

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
институт

Межинститутская базовая кафедра
«Прикладная физика и космические технологии»
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
В.Е. Косенко
подпись инициалы, фамилия
« » 20 г

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«Исследование точностных характеристик аналитической модели движения КА
в поле сжатой Земли»

тема

01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

01.04.02.04 «Навигация и управление движением»
код и наименование магистерской программы

Научный
руководитель

подпись, дата

Профессор МБК ПФиКТ,
д-р техн.наук

должность, ученая степень

В.И. Кудымов

инициалы, фамилия

Выпускник

подпись, дата

В.А. Гебгардт

инициалы, фамилия

Рецензент

подпись, дата

Начальник сектора АО
«ИСС» канд.техн.наук

должность, ученая степень

Е.В. Ислентьев

инициалы, фамилия

Нормоконтролер

подпись, дата

Е.С. Сидорова

инициалы, фамилия

Красноярск 2019

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
институт

Межинститутская базовая кафедра
«Прикладная физика и космические технологии»
кафедра

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

В.Е. Косенко

подпись инициалы, фамилия

« 05 » октября 2017 г

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
в форме магистерской диссертации

Студенту Гебгардт Виктору Александровичу.

фамилия, имя, отчество

Группа ИМ 17-08М Направление (специальность) 01.04.02

номер

код

«Прикладная математика и информатика».

наименование

Тема выпускной квалификационной работы: «Исследование точностных характеристик аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли».

Утверждена приказом по университету №678/с от «22» 01.2018

Руководитель ВКР: В. И. Кудымов, профессор, д-р техн. наук, МБК «Прикладная физика и космические технологии».

Исходные данные для ВКР: КА находящийся на орбите со следующими параметрами: $I = 83^\circ$, $\Omega = 0$, $\omega = 0$, $a = 7371$ км, $e = 0,001$, $M_0 = 0$, $h = 1000$ км, $t_0 = 0$.

Перечень разделов ВКР:

- 1) Определение координат и составляющих скорости ИСЗ для произвольного момента времени по заданным элементам орбиты.
- 2) Построение аналитических моделей в поле сжатой Земли.
- 3) Исследование аналитических моделей в поле сжатой Земли.

Руководитель ВКР

подпись

В.И. Кудымов

инициалы и фамилия

Задание принял к исполнению

подпись

В.А. Гебгардт

инициалы и фамилия студента

« 22 » января 2018 г.

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме: «Исследование точностных характеристик аналитической теории движения космического аппарата в поле сжатой Земли» содержит 101 страницу текстового документа, 15 использованных источников.

КОСМИЧЕСКИЙ АППАРАТ, БАЛЛИСТИКА, НАВИГАЦИЯ, КЕПЛЕР, МЕТОД РУНГЕ-КУТТА, МОДЕЛЬ КОЗАИ, МОДЕЛЬ ПРОСКУРИНА-БАТРАКОВА, ВОЗМУЩЕНИЯ, ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ПОЛЕ СЖАТОЙ ЗЕМЛИ, ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ.

Объектом исследования данной работы являются: аналитические модели, применяемые для прогнозирования полета космического аппарата в поле сжатой Земли.

Цель работы: исследовать аналитические модели движения космического аппарата в поле сжатой Земли. Определить вид аналитической модели максимальной приближенной к реальной модели движения космического аппарата.

Предмет исследования: точностные характеристики аналитической теории движения космического аппарата в поле сжатой Земли.

Научная новизна работы заключается в анализе существующих аналитических моделей движения космического аппарата в поле сжатой Земли, сравнении их между собой, и выявлении наиболее достоверной модели для низко круговой орбиты искусственного спутника Земли.

В результате проведения работы были построены численные и аналитические модели движения космического аппарата. По итогу работы установлено, что, наиболее приближенной к реальной модели движения космического аппарата в поле сжатой Земли является аналитическая модель, учитывающая возмущения второго порядка. Выявлены основные недостатки предлагаемой модели и проработан вопрос целесообразности её применения. Предложены дальнейшие возможные пути модернизации аналитической модели движения космического аппарата в поле сжатой Земли.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
1 Определение координат и проекций скорости космического аппарата для произвольного момента времени в центральном поле	8
1.1 Модель движения космического аппарата в центральном поле	8
1.2 Построение аналитической модели движения космического аппарата в центральном поле. Модель Кеплера	8
1.3 Численная модель движения космического аппарата в центральном поле. Метод Рунге-Кутты.....	15
1.4 Расхождение численной и аналитической модели в центральном поле .	21
1.5 Преобразование численной модели Рунге-Кутта	24
2 Построение аналитических моделей в поле сжатой Земли	27
2.1 Виды аналитических моделей движения космического аппарата.....	27
2.2 Построение аналитической модели Проскурина-Батракова	27
2.3 Построение аналитической модели движения Козаи.....	42
2.4 Построение аналитической модели движения космического аппарата с учетом возмущения второго порядка.....	58
3 Исследование аналитических моделей в поле сжатой Земли	71
3.1 Сравнение моделей движения космического аппарата при шаге интегрирования 1 секунду.....	71
3.2 Сопоставление аналитических моделей на промежутке одного витка ...	81
3.3 Сопоставление аналитических моделей на промежутке 14 витков.....	88
Заключение	97
Список сокращений	99
Список использованных источников	100

ВВЕДЕНИЕ

В современных космических системах баллистическое управление космическими аппаратами (КА) осуществляется с помощью численных методов. В свою очередь, численные методы накапливают большие погрешности с течением времени в связи с тем, что они округляют результаты на каждом шаге интегрирования. При этом, чем меньше шаг интегрирования, тем, соответственно, результат определения КА на орбите будет точнее, но количество шагов увеличится, что повлечет за собой большое накопление погрешностей в расчетах. Также для численных методов с малым шагом интегрирования необходимо проводить больше математических вычислений, соответственно появляется необходимость в мощной вычислительной аппаратуре. Напротив, использование аналитических методов позволит вычислять параметры положения КА на большие интервалы времени и более оперативно, используя меньшие вычислительные мощности [1, 2].

Отличительной особенностью всех современных численных методов является высокий порядок аппроксимирующих формул, что и влечет за собой повышение сложности вычислений [2].

В свою очередь аналитическая модель:

- 1) позволяет организовать линию связи для оперативного взаимодействия между спутниками по линии КА-КА[3];
- 2) позволяет более оперативно управлять КА при групповых запусках[3, 4, 5];
- 3) помогает разгрузить каналы управления КА;
- 4) может быть использована при реализации селенодезической сети [1, 6, 7];
- 5) повысить точность радиоконтроля при запусках КА.

При реализации аналитических моделей учитываются периодические, вековые возмущения в движении КА. Выявление зависимостей в аналитической форме позволит учесть все возможные возмущения по каждому элементу орбиты в аналитической модели движения КА.

В данной работе рассматривается гравитационное возмущение поля, учитывающее сжатие Земли по полюсам. Данное возмущение является самым большим среди всего семейства гравитационных возмущений и обозначается индексом «20»[1, 2].

Аналитическая модель позволяет в максимально короткий срок определить координаты космического аппарата и скоростей с минимально допустимой погрешностью в любой момент времени и на больших интервалах[1, 2, 6].

На сегодняшний день создано большое количество численных моделей, которые решают задачу повышения точности определения КА на орбите за счёт повышения степени решаемого уравнения. Аналитическая модель, базирующаяся на данных эфемерид второго рода, до сих пор не реализована [8].

В данной работе произведен анализ и оценка аналитических моделей в сравнении с численной моделью в поле сжатой Земли (численное интегрирование производилось методом Рунге-Кутты), предложена концепция дальнейшего развития аналитических методов для учета возмущений движения КА в полном поле, учитывающим все воздействия, оказываемые на искусственный спутник Земли на орбите.

1 Определение координат и проекций скорости космического аппарата для произвольного момента времени в центральном поле

1.1 Модель движения космического аппарата в центральном поле

Для оценки точностных характеристик аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли необходимо в первую очередь построить модель движения КА в центральном поле [1].

Центральное поле это система координат, в которой планета рассматривается, как материальная точка, а движение КА описывается законами Кеплера [2].

Аналитической моделью движения КА в центральном поле является модель Кеплера. Для создания Кеплеровой модели необходимо рассчитать параметры орбиты и на их основе определить координаты и проекции скоростей. В Кеплеровой модели движения КА основными параметрами (Кеплеровы элементы) являются $I; \Omega; \omega; a; e; M_0; h; t_0$. На их основе мы можем рассчитать координаты и проекции их скоростей.

1.2 Построение аналитической модели движения космического аппарата в центральном поле. Модель Кеплера

Для построения аналитической модели в центральном поле воспользуемся моделью Кеплера. В данной модели нам необходимо определить координаты и проекции скоростей КА. Для построения данной модели необходимо в первую очередь определить параметры всех элементов орбиты. В нашем случае мы используем модель движения КА с характеристиками приведенными в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – элементы орбиты модели Кеплера

Элемент орбиты	Наименование
$I=83^\circ$	наклонение орбиты
$\Omega=0$	долгота восходящего узла
$\omega=0$	аргумент перицентра
$a=7371$ км	большая полуось
$e=0,001$	эксцентриситет
$M_0=0$	начальное значение средней аномалии
$h=1000$ км	высота орбиты
$t_0=0$	эпоха

Применяем методику расчета координат x, y, z и составляющих скорости по соответствующим координатам $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ на некотором моменте t по заданным элементам орбиты и начальной эпохе t_0 (прямая задача невозмущенного движения). Ниже приведен расчёт для первых значений параметра нахождения КА по модели Кеплера.

Определяется среднее движение n ИСЗ по формуле (1.1):

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad (1.1)$$

где $\mu = 398600,5 \times 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравитационная постоянная

Вычисляется средняя аномалия M на момент t по формуле (1.2):

$$M = M_0 + n(t - t_0) \quad (1.2)$$

Вычисляется истинная аномалия ϑ и радиус вектор по формуле (1.3):

$$\begin{cases} r = a(1 - e \cos E) \\ \tan \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \end{cases} \quad (1.3)$$

С учётом значений параметров орбиты данной работы формула (1.3) примет следующий вид

$$\begin{cases} r = 7371(1 - 0,001 \cos 0) \\ \vartheta = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1+0,001}{1-0,001}} \tan \frac{0}{2} \end{cases} \quad (1.3a)$$

Определяются координаты ИСЗ на орбите по формуле (1.4):

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y = r(\cos u \sin \Omega - \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z = r \sin u \sin i \end{cases} \quad (1.4)$$

С учётом значений параметров орбиты данной работы формула (1.4) примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = 7636,63(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos 1.4486) \\ y = 7636,63(\cos u \sin \Omega - \sin u \cos \Omega \cos 1.4486) \\ z = 7636,63 \sin u \sin 1.4486 \end{cases} \quad (1.5)$$

Основываясь на формуле (1.5) построим график координат КА аналитической модели положения ИСЗ в разные моменты времени на протяжении 105 минут с шагом в 1 с,. Данный период определяет виток орбиты КА. График изображен на рисунке 1.1.

