Линия, соединяющая восходящий и нисходящий узлы называется линией узлов;

5) долгота восходящего узла Ω – угол, отсчитываемый в плоскости земного экватора от восходящего узла до точки весеннего равноденствия. Угол отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса мира, обычно выбирается в пределах 0° - 360° ;

б) средняя аномалия M – угол, отсчитываемый в плоскости орбиты ИСЗ от перигея до ИСЗ на орбите. Угол отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса мира [6,10].

Данные элементы составляют основу эфемеридно-временного обеспечения СНС «ГЛОНАСС» и являются эфемеридами второго рода. С помощью эфемерид второго рода можно построить высокоточную аналитическую модель движения КА в полном поле. Соответствующее повышение точности эфемерид позволит разгрузить линию связи КА-КА, повысит точность радиоконтроля, обеспечит высокоточное определение КА на орбите, благодаря чему можно добиться повышения автономного существования системы. Данное направление работ по повышению точности эфемерид второго рода определяет точность и надежность позиционирования объектов потребителя СНС.

На сегодняшний день все КА работают преимущественно на численных моделях, которые учитывают возмущения в элементах орбиты, но используют пошаговые итерационные вычисления, приводящие к большому накоплению ошибок в итоговых расчетах. В связи с этим, возникает необходимость регулярной корректировки значений параметров орбиты. При таком подходе определение параметров повышение точности на линии КА-КА возможно за счет:

- 1) повышения точности параметра аргумента широты;
- 2) применения аналитической модели в расчете параметра аргумента широты;
- 3) учета возмущающих факторов воздействующих на движение КА по орбите.

Аргумент широты (обозначаемый u) – угловой параметр, который определяет положение тела, движущегося вдоль кеплеровой орбиты. Это сумма часто используемых истинной аномалии и аргумента перицентра, образующая угол между радиус-вектором тела и линией узлов, которая отсчитывается от восходящего узла по направлению движения КА по формуле (1.1):

$$u = \theta + \omega, \tag{1.1}$$

где u – аргумент широты,

θ – истинная аномалия.

Аргумент широты и упрощенная схема организации межспутниковой радиолинии КА-КА представлены на рисунке 1:

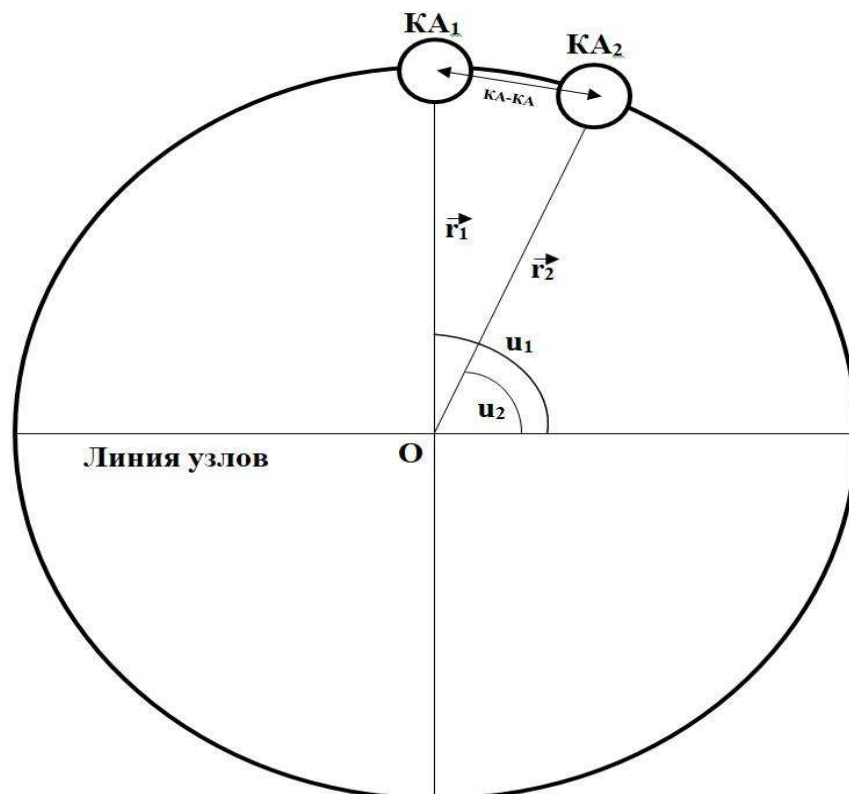


Рисунок 1 – Упрощенная схема организации межспутниковой радиолинии КА-КА

Как видно на рисунке 1, угол между линией узлов и радиусом-вектором КА определяет аргумент широты. Точность определения данного угла сказывается на качестве межспутниковой связи по радиолинии КА-КА. Два аппарата, взаимодействуя между собой по радиолинии КА-КА, образуют своего рода «хорду», точное вычисление которой позволит организовать лучшее взаимодействие между спутниками, и, следовательно, повысит точность радиоконтроля орбиты. Для улучшения данного радиоконтроля за счет использования измерений по линии КА-КА необходимо точно рассчитывать аргумент широты по каждому ИСЗ.

Для определения данного аргумента как оскулирующей составляющей орбиты необходимо рассмотреть численную модель с периодическими и вековыми возмущениями первого порядка.

Оскулирующие составляющие – это элементы орбиты, рассматриваемые как функции времени, через которые координаты и составляющие скорости в возмущенном движении выражаются теми же формулами, что и в невозмущенном движении.

В первую очередь, для последующего анализа аргумента широты в поле сжатой Земли (в поле C_{20}), необходимо построить Кеплерову модель движения КА.

1.1 Определение аргумента широты на основе аналитической модели движения космического аппарата в центральном поле

Для определения аргумента широты на основе аналитической модели движения КА в центральном поле воспользуемся моделью Кеплера. Как было указано ранее, аргумент широты выражается через формулу (1.1), включающую в себя аргумент перицентра ω и истинную аномалию θ .

Аргумент перицентра в аналитической модели центрального поля является постоянным значением. Истинная аномалия определяется формулой (1.2) [13]:

$$\theta = 2atg^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}\right), \quad (1.2)$$

где E – эксцентрическая аномалия, которая определяется по формуле (1.3):

$$E^{(n)} = E^{(n-1)} - \frac{E^{(n-1)} - esin(E)^{(n-1)} - M}{1 - ecos(E)^{(n-1)}}. \quad (1.3)$$

Средняя аномалия определяется по формуле (1.4):

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad (1.4)$$

где M_0 – начальное значение средней аномалии, которое является константой в аналитической модели центрального поля,

t – некоторый момент времени,

n – среднее движение ИСЗ, которое определяется по формуле (1.5):

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad (1.5)$$

где μ – гравитационная постоянная и, в случае для Земли, составляет $398600,44 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

В нашем случае значения элементов и параметры орбиты будут соответствовать значениям из таблицы 1.

Таблица 1 – Значения элементов и параметры орбиты

Элемент / Параметр орбиты	Значение
Большая полуось a , км	25771
Высота орбиты h , км	19400
Период обращения СНС «ГЛОНАСС», ч	11,5 ч
Эксцентриситет e , ед.	0,001
Шаг t , с	15
Среднее движение ИСЗ n	0,000152606
Наклонение i , рад.	1,130973
Средняя аномалия M_0 , рад.	0
Аргумент перицентра ω , рад.	0
Долгота восходящего узла Ω , рад.	0

Аргумент широты в аналитической модели центрального поля, рассчитанный по модели Кеплера, отображен на рисунке 2:

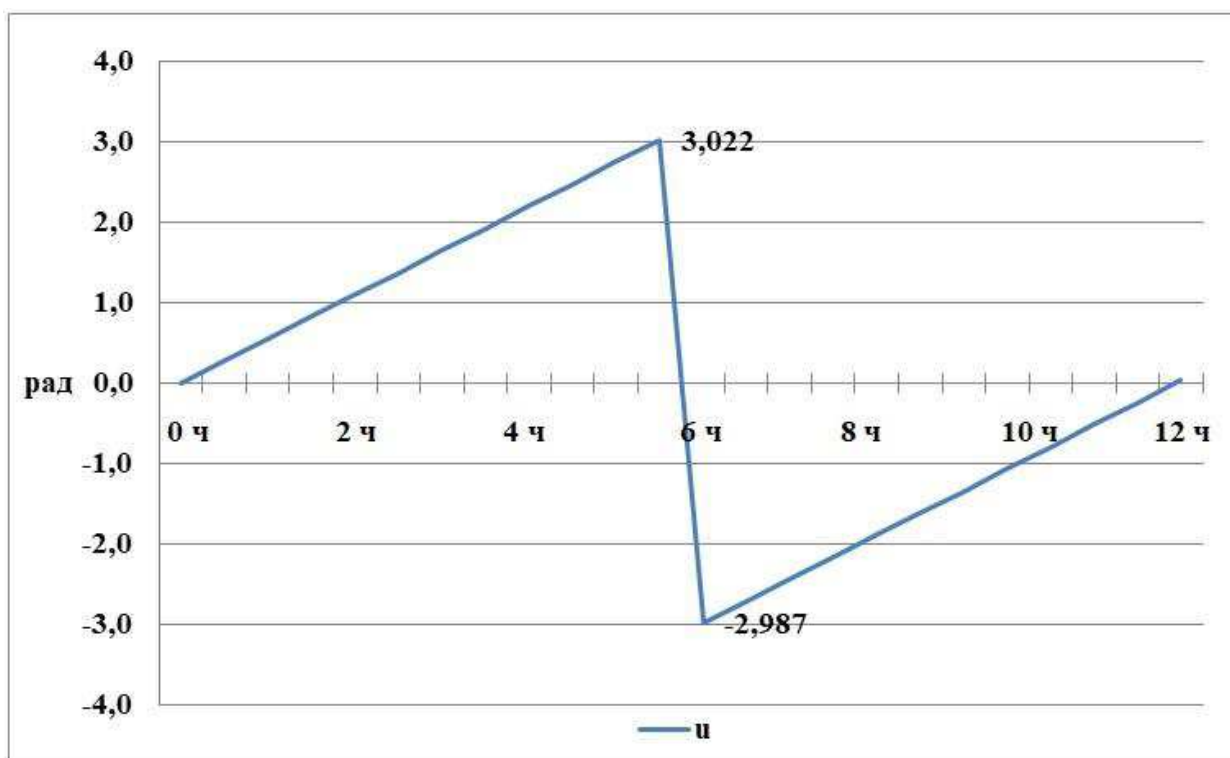


Рисунок 2 – Значение аргумента широты, рассчитанного по модели Кеплера в центральном поле

Как видно из рисунка 2, минимальное значение аргумента широты равно -2,987 радиан, а максимальное значение равно 3,022 радиан.

Для того, чтобы оценить расхождения в аргументе широты в центральном поле, необходимо определить его с помощью численной модели.

На основе приведенной выше аналитической модели движения КА центрального поля можно построить численную модель.

1.2 Определение аргумента широты на основе численной модели движения космического аппарата в центральном поле

За численную модель для расчета в центральном поле возьмем метод Рунге-Кутты (РК) четвертого порядка.

Методы Рунге-Кутта – это группа методов, широко применяемых на практике для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В этих методах при вычислении значения искомой функции в очередной точке используется информация о предыдущей функции. Методы различаются объемом вычислений и точностью итогового результата.

Современные спутники летают на численных методах, использующих в своей основе принципы и методы Рунге-Кутта [10].

Порядок метода Рунге-Кутта определяется кратностью вычисления значения производной искомой функции на каждом шаге. Для вычисления очередного значения искомой функции в точке $n + 1$, значение правой части уравнения вычисляется несколько раз, количество которых и определяет порядок метода.

Для определения аргумента широты, при использовании метода Рунге-Кутта, необходимо определить координаты и скорости ИСЗ. В связи с этим, необходимо определить начальные координаты и проекции скоростей по методу Кеплера. На рассчитанных начальных значениях Кеплеровой орбиты будем строить модель движения КА, используя численный метод Рунге-Кутта. В нашем случае начальные значения для координат и проекции их скоростей указаны в таблице 2:

Таблица 2 – Начальные значения координат и проекций скоростей

x	y	z	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}
25 745,2	0	0	0	1,6	3,5

Используя данные значения, определенные по модели Кеплера, перейдем к построению численной модели центрального поля по формулам (1.6 – 1.7):

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_{i-1} + \frac{(p_{1i} + p_{2i} + p_{3i} + p_{4i})}{6}, \\
 y_i &= y_{i-1} + \frac{(q_{1i} + q_{2i} + q_{3i} + q_{4i})}{6},
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

$$z_i = z_{i-1} + \frac{(s_{1i} + s_{2i} + s_{3i} + s_{4i})}{6}, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_{i-1} + \frac{(k_{1i} + k_{2i} + k_{3i} + k_{4i})}{6}, \\ \dot{y}_i &= \dot{y}_{i-1} + \frac{(l_{1i} + l_{2i} + l_{3i} + l_{4i})}{6}, \\ \dot{z}_i &= \dot{z}_{i-1} + \frac{(m_{1i} + m_{2i} + m_{3i} + m_{4i})}{6}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Исходя из структуры данных формул, распишем значения входящих в них параметров по формуле (1.8):

$$\begin{aligned} k_{1i} &= 1800f_1(r)dx, \\ l_{1i} &= 1800f_2(r)dy, \\ m_{1i} &= 1800f_3(r)dz, \\ p_{1i} &= 1800\dot{x}_{i-1}, \\ q_{1i} &= 1800\dot{y}_{i-1}, \\ s_{1i} &= 1800\dot{z}_{i-1}, \\ k_{2i} &= 1800f_1(r + \Delta r_{1x})dx, \\ l_{2i} &= 1800f_2(r + \Delta r_{1y})dy, \\ m_{2i} &= 1800f_3(r + \Delta r_{1z})dz, \\ p_{2i} &= 1800\left(\dot{x}_{i-1} + \frac{k_{1i}}{2}\right), \\ q_{2i} &= 1800\left(\dot{y}_{i-1} + \frac{l_{1i}}{2}\right), \\ s_{2i} &= 1800\left(\dot{z}_{i-1} + \frac{m_{1i}}{2}\right), \\ k_{3i} &= 1800f_1(r + \Delta r_{2x})dx, \\ l_{3i} &= 1800f_2(r + \Delta r_{2y})dy, \\ m_{3i} &= 1800f_3(r + \Delta r_{2z})dz, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
p_{3i} &= 1800 \left(\dot{x}_{i-1} + \frac{k_{2i}}{2} \right), \\
q_{3i} &= 1800 \left(\dot{y}_{i-1} + \frac{l_{2i}}{2} \right), \\
s_{3i} &= 1800 \left(\dot{z}_{i-1} + \frac{m_{2i}}{2} \right), \\
k_{4i} &= 1800 f_1(r + \Delta r_{3x}) dx, \\
l_{4i} &= 1800 f_2(r + \Delta r_{3y}) dy, \\
m_{4i} &= 1800 f_3(r + \Delta r_{3z}) dz, \\
p_{4i} &= 1800 (\dot{x}_{i-1} + k_{3i}), \\
q_{4i} &= 1800 (\dot{y}_{i-1} + l_{3i}), \\
s_{4i} &= 1800 (\dot{z}_{i-1} + m_{3i}),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$,

$$f_1(r) dx = \mu x r^{\frac{1}{3}},$$

$$f_2(r) dy = \mu y r^{\frac{1}{3}},$$

$$f_3(r) dz = \mu z r^{\frac{1}{3}},$$

dx, dy, dz – функциональное преобразование элемента r .

Как мы видим, определение координат и проекций скоростей основаны не на элементах орбиты, а на параметрах данного метода, что не позволяет напрямую определить аргумент широты. Поэтому, необходимо решить обратную задачу для нахождения аргумента широты через скорости и координаты.

Найдем интегралы площадей по формулам (1.9 – 1.10):

$$\begin{cases} C_1 = y_0 z_0 - z_0 y_0 \\ C_2 = z_0 x_0 - x_0 z_0 \\ C_3 = x_0 y_0 - y_0 x_0, \end{cases} \tag{1.9}$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}. \quad (1.10)$$

Определим долготу восходящего узла и наклонение орбиты по формулам (1.11 – 1.12):

$$i = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{C_3} \right), \quad (1.11)$$

$$\Omega = -\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{C_1}{C_2} \right). \quad (1.12)$$

Наконец, рассчитаем аргумент широты по формуле (1.13):

$$u_0 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z_0 \operatorname{cosec}(i)}{x_0 \cos(\Omega) + y_0 \sin(\Omega)} \right). \quad (1.13)$$

В нашем случае аргумент широты будет представлен в следующем виде на рисунке 3:

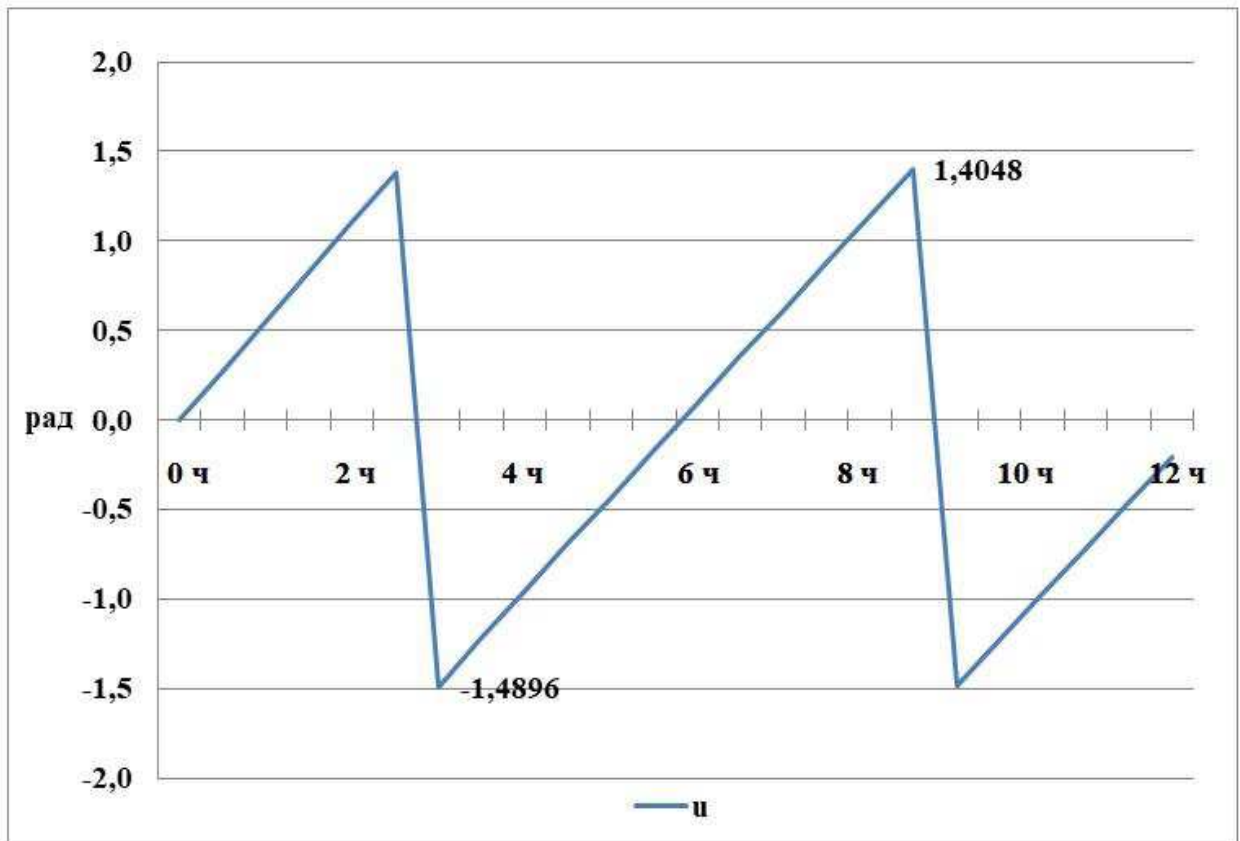


Рисунок 3 – Значение аргумента широты, рассчитанного по численной модели в центральном поле

Как видно из рисунка 3, минимальное значение аргумента широты равно -1,4896 радиан, а максимальное значение равно 1,4048 радиан.

Теперь определим расхождение в аргументе широты между аналитической и численной моделями в центральном поле.

1.3 Расхождение между численным и аналитическим представлением аргумента широты в центральном поле

Определим расхождение в аргументе широты между численной и аналитической моделями. Для этого найдем разницу в аргументе широты между аналитической моделью Кеплера и численной моделью по методу Рунге-Кутты по формуле (1.14) и построим график на рисунке 4:

$$\Delta u = u_K - u_{PK}. \quad (1.14)$$

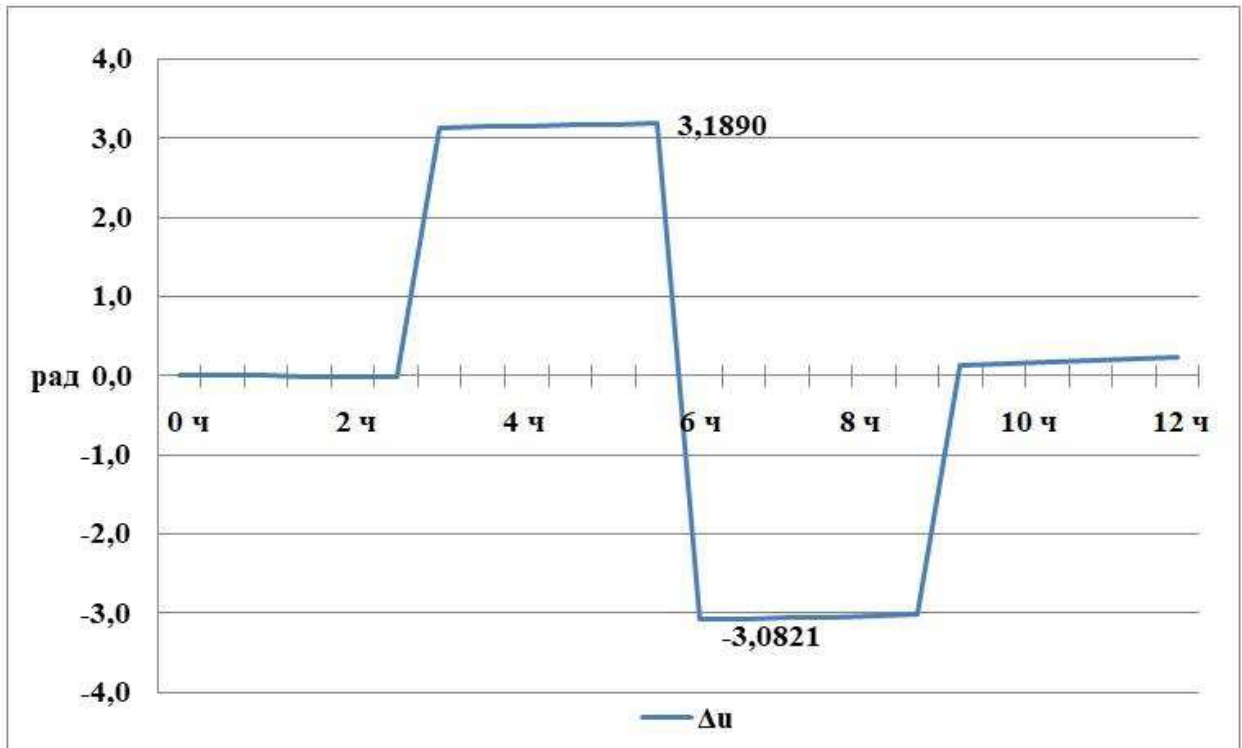


Рисунок 4 – Расхождение аргумента широты между численной и аналитической моделью в центральном поле

Как видно из рисунка 4, минимальное расхождение между моделями в центральном поле составляет -3,08 радиан, а максимальное 3,19 радиан.