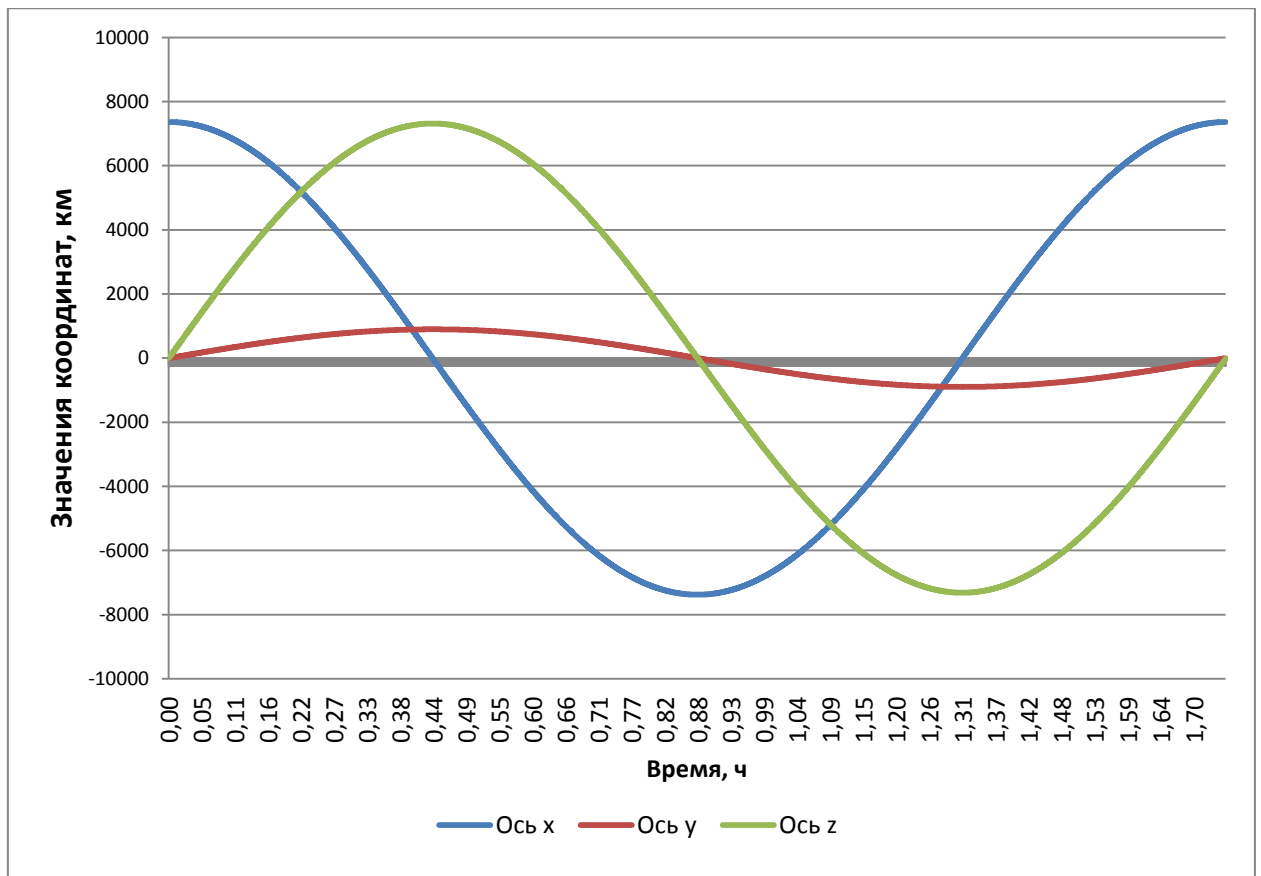


Рисунок 1.1 – График изменения координат орбиты КА по уравнениям Кеплера

Для нахождения проекций скоростей необходимо определить следующие параметры по формулам (1.6-1.8):

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \vartheta} \quad (1.6)$$

$$r^2 \vartheta = C \quad (1.7)$$

$$p = \frac{C^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (1.8)$$

где r - радиус вектор положения КА на орбите

Составляющая скорости через радиус-вектор определяется по формуле (1.9):

$$v_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \quad (1.9)$$

Составляющая скорости по трансверсали (перпендикуляр к радиус-вектору в плоскости орбиты) по формуле (1.10):

$$v_n = r\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) \quad (1.10)$$

Дифференцирую уравнения (1.4) по времени, получается формула (1.11):

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \frac{x}{r} - r(\cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega - \sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i)\dot{\vartheta} \\ \dot{y} = \dot{r} \frac{y}{r} - r(\cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega - \sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i)\dot{\vartheta} \\ \dot{z} = r \cos u \sin i \dot{\vartheta} + \frac{z}{r} \dot{r} \end{cases} \quad (1.11)$$

Формула (1.11) представляется в виде формулы (1.12) выраженная через элементы \dot{r} и $\dot{\vartheta}$ определяемые формулами (1.9-1.10) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - \\ - \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) (\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) \\ \dot{y} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta (\cos u \sin \Omega - \sin u \cos \Omega \cos i) - \\ - \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i) \\ \dot{z} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \sin u \sin i + \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) \cos u \sin i \end{cases} \quad (1.12)$$

Подставляя значения параметров орбиты формула (1.12) преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = 7,353 e \sin \vartheta (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos 1,448) - \\ - 7,353 (1 + e \cos \vartheta) (\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos 1,448) \\ \dot{y} = 7,353 e \sin \vartheta (\cos u \sin \Omega - \sin u \cos \Omega \cos 1,448) - \\ - 7,353 (1 + e \cos \vartheta) (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos 1,448) \\ \dot{z} = 7,353 e \sin \vartheta \sin u \sin 1,448 + 7,353 (1 + e \cos \vartheta) \cos u \sin 1,448 \end{cases} \quad (1.13)$$

График расчета проекций скоростей \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} ИСЗ по уравнениям Кеплера с шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.2.

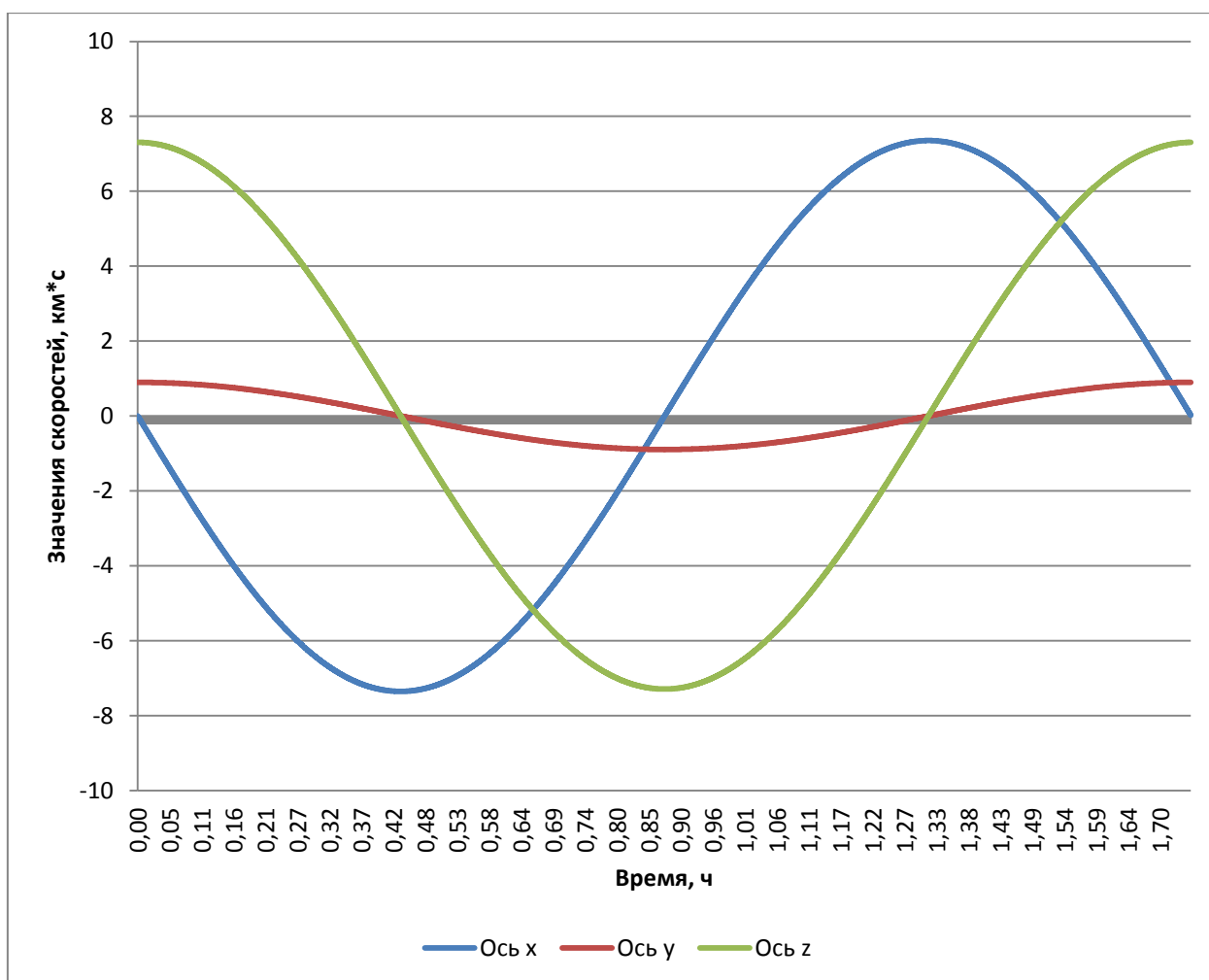


Рисунок 1.2 – График проекций скоростей ИСЗ по уравнениям Кеплера

Радиус-вектор находится по формуле (1.14)

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.14)$$

График расчета радиус-вектора ИСЗ по уравнениям Кеплера с шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.3.

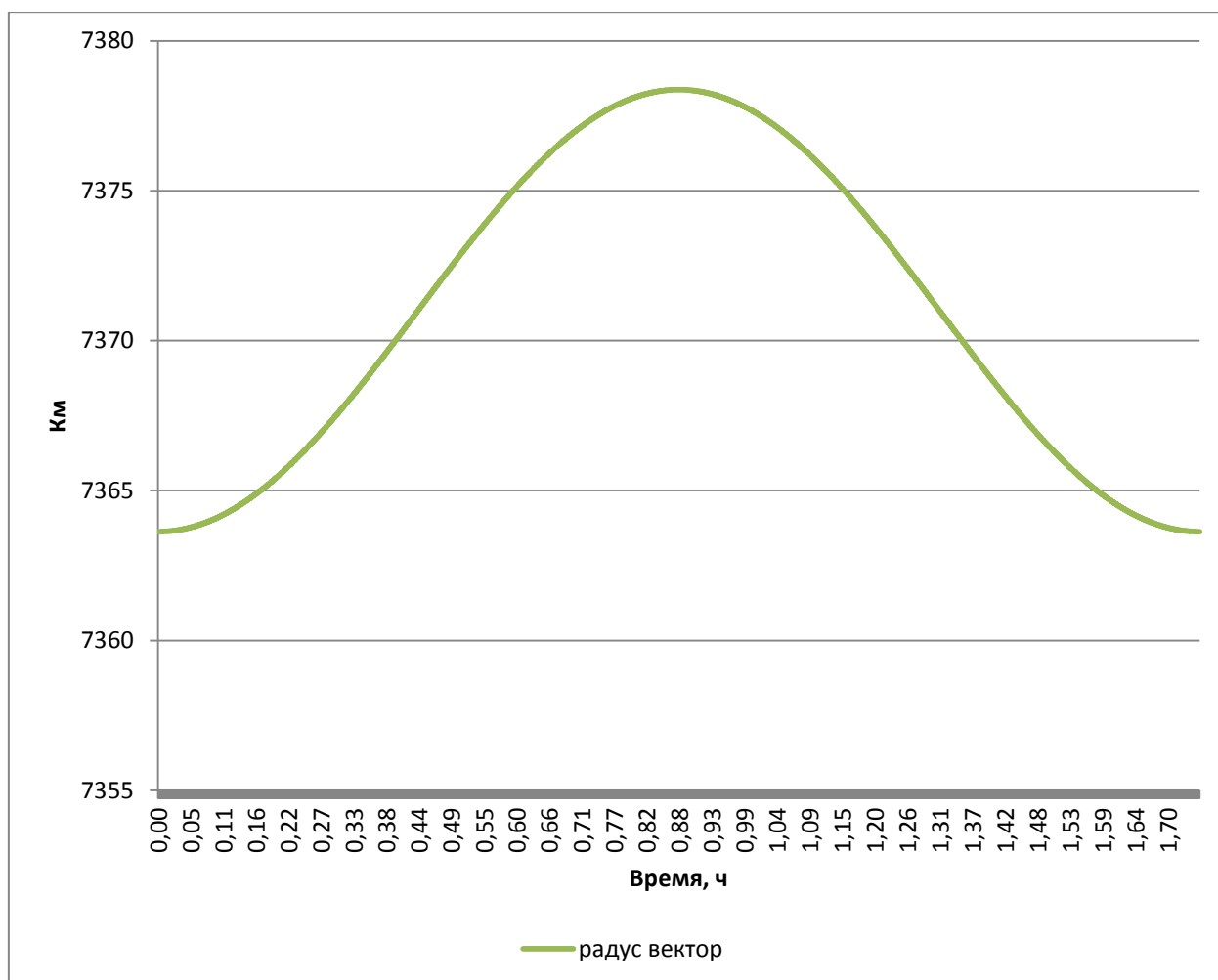


Рисунок 1.3 – График радиус-вектора координат ИСЗ по уравнениям Кеплера

1.3 Численная модель движения космического аппарата в центральном поле. Метод Рунге-Кутта

Для того чтобы перейти из центрального поля в поле сжатой Земли необходимо построить численную модель движения КА в центральном поле. По причине того что можно перевести из центрального поля в поле сжатой Земли (С20) только численную модель движения КА.

В связи с тем, что современные КА используют для навигации численные модели, необходимо аналитические модели сравнить с численной. Численная модель принимается за эталон. В качестве примера будет рассмотрена численная модель движения КА, в которой численное интегрирование производится методом Рунге-Кутта.

Расчет параметров численной модели.

При численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (1.15) формулы Рунге-Кутта четвёртого порядка имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = \dot{x}_{i-1} + 0,1667(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}), \\ \dot{y}_i = \dot{y}_{i-1} + 0,1667(l_{1i} + 2l_{2i} + 2l_{3i} + l_{4i}), \\ \dot{z}_i = \dot{z}_{i-1} + 0,1667(m_{1i} + 2m_{2i} + 2m_{3i} + m_{4i}), \\ x_i = x_{i-1} + 0,1667(p_{1i} + 2p_{2i} + 2p_{3i} + p_{4i}), \\ y_i = y_{i-1} + 0,1667(q_{1i} + 2q_{2i} + 2q_{3i} + q_{4i}), \\ z_i = z_{i-1} + 0,1667(s_{1i} + 2s_{2i} + 2s_{3i} + s_{4i}). \end{array} \right. \quad (1.15)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{1i} = 1 \left(-\frac{398600,5(x_{i-1})}{((x_{i-1})^2+(y_{i-1})^2+(z_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ l_{1i} = 1 \left(-\frac{398600,5(y_{i-1})}{((x_{i-1})^2+(y_{i-1})^2+(z_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ m_{1i} = 1 \left(-\frac{398600,5(z_{i-1})}{((x_{i-1})^2+(y_{i-1})^2+(z_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ p_{1i} = 1\dot{x}_{i-1}, \\ q_{1i} = 1\dot{y}_{i-1}, \\ s_{1i} = 1\dot{z}_{i-1} \end{array} \right. \quad (1.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{2i} = 1 \left(-\frac{398600,5\left(x_{i-1}+\frac{p_{1i}}{2}\right)}{\left(\left(x_{i-1}+\frac{p_{1i}}{2}\right)^2+\left(y_{i-1}+\frac{q_{1i}}{2}\right)^2+\left(z_{i-1}+\frac{s_{1i}}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ l_{2i} = 1 \left(-\frac{398600,5\left(y_{i-1}+\frac{q_{1i}}{2}\right)}{\left(\left(x_{i-1}+\frac{p_{1i}}{2}\right)^2+\left(y_{i-1}+\frac{q_{1i}}{2}\right)^2+\left(z_{i-1}+\frac{s_{1i}}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ m_{2i} = 1 \left(-\frac{398600,5\left(z_{i-1}+\frac{s_{1i}}{2}\right)}{\left(\left(x_{i-1}+\frac{p_{1i}}{2}\right)^2+\left(y_{i-1}+\frac{q_{1i}}{2}\right)^2+\left(z_{i-1}+\frac{s_{1i}}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ p_{2i} = 1\left(\dot{x}_{i-1} + \frac{k_{1i}}{2}\right), \\ q_{2i} = 1\left(\dot{y}_{i-1} + \frac{l_{1i}}{2}\right), \\ s_{2i} = 1\left(\dot{z}_{i-1} + \frac{m_{1i}}{2}\right). \end{array} \right. \quad (1.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{3i} = 1 \left(- \frac{398600,5 \left(x_{i-1} + \frac{p_{2i}}{2} \right)}{\left(\left(x_{i-1} + \frac{p_{2i}}{2} \right)^2 + \left(y_{i-1} + \frac{q_{2i}}{2} \right)^2 + \left(z_{i-1} + \frac{s_{2i}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ l_{3i} = 1 \left(- \frac{398600,5 \left(y_{i-1} + \frac{q_{2i}}{2} \right)}{\left(\left(x_{i-1} + \frac{p_{2i}}{2} \right)^2 + \left(y_{i-1} + \frac{q_{2i}}{2} \right)^2 + \left(z_{i-1} + \frac{s_{2i}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ m_{3i} = 1 \left(- \frac{398600,5 \left(z_{i-1} + \frac{s_{2i}}{2} \right)}{\left(\left(x_{i-1} + \frac{p_{2i}}{2} \right)^2 + \left(y_{i-1} + \frac{q_{2i}}{2} \right)^2 + \left(z_{i-1} + \frac{s_{2i}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ p_{3i} = 1 \left(\dot{x}_{i-1} + \frac{k_{2i}}{2} \right), \\ q_{3i} = 1 \left(\dot{y}_{i-1} + \frac{l_{2i}}{2} \right), \\ s_{3i} = 1 \left(\dot{z}_{i-1} + \frac{m_{2i}}{2} \right). \end{array} \right. \quad (1.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{4i} = 1 \left(- \frac{398600,5 \left(x_{i-1} + p_{3i} \right)}{\left(\left(x_{i-1} + p_{3i} \right)^2 + \left(y_{i-1} + q_{3i} \right)^2 + \left(z_{i-1} + s_{3i} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ l_{4i} = 1 \left(- \frac{398600,5 \left(y_{i-1} + q_{3i} \right)}{\left(\left(x_{i-1} + p_{3i} \right)^2 + \left(y_{i-1} + q_{3i} \right)^2 + \left(z_{i-1} + s_{3i} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ m_{4i} = 1 \left(- \frac{398600,5 \left(z_{i-1} + s_{3i} \right)}{\left(\left(x_{i-1} + p_{3i} \right)^2 + \left(y_{i-1} + q_{3i} \right)^2 + \left(z_{i-1} + s_{3i} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ p_{4i} = 1 \left(\dot{x}_{i-1} + k_{3i} \right), \\ q_{4i} = 1 \left(\dot{y}_{i-1} + l_{3i} \right), \\ s_{4i} = 1 \left(\dot{z}_{i-1} + m_{3i} \right). \end{array} \right. \quad (1.19)$$

где $h_i = t_i - t_{i-1}$ – малый шаг интегрирования;

n – число шагов интегрирования.

Основываясь на формулах (1.15-1.19) построим график координат КА

График расчета координат x , y , z ИСЗ в разные моменты времени на протяжении 105 минут с шагом в 1 с, методом Рунге-Кутты в центральном поле Земли изображен на рисунке 1.4.

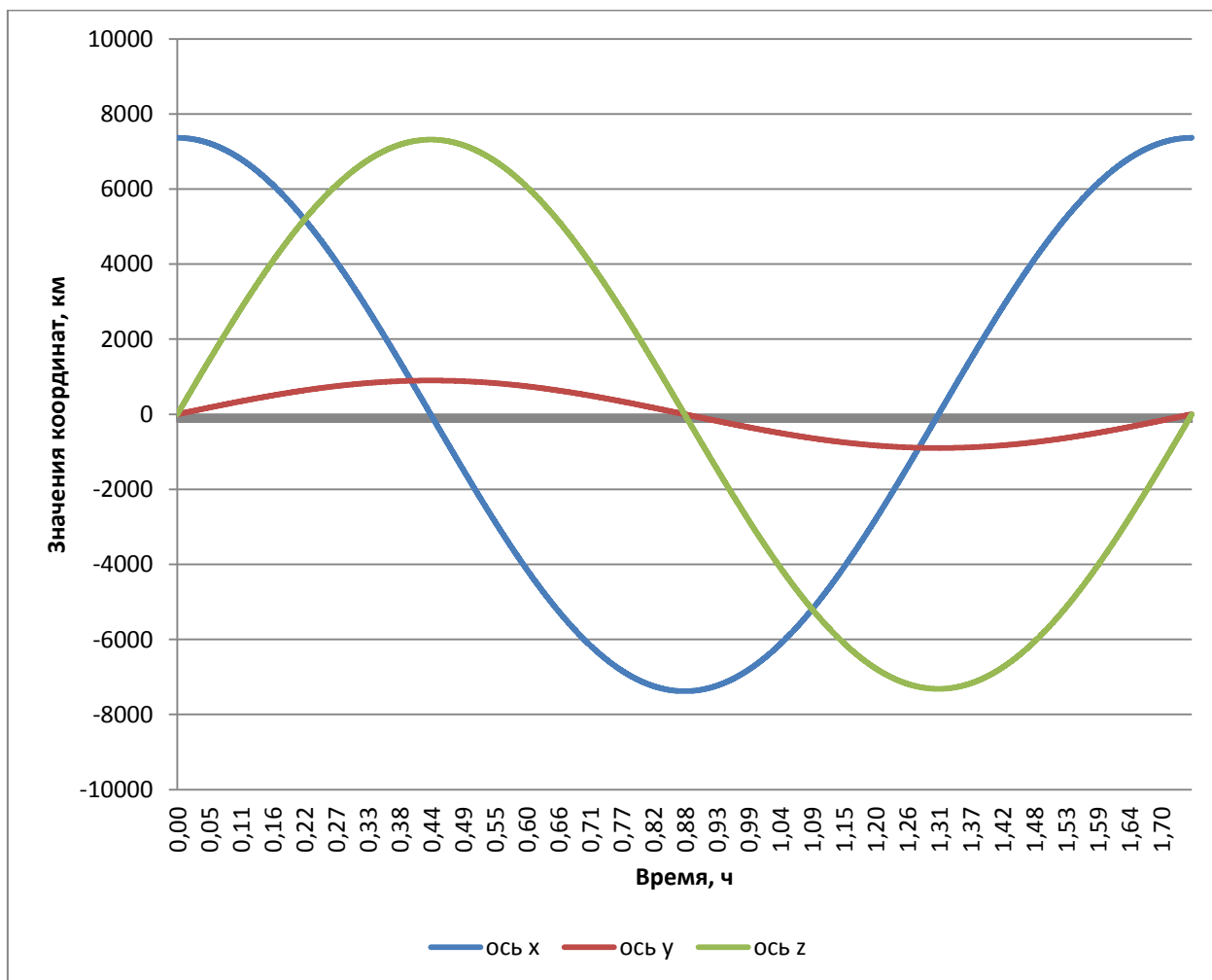


Рисунок 1.4 – График координат ИСЗ по численной модели

График расчета проекций скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ методом Рунге-Кутты в центральном поле и шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.5.

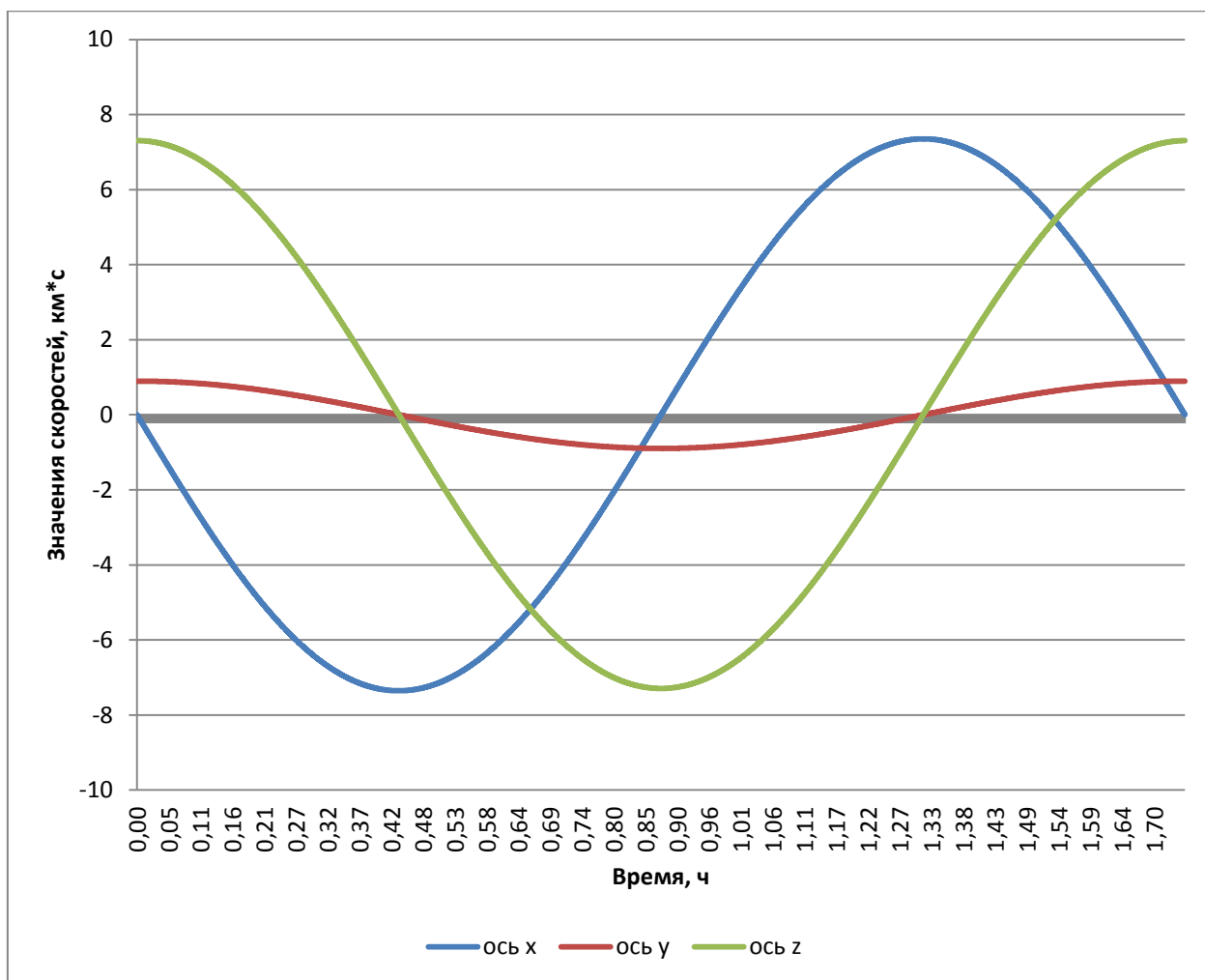


Рисунок 1.5 – График проекций скоростей ИСЗ по численной модели

График расчета радиус-вектора ИСЗ по уравнениям Рунге-Кутта и шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.6.