Для оценки расхождения аргумента широты можно выразить его значение в километрах, используя следующую приближенную формулу расчета (1.15):

$$A_u \approx ua. \quad (1.15)$$

Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение в аргументе широты составляет 161584 км.

Данное расхождение в центральном поле будет учтено при построении моделей движения в поле сжатой Земли.

Для перехода к модели поля сжатой Земли необходимо преобразовать метод Рунге-Кутты центрального поля в поле сжатой Земли с помощью соответствующих преобразований.

1.4 Преобразование численной модели центрального поля в поле сжатой Земли

Для учета искажений в численной модели движения КА, вызванных гравитационной гармоникой C_{20} , учитывающей сжатость земного полушария, необходимо ввести преобразования, учитывающие возмущенное движение. Данное возмущенное движение может быть учтено в дифференциальных уравнениях возмущенного движения по каждой координате в виде формулы (1.16):

$$\begin{aligned} \partial f_1 &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \partial f_2 &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \partial f_3 &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где R – радиус Земли, учитывающий сжатие Земли, включающий в себя искажение гармоники с индексом «20».

Тогда итоговый вид дифференциальных уравнений примет вид системы по формуле (1.17):

$$\begin{cases} F_1 = f_1 + \partial f_1, \\ F_2 = f_1 + \partial f_2, \\ F_3 = f_1 + \partial f_3. \end{cases} \tag{1.17}$$

Итоговое представление численной модели движения КА по методу Рунге-Кутты четвертого порядка примет следующий вид (1.18 – 1.19):

$$\begin{aligned}x_i &= x_{i-1} + \frac{(p_{1i} + p_{2i} + p_{3i} + p_{4i})}{6}, \\y_i &= y_{i-1} + \frac{(q_{1i} + q_{2i} + q_{3i} + q_{4i})}{6}, \\z_i &= z_{i-1} + \frac{(s_{1i} + s_{2i} + s_{3i} + s_{4i})}{6},\end{aligned}\tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \dot{x}_{i-1} + \frac{(k_{1i} + k_{2i} + k_{3i} + k_{4i})}{6}, \\ \dot{y}_i &= \dot{y}_{i-1} + \frac{(l_{1i} + l_{2i} + l_{3i} + l_{4i})}{6}, \\ \dot{z}_i &= \dot{z}_{i-1} + \frac{(m_{1i} + m_{2i} + m_{3i} + m_{4i})}{6},\end{aligned}\tag{1.19}$$

где параметры примут вид формулы (1.20):

$$\begin{aligned}k_{1i} &= 1800F_1(r)dx, \\l_{1i} &= 1800F_2(r)dy, \\m_{1i} &= 1800F_3(r)dz, \\p_{1i} &= 1800\dot{x}_{i-1}, \\q_{1i} &= 1800\dot{y}_{i-1}, \\s_{1i} &= 1800\dot{z}_{i-1}, \\k_{2i} &= 1800F_1(r + \Delta r_{1x})dx, \\l_{2i} &= 1800F_2(r + \Delta r_{1y})dy, \\m_{2i} &= 1800F_3(r + \Delta r_{1z})dz, \\p_{2i} &= 1800\left(\dot{x}_{i-1} + \frac{k_{1i}}{2}\right), \\q_{2i} &= 1800\left(\dot{y}_{i-1} + \frac{l_{1i}}{2}\right),\end{aligned}\tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
s_{2i} &= 1800 \left(\dot{z}_{i-1} + \frac{m_{1i}}{2} \right), \\
k_{3i} &= 1800 F_1(r + \Delta r_{2x}) dx, \\
l_{3i} &= 1800 F_2(r + \Delta r_{2y}) dy, \\
m_{3i} &= 1800 F_3(r + \Delta r_{2z}) dz, \\
p_{3i} &= 1800 \left(\dot{x}_{i-1} + \frac{k_{2i}}{2} \right), \\
q_{3i} &= 1800 \left(\dot{y}_{i-1} + \frac{l_{2i}}{2} \right), \\
s_{3i} &= 1800 \left(\dot{z}_{i-1} + \frac{m_{2i}}{2} \right), \\
k_{4i} &= 1800 F_1(r + \Delta r_{3x}) dx, \\
l_{4i} &= 1800 F_2(r + \Delta r_{3y}) dy, \\
m_{4i} &= 1800 F_3(r + \Delta r_{3z}) dz, \\
p_{4i} &= 1800 (\dot{x}_{i-1} + k_{3i}), \\
q_{4i} &= 1800 (\dot{y}_{i-1} + l_{3i}), \\
s_{4i} &= 1800 (\dot{z}_{i-1} + m_{3i}).
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Как видно из формул (1.18 – 1.20), формулы (1.18 – 1.19) останутся прежними, изменится только вид формулы (1.20). Решив по аналогии обратную задачу для нахождения аргумента широты, мы можем использовать полученные значения для оценки аналитических моделей движения КА в поле сжатой Земли.

Главными гравитационными возмущениями в движении искусственного спутника Земли являются возмущения, обусловленные отличием поля притяжения реальной Земли от поля притяжения точечной массы, описываемой аналитической моделью Кеплера в центральном поле.

Создание аналитической формы представления положения КА в пространстве, позволит повысить оперативность решения задачи навигации КА, опираясь на вышеизложенный численный метод. За счет повышения точности определения КА на орбите и за счет более эффективной траты

вычислительных ресурсов ЭВМ, как на Земле, так и на борту КА, можно достичь лучшего радиоконтроля по межспутниковой линии связи, что повлияет на точность системы и ее быстродействие.

Соответствующее повышение точности позволит разгрузить линию связи КА-КА, что повлияет на быстроту расчетов параметров орбиты, использование которых на большом интервале времени позволит повысить автономное существование системы.

1.5 Вывод по первой главе

Определив аргумент широты в центральном поле с помощью аналитической и численной моделей, а также переведя численную модель в поле сжатой Земли, мы можем приступить к построению аналитических моделей, учитывающих сжатие Земли. На основе анализа измененной формы численной модели в поле, учитывающем сжатие Земли, и аналитических моделей представления на его основе, мы сможем оценить возмущения в аргументе широты. Учет данных возмущений в аргументе широты в поле S_{20} позволит повысить точность радиоконтроля орбит по линии КА-КА и улучшить взаимодействие по межспутниковой линии связи.

2 Представление численной и аналитических моделей в поле сжатой Земли

Как было сказано ранее, на основе численной модели, учитывающей сжатие Земли, мы можем оценить аналитические модели в данном поле, взяв численную модель за эталон. При нахождении расхождений моделей важно не забывать учитывать погрешность расхождения центрального поля, описанного в формуле (1.14).

Расхождение моделей центрального поля и поля сжатой Земли возникают за счет воздействия гравитационных возмущений, которые описывают соответствующие физические неравномерности воздействующих сил на ИСЗ на орбите. Данные возмущения еще называют зональными коэффициентами.

В настоящее время для Земли известно свыше 21-го зональных коэффициента. Среди данных коэффициентов существует гармоника, оказывающая наибольшее влияние, которое в 1000 раз превышает воздействие любого другого зонального коэффициента. Данной гармоникой является коэффициент J_2 . Именно это обстоятельство послужило причиной того, что в большинстве работ рассматривается влияние именно коэффициента J_2 .

Коэффициенты при первых зональных гармониках имеют вполне определенный физический смысл. Они отражают различные глобальные особенности формы и распределения плотностей внутри Земли. Так, коэффициент J_2 характеризует полярное сжатие Земли, а J_3 – асимметрию северного и южного полушарий.

В связи со всем вышеизложенным, в данной работе большее внимание уделено аналитическим моделям, учитывающим гравитационные возмущения, описываемые гармоникой с индексом «20».

2.1 Определение аргумента широты на основе численной модели движения космического аппарата в поле сжатой Земли

Теперь, применив формулы преобразования (1.18 – 1.20) из главы 1.4, мы можем построить численную модель в поле S_{20} . Отообразим полученное значение аргумента широты на рисунке 5:

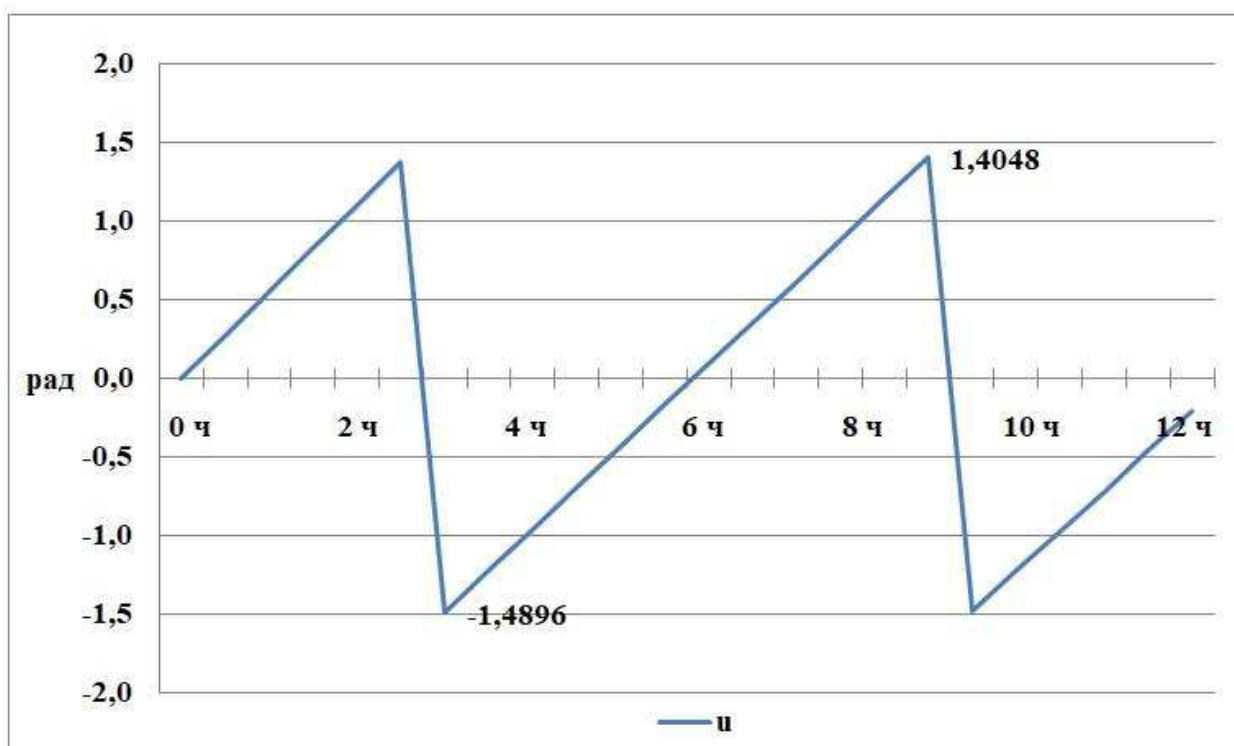


Рисунок 5 – Значение аргумента широты, рассчитанного по численной модели в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 5, минимальное значение аргумента широты равно -1,4896 радиан, а максимальное значение равно 1,4048 радиан.

Все численные модели основаны на методе Рунге-Кутты. В связи с этим, рассматриваемую численную модель мы возьмем за эталон в поле S_{20} . Теперь мы можем построить аналитические модели поля S_{20} и сравнить их с ранее приведенной численной моделью движения КА по аргументу широты.

2.2 Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели по методу Проскурина-Батракова в поле сжатой Земли

Построим аналитическую модель, которая была разработана для описания модели движения КА по теории близких спутников. Она определяет возмущения от зональных гармоник в движении ИСЗ. Были получены формулы для вековых и долгопериодических возмущений от гармоник произвольного порядка.

Таким образом, в настоящее время мы имеем довольно полную и достаточно совершенную теорию возмущений от зональных гармоник геопотенциала. Эта теория дает вековые возмущения с точностью до второго порядка и долгопериодические возмущения с точностью до первого порядка включительно относительно гармоник возмущения гравитационного поля Земли с индексом «20». Ей можно пользоваться при любых эксцентриситетах и наклонениях, за исключением малой окрестности критического значения наклонения $63^{\circ}30'$.

2.2.1 Формульное представление аналитической модели по методу Проскурина-Батракова

Аналитическая модель, построенная по методу Проскурина-Батракова, рассматриваемая в данной работе, описывает только возмущения движения КА, возникающие из-за сжатия Земли [15].

Данная модель содержит в элементах следующие периодические возмущения, выражаемые по формулам (2.1 – 2.5):

$$\delta a = 2a J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i) \right) \times \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[e \cos(M) + \frac{3}{2} e^2 \cos(2M) \right] + a J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \sin^2(i) \times \\
& \times \left[-\frac{1}{2} e \cos(M + 2\omega) + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos(2M + 2\omega) + \right. \\
& \left. + \frac{7}{2} e \cos(3M + 2\omega) + \frac{17}{2} e^2 \cos(4M + 2\omega) \right], \tag{2.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta e = & J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i) \right) \left[\left(1 + \frac{1}{8} e^2 \right) \cos(M) + \frac{3}{2} e \cos(2M) + \right. \\
& \left. + \frac{53}{24} e^2 \cos(3M) \right] + \frac{1}{2} J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \sin^2(i) \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{8} e^2 \right) \cos(M + 2\omega) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{16} e^2 \cos(M - 2\omega) - \frac{1}{2} e \cos(2M + 2\omega) - \right. \\
& \left. + \frac{7}{6} \left(1 - \frac{235}{56} e^2 \right) \cos(3M + 2\omega) + \frac{17}{4} e \cos(4M + 2\omega) \right. \\
& \left. + \frac{169}{16} e^2 \cos(5M + 2\omega) \right], \tag{2.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Omega = & J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \cos(i) \left[(1 + 2e^2) n t + 3e \sin(M) + \frac{9}{4} e^2 \sin(2M) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} e \sin(M + 2\omega) - \frac{1}{2} (1 - 2e^2) \sin(2M + 2\omega) - \right. \\
& \left. - \frac{7}{6} e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8} e^2 \sin(4M + 2\omega) \right], \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \pi = & \left\{ -J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 (\cos(i) - \cos^2(i)) \left[e n t + 3e^2 \sin(M) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} e^2 \sin(M + 2\omega) - \frac{1}{2} e \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{6} e^2 \sin(3M + 2\omega) \right] + \right. \\
& \left. + J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i) \right) \left[e n t + \left(1 + \frac{23}{8} e^2 \right) \sin(M) + \frac{3}{2} e \sin(2M) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{53}{24} e^2 \sin(3M) \right] - \frac{1}{4} J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \sin^2(i) \left[\left(1 - \frac{7}{8} e^2 \right) \sin(M + 2\omega) - \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} e \sin(M - 2\omega) - \frac{1}{2} (1 - 2e^2) \sin(2M + 2\omega) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{7}{6} e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8} e^2 \sin(4M + 2\omega) \right] \right\}, \tag{2.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8}e^2 \sin(M - 2\omega) + 5e \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{3} \left(1 - \frac{397}{56}e^2\right) \times \\
& \times \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{2}e \sin(4M + 2\omega) - \frac{169}{8}e^2 \sin(5M + 2\omega)]\}/e,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon = & 2J \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2(i)\right) \left[\left(1 + \frac{7}{4}e^2\right)nt + \frac{13}{4}e \sin(M) + \right. \\
& + \frac{21}{8}e^2 \sin(2M)] + 3J \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2(i) \left[-\frac{13}{24}e \sin(M + 2\omega) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{35}{12}e^2\right) \sin(2M + 2\omega) + \frac{91}{72}e \sin(3M + 2\omega) + \\
& + \frac{119}{48}e^2 \sin(4M + 2\omega)] - J \left(\frac{a'}{a}\right)^2 (\cos(i) - \cos^2(i)) \times \\
& \times [(1 + 2e^2)nt + 3e \sin(M) + \frac{9}{4}e^2 \sin(2M) + \frac{1}{2}e \sin(M + 2\omega) - \\
& - \frac{1}{2}(1 - 2e^2) \times \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{6}e \sin(3M + 2\omega) - \\
& - \frac{17}{8}e^2 \sin(4M + 2\omega)],
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где a' – средний радиус земли,

J – коэффициент при второй зональной гармонике,

π – долгота перицентра орбиты,

ε – элемент долготы в эпоху.

После подстановки элементов орбиты и постоянных a' и J в формулы (2.1 – 2.5) получим следующие выражения для возмущений первого порядка, вызываемых сжатием Земли (2.6 – 2.10):

$$\begin{aligned}
\delta a \cdot 10^3 = & -1,1 \cos(M) - 0,0017 \cos(2M) \\
& - 1,05 \cos(M + 2\omega) + 999, (9) \cos(2M + 2\omega) + \\
& + 7 \cos(3M + 2\omega) + 0,01 \cos(4M + 2\omega)],
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta e \cdot 10^3 = & 0,099 \cos(M) + 0,0002 \cos(2M) + 2,2 \cdot 10^{-7} \cos(3M) + \\
& + 999,9 \cos(M + 2\omega) + 0,013 \cdot 10^{-7} \cos(M - 2\omega) - \\
& - 101,78 \cdot 10^{-7} \cos(2M + 2\omega) + 0,024 \cos(3M + 2\omega) + \\
& + 865,08 \cdot 10^{-7} \cos(4M + 2\omega) + 2,15 \cdot 10^{-7} \cos(5M + 2\omega),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Omega \cdot 10^3 = & 64,6 \cdot 10^{-7} t + 0,0001 \sin(M) + 0,95 \cdot 10^{-7} \sin(2M) + \\
& + 0,00002 \sin(M + 2\omega) - 0,021 \sin(2M + 2\omega) - \\
& - 0,00005 \sin(3M + 2\omega) - 0,9 \cdot 10^{-7} \sin(4M + 2\omega),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\delta \pi \cdot 10^3 = & -0,00003 t - 0,00002 \sin(M) - \\
& - 0,00002 \sin(M + 2\omega) - 0,89 \cdot 10^{-7} \sin(2M + 2\omega) + \\
& + 0,0003 \cdot 10^{-7} \sin(3M + 2\omega) - 0,34 \cdot 10^{-7} \sin(2M) - \\
& - 0,0005 \cdot 10^{-7} \sin(3M) + 0,00003 \cdot 10^{-7} \sin(M - 2\omega) + \\
& + 0,00005 \sin(3M + 2\omega) + 1,7 \cdot 10^{-7} \sin(4M + 2\omega) + \\
& + 0,004 \cdot 10^{-7} \sin(5M + 2\omega),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon \cdot 10^3 = & -0,11 \cdot 10^{-7} t - 2,2 \cdot 10^{-7} \sin(M) - \\
& - 0,002 \cdot 10^{-7} \sin(2M) - 1,45 \cdot 10^{-7} \sin(M + 2\omega) + \\
& + 0,0001 \sin(2M + 2\omega) + 3,37 \cdot 10^{-7} \sin(3M + 2\omega) + \\
& + 0,007 \cdot 10^{-7} \sin(4M + 2\omega).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Для получения периодических возмущений элементов $\delta\omega$ и δM_0 воспользуемся формулами (2.11 – 2.12):

$$\delta\omega = \delta\pi - \delta\Omega, \tag{2.11}$$

$$\delta M_0 = \delta\varepsilon - \delta\pi. \tag{2.12}$$

Вековые возмущения в элементах $\delta\Omega_{\text{век}}$, $\delta\omega_{\text{век}}$, $\delta M_{0\text{век}}$ рассчитаем по формулам (2.13 – 2.15):

$$\delta_{\text{век}}\Omega = -J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{\cos(i)}{(1 - e^2)^2} n, \quad (2.13)$$

$$\delta_{\text{век}}\omega = \frac{1}{2} J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2(i) - 1}{(1 - e^2)^2} n, \quad (2.14)$$

$$\delta_{\text{век}}M_0 = \frac{1}{2} J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{3 \cos^2(i) - 1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} n. \quad (2.15)$$

Итак, получив необходимые составляющие, мы можем рассчитать аргумент широты и его расхождения в рассматриваемой аналитической модели.

2.2.2 Характеристика аргумента широты в аналитической модели по методу Проскурина-Батракова

Для оценки расхождений, определим размах невязки по данному элементу.

Построим график значений аргумента широты с учетом периодических возмущений на рисунке б:

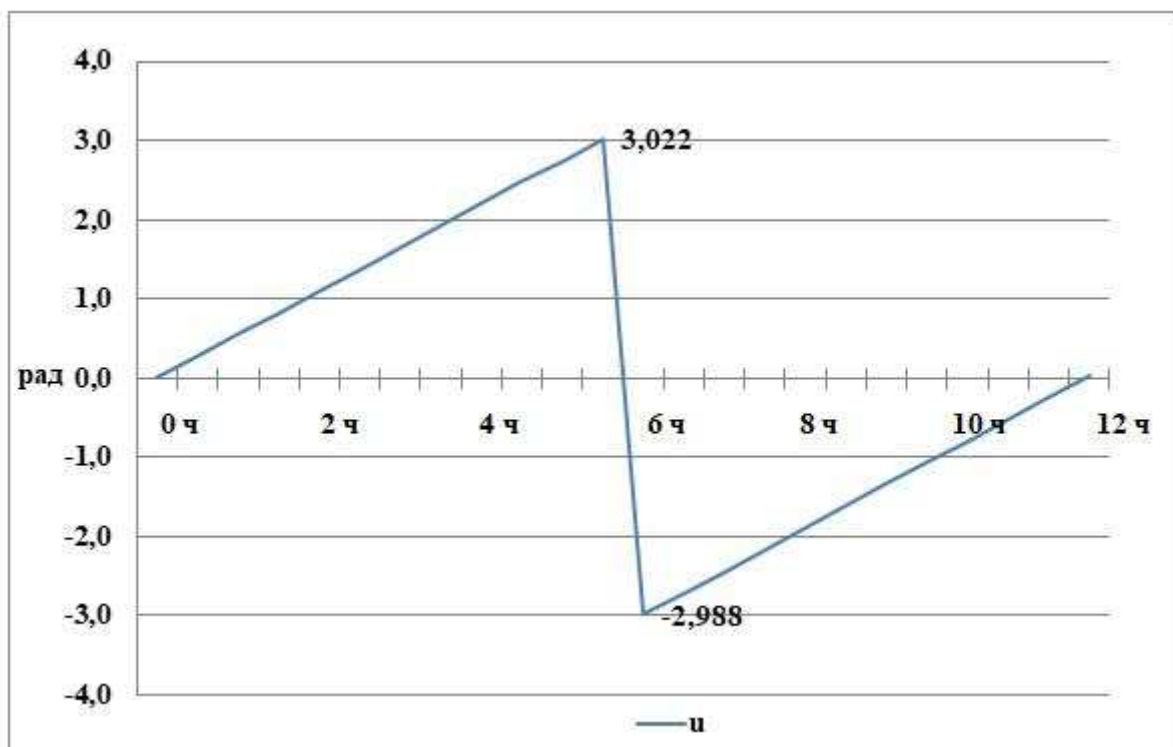


Рисунок 6 – Значение аргумента широты с учетом периодических возмущений по методу Проскурина-Батракова в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 6, минимальное значение аргумента широты с учетом периодических возмущений составляет -2,988 радиан, а максимальное 3,022 радиан.