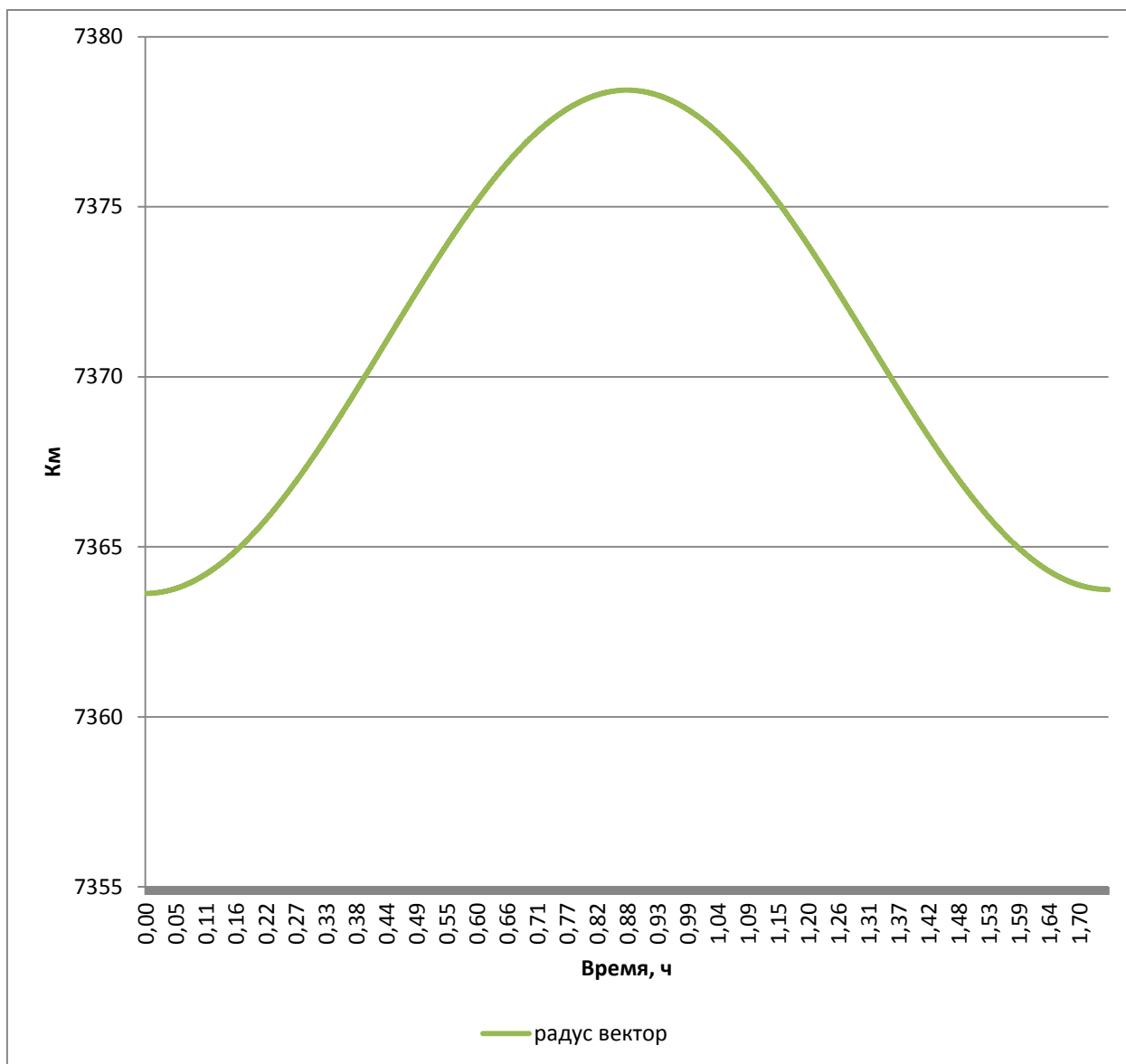


Рисунок 1.6 – График радиус-вектора координат ИСЗ по численной модели

1.4 Расхождение численной и аналитической модели в центральном поле

Определение расхождений между аналитической и численной формой движения КА позволит оценить точностные характеристики аналитической теории движения КА в поле сжатой Земли. Данные расхождения мы учтем в аналитических моделях движения КА в поле сжатой Земли.

После определения параметров орбиты в аналитической и численной моделях описывающих движения КА возможно определить расхождение в данных моделях по координатам и проекциям скоростей.

График расчета расхождения координат x , y , z ИСЗ по уравнениям Рунге-Кутта и Кеплера, с шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.7.

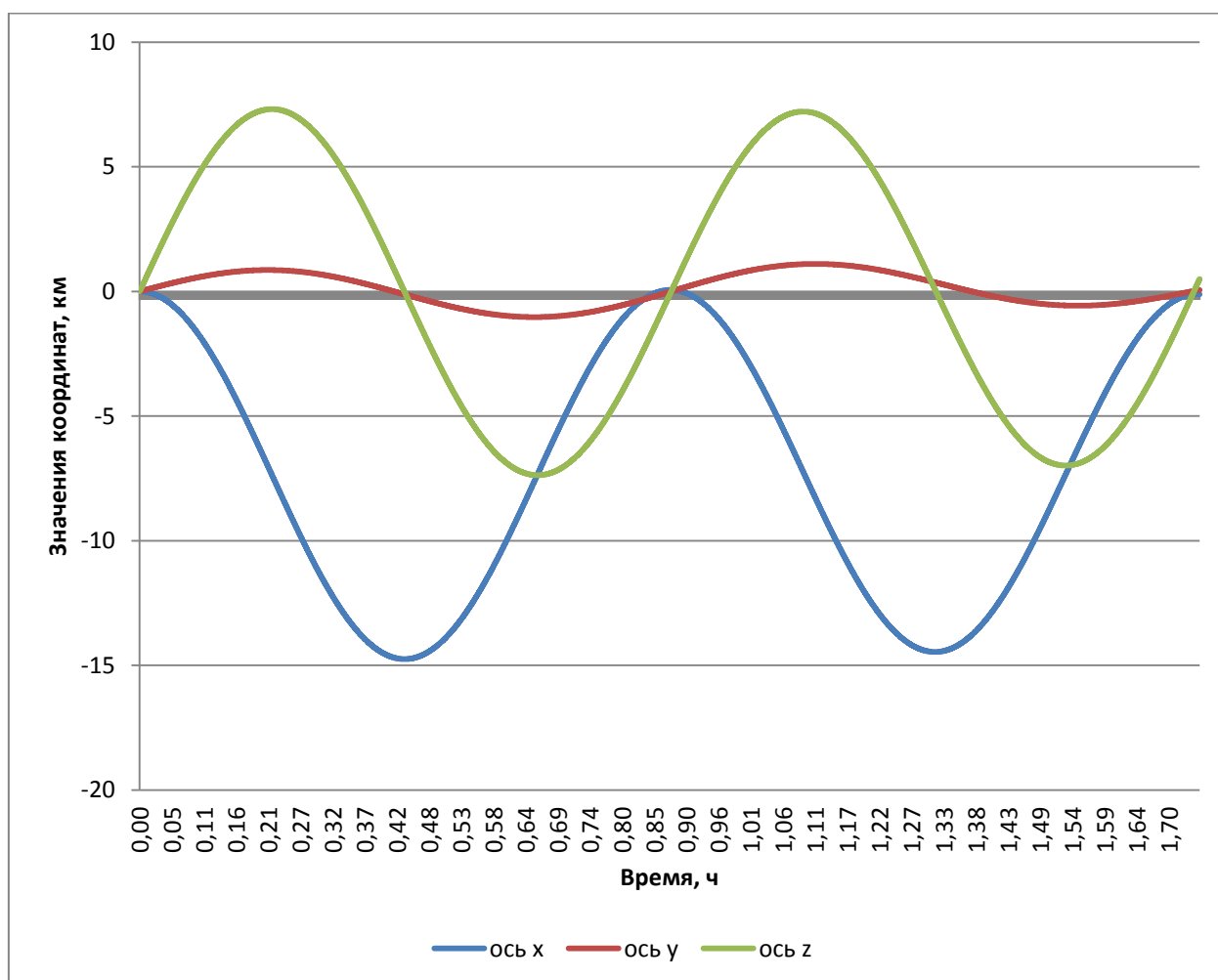


Рисунок 1.7 – График расхождения координат ИСЗ по уравнениям Рунге-Кутта и Кеплера

Данные по размаху величин представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2- амплитудные значения параметров высоты

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Высота орбиты мин. значение, км	-14,74	-1,03	- 7,372
Высота орбиты макс. значение, км	0,058	1,103	7,31

График расчета расхождения проекций скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ по уравнениям Рунге-Кутты и Кеплера, шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.8.

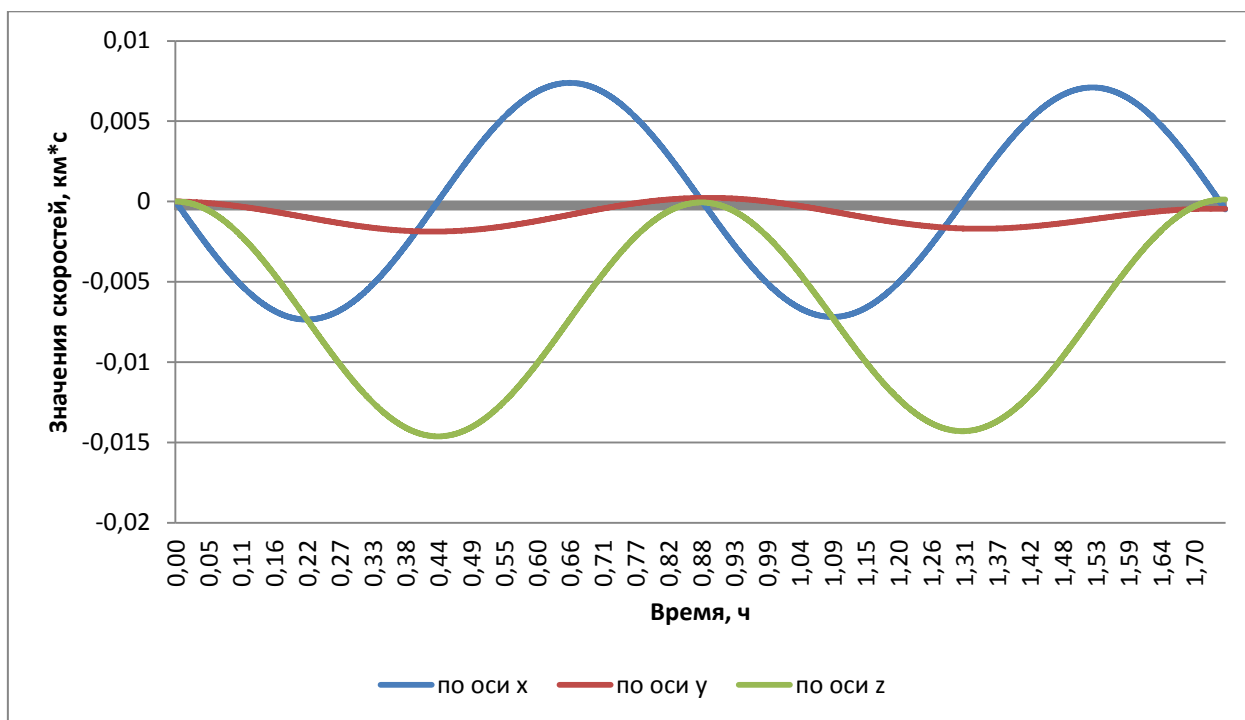


Рисунок 1.8 – График расхождения проекций скоростей ИСЗ по уравнениям Рунге-Кутты и Кеплера

Данные по размаху величин представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.3- амплитудные значения проекций скоростей

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,007351	-0,001872	-0,014625
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,00739	0,00023	0,00012

По результатам анализа графиков 1.1-1.3 отображающих Кеплерово невозмущенное движение КА в центральном поле, графиков 1.4 – 1.6 отображающих движение КА в центральном поле по численной модели, а также графиков 1.7 - 1.8 можно сделать вывод, что расхождение моделей не превышает 0,2 %, на основании чего можно применять в дальнейших расчетах численную модель и принять её за эталон.