Построим график расхождения аргумента широты с учетом периодических возмущений между численной и аналитической моделями на рисунке 7:

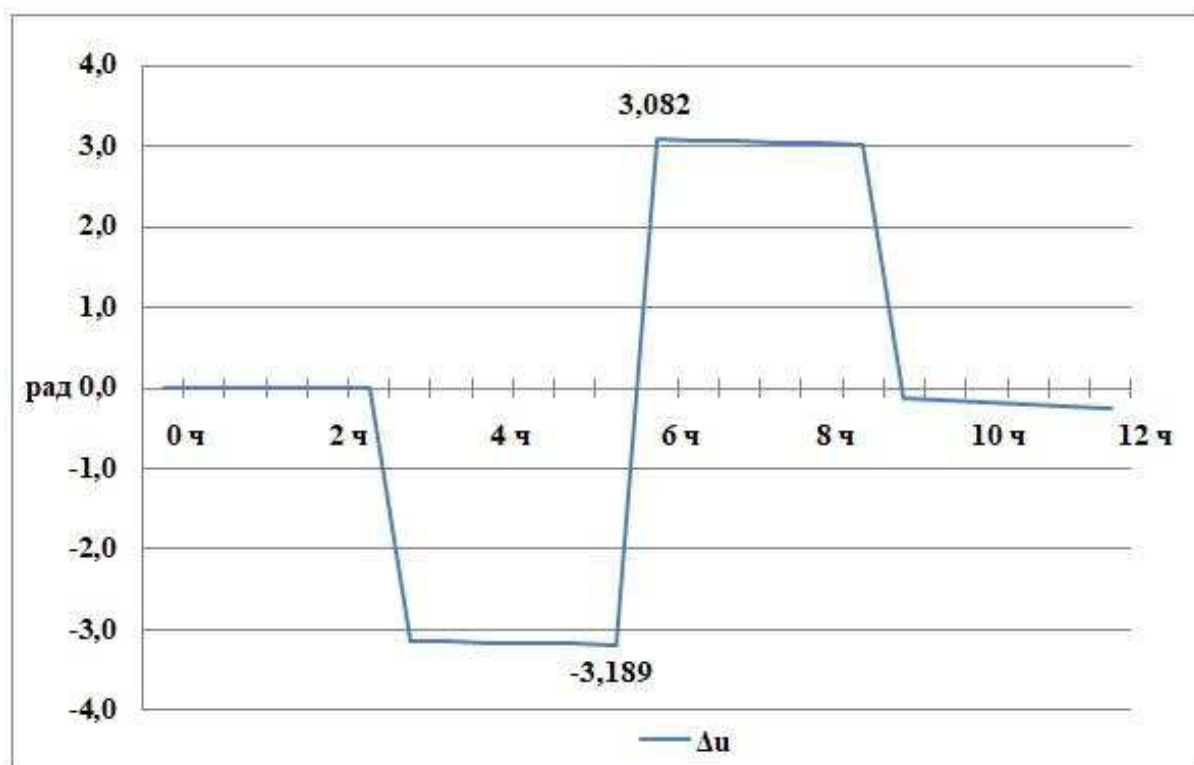


Рисунок 7 – Расхождение аргумента широты с учетом периодических возмущений между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 7, минимальное расхождение аргумента широты составляет -3,189 радиан, а максимальное 3,082 радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение составляет 161610 км.

Построим график расхождения аргумента широты с учетом периодических возмущений и невязки численной и аналитической моделей в центральном поле на рисунке 8:

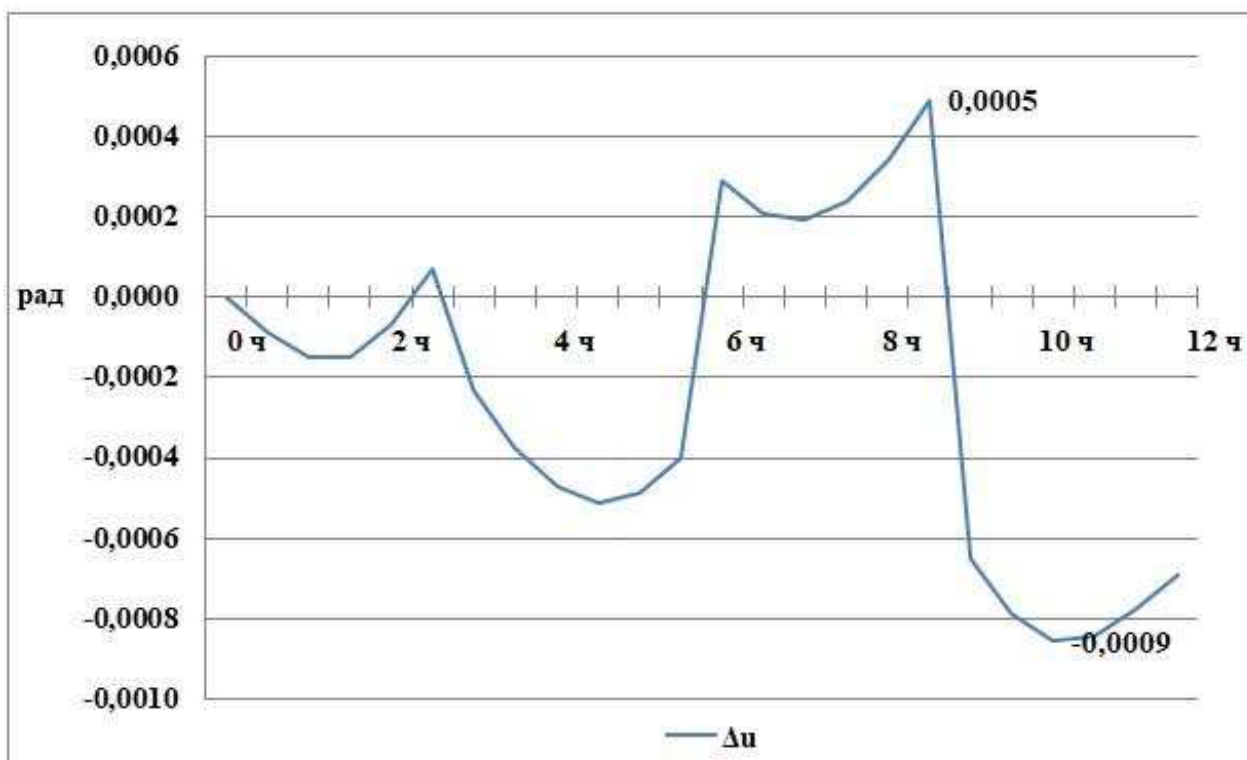


Рисунок 8 – Расхождение аргумента широты с учетом периодических возмущений и невязки численной и аналитической моделей в центральном поле

Как видно из рисунка 8, минимальное расхождение аргумента широты составляет $-0,0009$ радиан, а максимальное $0,0005$ радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение составляет $34,7$ км.

Построим график значений аргумента широты с учетом вековых возмущений на рисунке 9:

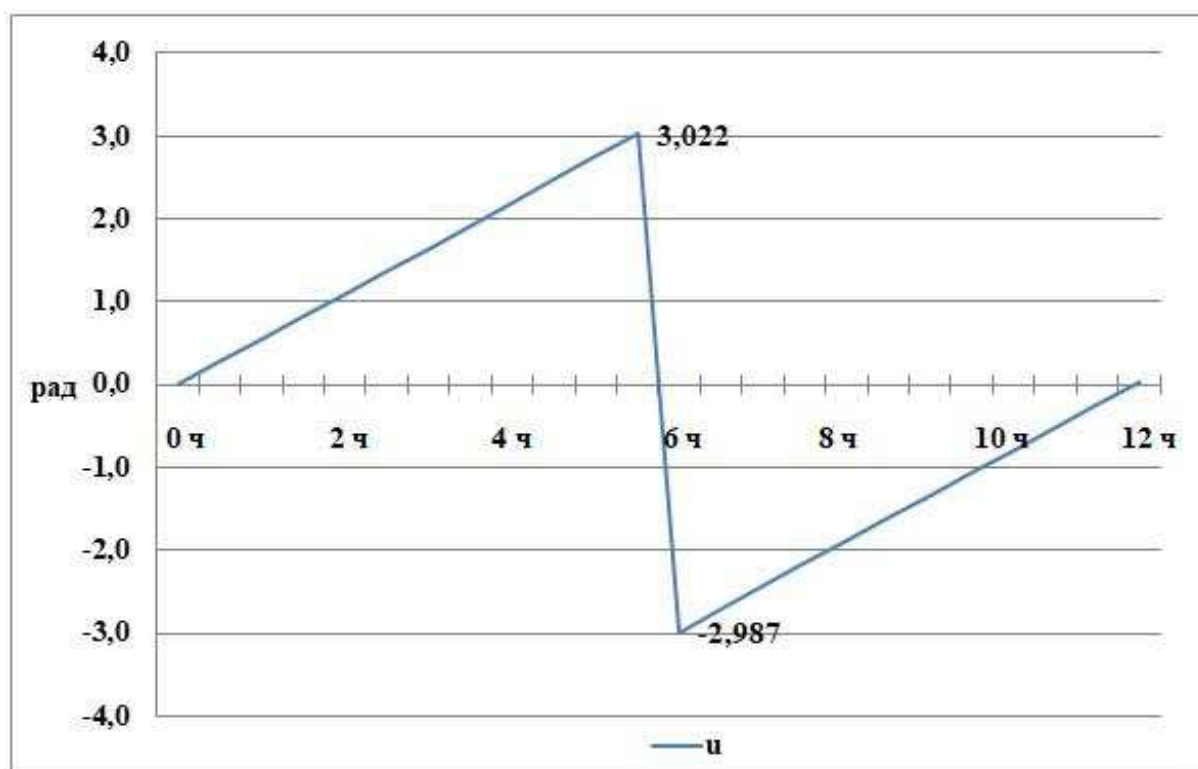


Рисунок 9 – Значение аргумента широты с учетом вековых возмущений по методу Проскурина-Батракова в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 9, минимальное значение аргумента широты с учетом вековых возмущений составляет -2,987 радиан, а максимальное 3,022 радиан.

Построим график расхождения аргумента широты с учетом вековых возмущений между численной и аналитической моделями на рисунке 10:

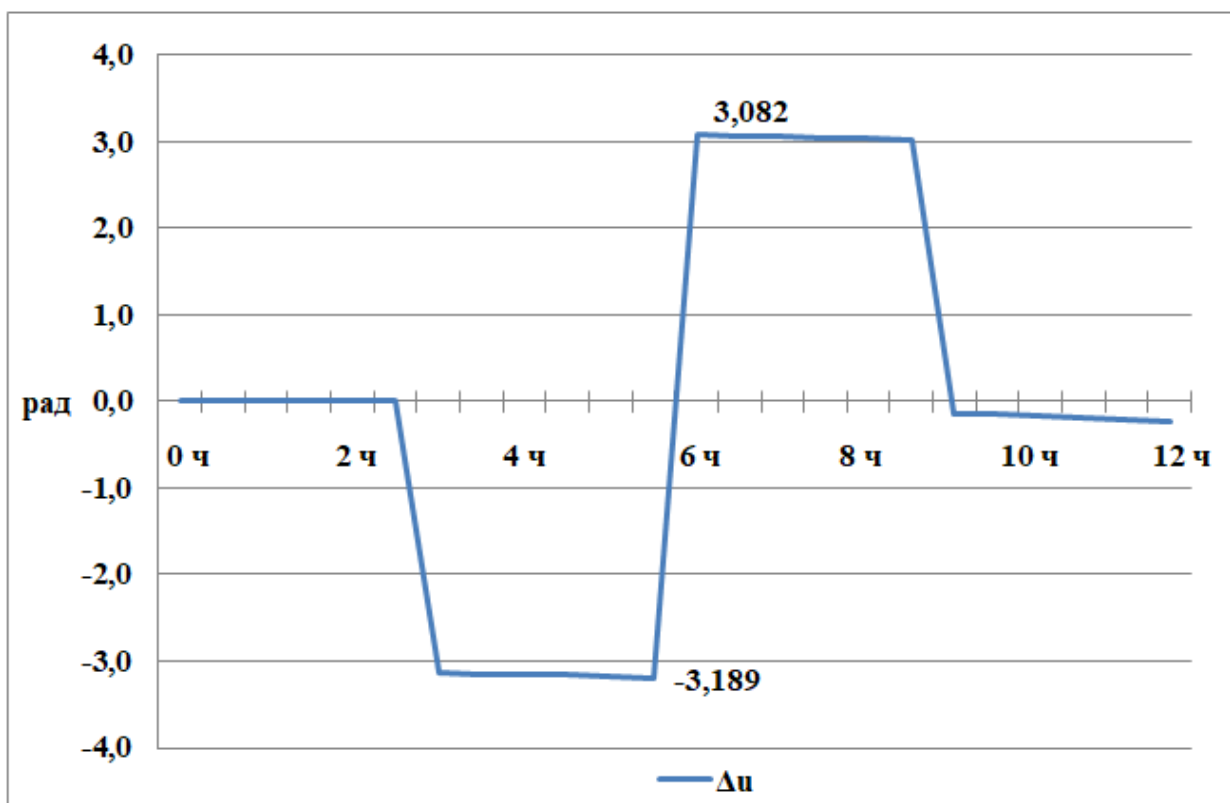


Рисунок 10 – Расхождение аргумента широты с учетом вековых возмущений между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 10, минимальное расхождение аргумента широты составляет -3,189 радиан, а максимальное 3,082 радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение составляет 161613 км.

Построим график расхождения аргумента широты с учетом вековых возмущений и невязки численной и аналитической моделей в центральном поле на рисунке 11:

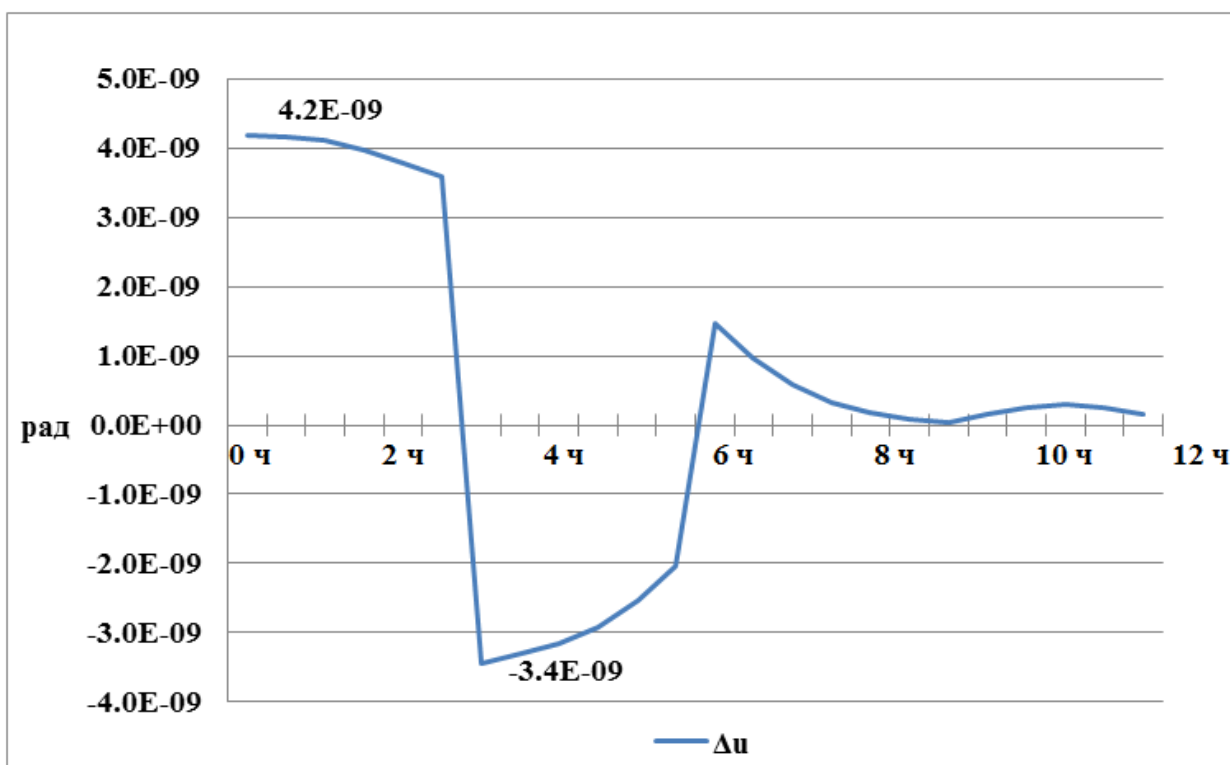


Рисунок 11 – Расхождение аргумента широты с учетом вековых возмущений и невязки численной и аналитической моделей в центральном поле

Как видно из рисунка 11, минимальное расхождение аргумента широты составляет $-3,4 \cdot 10^{-9}$ радиан, а максимальное $4,2 \cdot 10^{-9}$ радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение составляет 11,1 см.

Определим итоговое расхождение по аргументу широты между численной моделью метода Рунге-Кутты и аналитической моделью метода Проскурина-Батракова в поле сжатой Земли на рисунке 12:

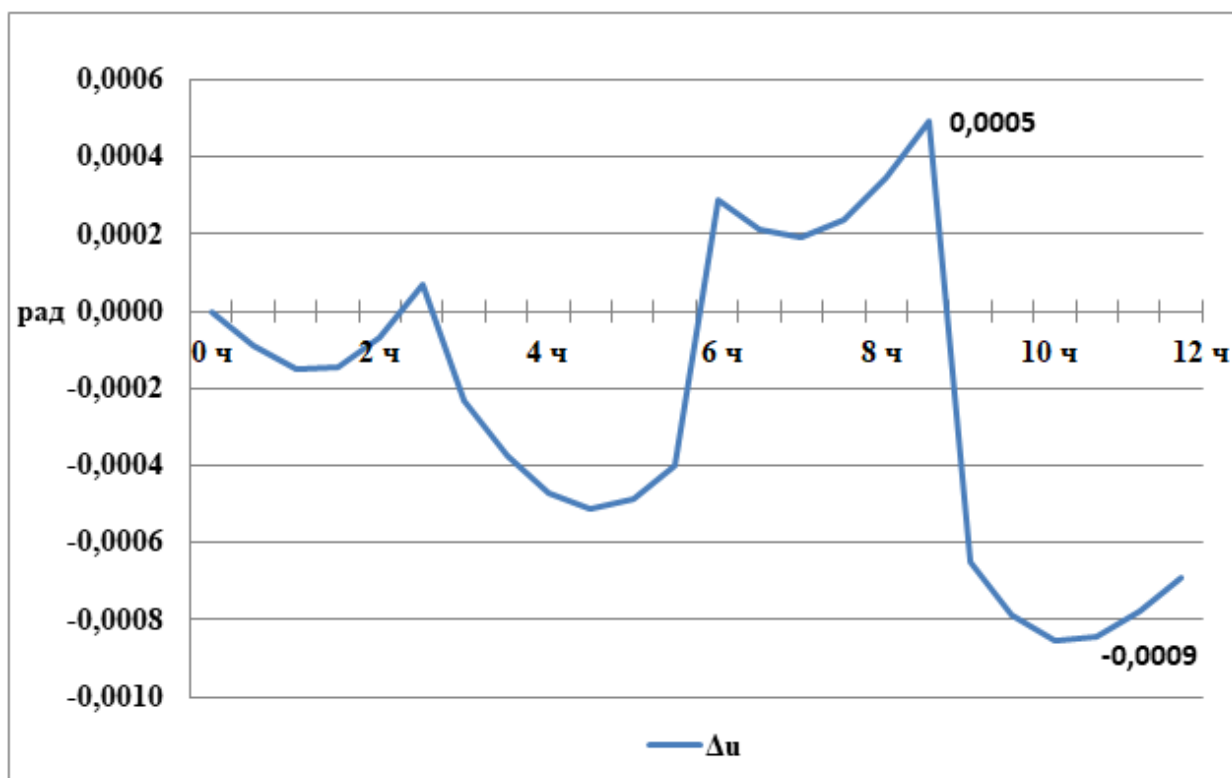


Рисунок 12 – Итоговое расхождение по аргументу широты между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 12, итоговое минимальное расхождение по аргументу широты составляет $-0,0009$ радиан, а максимальное $0,0005$ радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение составляет $34,7$ км.

В дальнейшем, при определении расхождений аргумента широты между численной и аналитическими моделями, будем учитывать погрешность сходимости данного элемента в центральном поле.

2.3 Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели по методу Козай в поле сжатой Земли

Построим аналитическую модель, разработанную для описания модели движения КА по теории близких спутников, которая может быть использована для изучения движения любых естественных спутников в солнечной системе [15].