1.5 Преобразование численной модели Рунге-Кутта

Для исследования точностных характеристик аналитической теории движения КА в поле сжатой Земли необходимо перевести численную модель из центрального поля в поле сжатой Земли. Для этого воспользуемся следующей формулой (1.20) [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{1i} = 1 \left(-\frac{398600,5(x_{i-1})}{((x_{i-1})^2+(y_{i-1})^2+(z_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \Delta f_1, \\ l_{1i} = 1 \left(-\frac{398600,5(y_{i-1})}{((x_{i-1})^2+(y_{i-1})^2+(z_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \Delta f_2, \\ m_{1i} = 1 \left(-\frac{398600,5(z_{i-1})}{((x_{i-1})^2+(y_{i-1})^2+(z_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \Delta f_3, \\ p_{1i} = 1\dot{x}_{i-1}, \\ q_{1i} = 1\dot{y}_{i-1}, \\ s_{1i} = 1\dot{z}_{i-1} \end{array} \right. \quad (1.20)$$

где Δf_n - это производная экваториального радиуса поля сжатой Земли по одной из осей: f_1 по оси X, f_2 по оси Y, f_3 по оси Z, определяемая по формуле (1.26):

$$\Delta f_n' x, y, z = \left(J_2 * \frac{\mu * R_э}{2} * \frac{3 * \sin(\varphi)^2 - 1}{r_0^3} \right)' \quad (1.21)$$

Для перехода из центрального поля Земли в поле C_{20} -необходимо пересчитать формулу (1.15) заменяя при расчете формулу (1.16) на формулу (1.20), данные формулы были выведены сотрудниками НПО ПМ Б.Н. Сухих и В.И. Кудымовым.

При изучении движения спутников применяют экваториальную систему координат, где основная плоскость- плоскость экватора планеты. Положение плоскости орбиты спутника в данном случае определяется углом наклона и

долготой восходящего узла. А в формуле (1.21) $\sin \varphi$ определяется по формуле (1.22):

$$\sin \varphi = \sin u + \sin i \quad (1.22)$$

Данные уравнения позволяют получить оскулирующие элементы КА в виде рядов, расположенных по степеням малого параметра, зависящего от сжатия Земли.

Воспользовавшись ранее приведенными формулами Рунге-Кутта, преобразовав их с помощью формул (1.19-1.21) получатся следующие значения параметров орбиты численной модели в поле сжатой Земли.

Определение координат и проекций скоростей КА модели Рунге-Кутта. График расчета координат x, y, z ИСЗ по численной модели в поле сжатой Земли и шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.9.

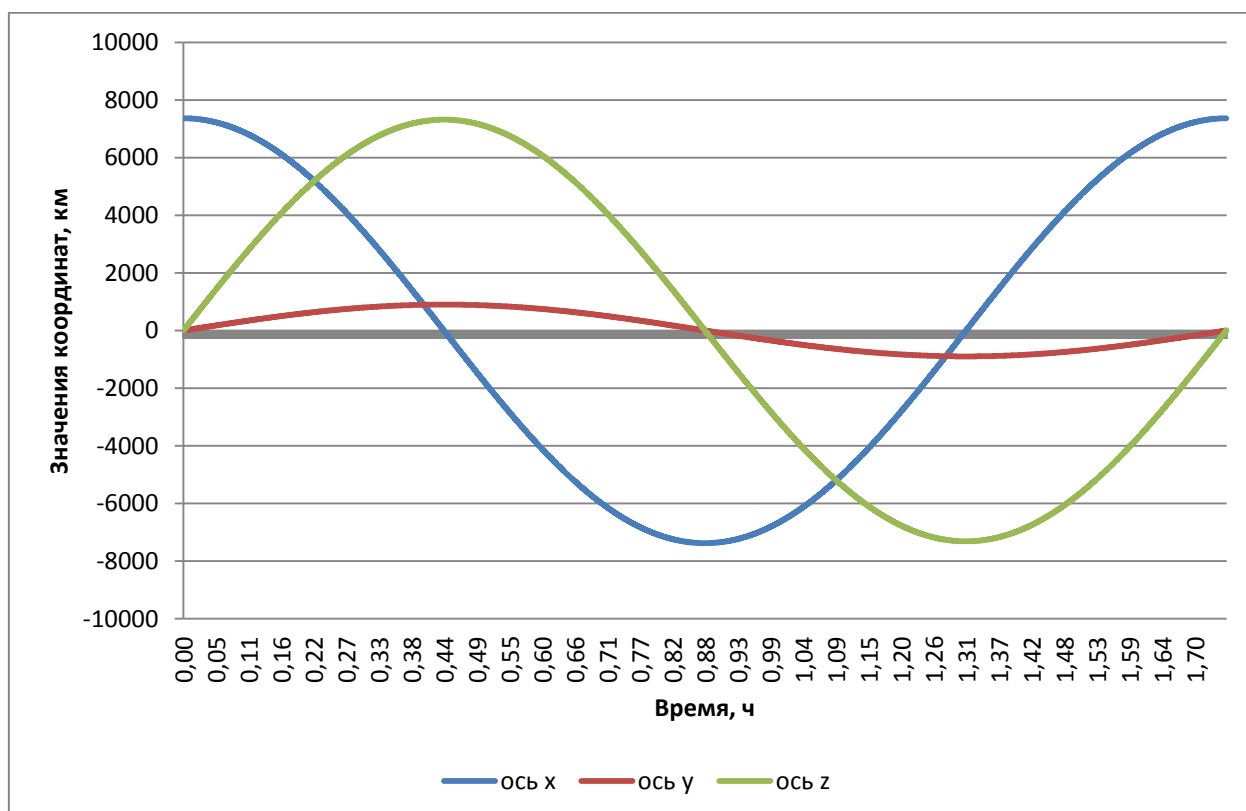


Рисунок 1.9 – График координат ИСЗ по уравнениям численной модели в поле сжатой Земли

График расчета проекций скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ по численной модели в поле сжатой Земли и шагом в 1 с, изображен на рисунке 1.10.

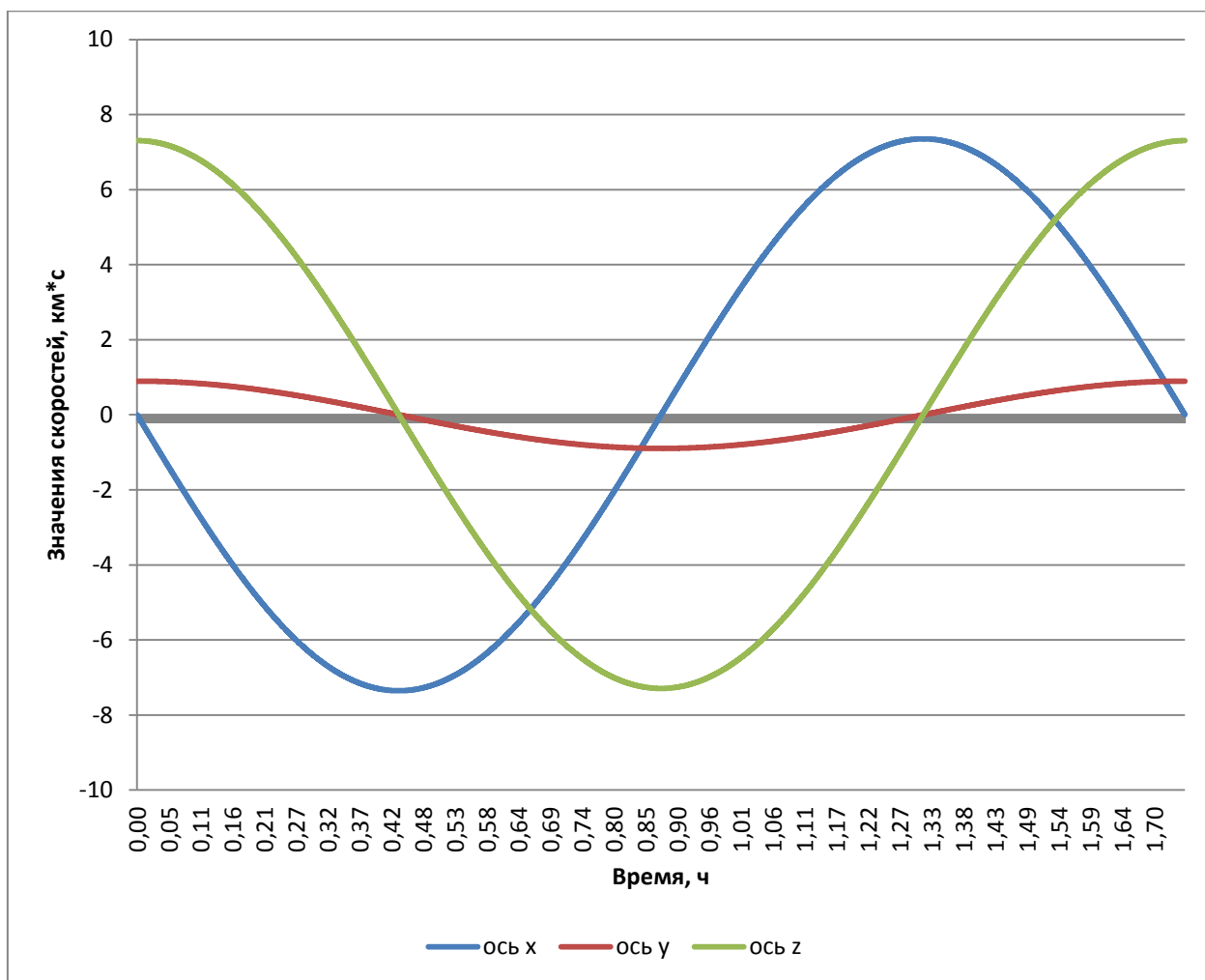


Рисунок 1.10 – График проекций скоростей ИСЗ по уравнениям Рунге-Кутты в поле сжатой Земли

Определив численную модель в поле сжатой Земли возможно перейти к построению аналитических моделей движения КА в данном поле.

2 Построение аналитических моделей в поле сжатой Земли

2.1 Виды аналитических моделей движения космического аппарата

Для того чтобы исследовать точностные характеристики аналитических моделей движения КА в поле сжатой Земли необходимо построить данные аналитические модели по следующим методикам:

- а) модели Проскурина-Батракова;
- б) модели Козаи;
- в) модели учитывающая возмущения второго порядка.

Первой рассмотрим модель Проскурина-Батракова.

2.2 Построение аналитической модели Проскурина-Батракова

Данная модель, разработанная В.Ф. Проскуриным и Ю.В. Батраковым, учитывает несферичность планеты, которая является основной причиной отклонения орбиты данной аналитической модели движения КА в сравнении с невозмущенным Кеплеровым движением. Данная модель использует метод вариации произвольных постоянных, что позволяет упростить переход от невозмущенного движения к реальному.

Нахождение возмущений параметров орбиты модели Проскурина-Батракова.

Возмущение δa имеет вид (2.1):

$$\begin{aligned} \delta a = a \left(2J \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left(e \cos M + \frac{3}{2} e^2 \cos 2M \right) + \right. \\ \left. + J \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 \sin^2 i \left(-\frac{1}{2} e \cos(M + 2\omega) \right) + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos(2M + 2\omega) + \right. \\ \left. + \frac{7}{2} e \cos(3M + 2\omega) + \frac{17}{2} e^2 \cos(4M + 2\omega) \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a – большая полуось;

J – параметр возмущения гармоника гравитационного поля, учитывающей сжатость земли;

e – эксцентриситет;

a^0 - средний радиус Земли;

M – эпоха;

ω – аргумент перицентра;

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta a = 7371 \left(0.00242 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 1.4486 \right) (0.001 \cos M + 0.0000015 \cos 2M) + \right. \\ \left. + 0.00121 \sin^2 1.4486 (-0.0005 \cos(M)) + 0.9999975 \cos(2M) + \right. \\ \left. + 0.0035 \cos(3M) + 0.0000085 \cos(4M) \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.1.

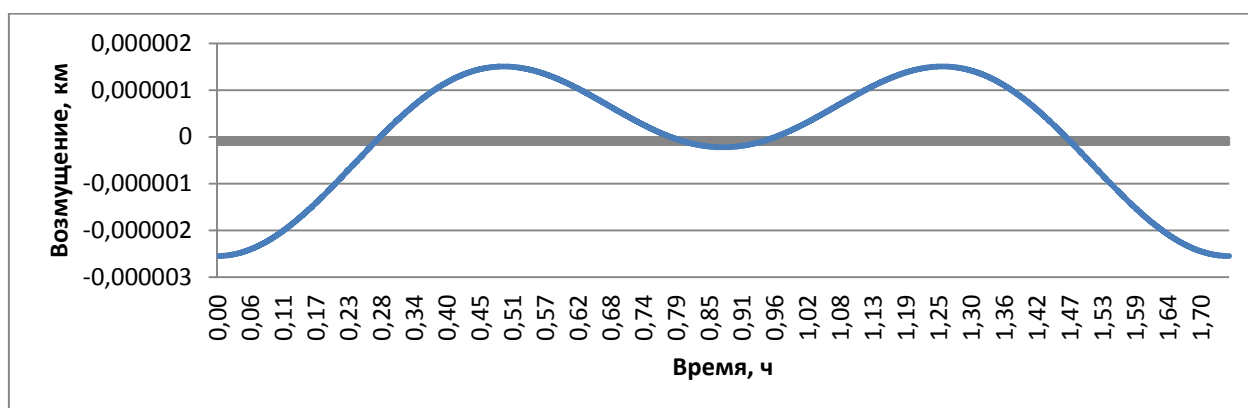


Рисунок 2.1 – График изменения параметра δa во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1- амплитудные значения параметра δa

Параметр	δa
Возмущение параметра макс., км	0,000001504
Возмущение параметра мин., км	-0,00000255

Возмущение δe имеет вид (2.3):

$$\begin{aligned}
\delta e = J \left(\frac{a}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) & \left[\left(1 + \frac{1}{8} e^2 \right) \cos M + \frac{3}{2} e \cos 2M + \frac{53}{24} e^2 \cos 3M \right] + \\
& + \frac{1}{2} J \left(\frac{a}{a} \right)^2 \sin^2 i \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8} e^2 \right) \cos(2M + 2\omega) \right) + \\
& + \frac{1}{16} e^2 \cos(M - 2\omega) - \frac{1}{2} e \cos(2M + 2\omega) + \\
& + \frac{7}{6} \left(1 - \frac{235}{56} e^2 \right) \cos(3M + 2\omega) + \\
& + \frac{17}{4} e \cos(4M + 2\omega) + \frac{169}{16} e^2 \cos(5M + 2\omega),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\delta e = 0.001213 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 1.4486 \right) & \left[\left(1 + \frac{1}{8} 0.001^2 \right) \cos M + 0.0015 \cos 2M + \right. \\
& + 0.00000252 \cos 3M \left. \right] + 0.000606 \sin^2 1.4486 (0.49999993 \cos(2M)) + \\
& + 0.0000000625 \cos(M) - 0.0005 \cos(2M) + \\
& + 1.1666 \cos(3M) + 0.00425 \cos(4M) + 0.00001056 \cos(5M),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.2.

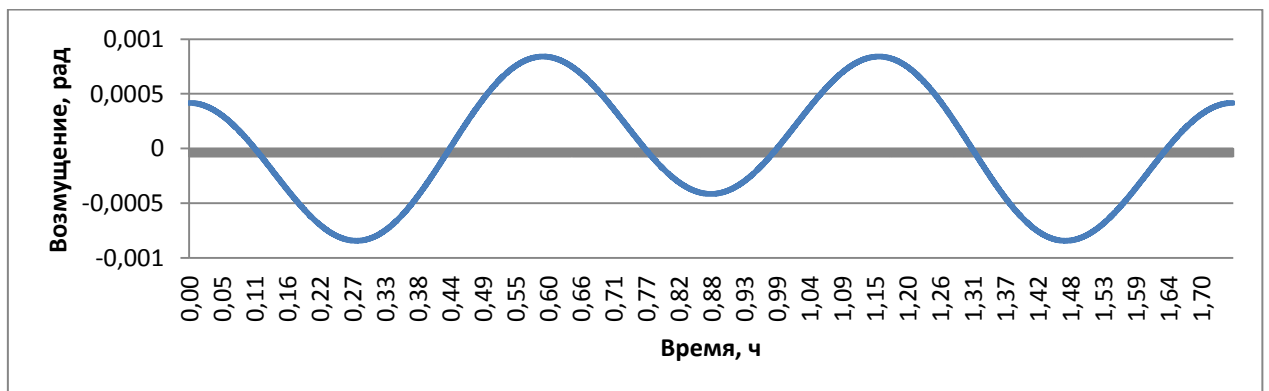


Рисунок 2.2 – График изменения параметра δe во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2- амплитудные значения параметра δe

Параметр	δe
Возмущение параметра макс., рад	0,000840827
Возмущение параметра мин., рад	-0,000842991

Возмущение δi имеет вид (2.5):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta i &= \frac{1}{2} J \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \sin^2 i \cos^2 i (-e \cos(M + 2\omega) + (1 - 2e^2) \cos(2M + 2\omega) + \\ &+ \frac{7}{3} e \cos(3M - 2\omega) + \frac{17}{4} e^2 \cos(4M + 2\omega) \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.5) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta i &= 0.000606 \sin^2 1.4486 \cos^2 1.4486 (-0.001 \cos(M) + 0.999998 \cos(2M) + \\ &+ 0.002333 \cos(3M) + 0.00000425 \cos(4M) \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.3.

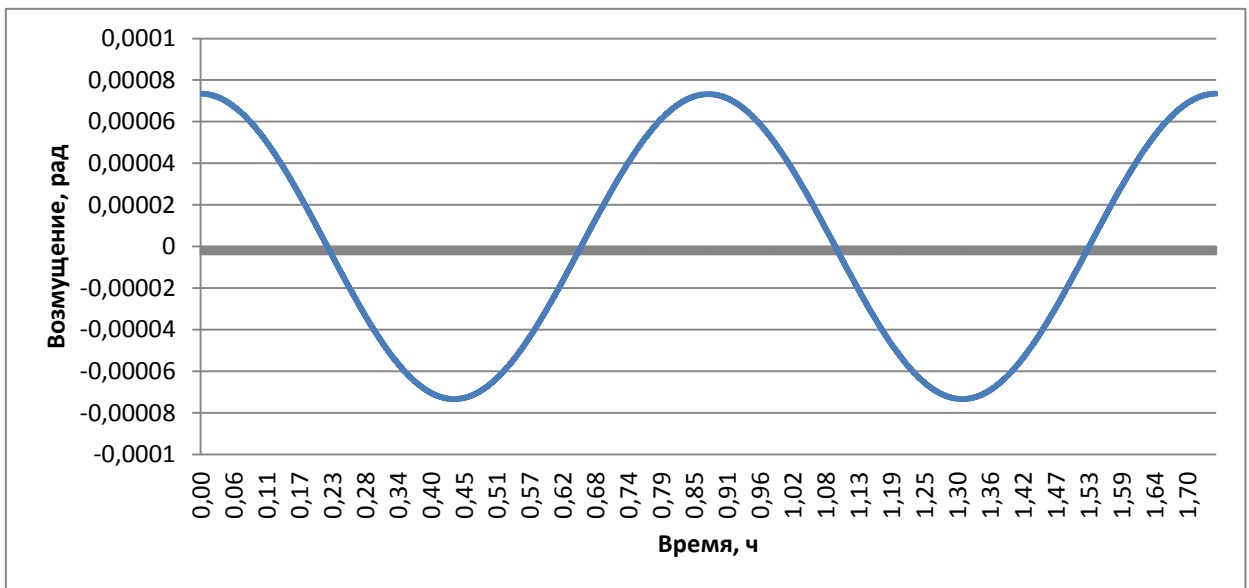


Рисунок 2.3 – График изменения параметра δi во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3- амплитудные значения параметра δi

Параметр	δi
Возмущение параметра макс., рад	0,00007345
Возмущение параметра мин., рад	-0,000073353

Возмущение $\delta\Omega$ имеет вид (2.7):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta\Omega = J \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cos i \left[(1 + 2e^2)nt + 3e \sin M + \frac{9}{4}e^2 \sin 2M + \frac{1}{2}e \sin(M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(1 - e^2) \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{6}e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8}e^2 \sin(4M + 2\omega) \right] \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.7) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta\Omega = 0,000606 \cos 1,4486 \left[0,29928 + 0,003 \sin M + 0,00000225 \sin 2M + \right. \\ \left. + 0,0005 \sin(M) - 0,4999 \sin(2M) - 0,00116 \sin(3M) - 0,000002125 \sin(4M) \right] \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.4.

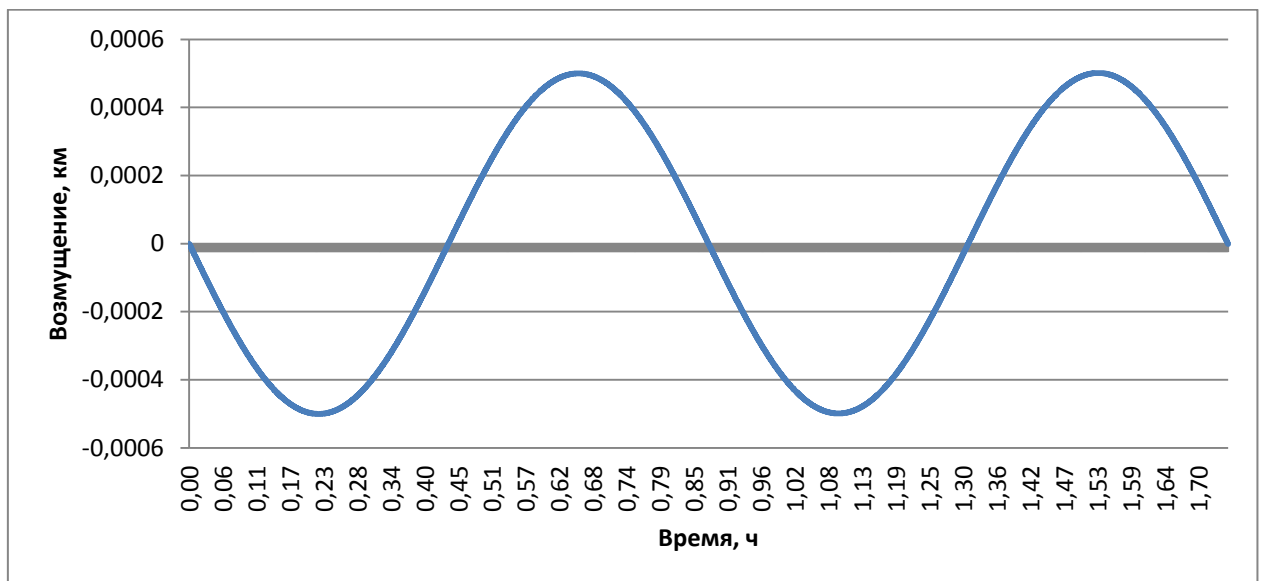


Рисунок 2.4 – График изменения параметра $\delta\Omega$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4- амплитудные значения параметра $\delta\Omega$

Параметр	$\delta\Omega$
Возмущение параметра макс., рад	0,000501285
Возмущение параметра мин., рад	-0,000500356

Возмущение $\delta\pi$ имеет вид (2.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\pi = -J \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left[(\cos i - \cos^2 i)(ent + 3e^2 \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin(M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}e \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{6}e^2 \sin(3M + 2\omega) \right] + \\ \left. + J \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i \right) \left[ent + \left(1 + \frac{23}{8}e^2 \right) \sin M + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}e \sin 2M + \frac{53}{24}e^2 \sin 3M \right] - \frac{1}{4}J \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sin^2 i \left[\left(1 - \frac{7}{8}e^2 \right) \sin(M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{1}{8}e^2 \sin(M - 2\omega) + 5e \sin(2M + 2\omega) - \frac{7}{3} \left(1 - \frac{397}{56}e^2 \right) \sin(3M + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{17}{2}e \sin(4M + 2\omega) - \frac{169}{8}e^2 \sin(5M + 2\omega) \right] \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.9) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\pi = -0.001213 [(\cos 1.4486 - \cos^2 1.4486)(0.000299 + 0.000003 \sin M + \\ + 0.0000005 \sin(M) - 0.0005 \sin(2M) - 0.000001166 \sin(3M))] + \\ + 0.001213 \left(1 - \frac{3}{2}1.4486 \right) [0.000299 + 1.000002875 \sin M + \\ + 0.0015 \sin 2M + 0.0000022 \sin 3M] - 0.000303 \sin^2 1.4486 [0.99999 \sin(M) - \\ - 0.000000125 \sin(M) + 0.005 \sin(2M) - 2.33331 \sin(3M) - \\ - 0.0085 \sin(4M) - 0.0000211 \sin(5M)] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.5.