2.3.1 Формульное представление аналитической модели по методу Козай

Данная модель содержит в элементах следующие периодические возмущения, выражаемые по формулам (2.16 – 2.19):

$$\begin{aligned} \delta a = & \frac{a'^2}{a} J \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i) \right) \left\{ \left(\frac{a}{r} \right)^3 - (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin^2(i) \cos 2(\theta + \omega) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{1 - e^2}{e} \frac{a'^2}{a^2} J \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i) \right) \left\{ \left(\frac{a}{r} \right)^3 - (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin^2(i) \cos 2(\theta + \omega) \right] - \frac{\sin^2(i) a'^2}{2e ap} J \{ \cos 2(\theta + \omega) + \\ & + e \cos(\theta + 2\omega) + \frac{1}{3} e \cos(3\theta + 2\omega) \}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \delta \omega = & \frac{a'^2}{p^2} J \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2(i) \right) (\theta - M + e \sin(\theta)) + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i) \right) \left\{ \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \sin(\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{e}{12} \sin(3\theta) \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{e} \left\{ \frac{1}{4} \sin^2(i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{15}{16} \sin^2(i) \right) e^2 \right\} \sin(\theta + 2\omega) + \right. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin(\theta - 2\omega) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \sin 2(\theta + \omega) + \\
& + \frac{1}{e} \left\{ \frac{7}{12} \sin^2(i) - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{19}{8} \sin^2(i)\right) e^2 \right\} \sin(3\theta + 2\omega) + \\
& + \frac{3}{8} \sin^2(i) \sin(4\theta + 2\omega) + \frac{e}{16} \sin^2(i) \sin(5\theta + 2\omega)],
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\delta M = & \frac{a'^2}{p^2} J \sqrt{1 - e^2} \left[-\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i)\right) \left\{ \left(1 - \frac{e^2}{4}\right) \sin(\theta) + \right. \right. \\
& + \frac{e}{2} \sin(2\theta) + \left. \frac{e^2}{12} \sin(3\theta) \right\} + \sin^2(i) \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{5}{4} e^2\right) \sin(\theta + 2\omega) - \right. \\
& - \frac{e^2}{16} \sin(\theta - 2\omega) - \left. \frac{7}{12} \left(1 - \frac{e^2}{28}\right) \sin(3\theta + 2\omega) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{8} e \sin(4\theta + 2\omega) - \frac{e^2}{16} \sin(5\theta + 2\omega) \right\} \right],
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где r – радиус-вектор положения КА,

p – фокальный параметр, рассчитываемый по формуле (2.20).

$$p = a(1 - e^2). \tag{2.20}$$

Данные выражения являются не разложениями по степеням эксцентриситета, а замкнутыми выражениями как относительно наклона орбиты $\sin(i)$, так и относительно эксцентриситета e .

После подстановки элементов орбиты и постоянных в формулы (2.16-2.19) получим следующие выражения для возмущений первого порядка, вызываемых сжатием Земли (2.21 – 2.24):

$$\delta a = 2,1034 \cos 2(\theta + \omega), \tag{2.21}$$

$$\delta e \cdot 10^3 = 0,1 \cos 2(\theta + \omega) - 0,01 \cos(\theta + 2\omega) - \tag{2.22}$$

$$-0,013\cos(3\theta + 2\omega), \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega \cdot 10^3 = & -0,004(\theta - M + e\sin(\theta)) - \\ & -35,5 \sin(\theta) - 0,01 \sin(2\theta) - 0,000003\sin(3\theta) - \\ & -20 \sin(\theta + 2\omega) + 0,000005\sin(\theta - 2\omega) + \\ & +0,1\sin2(\theta + \omega) + 47,5\sin(3\theta + 2\omega) + \\ & +0,03\sin(4\theta + 2\omega) + 0,000005\sin(5\theta + 2\omega), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \delta M \cdot 10^3 = & 0,02 \sin(\theta) + 0,00001 \sin(2\theta) + \\ & +0,000000001 \sin(3\theta) + 0,02\sin(\theta + 2\omega) + \\ & +0,000000005 \sin(\theta - 2\omega) - 0,04 \sin(3\theta + 2\omega) - \\ & -0,00003\sin(4\theta + 2\omega) + 0,000000005\sin(5\theta + 2\omega). \end{aligned} \quad (2.24)$$

По формулам (2.25 – 2.26) рассчитаем вековые возмущения:

$$\delta_{\text{век}}\omega = J \frac{a'^2}{p^2} nt \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2(i) \right), \quad (2.25)$$

$$\delta_{\text{век}}M_0 = J \frac{a'^2}{p^2} nt \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(i) \right) \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.26)$$

В численном выражении формулы (2.25 – 2.26) примут вид выражений (2.27 - 2.28):

$$\delta_{\text{век}}\omega \cdot 10^{10} = -7t, \quad (2.27)$$

$$\delta_{\text{век}}M_0 \cdot 10^9 = -3t. \quad (2.28)$$

Итак, получив необходимые составляющие, мы можем рассчитать аргумент широты и его расхождения в рассматриваемой модели.

2.3.2 Характеристика аргумента широты в аналитической модели по методу Козаи

Для оценки расхождений, определим размах невязки по данному элементу.

Построим график значений аргумента широты с учетом периодических возмущений на рисунке 13:

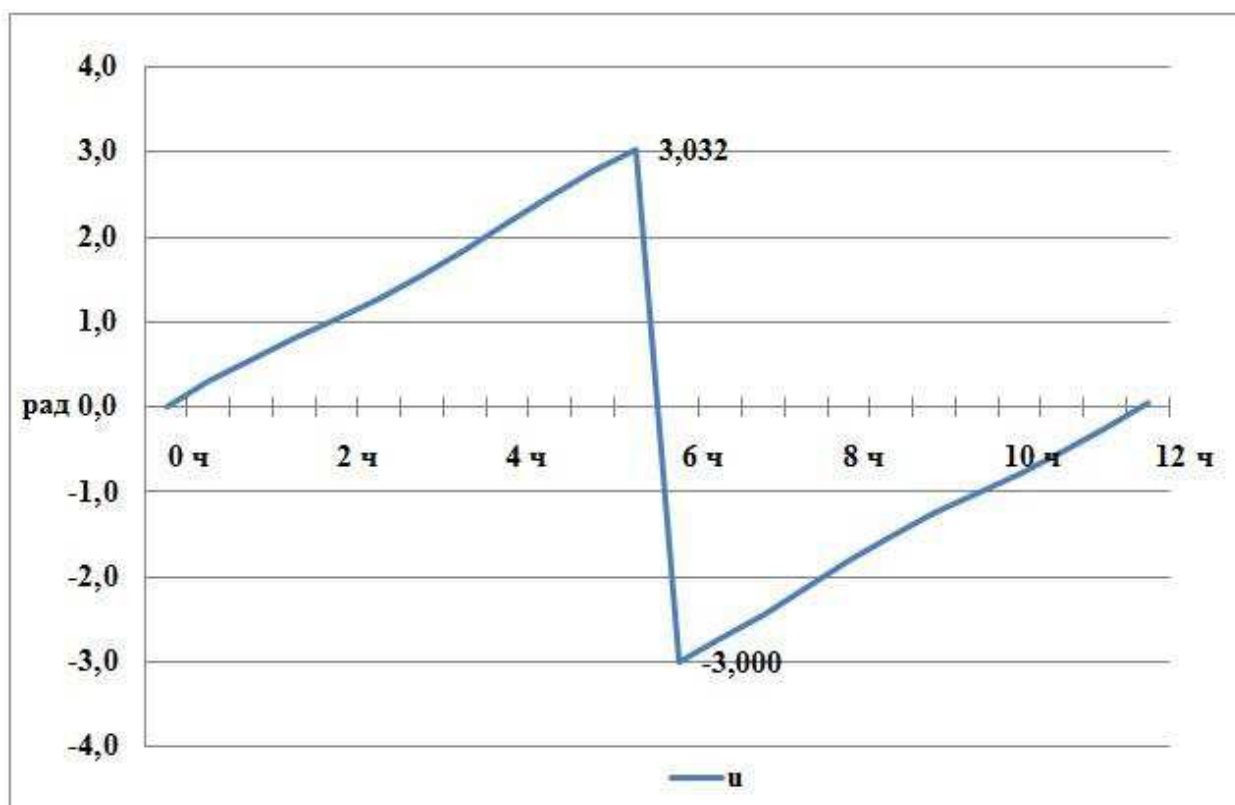


Рисунок 13 – Значение аргумента широты с учетом периодических возмущений по методу Козаи в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 13, минимальное значение аргумента широты с учетом периодических возмущений составляет -3,0 радиан, а максимальное 3,032 радиан.

Построим график значений аргумента широты с учетом вековых возмущений на рисунке 14:

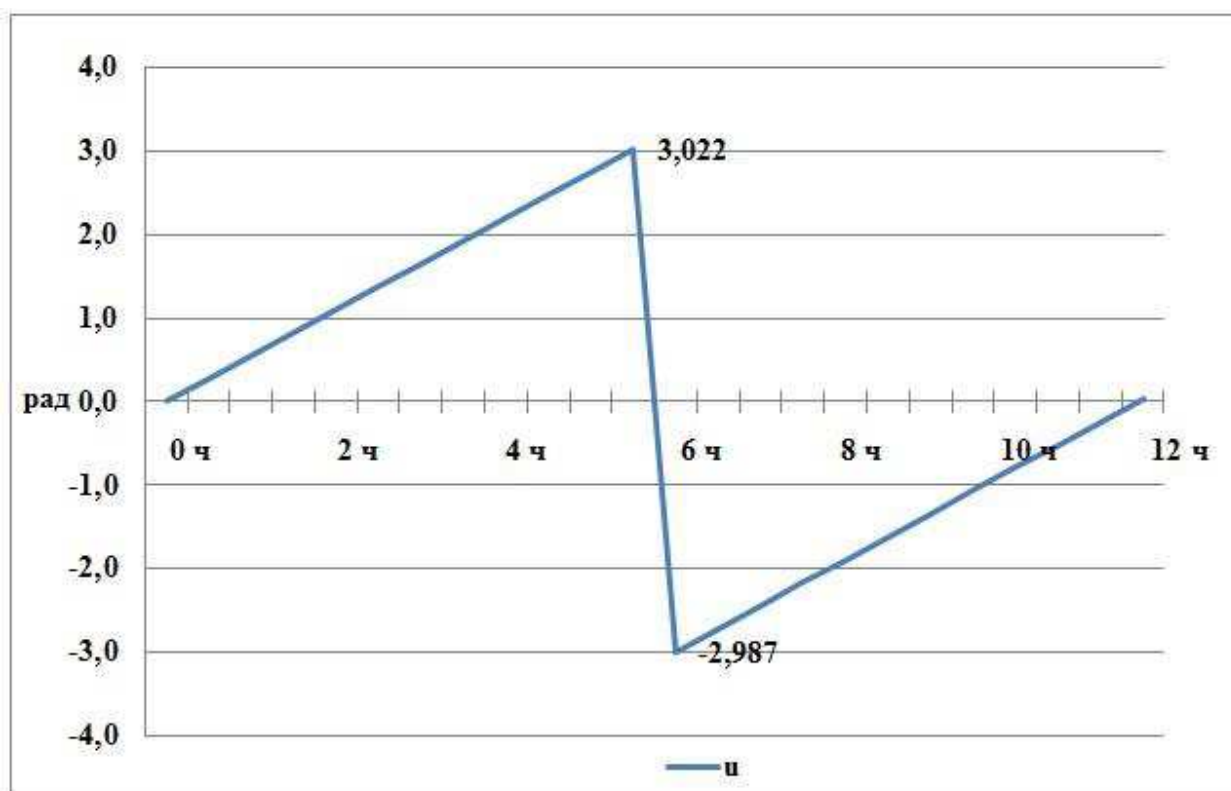


Рисунок 14 – Значение аргумента широты с учетом вековых возмущений по методу Козаи в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 14, минимальное значение аргумента широты с учетом вековых возмущений составляет $-2,987$ радиан, а максимальное $3,022$ радиан.

Построим график значений аргумента широты с учетом суммарных возмущений на рисунке 15:

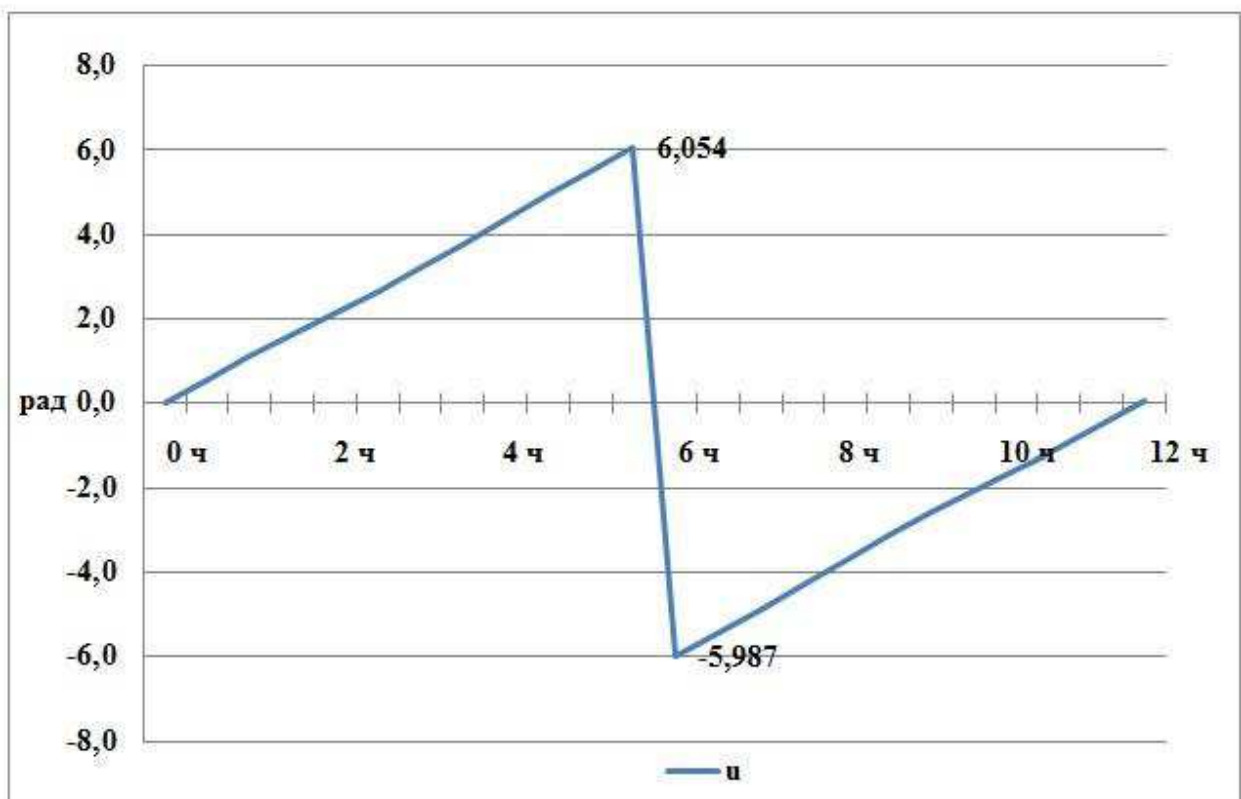


Рисунок 15 – Значение аргумента широты с учетом суммарных возмущений по методу Козаи в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 15, минимальное значение аргумента широты с учетом суммарных возмущений составляет $-5,987$ радиан, а максимальное $6,054$ радиан.

Определим итоговое расхождение по аргументу широты между численной моделью метода Рунге-Кутты и аналитической моделью метода Козаи в поле сжатой Земли на рисунке 16:

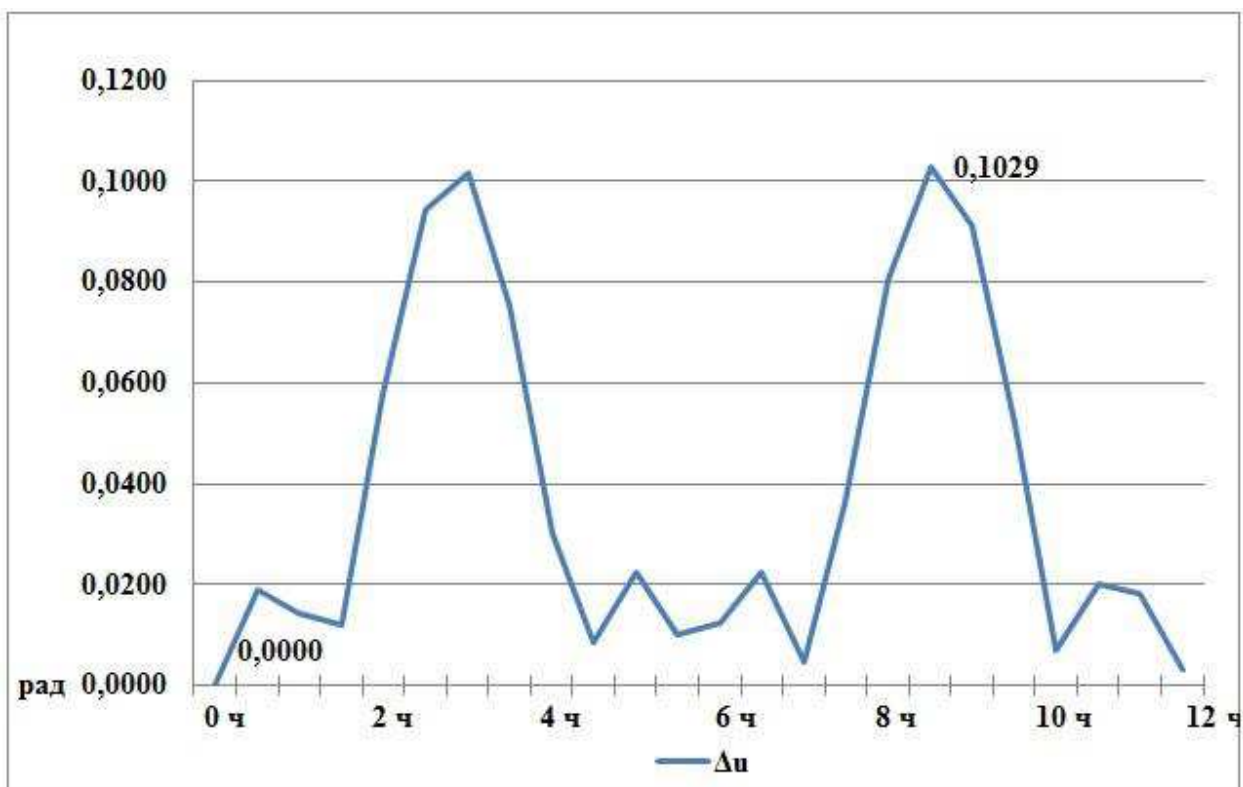


Рисунок 16 – Итоговое расхождение по аргументу широты между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 16, итоговое минимальное расхождение по аргументу широты составляет 0,0 радиан, а максимальное 0,1029 радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение составляет 2652 км.

2.4 Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели, учитывающей возмущения 2-го порядка в поле сжатой Земли

Для оценки методической погрешности теории достаточно найти возмущения 2-го порядка относительно сжатия Земли, так как возмущения от этого фактора являются основными.

При выводе возмущений первого порядка в уравнениях Лагранжа элементы орбиты считаются величинами постоянными. Чтобы найти возмущения в элементах второго порядка, следует повторить решение при учете возмущений первого порядка [9].

2.4.1 Формульное представление аналитической модели, учитывающей возмущения 2-го порядка

Получим выражения для возмущений второго порядка в элементах (2.29 – 2.32):

$$\begin{aligned} \delta_2 a = \{ J^2 \left(\frac{a'}{a} \right)^4 [& \left(\frac{14}{3} \sin^2(i) - 7 \sin^4(i) \right) \cos(2\lambda) + \\ & + \frac{1}{3} \sin^4(i) \cos(4\lambda)] \} \times a, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 \lambda = J^2 \left(\frac{a'}{a} \right)^4 [& \left(\frac{637}{48} \sin^4(i) - \frac{263}{12} \sin^2(i) + 9 \right) nt + \\ & + \left(-\frac{5}{8} \sin^4(i) + \frac{11}{6} \sin^2(i) - \frac{3}{2} \right) \sin(2\lambda) + \\ & + \left(\frac{59}{192} \sin^4(i) - \frac{1}{48} \sin^2(i) + \frac{1}{8} \right) \sin(4\lambda)], \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 e = J^2 \left(\frac{a'}{a} \right)^4 \{ & \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{16} \sin^2(i) - \frac{3}{32} \sin^4(i) \right) \cos(3\lambda + \omega) + \\ & + \left(\frac{1}{4} + \sin^2(i) - \frac{87}{48} \sin^4(i) \right) \cos(\lambda + \omega) + \\ & + \left(5 - \frac{155}{12} \sin^2(i) + \frac{101}{12} \sin^4(i) \right) \cos(\lambda - \omega) - \\ & - \left(\frac{5}{24} - \frac{26}{9} \sin^2(i) + \frac{547}{144} \sin^4(i) \right) \cos(3\lambda - \omega) - \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$-\left(\frac{7}{48}\sin^2(i) - \frac{17}{96}\sin^4(i)\right)\cos(5\lambda - \omega)\}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \delta_2\omega = & J^2\left(\frac{a'}{a}\right)^4 \left\{ \left(5 - \frac{155}{12}\sin^2(i) + \frac{101}{12}\sin^4(i)\right)\sin(\lambda - \omega) - \right. \\ & - \left(\frac{1}{4} + \sin^2(i) - \frac{87}{48}\sin^4(i)\right)\sin(\lambda + \omega) - \\ & - \left(\frac{5}{24} - \frac{26}{9}\sin^2(i) + \frac{547}{144}\sin^4(i)\right)\sin(3\lambda - \omega) - \\ & - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{16}\sin^2(i) - \frac{3}{32}\sin^4(i)\right)\sin(3\lambda + \omega) - \\ & \left. - \left(\frac{7}{48}\sin^2(i) - \frac{17}{96}\sin^4(i)\right)\sin(5\lambda - \omega)\right\}/e. \end{aligned} \quad (2.32)$$

В соответствии с формулой (2.33) δ_2M рассчитывается следующим образом:

$$\delta_2M = \delta\lambda + \delta\omega. \quad (2.33)$$

В численном выражении выражения (2.29 – 2.32) примут вид формул (2.34 – 2.37):

$$\delta_2a = -0,0002\cos(2\lambda) + 0,0001(4\lambda), \quad (2.34)$$

$$\delta_2\lambda = 0,00000004t - 0,002\sin(2\lambda) + 0,0015\sin(4\lambda), \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \delta_2e = & 0,0001\cos(3\lambda + \omega) - 0,0007\cos(\lambda + \omega) + \\ & + 0,0063\cos(\lambda - \omega) - 0,0226\cos(3\lambda - \omega) - \\ & - 0,000003\cos(5\lambda - \omega), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\delta_2\omega = 0,3\sin(\lambda - \omega) - 0,7\sin(\lambda + \omega) - \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
 & -1,86 \sin(3\lambda - \omega) - 0,1 \sin(3\lambda + \omega) - \\
 & -0,003 \sin(5\lambda - \omega).
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Итак, получив необходимые составляющие, мы можем рассчитать аргумент широты и его расхождения по аналитической модели, учитывающей возмущения 2-го порядка.

2.4.2 Характеристика аргумента широты по аналитической модели, учитывающей возмущения 2-го порядка

Для оценки расхождений, определим размах невязки по данному элементу.

Построим график аргумента широты по модели, учитывающей возмущения 2-го порядка на рисунке 17:

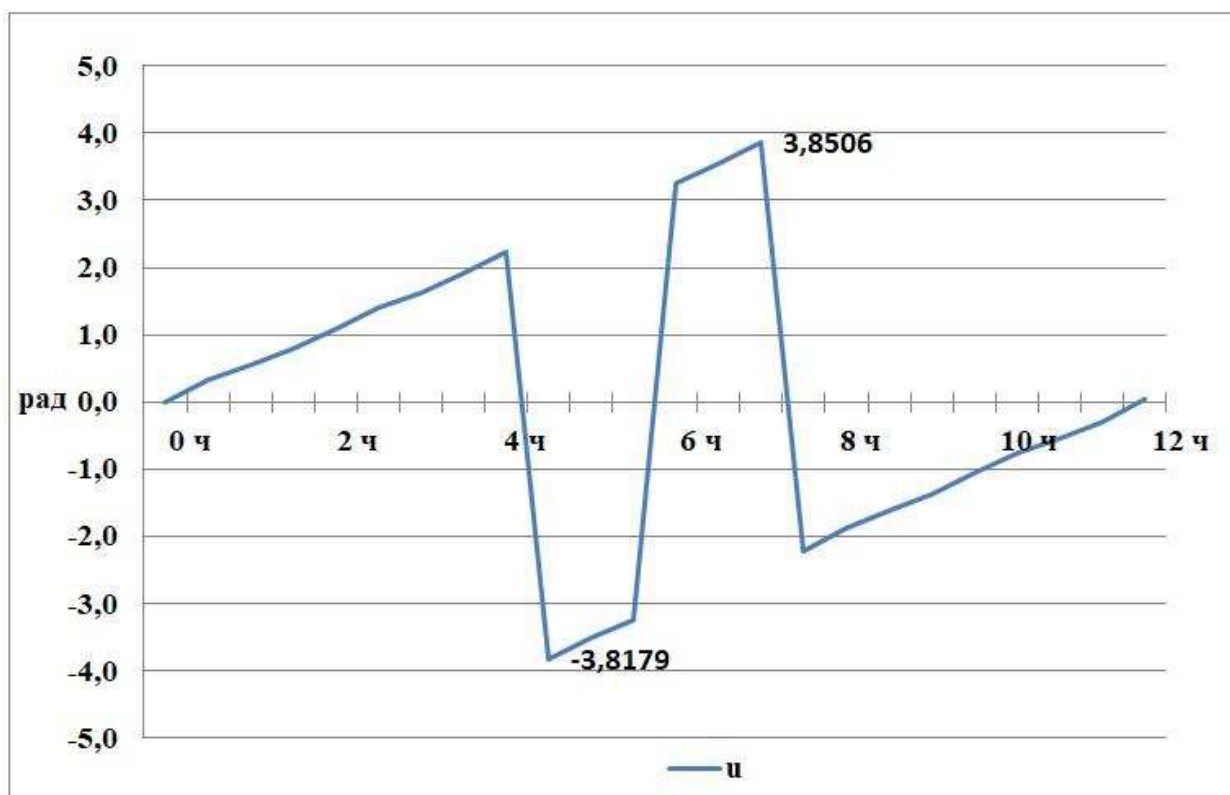


Рисунок 17 – Значение аргумента широты, рассчитанное по модели, учитывающей возмущения 2-го порядка в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 17, минимальное значение аргумента широты составляет $-3,8179$ радиан, а максимальное $3,8506$ радиан.

Определим итоговое расхождение по аргументу широты между численной моделью метода Рунге-Кутты и аналитической моделью, учитывающей возмущения 2-го в поле сжатой Земли на рисунке 18:

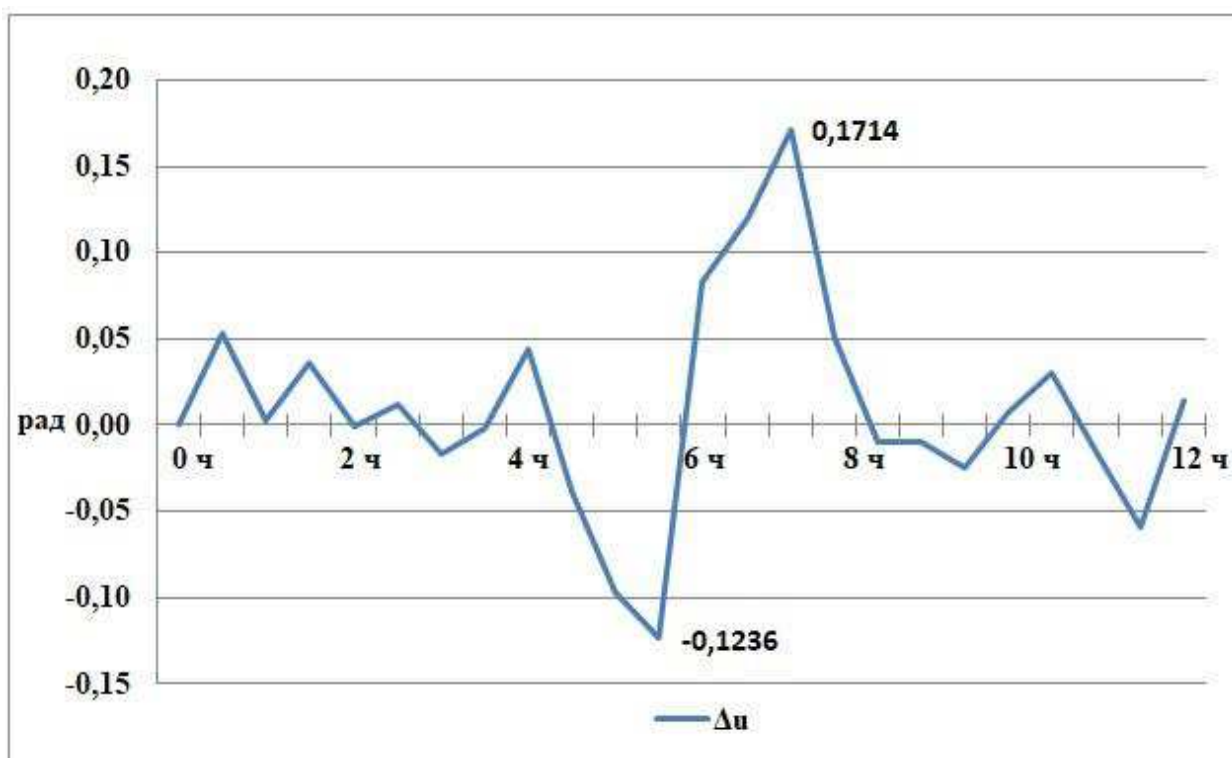


Рисунок 18 – Итоговое расхождение по аргументу широты, между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 18, итоговое минимальное расхождение по аргументу широты составляет $-0,1236$ радиан, а максимальное $0,1714$ радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение составляет 7604 км.

2.5 Определение расхождений по аргументу широты на основе аналитической модели движения в поле сжатой Земли с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений

Периодические возмущения элементов орбиты, рассматриваемые в данной работе, можно разбить на короткопериодические и долгопериодические возмущения.

2.5.1 Формульное представление аналитической модели, с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений

Короткопериодические возмущения возникают за счет собственного движения КА. Каждая гармоника гравитационного поля Земли дает двухпараметрическое семейство короткопериодических возмущений. Параметрами являются p и $q(n - 2p + q \neq 0)$. Основные возмущения, амплитуды которых достигают нескольких километров, вызваны полярным сжатием Земли ($n=2, m=0$). Амплитуды грушевидности Земли ($n=3, m=0$) короткопериодических возмущений от остальных гармоник не превышают нескольких десятков метров [9].

Долгопериодические возмущения возникают за счет прецессии перигея. Каждая нечетная зональная гармоника вызывает возмущения в основном в эксцентриситете и перигее орбиты.

2.5.1.1 Формульное представление аналитической модели, с учетом короткопериодических возмущений

Короткопериодические возмущения, выразим по формулам (2.37- 2.40):

$$\delta a_{\text{кп}} = \frac{2}{na} R, \quad (2.37)$$

$$\delta e_{\text{кп}} = \frac{1 - e^2}{na^2 e} R - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} R, \quad (2.38)$$

$$\delta \omega_{\text{кп}} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} R - \frac{\cos(i)}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin(i)} R, \quad (2.39)$$

$$\delta M_{\text{кп}} = \frac{1 - e^2}{na^2 e} R - \frac{2}{na} R, \quad (2.40)$$

где R – пертурбационная функция, определяемая формулой (2.41):

$$R = \mu \frac{a'^2}{a^3} J \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2(i) + \frac{1}{2} \sin^2(i) \cos 2(\theta + \omega) \right]. \quad (2.41)$$

Данная пертурбационная функция содержит периодическую и вековую части.

2.5.1.2 Формульное представление аналитической модели, с учетом долгопериодических возмущений

Долгопериодические возмущения, выразим по формулам (2.42 – 2.45):

$$\delta a_{\text{дп}} = 0, \quad (2.42)$$

$$\delta e_{\text{дп}} = -\frac{C_{30}}{2C_{20}} \frac{a'}{a} \sin(i) \sin(\omega), \quad (2.43)$$

$$\delta \omega_{\text{дп}} = -\frac{C_{30}}{e2C_{20}} \frac{a'}{a} \sin(i) \cos(\omega), \quad (2.44)$$

$$\delta M_{\text{дп}} = \frac{C_{30}}{4C_{20}} \frac{a'}{a} - \frac{5 \cos^2(i) - 3}{\sin(i)} e \cos(\omega) - \delta\omega, \quad (2.45)$$

где C_{20} – гравитационный параметр, учитывающий поле сжатия Земли,
 C_{30} – зональная сферическая функция, отражающая отсутствие симметрии относительно экватора.

Гравитационные параметры C_{20} и C_{30} имеют следующие значения:

$$C_{20} = -1082.3 \cdot 10^{-6},$$

$$C_{30} = 2.3 \cdot 10^{-6}.$$

2.5.2 Формульное представление аналитической модели, с учетом вековых возмущений

Вековые расхождения в элементах $\delta\omega_{\text{век}}$, $\delta M_{\text{век}}$ рассчитаем по формулам (2.46 – 2.47):

$$\delta\omega_{\text{век}} = \frac{3}{4} C_{20} n \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{1 - 5 \cos^2(i)}{(1 - e^2)^2}, \quad (2.46)$$

$$\delta M_{\text{век}} = n + \frac{3}{4} C_{20} n \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{1 - 3 \cos^2(i)}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.47)$$

2.5.3 Характеристика аргумента широты по аналитической модели, с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений

Для оценки расхождений, определим размах невязки по данному элементу.

Построим график значений аргумента широты с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений на рисунке 19:

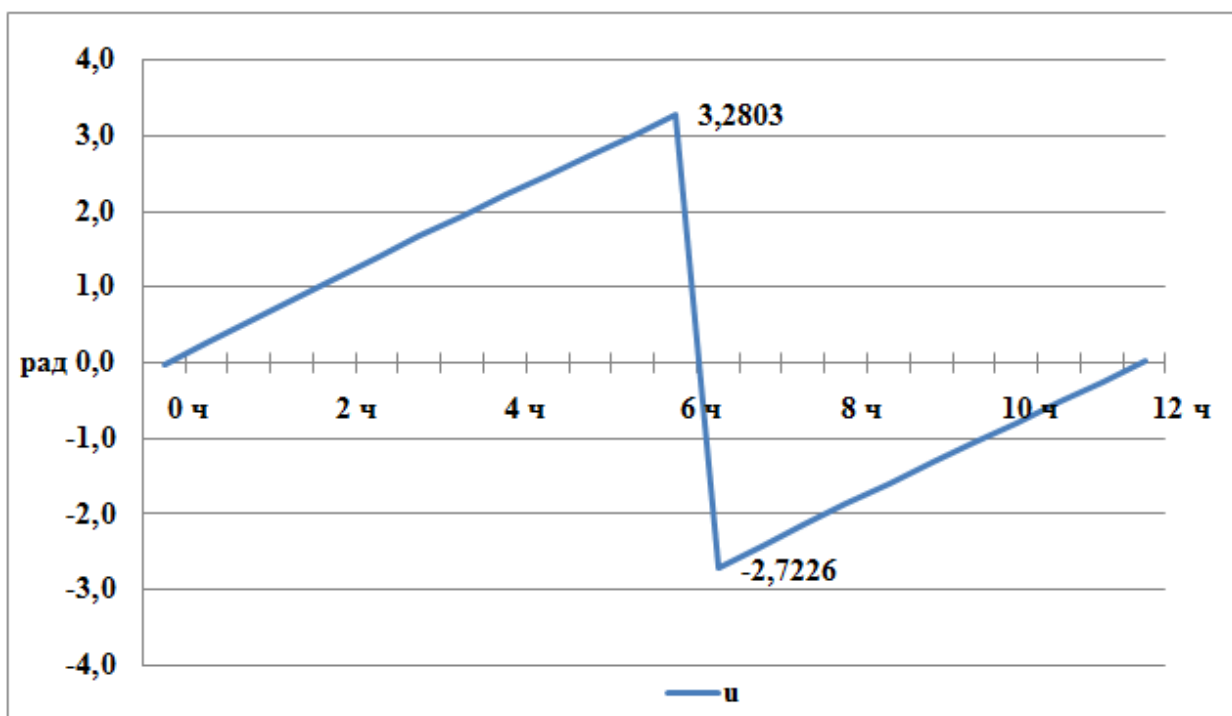


Рисунок 19 – Значение аргумента широты с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 19, минимальное значение аргумента широты с учетом периодических возмущений составляет $-2,7226$ радиан, а максимальное $3,2803$ радиан.

Построим график значений аргумента широты с учетом вековых возмущений на рисунке 20:

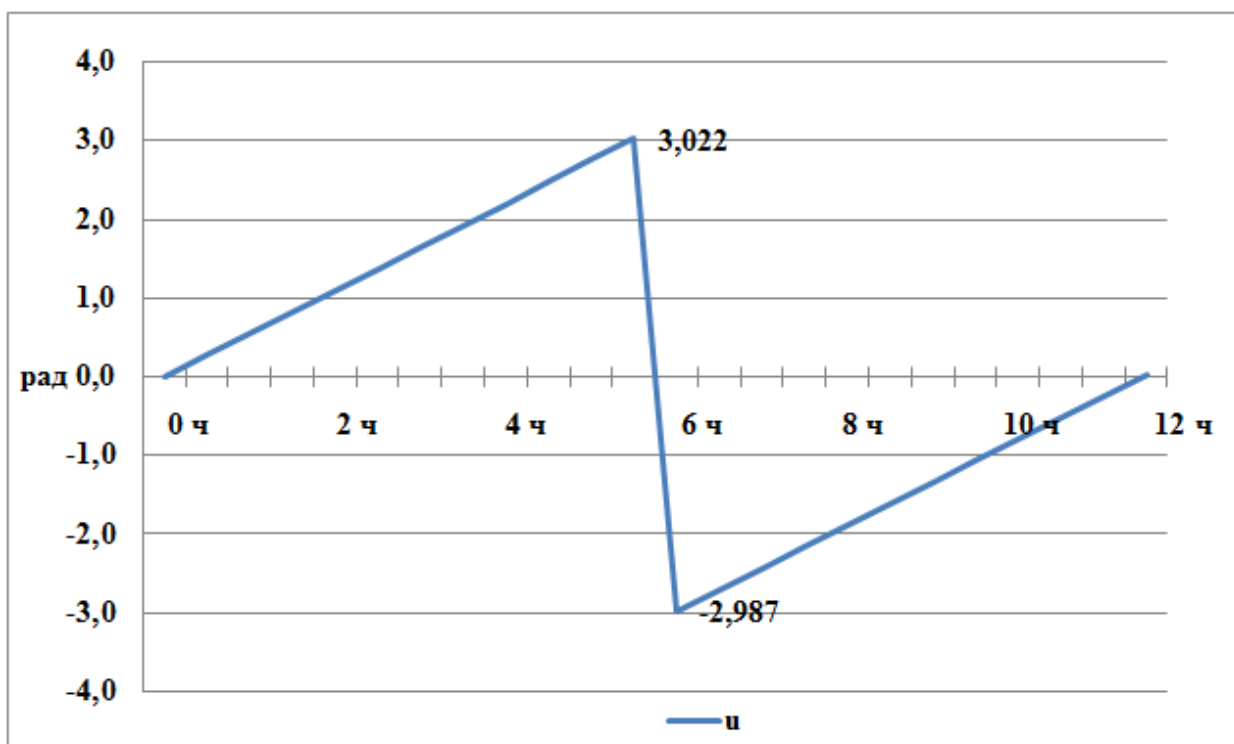


Рисунок 20 – Значение аргумента широты с учетом вековых возмущений в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 20, минимальное значение аргумента широты с учетом вековых возмущений составляет -2,987 радиан, а максимальное 3,022 радиан.

Построим график значений аргумента широты с учетом суммарных возмущений на рисунке 21:

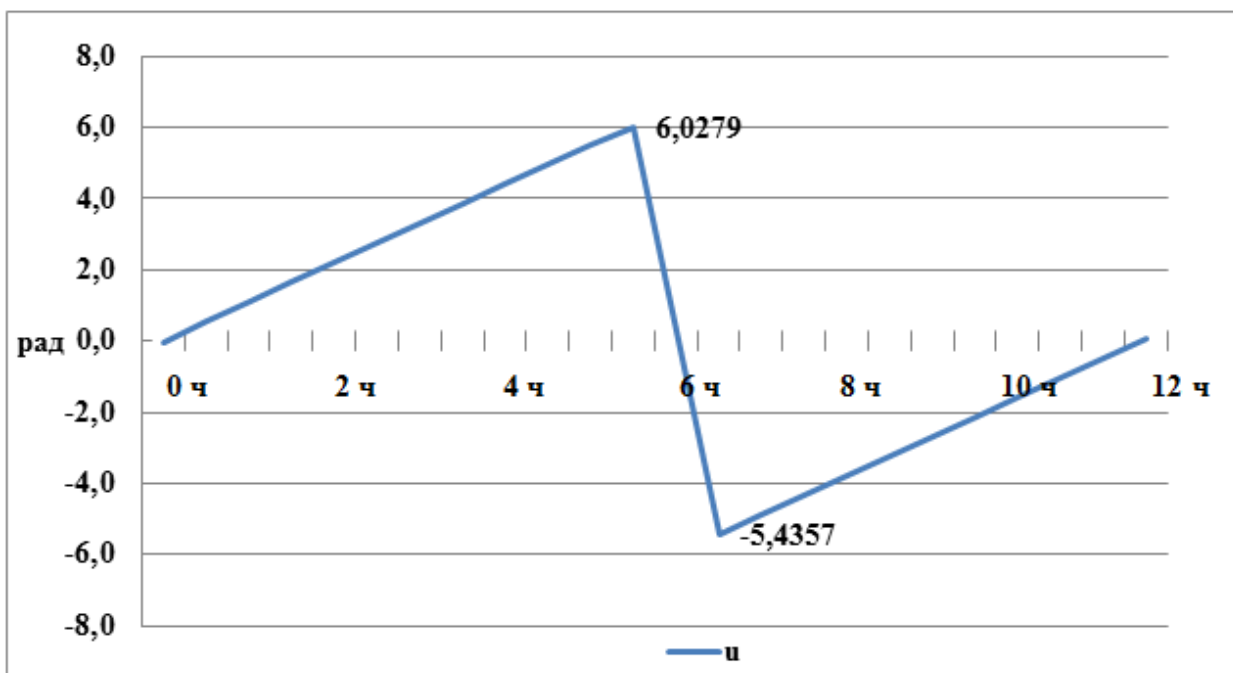


Рисунок 21 – Значение аргумента широты с суммарных возмущений в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 21, минимальное значение аргумента широты с учетом суммарных возмущений составляет $-5,4357$ радиан, а максимальное $6,0279$ радиан.

Определим итоговое расхождение по аргументу широты между численной моделью метода Рунге-Кутты и аналитической моделью, учитывающей короткопериодические и долгопериодические возмущения в поле сжатой Земли на рисунке 22:

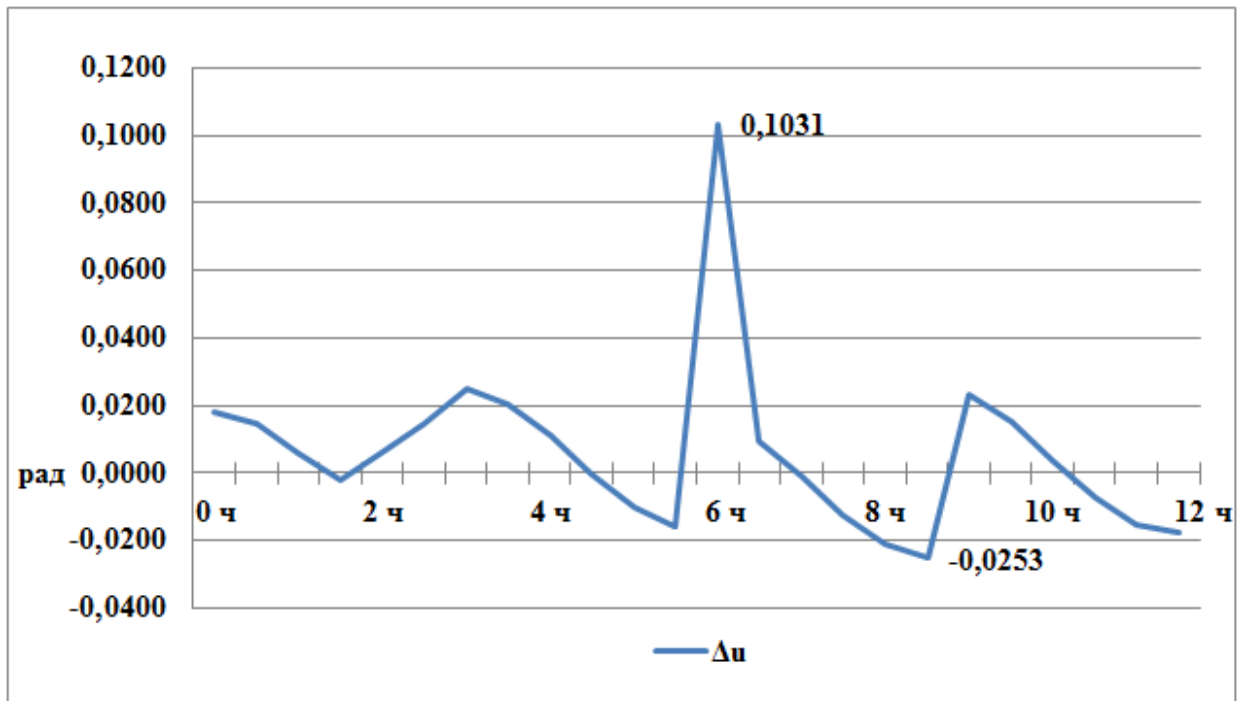


Рисунок 22 – Итоговое расхождение по аргументу широты между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 22, итоговое минимальное расхождение по аргументу широты в поле сжатой Земли составляет -0,0253 радиан, а максимальное 0,1031 радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что общее оценочное расхождение в аргументе широты составляет 3308 км.