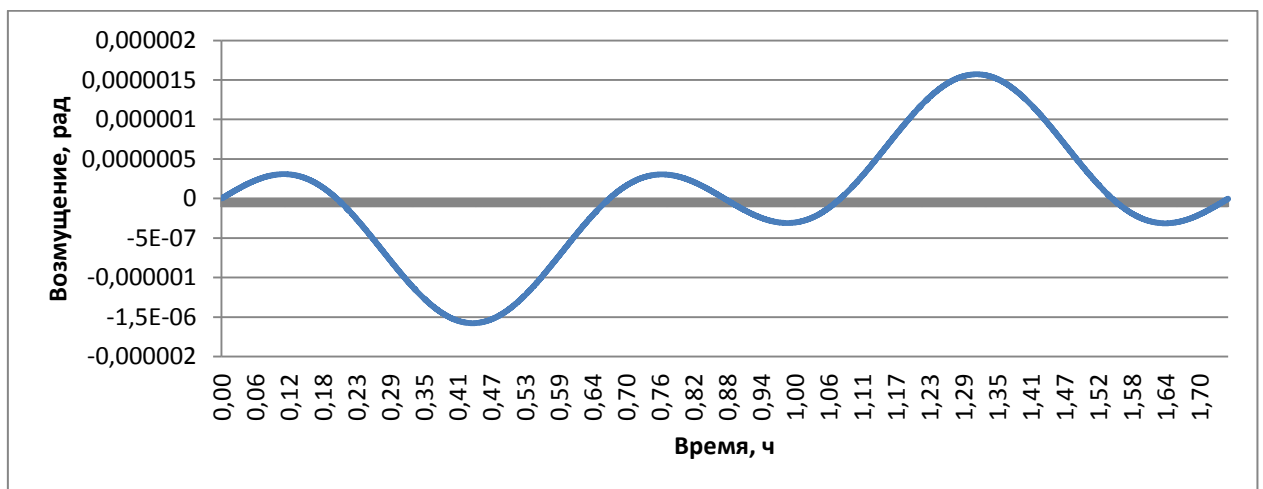


Рисунок 2.5 – График изменения параметра $\delta\pi$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5- амплитудные значения параметра $\delta\pi$

Параметр	$\delta\pi$
Возмущение параметра макс., рад	0,000001572
Возмущение параметра мин., рад	-0,000001576

Возмущение $\delta\varepsilon$ имеет вид (2.11):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta\varepsilon = & 2J \left(\frac{a}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left[\left(1 + \frac{7}{4} e^2\right) nt + \frac{13}{4} e \sin M + \frac{21}{8} e^2 \sin 2M \right] + \\ & + 3J \left(\frac{a}{a}\right)^2 \sin^2 i \left[-\frac{13}{24} e \cos(M + 2\omega) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{35}{12} e^2\right) \sin(M + 2\omega) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{91}{82} e \sin(3M + 2\omega) + \frac{119}{48} e^2 \sin(4M + 2\omega) \right] - \\ & - J \left(\frac{a}{a}\right)^2 (\cos i - \cos^2 i) \left[(1 + 2e^2) nt + 3e \sin M + \frac{9}{4} e^2 \sin 2M + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} e \sin(M + 2\omega) - \frac{1}{2} (1 - e^2) \sin(2M + 2\omega) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{7}{6} e \sin(3M + 2\omega) - \frac{17}{8} e^2 \sin(4M + 2\omega) \right] \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.11) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta\varepsilon = & 0.002426 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 1.4486\right) [0.2992 + 0.00325 \sin M + \\ & + 0.00000262 \sin 2M] + 0.003638 \sin^2 1.4486 [-0.000541 \cos(M) + \\ & + 0.4999 \sin(M) + 0.0011 \sin(3M) + 0.0000024 \sin(4M)] - \\ & - 0.001213 (\cos 1.4486 - \cos^2 1.4486) [0.2992 + \\ & + 0.003 \sin M + 0.00000225 \sin 2M + 0.0005 \sin(M) - 0.4999 \sin(2M) - \\ & - 0.001166 \sin(3M) - 0.000002125 \sin(4M)] \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.6.

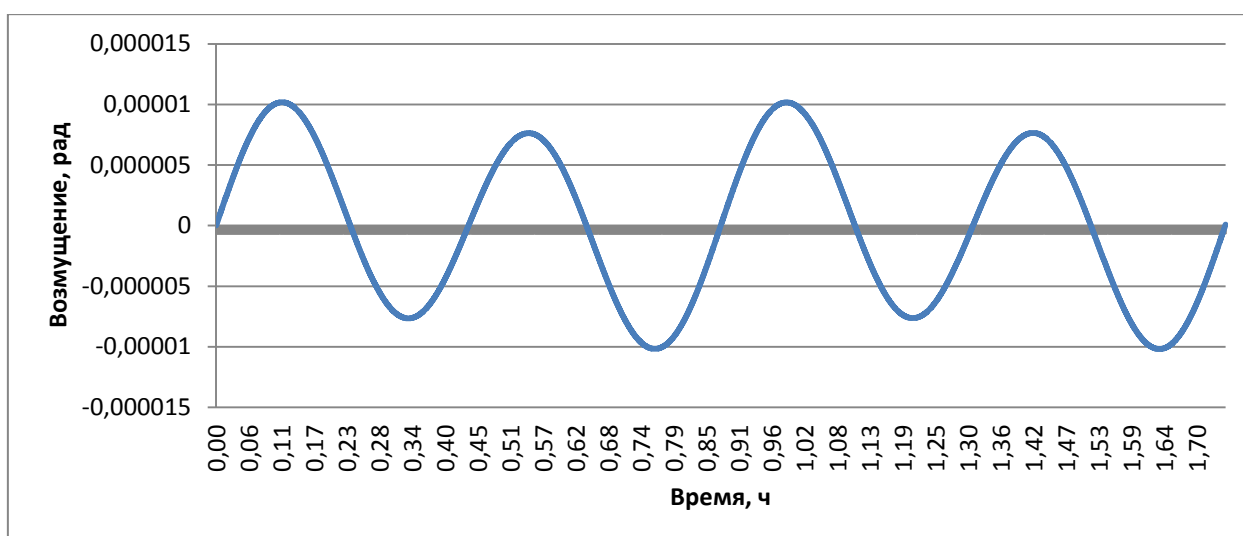


Рисунок 2.6 – График изменения параметра $\delta\varepsilon$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.6.

Таблица 2.6- амплитудные значения параметра $\delta\varepsilon$

Параметр	$\delta\varepsilon$
Возмущение параметра макс., рад	0,000010181
Возмущение параметра мин., рад	-0,000010182

Нахождение вековых возмущений.

Вековые возмущения являются наиболее важными среди возмущений первого порядка, ввиду того что они возрастают пропорционально времени. Ввиду этого вековые возмущения требуется вычислять с большей точностью, чем периодические возмущения [1].

Для нахождения вековых возмущения удобнее вместо элементов Ω и ε ввести элементы ω и M_0 , которые определяются по формулам (2.13-2.14):

$$\omega = \pi - \Omega \quad (2.13)$$

$$M_0 = \varepsilon - \pi \quad (2.14)$$

График изменения параметра возмущения $\delta\omega$ изображен на рисунке 2.7.

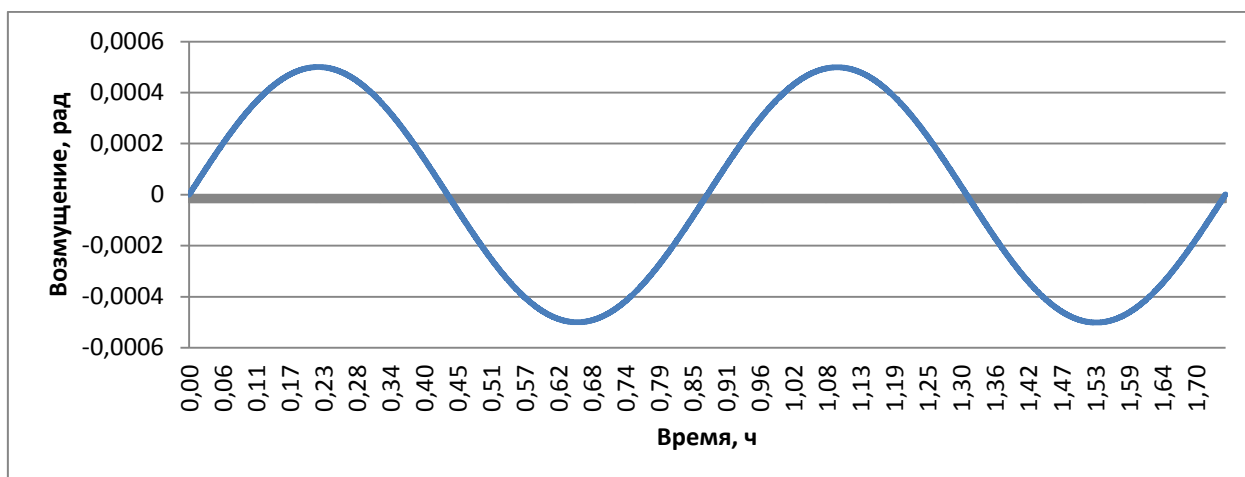


Рисунок 2.7 – График изменения параметра $\delta\omega$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7- амплитудные значения параметра $\delta\omega$

Параметр	$\delta\omega$
Возмущение параметра макс., рад	0,0005
Возмущение параметра мин., рад	-0,0005

График изменения параметра возмущения M_0 изображен на рисунке 2.8.

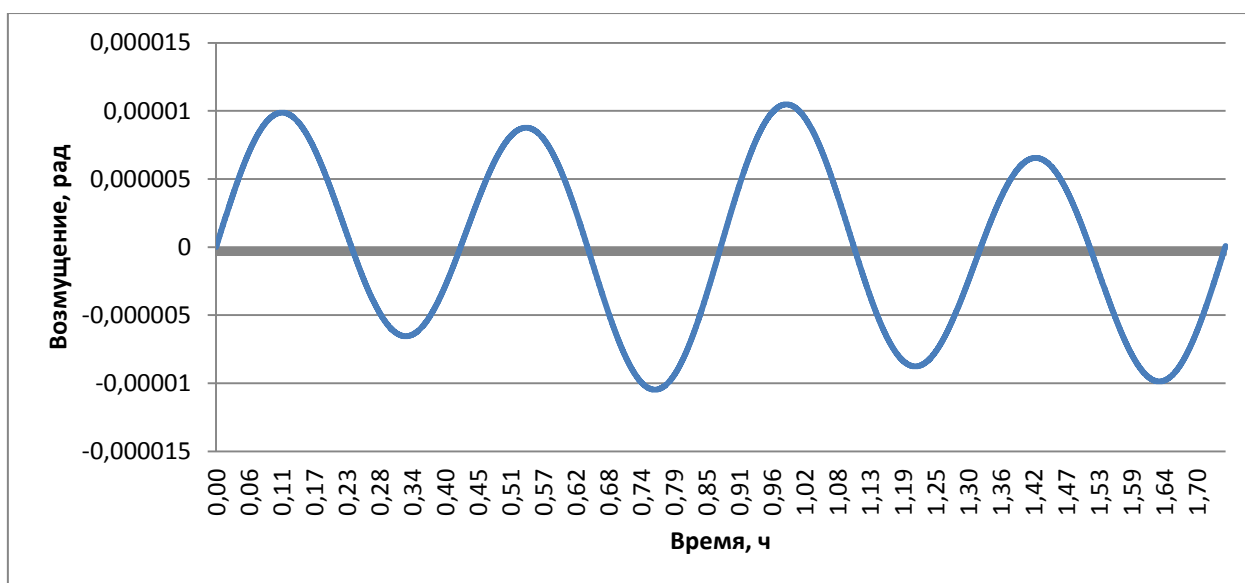


Рисунок 2.8 – График изменения параметра M_0 во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.8.

Таблица 2.8- амплитудные значения параметра M_0

Параметр	M_0
Возмущение параметра макс., рад	0,000010477
Возмущение параметра мин., рад	-0,000010474

Нахождение вековых возмущений Ω , ω , M_0 по формуле (2.15):

$$\begin{cases} \delta\Omega_{\text{век}} = -J \left(\frac{a}{a}\right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} n, \\ \delta\omega_{\text{век}} = \frac{1}{2} J \left(\frac{a}{a}\right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2} n, \\ \delta M_0_{\text{век}} = \frac{1}{2} J \left(\frac{a}{a}\right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2} n. \end{cases} \quad (2.15)$$

Вековые возмущения постоянные и накапливаются с течением времени.

Полученные значения вековых возмущений приведены в таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Вековые возмущения модели Проскурина-Батракова

Элемент	Значение, рад
Ω вековая	-0,0000001475
ω вековая	-0,0000005600
M_0 вековая	-0,0000005780

Нахождение полных параметров орбит.

Представление итоговых параметров орбиты описывается формулой (2.16):

$$\begin{cases} a = a_0 + \delta a \\ e = e_0 + \delta e \\ i = i_0 + \delta i \\ \Omega = \Omega_0 + \delta\Omega + \delta\Omega_{\text{век}} \\ \omega = \omega_0 + \delta\omega + \delta\omega_{\text{век}} \\ M_0 = M_0 + \delta M_0 + \delta M_0_{\text{век}} \end{cases} \quad (2.16)$$

График изменения полного параметра a во времени изображен на рисунке 2.9.