2.5.4 Характеристика аргумента широты в аналитической модели, с учетом короткопериодических и долгопериодических возмущений, после преобразования уравнений Лагранжа

В случае орбит с малыми эксцентриситетами для удобства вычисления преобразуем уравнения Лагранжа, введя новые элементы по формулам (2.48 - 2.50):

$$l = e \cos(\omega), \tag{2.48}$$

$$h = e \sin(\omega), \quad (2.49)$$

$$\lambda = M + \omega. \quad (2.50)$$

Применив данные формулы к аналитической модели движения КА, учитывающей короткопериодические и долгопериодические возмущения, получим следующие расхождения в элементах l, h, λ , характеризующих аргумент широты, отображенные на рисунках 23-25:

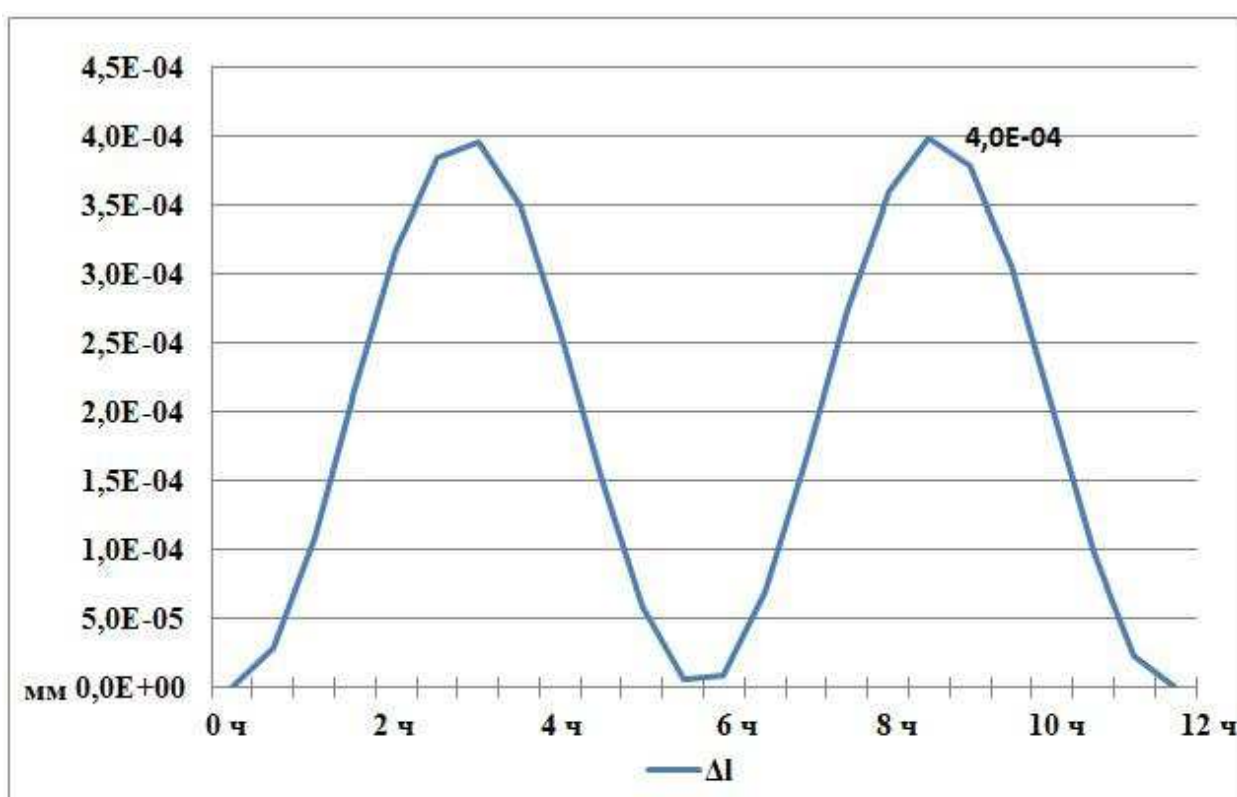


Рисунок 23 – Расхождение в элементе l

Как следует из результата моделирования, отображенном на рисунке 23, расхождение в элементе l составляет 0,0004 мм.

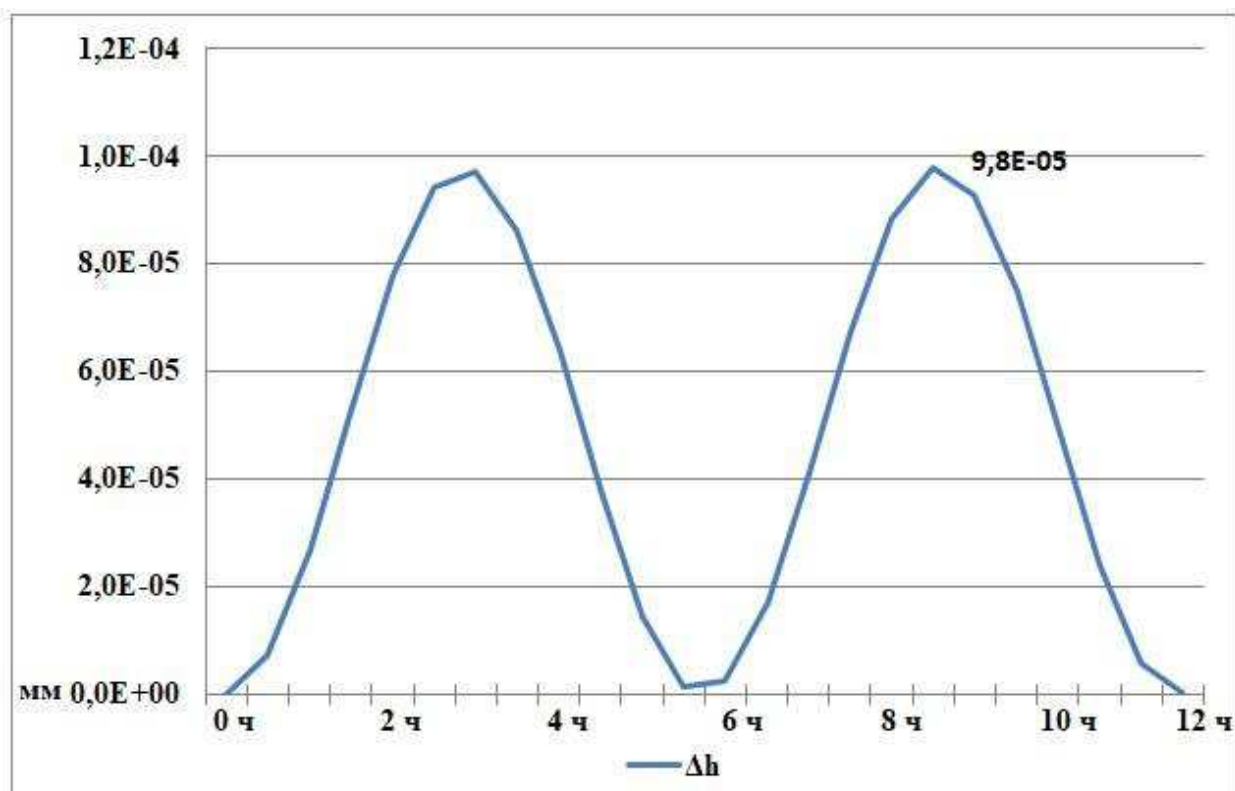


Рисунок 24 – Расхождение в элементе h

Как видно из рисунка 24, расхождение в элементе h составляет 0,000098 мм.

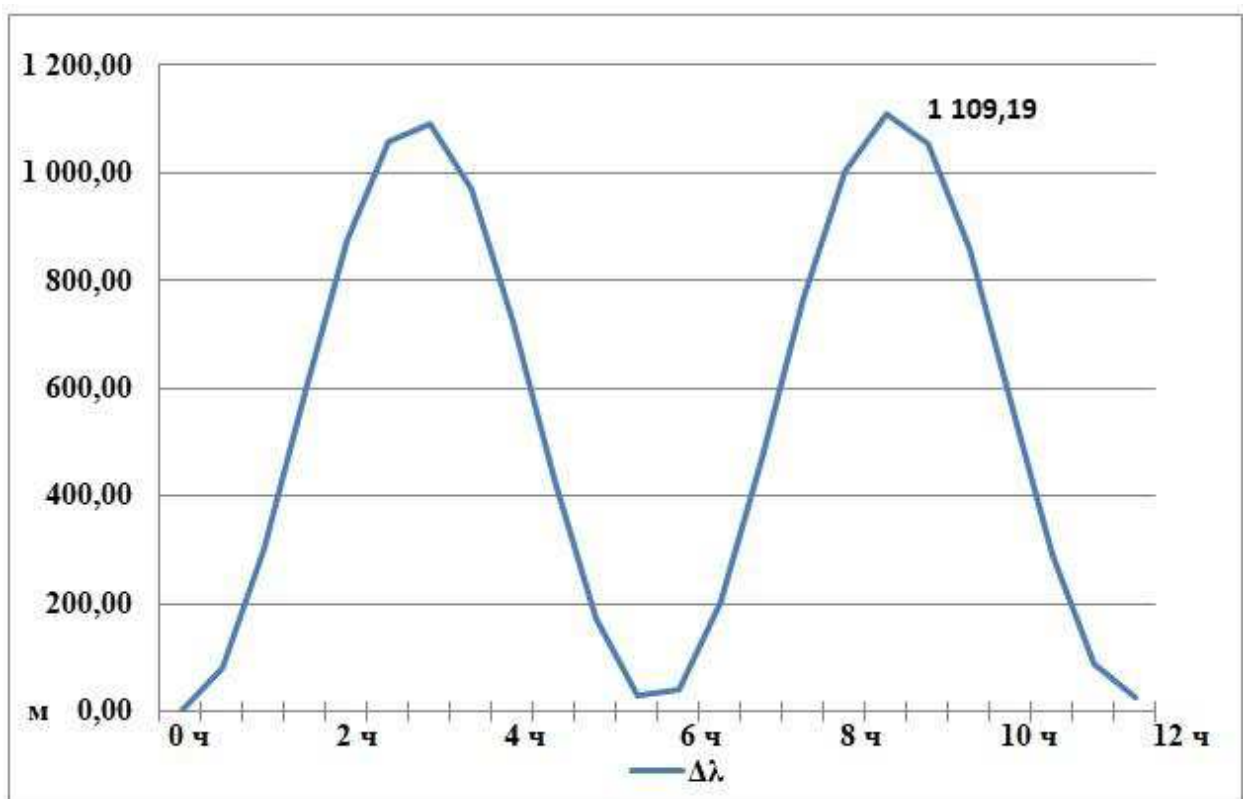


Рисунок 25 – Расхождение в элементе λ

Как видно из рисунка 25, расхождение в элементе λ составляет 1109,19 м. Заметим, что наибольшее расхождение у нас содержится в элементах аргумента перигея и средней аномалии.

В соответствии с исследованиями доктора технических наук Б.И. Сухих [11], при выводе формул для периодических возмущений отклонения в оскулирующих элементах ω и M для почти круговых орбит крайне массивные. В связи с этим, создание аналитической теории с использованием данных элементов считается невозможным. Как следует из результата проведенного моделирования по замене оскулирующих элементов ω и M на элементы l, h, λ , оскулирующие элементы продолжают оказывать наибольшее воздействие на параметр аргумента широты. Следовательно, произведенная замена улучшает сходимость в элементе орбиты отчасти.

2.5.5 Вывод по аналитической модели движения в поле сжатой Земли с коротко- и долгопериодическими возмущениями с учетом измененных уравнений Лагранжа

Выполнив преобразования над оскулирующими элементами по методу Лагранжа можно заключить, что итоговые результаты расхождений между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли указывают на повышение точности аналитической модели. Однако, условие по повышению точности для элементов ω и M при почти круговых орбитах, не выполняется.

Исследование Б.И. Сухих [11] о невозможности создания удобных формул для практического применения в расчете периодических возмущений элементов подтвердилось. Дальнейшее уточнение элементов орбиты возможно только за счет построения аналитической модели с использованием средних значений элементов.

2.6 Вывод по второй главе

Самым точным из аналитических методов, определяющих аргумент широты, из уже существующих является метод построения орбиты Проскурина-Батракова.

Наиболее полной аналитической моделью, которую можно применять в пределах солнечной системы, а не только для Земли, является модель по методу Козаи.

В случае преобразования уравнений Лагранжа, достичь итоговых результатов, сходимость по которым с численной моделью будет удовлетворительной, на сегодняшний день считается невозможным.

3 Создание методики определения аргумента широты в аналитической форме представления в поле сжатой Земли

С учетом того, что аналитическая модель по методу Козаи применима в солнечной системе, и она признана наиболее полной, логично использовать ее при аналитическом подходе описания аргумента широты в поле сжатой Земли.

Разрабатываемую аналитическую модель движения КА в поле сжатой Земли для выражения аргумента широты предлагается описать с помощью гармоник, содержащихся в методе Козаи.

При учете возмущающих гармоник с индексом «20» для определения аргумента широты необходимо учесть возмущения в элементе большой полуоси, элементе эксцентриситета, элементе средней аномалии и в аргументе перицентра.

3.1 Определение возмущений в элементе большой полуоси

Для создания аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли составим систему условных уравнений по формуле (3.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_2 a = a_0 + \delta_{21} a \times \cos(2\lambda) + \frac{\delta_{22} \dot{a} \times \Delta t^2}{2} \\ \delta_2 e = e_0 + \delta_{21} e \times \cos(2\lambda) + \delta_{22} e^{-1} \times \frac{\sin^2(i) a'^2}{2ap} J \cos(2\lambda) \\ \delta_2 M = M_0 + \delta_{21} M \times \sin(\theta) + \delta_{22} \omega \times \sin(\theta + 2\omega) + \\ \quad + \delta_{23} \omega \times \sin(3\theta + 2\omega) \\ \delta_2 \omega = \delta_{21} \omega \times \sin(\theta - M) + \delta_{22} \omega \times \sin(\theta) + \delta_{23} \omega \times \sin(2\theta) + \\ \quad + \delta_{24} \omega \times \sin(\theta + 2\omega) + \delta_{25} \omega \times \sin(2\lambda) + \\ \quad + \delta_{26} \omega \times \sin(3\theta + 2\omega) + \delta_{27} \omega \times \sin(4\theta + 2\omega) \end{array} \right. . \quad (3.1)$$

Определим по каждому уравнению системы возмущение по соответствующему элементу.

Запишем уравнения возмущений для элемента большой полуоси по формуле (3.2):

$$\delta_2 a = a_0 + \delta_{21} a \cos(2\lambda) + \frac{\delta_{22} \dot{a} \times \Delta t^2}{2}. \quad (3.2)$$

Теперь, используя уравнение (3.2), составим систему нормальных уравнений. Для этого, сначала, домножим все члены уравнения на коэффициент при первом неизвестном элементе a_0 , используя формулу (3.3):

$$\begin{aligned} [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] &= N \times a_0 + \\ + [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \delta_{21} a + \\ + \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Домножим все члены уравнения на коэффициент при втором неизвестном элементе $\delta_{21} a$, используя формулу (3.4):

$$\begin{aligned} [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] &= \\ = [1_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + 1_n \times \cos_n(2\lambda_n)] \times a_0 + \\ + [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] \times \delta_{21} a + \\ + \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times \cos_n(2\lambda_n) \right] \times \delta_{22} \dot{a}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Домножим все члены уравнения на коэффициент при третьем неизвестном элементе $\delta_{22} \dot{a}$, используя формулу (3.5):

$$\begin{aligned}
& [\delta_2 a_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \delta_n a_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] = \\
& = [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times a_0 + \\
& + [\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \delta_{21} a + \\
& + [\frac{\Delta t_1^2}{2} \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \delta_{22} \dot{a}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Данные уравнения, описанные по формулам (3.3 – 3.5), совместно представляют собой систему нормальных уравнений. Для решения данной системы нормальных уравнений воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК).

Чтобы решить систему нормальных уравнений с помощью метода МНК, для начала выразим a_0 из формулы (3.3) по формулам (3.6 – 3.7):

$$\begin{aligned}
N \times a_0 & = [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \delta_{21} a - \\
& - [\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n] \times \delta_{22} \dot{a}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
a_0 & = \{[\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \delta_{21} a - \\
& - [\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n] \times \delta_{22} \dot{a}\} / N.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Теперь, выразим $\delta_{21} a$ из формулы (3.4) по формуле (3.8):

$$\begin{aligned}
& [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] \times \delta_{21} a = \\
& = [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times a_0 -
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$-\left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n\right] \times \delta_{22} \dot{a}. \quad (3.8)$$

Подставим значение a_0 из формулы (3.7) в формулу (3.9):

$$\begin{aligned} & [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] \times \delta_{21} a = \\ & [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times \{[\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \delta_{21} a - \\ & - \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n\right] \times \delta_{22} \dot{a}\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Продолжим выражение $\delta_{21} a$ по формулам (3.10 – 3.13):

$$\begin{aligned} & [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] \times \delta_{21} a = \\ & = [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\ & + [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \delta_{21} a \\ & + [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n\right] \times \delta_{22} \dot{a}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] \times \delta_{21} a - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \delta_{21} a = \\ & = [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
& \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\
& + [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{21} a \times \{ [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \} = \\
& = [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\
& + [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{21} a = \{ [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\
& + [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a} \} \div \\
& \div \{ [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Теперь, выразим $\delta_{22} \dot{a}$ из формулы (3.5) по формуле (3.14):

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \delta_{22} \dot{a} = \\
& = \left[\delta_2 a_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \delta_n a_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] - \\
& - \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times a_0 - \\
& - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \delta_{21} a.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Подставим значение a_0 из формулы (3.7) и значение $\delta_{21} a$ из формулы (3.13) в формулу (3.15):

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \delta_{22} \dot{a} = \\
& = \left[\delta_2 a_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \delta_n a_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] - \\
& - \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \\
& \{ [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \delta_{21} a - \\
& - \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a} \} - \\
& - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \\
& \times \{ [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\
& + [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\
& \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a} \} \div \\
& \div \{ [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\
& - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \quad (3.15)$$

Продолжим выражение $\delta_{22}\dot{a}$ по формуле (3.16):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \delta_{22}\dot{a} = \\ & = [\delta_2 a_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \delta_n a_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] - \\ & - [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\ & + \{ [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\ & + [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22}\dot{a} \} \div \\ & \div \{ [\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \} + \\ & + [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a} - \\
& - \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \left. \left[\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n) \right] + \right. \\
& \left. + \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n \right] - \right. \\
& \left. - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \times \delta_{22} \dot{a} \right\} \div \\
& \div \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n) \right] - \right. \\
& \left. - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Переносим члены уравнения с $\delta_{22} \dot{a}$ в левую часть и выносим за скобки по формуле (3.17):

$$\begin{aligned}
& \delta_{22} \dot{a} \times \left\{ \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] - \right. \\
& \left. - \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] - \right. \\
& \left. - \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \cdots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] - \\
& - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \cdots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \} = \\
& = \left[\delta_2 a_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \cdots + \delta_n a_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] - \\
& - \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \cdots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \left[\delta_2 a_1 \times 1_1 + \cdots + \delta_n a_n \times 1_n \right] + \\
& + \left\{ \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \cdots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left[\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \cdots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n) \right] - \\
& - \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \cdots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left. \left[\delta_2 a_1 \times 1_1 + \cdots + \delta_n a_n \times 1_n \right] \right\} \div \\
& \div \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n) \right] - \right. \\
& - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left. \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \right\} - \\
& - \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \left. \left[\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \cdots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n) \right] + \right. \\
& + \left. \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \times \left. \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \right. \\
& \times \left. \left. \left[\delta_2 a_1 \times 1_1 + \cdots + \delta_n a_n \times 1_n \right] \right\} \div \\
& \div \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n) \right] - \right. \\
& - \left. \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \cdots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \right.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n]\}. \quad (3.17)$$

Окончательно выразим элемент $\delta_{22}\dot{a}$ по формуле (3.18):

$$\begin{aligned} \delta_{22}\dot{a} = & \{[\delta_2 a_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \delta_n a_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] - \\ & - [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n] + \\ & + \{[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n]\} \div \\ & \div \{[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n]\} - \\ & - \{[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \\ & [\delta_2 a_1 \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \delta_n a_n \times \cos_n(2\lambda_n)] + \\ & + [\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2}] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\delta_2 a_1 \times 1_1 + \dots + \delta_n a_n \times 1_n]\} \div \\ & \div \{[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n)] - \\ & - [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n] \times \\ & \times [\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n]\} \} \div \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
& \div \left\{ \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] - \right. \\
& - \left\{ \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left. \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \right\} \div \\
& \div \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n) \right] - \right. \\
& - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \left. \right\} - \\
& - \left\{ \left[1_1 \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + 1_n \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \right\} \div \\
& \div \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n) \right] - \right. \\
& - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \left. \right\} - \\
& - \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \frac{\Delta t_1^2}{2} + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \frac{\Delta t_n^2}{2} \right] \times \right. \\
& \times \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left. \left[\frac{\Delta t_1^2}{2} \times 1_1 + \dots + \frac{\Delta t_n^2}{2} \times 1_n \right] \right\} \div \\
& \div \left\{ \left[\cos_1(2\lambda_1) \times \cos_1(2\lambda_1) + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times \cos_n(2\lambda_n) \right] - \right. \\
& - \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \times \\
& \times \left. \left[\cos_1(2\lambda_1) \times 1_1 + \dots + \cos_n(2\lambda_n) \times 1_n \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Подставив элементы орбиты в выражения (3.6, 3.12, 3.18), получим следующие значения неизвестных:

$$a_0 = 684,829 \text{ м.}$$

$$\delta_{21}a = -19,161 \text{ м.}$$

$$\delta_{22}a = 0,0000000018 \text{ м.}$$

Определив по формуле (3.2) значение $\delta_2 a$, отобразим на рисунке 26 график его изменения:

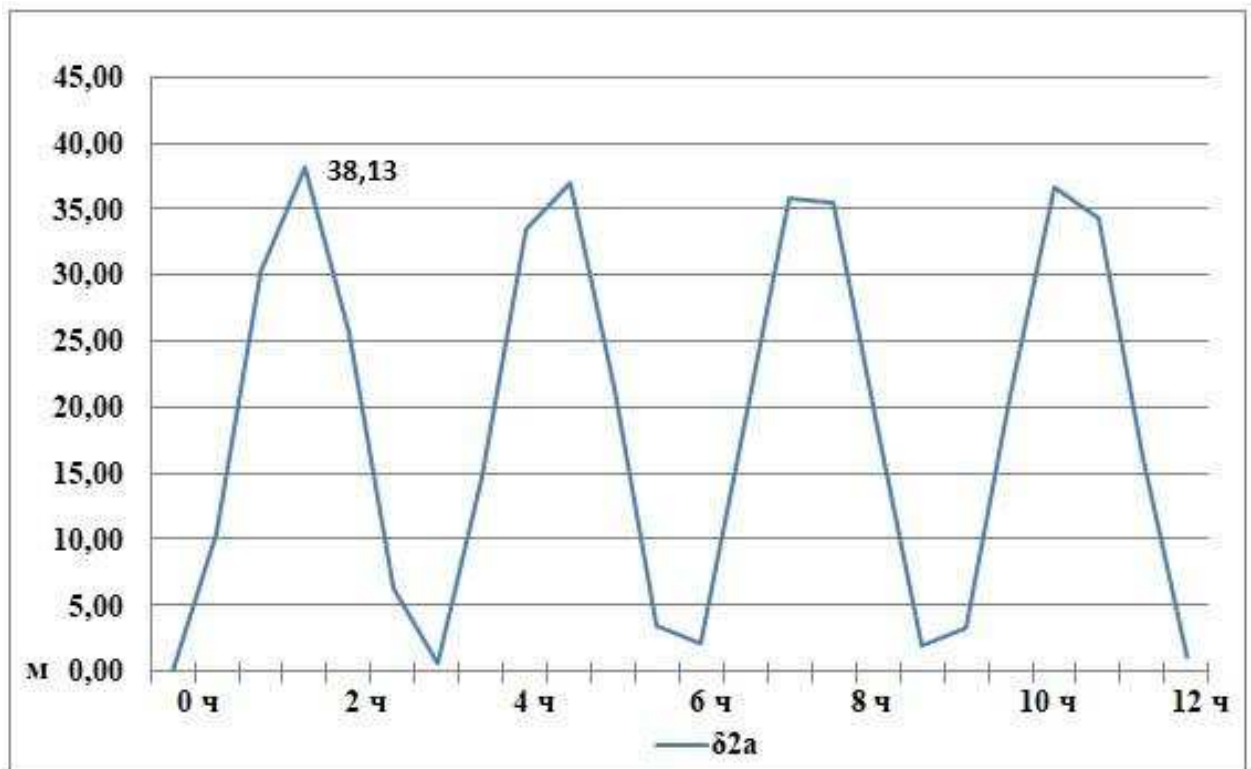


Рисунок 26 – Возмущения в элементе большой полуоси

Как видно из рисунка 26, возмущение в элементе большой полуоси в аналитической форме представления в поле сжатой Земли составляет 38,13 м.

Теперь, определив возмущения в элементе большой полуоси, мы можем рассчитать итоговое значение данного элемента по формуле (3.19):

$$a_{AH} = a_K + \delta_2 a. \quad (3.19)$$

Используя данную формулу (3.19), мы определим итоговый элемент большой полуоси, просчитываемый в предлагаемой аналитической модели. С помощью данного элемента в дальнейшем можно определить аргумент широты в создаваемой аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли.

Преобразовав выражение (3.2) и выразив неизвестные элементы, мы можем аналогичным образом определить значения возмущений в прочих элементах.

3.2 Определение возмущений в элементе эксцентриситета

Определим из формулы (3.1) возмущения в элементе эксцентриситета, которые будут соответствовать формуле (3.20):

$$\delta_2 e = e_0 + \delta_{21} e \times \cos(2\lambda) + \delta_{22} e^{-1} \times \frac{\sin^2(i) a'^2}{2ap} J \cos(2\lambda). \quad (3.20)$$

Аналогично определению возмущений элемента большой полуоси, находим возмущения в элементе эксцентриситета.

Получим следующие значения неизвестных:

$$e_0 = 0,0276207838354109$$

$$\delta_{21} e = -0,0012979501696328$$

$$\delta_{22} e = 0,0339920429784455$$

Определив по формуле (3.20) значение $\delta_2 e$, отобразим на рисунке 27 график его изменения:

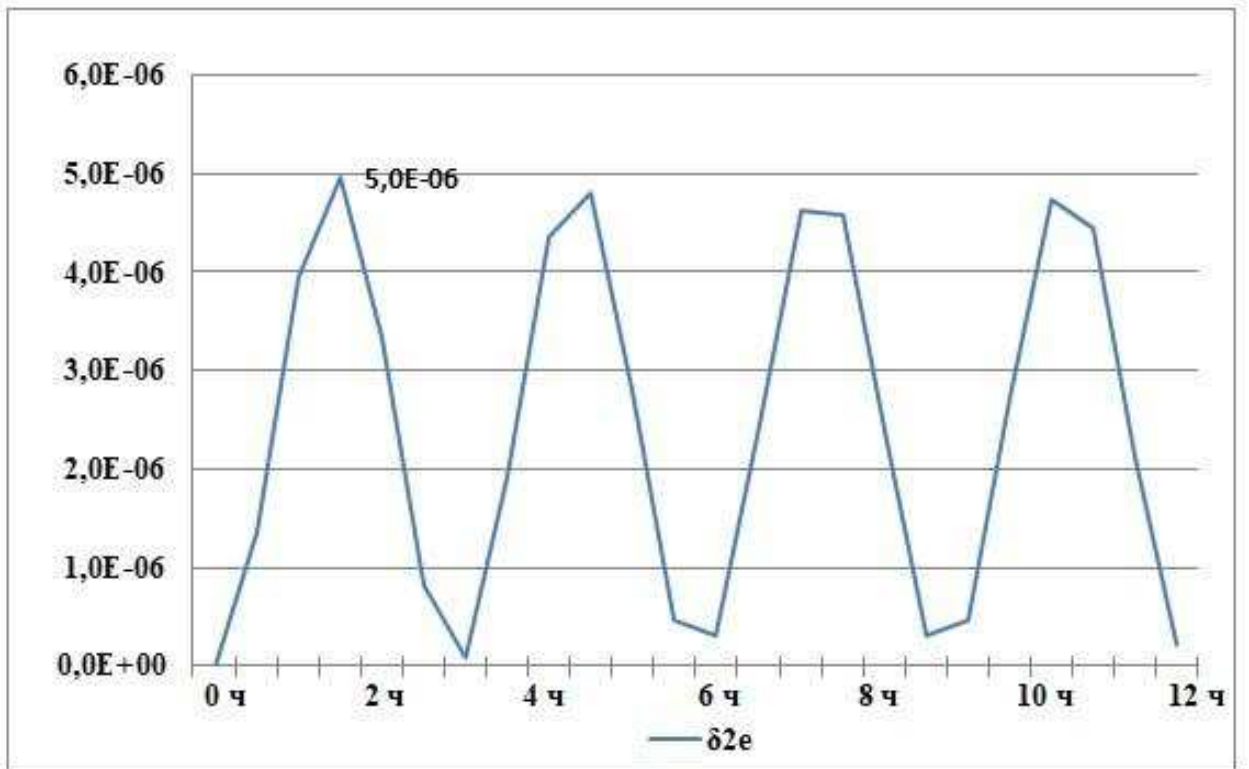


Рисунок 27 – Возмущения в элементе $\delta_2 e$

Как видно из рисунка 27, возмущение в элементе эксцентриситета в аналитической форме представления в поле сжатой Земли составляет 0,000005 единиц.

Теперь, определив возмущения в элементе эксцентриситета, мы можем рассчитать итоговое значение данного элемента по формуле (3.21):

$$e_{\text{Ан}} = e_{\text{К}} + \delta_2 e. \quad (3.21)$$

Используя данную формулу (3.21), мы определим итоговый элемент эксцентриситета, просчитываемый в предлагаемой аналитической модели. С помощью данного элемента в дальнейшем можно определить аргумент широты в создаваемой аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли.

3.3 Определение возмущений в элементе средней аномалии

Определим из формулы (3.1) возмущения в элементе эксцентриситета, которые будут соответствовать формуле (3.22):

$$\begin{aligned} \delta_2 M = M_0 + \delta_{21} M \times \sin(\theta) + \delta_{22} \omega \times \sin(\theta + 2\omega) + \\ + \delta_{23} \omega \times \sin(3\theta + 2\omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогично ранее определенным возмущениям, находим возмущения в элементе средней аномалии.

Получим следующие значения неизвестных:

$$M_0 = 1,49225613802082$$

$$\delta_{21} M = 0,21601243046079$$

$$\delta_{22} M = -0,486646341709492$$

$$\delta_{23} M = -0,731804935044524$$

Определив по формуле (3.22) значение возмущений в элементе средней аномалии, отобразим на рисунке 28 график изменения данных возмущений:

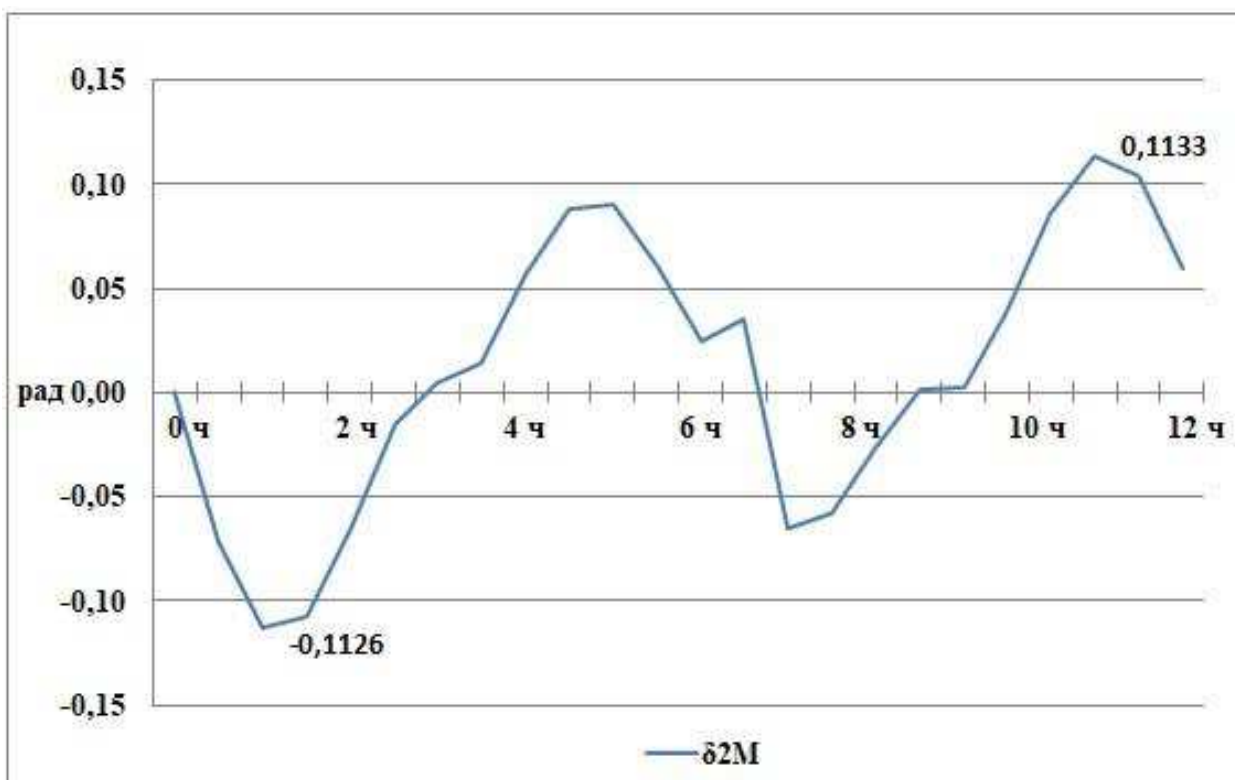


Рисунок 28 – Возмущения в элементе $\delta_2 M$

Как видно из рисунка 28, минимальное возмущение в элементе средней аномалии в аналитической форме представления в поле сжатой Земли составляет -0,1126 радиан, а максимальное 0,1133 радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что оценочное возмущение в элементе средней аномалии составляет 5821,66 км.

Теперь, определив возмущения в элементе средней аномалии, мы можем рассчитать итоговое значение данного элемента по формуле (3.23):

$$M_{\text{Ан}} = M_{\text{К}} + \delta_2 M. \quad (3.23)$$

Используя данную формулу (3.23) мы определим итоговый элемент средней аномалии, просчитываемый в предлагаемой аналитической модели. С помощью данного элемента в дальнейшем можно определить аргумент широты в создаваемой аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли.

3.4 Определение возмущений в аргументе перицентра

Определим из формулы (3.1) возмущения в элементе аргумента перицентра, которые будут соответствовать формуле (3.24):

$$\begin{aligned} \delta_2 \omega = & \delta_{21} \omega \times \sin(\theta - M) + \delta_{22} \omega \times \sin(\theta) + \delta_{23} \omega \times \sin(2\theta) + \\ & + \delta_{24} \omega \times \sin(\theta + 2\omega) + \delta_{25} \omega \times \sin(2\lambda) + \\ & + \delta_{26} \omega \times \sin(3\theta + 2\omega) + \delta_{27} \omega \times \sin(4\theta + 2\omega). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Аналогично ранее определенным возмущениям, находим возмущения в элементе аргумента перицентра.

Получим следующие значения неизвестных:

$$\delta_{21} \omega = -0,45981861639697$$

$$\delta_{22} \omega = -1,80644929539405$$

$$\delta_{23} \omega = 0,108205188453329$$

$$\delta_{24} \omega = 1,09084849302772$$

$$\delta_{25} \omega = -0,550795555757914$$

$$\delta_{26} \omega = 1,17157261244638$$

$$\delta_{27} \omega = -0,544114064744082$$

Определив по формуле (3.24) значение возмущений в элементе аргумента перицентра, отобразим на рисунке 29 график изменения данных возмущений:

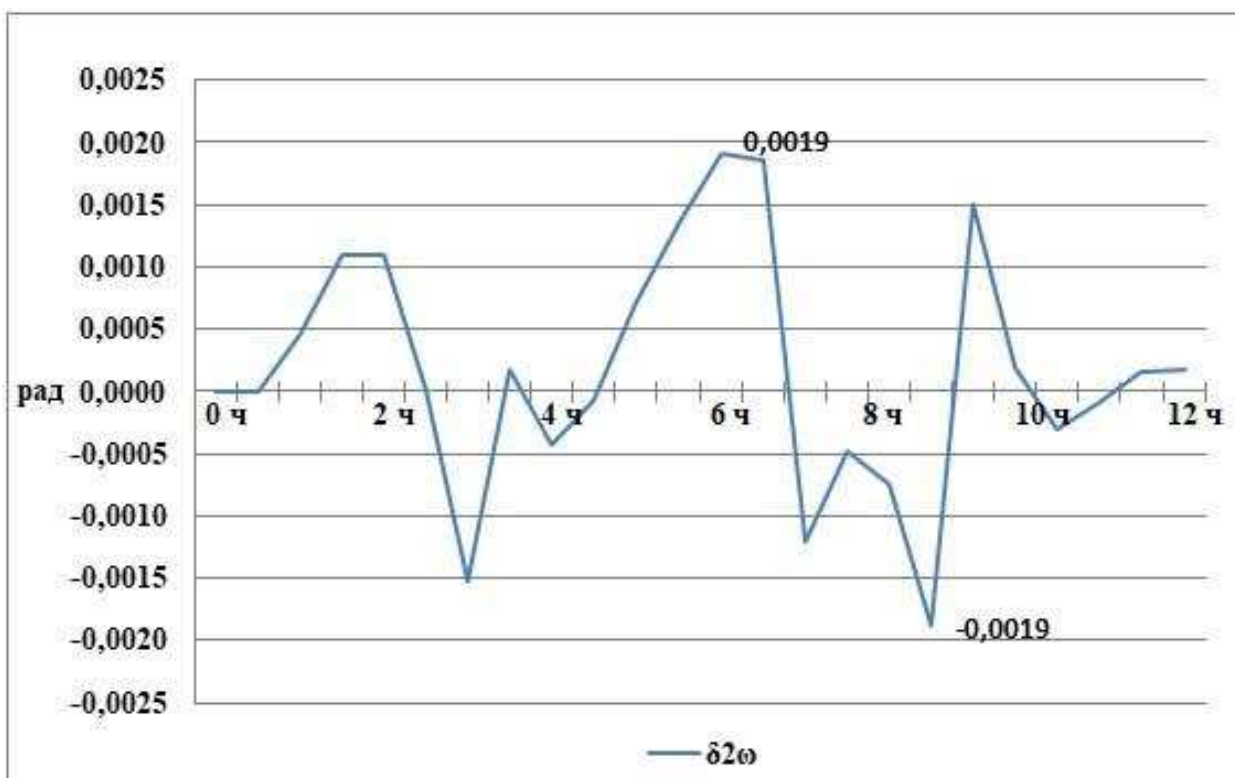


Рисунок 29 – Возмущения в элементе $\delta_2\omega$

Как видно из рисунка 29, минимальное возмущение в элементе аргумента перигея в аналитической форме представления в поле сжатой Земли составляет $-0,0019$ радиан, а максимальное $0,0019$ радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что оценочное возмущение в элементе аргумента перигея составляет $97,92$ км.

Теперь, определив возмущения в элементе аргумента перигея, мы можем рассчитать итоговое значение данного элемента по формуле (3.25):

$$\omega_{\text{ан}} = \omega_{\text{к}} + \delta_2\omega. \quad (3.25)$$

Используя данную формулу (3.25), мы определим итоговый элемент аргумента перигея, просчитываемый в предлагаемой аналитической модели. С помощью данного элемента в дальнейшем можно определить аргумент широты в создаваемой аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли.

3.5 Характеристика аргумента широты по разрабатываемой методике в аналитической форме представления

Найдя все необходимые для определения аргумента широты итоговые элементы орбиты a, M, e, ω , мы можем рассчитать итоговое значение аргумента широты.

Используя формулы (1.1 – 1.5), рассчитаем значения аргумента широты разрабатываемой аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли n -го порядка. Результаты отображены в таблице 3:

Таблица 3 – Значения аргумента широты

Интервал времени, ч	Значение u , рад
0	0,0000
0,5	0,2035
1	0,4383
1,5	0,7194
2	1,0372
2,5	1,3599
3	1,6540
3,5	1,9397
4	2,2551
4,5	2,5621
5	2,8384
5,5	3,0834
6	-2,9604
6,5	-2,6760
7	-2,5050
7,5	-2,2228
8	-1,9170
8,5	-1,6169
9	-1,3370
9,5	-1,0270
10	-0,7056
10,5	-0,4025
11	-0,1363
11,5	0,0952

Определив значения аргумента широты, используя методику аналитической модели и численного метода, найдем расхождения по данному элементу в поле сжатой Земли, воспользовавшись формулой (3.26):

$$\Delta u = u_{PK} - u_{AN}. \quad (3.26)$$

Используя значения, определенные по формуле (3.26), построим график расхождений аргумента широты между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли. Данный график отображен на рисунке 30:

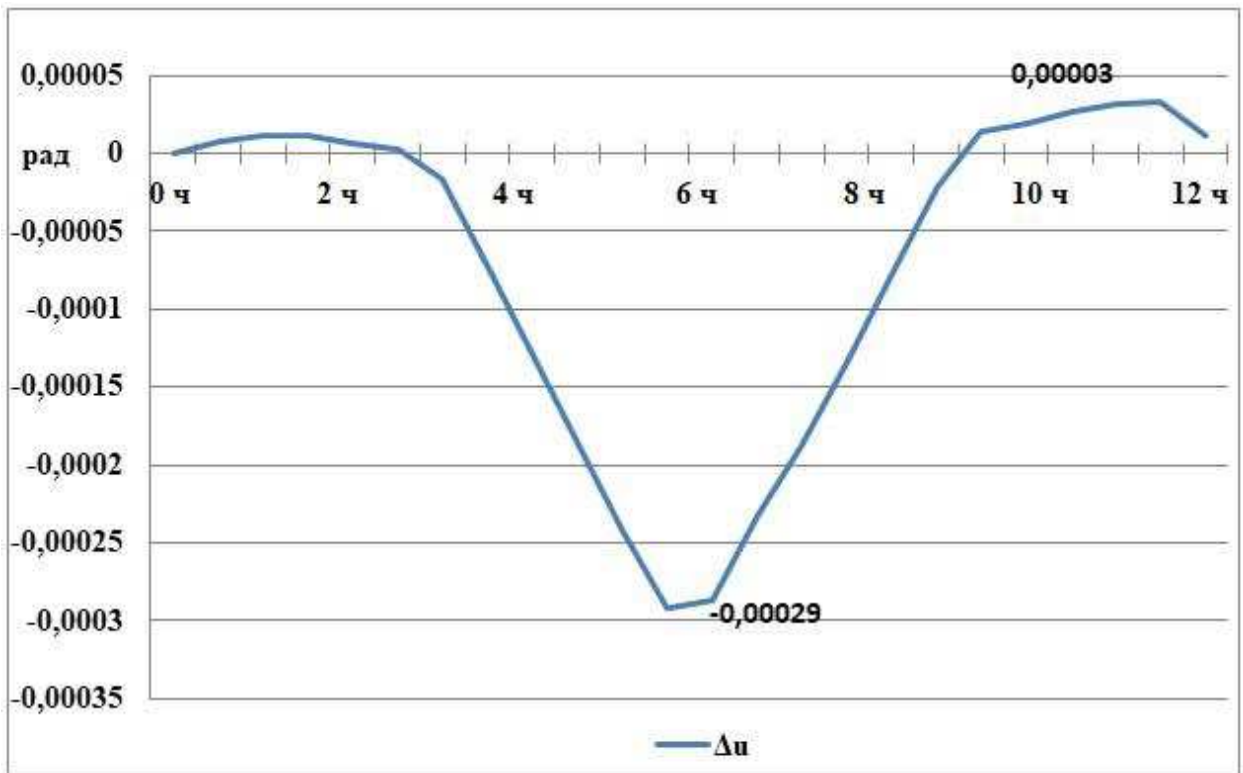


Рисунок 30 – Расхождение аргумента широты между численной и аналитической моделями в поле сжатой Земли

Как видно из рисунка 30, минимальное расхождение аргумента широты в поле сжатой Земли составляет $-0,00029$ радиан, а максимальное $0,00003$ радиан. Воспользовавшись формулой (1.15), получим, что оценочное расхождение составляет $8,3$ км.

3.6 Оценка аргумента широты по разрабатываемой методике в аналитической форме представления после преобразования уравнений Лагранжа

Применив формулы (2.48 – 2.50) к разрабатываемой аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли, получим следующие значения в элементах l, h, λ , отображенные на рисунках 31-43:

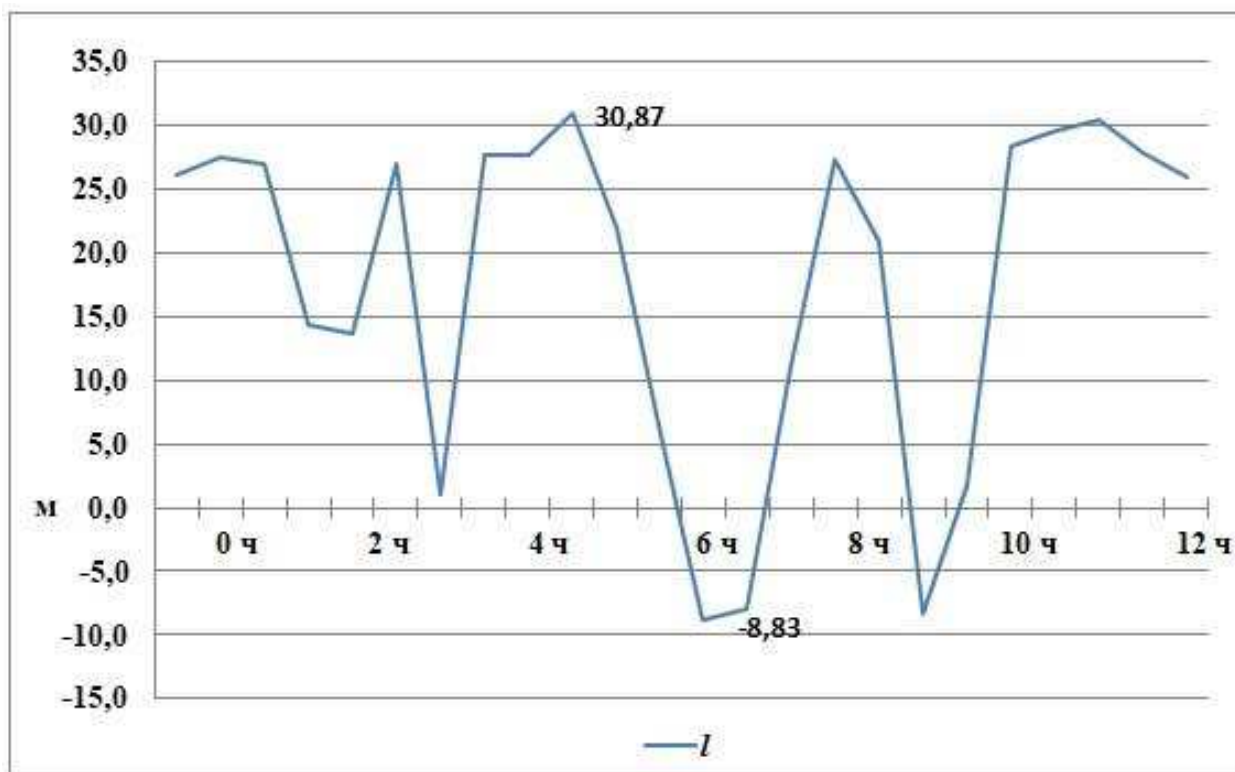


Рисунок 31 – Значения элемента l

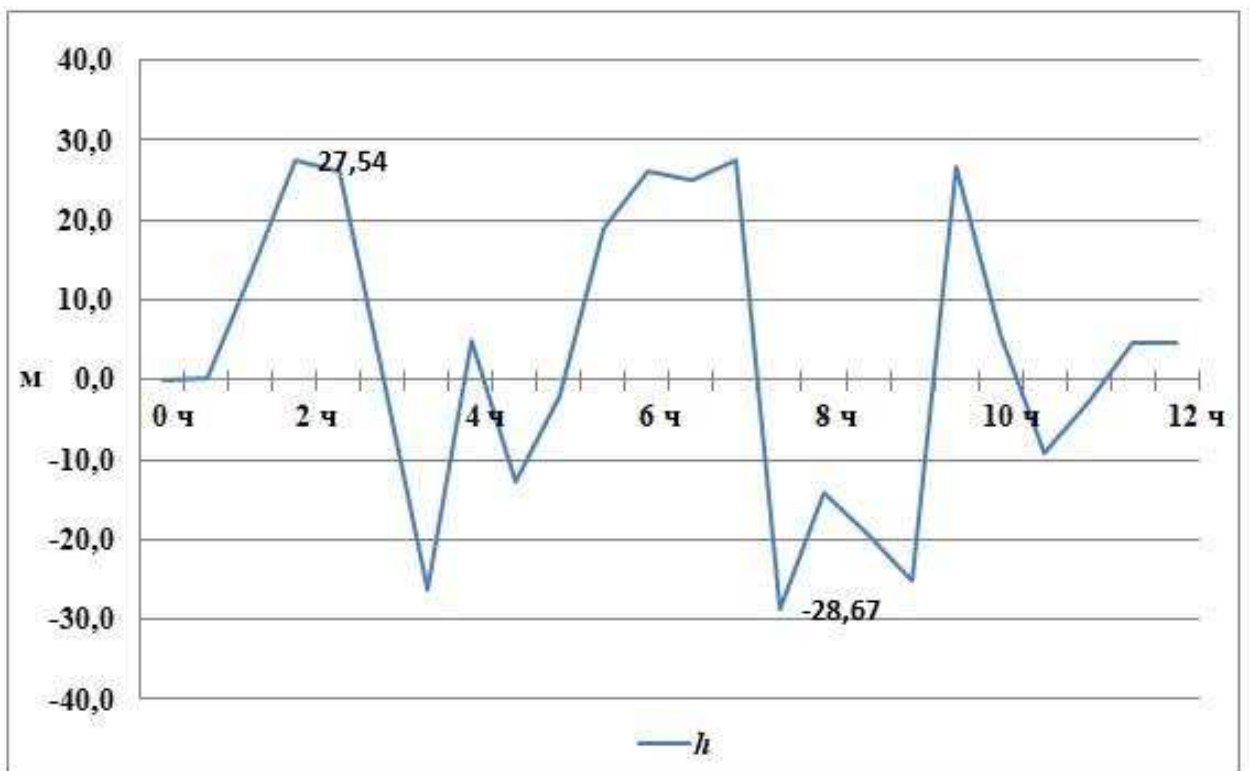


Рисунок 32 – Значения элемента h

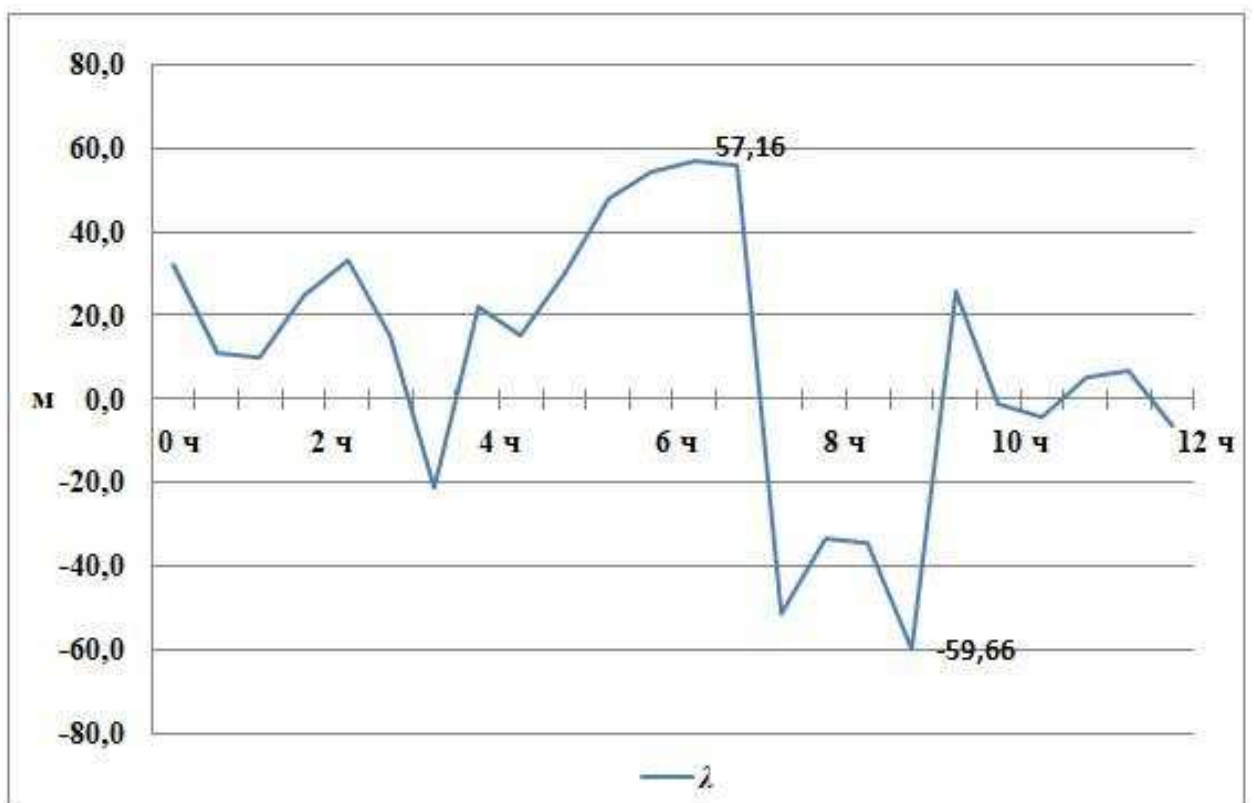


Рисунок 33 – Значения элемента λ

Преобразуем полученные элементы l , h , λ обратно в оскулирующие элементы орбиты M , ω и, используя формулы (1.1 – 1.5), по аналогии рассчитаем значения аргумента широты и найдем расхождение между численной и полученной аналитической моделями.

Итоговое расхождение аргумента широты, рассчитанного численным и аналитическим методами, после преобразования уравнений Лагранжа отображено на рисунке 34:

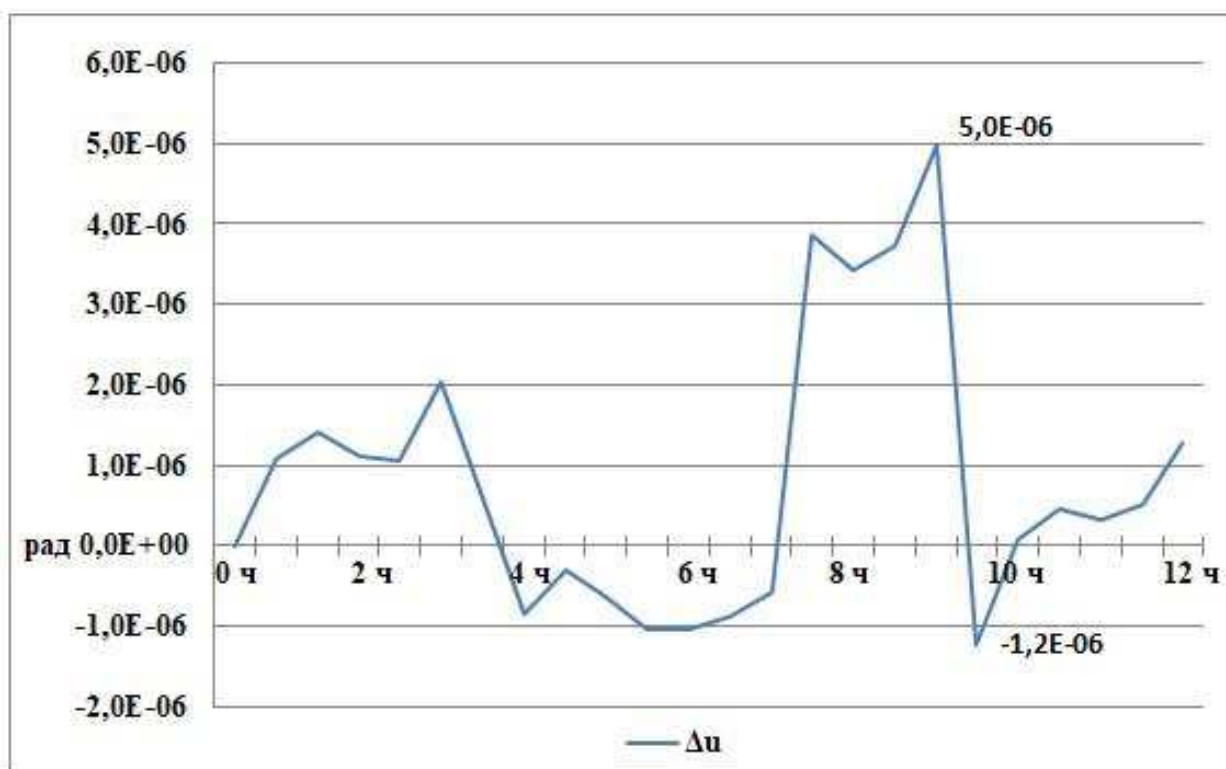


Рисунок 34 – Итоговое расхождение аргумента широты

Как видно из рисунка 34, итоговое расхождение аргумента широты составляет 0,0000062 радиан. Так как значение в радианах крайне малы, построим для наглядности график расхождения, выраженный в километрах, на рисунке 35:

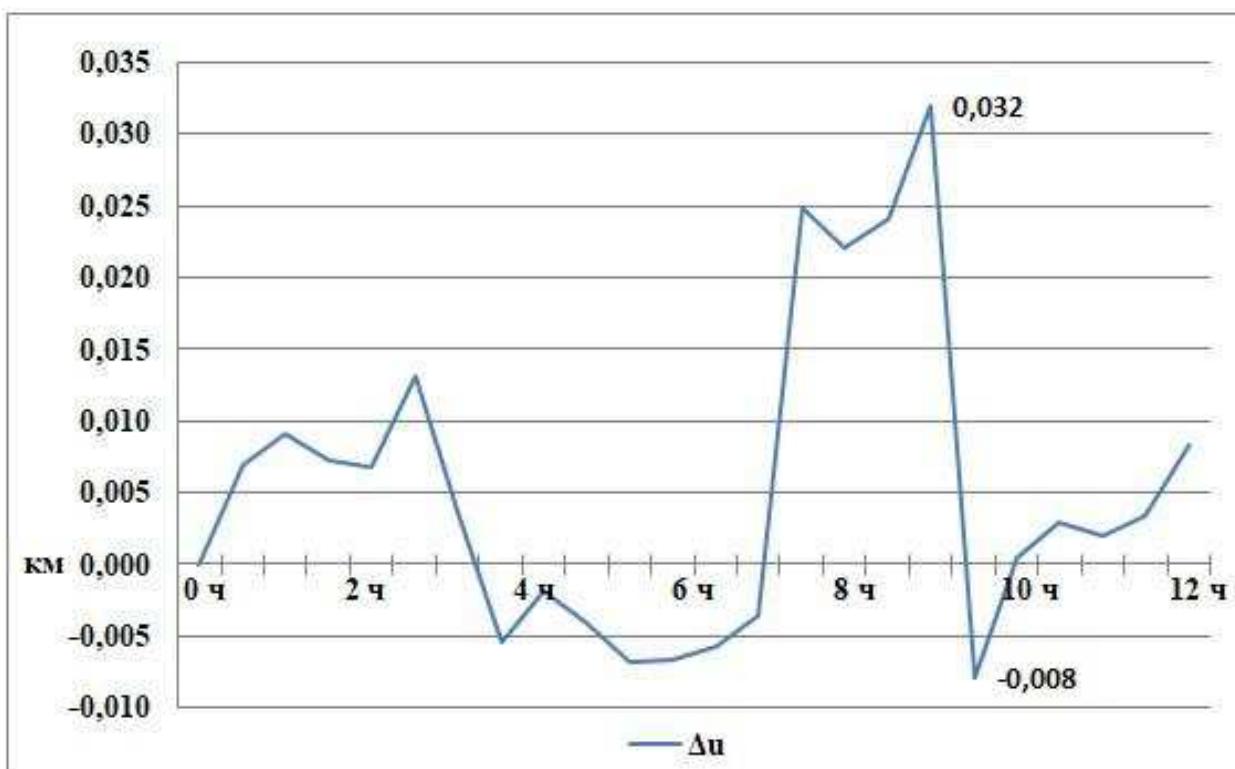


Рисунок 35 – Итоговое расхождение аргумента широты в км

Как видно из результата, полученного при определении аргумента широты через непосредственно оскулирующие элементы и через оскулирующие элементы, определенные после ввода замены переменных, расхождение между численной и аналитической моделями уменьшилось на 2 порядка.

С помощью аналитического метода удалось добиться минимального расхождения аргумента широты, приблизительно равного 40 метрам.

Полную оценку действенности разрабатываемого аналитического метода можно дать в случае его реализации по всем элементам орбиты.

Главная цель по повышению точности радиоконтроля орбит по линии КА-КА за счет уточнения аргумента широты достигнута.

3.7 Вывод по третьей главе

Используя преобразования уравнений Лагранжа для выражения оскулирующих элементов ω и M , можно повысить сходимость элемента орбиты (в нашем случае аргумента широты) для создания более точного аналитического описания данного элемента. Предлагаемая методика аналитической модели в части определения элемента орбиты имеет максимальное сближение по значению аргумента широты с численным методом.

Используя аналогичный подход, можно описать все Кеплеровы элементы орбиты для создания общей аналитической теории в поле сжатой Земли.

Повышение точности определения аргумента широты с помощью аналитического подхода позволяет повысить точность определения КА, использующих межспутниковую линию связи в сравнении с прочими, уже разработанными аналитическими моделями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная цель исследования по разработке методики, базирующейся на учете расхождения в элементе аргумента широты, которая позволяет повысить точность радиоконтроля орбит при использовании измерений по линии КА-КА, достигнута.

При повышении точности радиоконтроля орбит были решены следующие задачи:

1) определен параметр аргумента широты на основе модели движения КА в центральном поле;

2) проведен анализ расхождения аргумента широты в аналитической и численной моделях движения КА центрального поля;

3) определен параметр аргумента широты на основе модели движения КА в поле сжатой Земли;

4) оценены расхождения и возмущения аргумента широты в аналитических моделях движения КА в поле сжатой Земли для дальнейшего использования характеристик элемента;

5) на основе оценки возмущений аргумента широты выстроена методика повышения точности радиоконтроля орбит в аналитическом представлении модели движения КА.

В результате проведенных исследований была разработана методика повышения точности радиоконтроля орбит, основанная на использовании данных измерений по линии КА-КА. Было установлено, что наибольшее количество возмущений аргумента широты можно учесть при использовании унифицированного аналитического метода, позволяющего учитывать n -ое количество возмущающих гармоник.

При определении аргумента широты аналитическим методом была достигнута допустимая погрешность определения КА, которая позволяет говорить о возможности применимости данной модели в реальных условиях. Таким образом, уточнив аргумент широты, мы повышаем точность

межспутниковых измерений, которые теперь можно обрабатывать на борту КА оперативно. Данный подход позволяет уменьшить трафик по линии КА-КА, что сделает возможным проведение более частых сеансов связи по межспутниковой между ИСЗ для максимально точного определения КА на орбите. Однако, точность аналитического метода позволяет уйти от частных измерений по межспутниковой линии и возложить определение местоположения КА на орбите на бортовую систему самого КА.

Повышение точности определения аргумента широты с помощью аналитического подхода позволяет повысить точность определения КА, использующих межспутниковую линию связи. Используя аналогичный подход, можно описать все Кеплеровы элементы орбиты для создания общей аналитической теории в поле сжатой Земли.

Применение аналитического метода при расчете параметров орбиты в полном поле в перспективе позволит избавиться от ошибок интегрирования численного метода, повысит надежность баллистической системы, позволит определять местоположение КА на орбите с максимальной точностью и оперативностью. Также, использование аналитических методов позволяет осуществлять самонавигацию КА, разгружает бортовые системы управления (БСУ), дает возможность эффективно использовать радиолинии для управления ИСЗ при групповых запусках.

Дальнейшее исследование в определении аналитической модели движения КА возможно при построении модели, учитывающей не только гравитационные возмущения. Также, данный подход можно использовать в случае создания орбитальных группировок вокруг планет Солнечной системы и их естественных спутников.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

БСУ	- бортовые системы управления;
ГЛОНАСС	- глобальная навигационная спутниковая система;
ИСЗ	- искусственный спутник Земли;
КА	- космический аппарат;
КА-КА	- космический аппарат - космический аппарат;
МНК	- метод наименьших квадратов;
СНС	- спутниковая навигационная система;
ЭВО	- эфемеридно-временное обеспечение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Абалакин, В. К. Основы эфемеридной астрономии / В.К. Абалакин. – Москва: Наука, 1979. – 448с.
- 2 Бордовицына, Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики / Т. В. Бордовицына. – Москва: Наука, 1984. – 136 с.
- 3 Бордовицына, Т. В. Теория движения искусственных спутников земли. Аналитические и численные методы / Т. В. Бордовицына, В. А. Авдюшев. – Томск: Изд-во Томского университета, 2007. – 178 с.
- 4 Брандин, В. Н. Определение траекторий космических аппаратов / В. Н. Брандин, Г. Н. Разоренов. – Москва: Машиностроение, 1978. – 216 с.
- 5 Дубошин, Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г. Н. Дубошин. – Москва: Наука, 1978. – 456 с.
- 6 Изотов, А. А. Основы спутниковой геодезии: монография / А. А. Изотов, В. И. Зубинский. – Москва: Недра, 1974. – 321 с.
- 7 Коняев, А. В. Путь России к лидерству в точности спутниковых навигационных систем / А. В. Коняев, С. В. Семенюк, В. А. Гебгардт // Научно-практические исследования. – Омск: Изд. Научный центр «Орка», 2019. – 48с.
- 8 Крылов, В. И. Основы теории движения ИСЗ: учебное пособие / В. И. Крылов. – Москва: МИИИГАиК, 2015. – 52 с.
- 9 Кудымов, В. И. Повышение точности навигационного обеспечения с использованием низкоорбитальных космических аппаратов на основе численно-аналитических моделей движения : дисс. д-р техн. наук / В. И. Кудымов. – Красноярск, 1988. – 252 с.
- 10 Рой, А. Движение по орбитам / А. Рой. – Москва: Мир, 1981. – 544 с.
- 11 Сухих, Б. И. Аналитические методы в определении орбит навигационных ИСЗ : дисс. канд. техн. наук / Б. И. Сухих – КБПН: Министерство общего машиностроения, 1973. – 109 с.
- 12 Уинтнер, А. Аналитические основы небесной механики / А. Уинтнер.

– Москва: Наука, 1967. – 523 с.

13 Урмаев, М. С. Орбитальные методы космической геодезии / М. С. Урмаев. – Москва: Недра, 1981. – 256с.

14 Шибшаевич, В.С. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / В. С. Шибшаевич, П. П. Дмитриев, Н. В. Иванцевич. – Москва: Радио и связь, 1993. – 408с.

15 Чеботарев, Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики / Г. А. Чеботарев. – Москва: Наука, 1965. – 369 с.

16 Эльясберг, П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли / П. Е. Эльясберг. – Москва: Наука, 1965. – 540 с.

17 Эскобал, П. Методы определения орбит / П. Эскобал; под ред. В. Демина. – Москва: Мир, 1970. – 472 с.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
институт

Межинститутская базовая кафедра
«Прикладная физика и космические технологии»
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
В.Е. Косенко
подпись инициалы, фамилия
«26» 06 2019 г

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«Повышение точности радиоконтроля орбит за счет использования
измерений по линии космический аппарат – космический аппарат»
тема

01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

01.04.02.04 «Навигация и управление движением»
код и наименование магистерской программы

Научный
руководитель

Кудымов 20.06.19
подпись, дата

Профессор МБК ПФиКТ,
д-р техн. наук
должность, ученая степень

В.И. Кудымов
инициалы, фамилия

Выпускник

Семенюк 20.06.19
подпись, дата

С.В. Семенюк
инициалы, фамилия

Рецензент

Ислентьев 20.06.19
подпись, дата

Начальник сектора
АО «ИСС»,
канд. техн. наук
должность, ученая степень

Е.В. Ислентьев
инициалы, фамилия

Нормоконтролер

Сидорова 20.06.19
подпись, дата

Е.С. Сидорова
инициалы, фамилия

Красноярск 2019