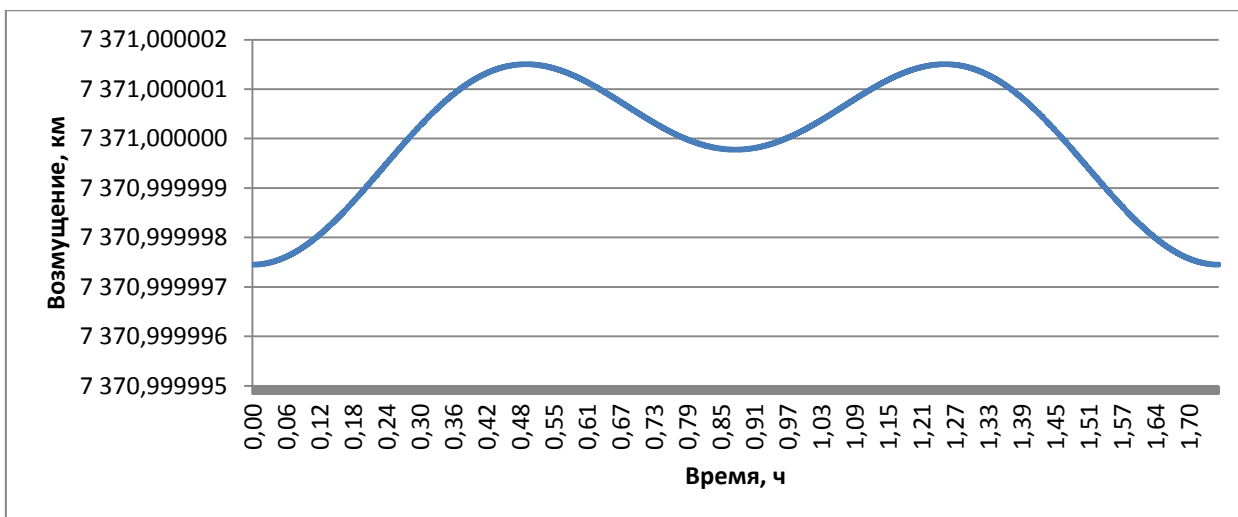


Рисунок 2.9 – График изменения полного параметра a во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.10.

Таблица 2.10- амплитудные значения параметра a

Параметр	a
Возмущение параметра макс., км	7371,0000015
Возмущение параметра мин., км	7370,9999975

График изменения полного параметра e изображен на рисунке 2.10.

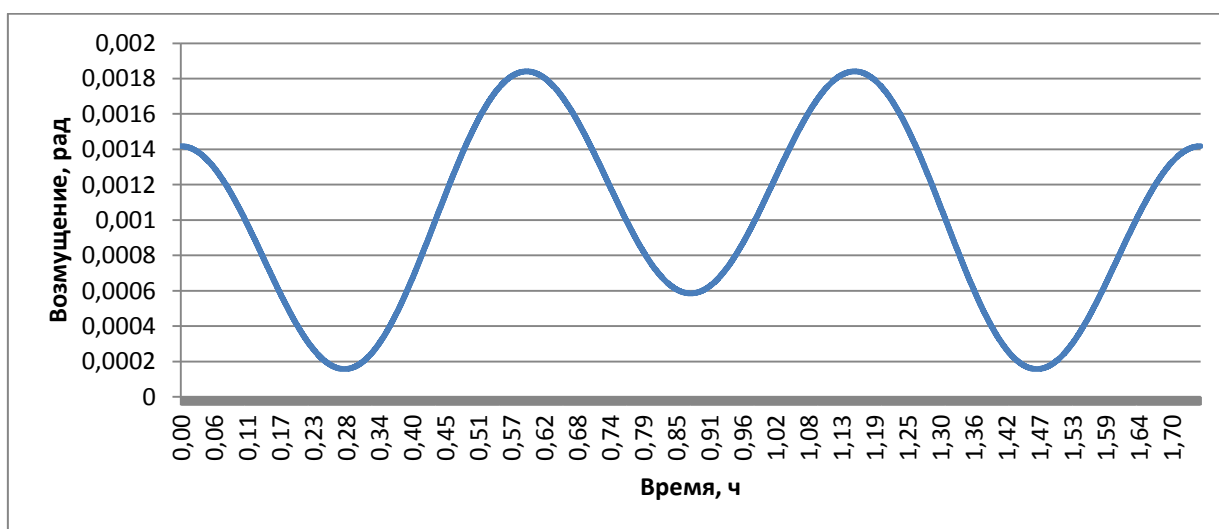


Рисунок 2.10 – График изменения полного параметра e во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.11.

Таблица 2.11- амплитудные значения параметра e

Параметр	e
Возмущение параметра макс., рад	0,001841
Возмущение параметра мин., рад	0,000157

График изменения полного параметра i изображен на рисунке 2.11.

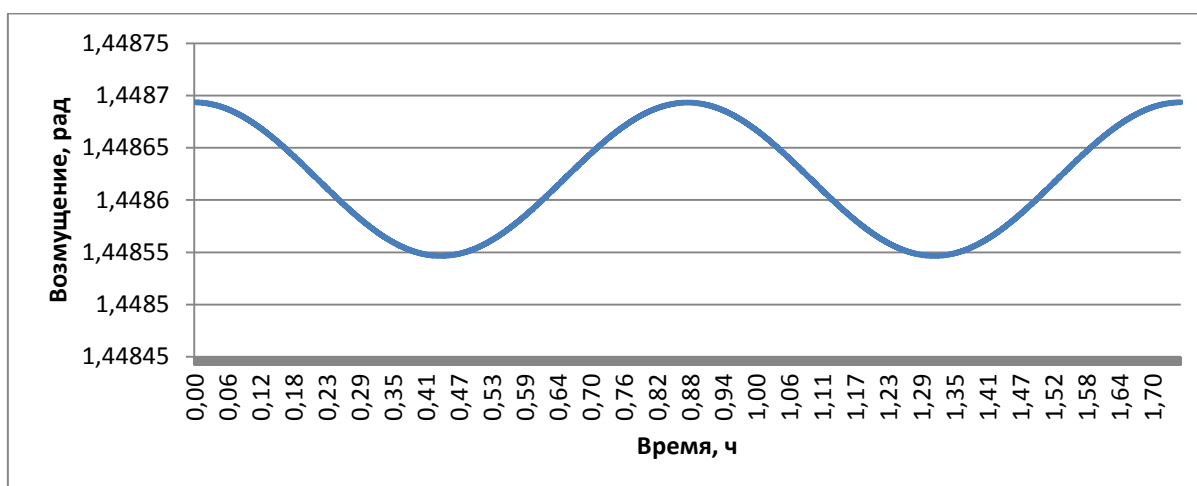


Рисунок 2.11 – График изменения полного параметра i во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.12.

Таблица 2.12- амплитудные значения параметра i

Параметр	i
Возмущение параметра макс., рад	1,448693
Возмущение параметра мин., рад	1,448547

График изменения полного параметра Ω изображен на рисунке 2.12.

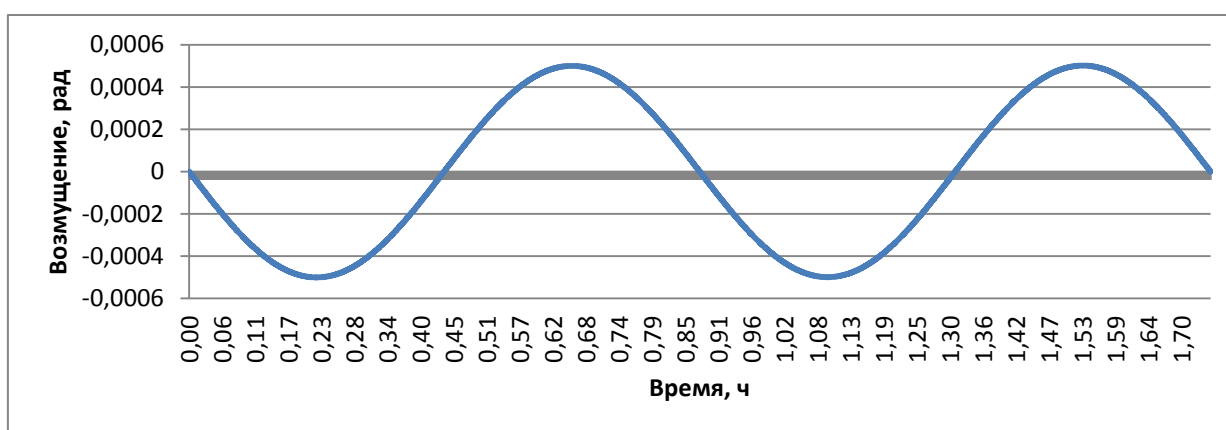


Рисунок 2.12 – График изменения полного параметра Ω во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.13.

Таблица 2.13- амплитудные значения параметра Ω

Параметр	Ω
Возмущение параметра макс., рад	0,000501
Возмущение параметра мин., рад	-0,0005

График изменения полного параметра ω изображен на рисунке 2.13.

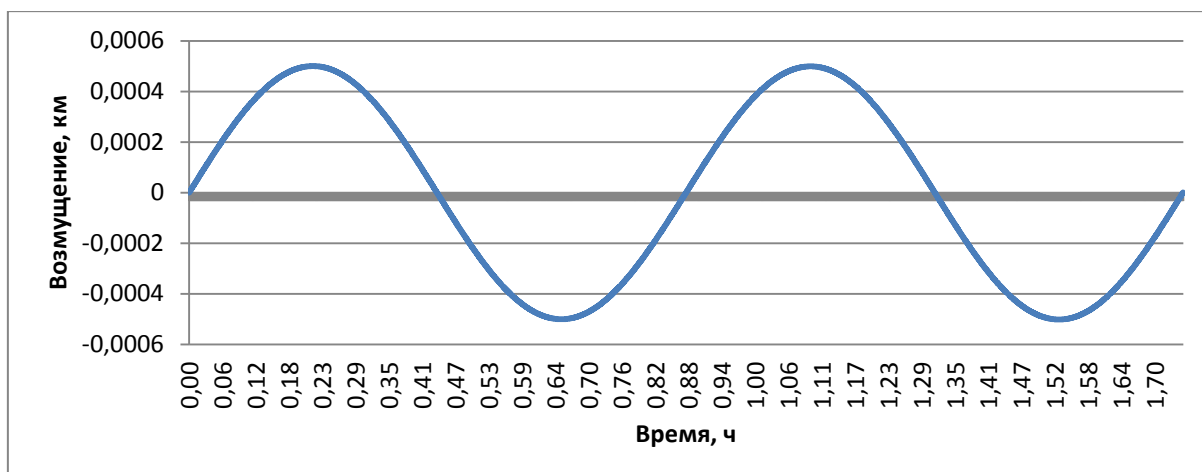


Рисунок 2.13 – График изменения полного параметра ω во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.14.

Таблица 2.14- амплитудные значения параметра ω

Параметр	ω
Возмущение параметра макс., рад	0,000499669
Возмущение параметра мин., рад	-0,000501723

График изменения полного параметра M_0 изображен на рисунке 2.14.

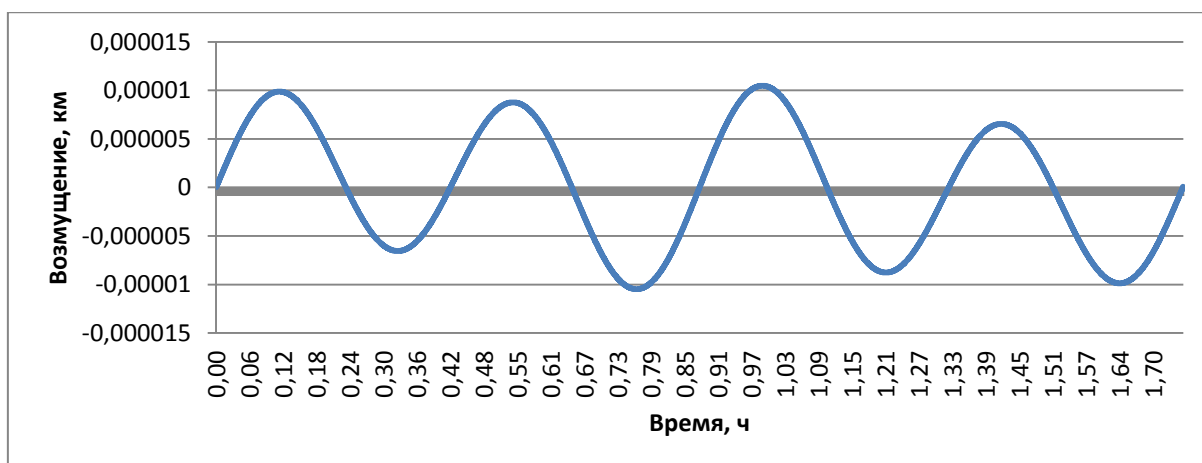


Рисунок 2.14 – График изменения полного параметра M_0 во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.15.

Таблица 2.15- амплитудные значения параметра M_0

Параметр	M_0
Возмущение параметра макс., рад	1,000009899
Возмущение параметра мин., рад	-1,000011052

Определение координат и проекций скоростей КА модели Проскурина-Батракова. Определяются координаты и проекции скоростей ИСЗ по формулам (1.1 - 1.12).

Графики координат ИСЗ для модели Проскурина-Батракова изображены на рисунке 2.15.

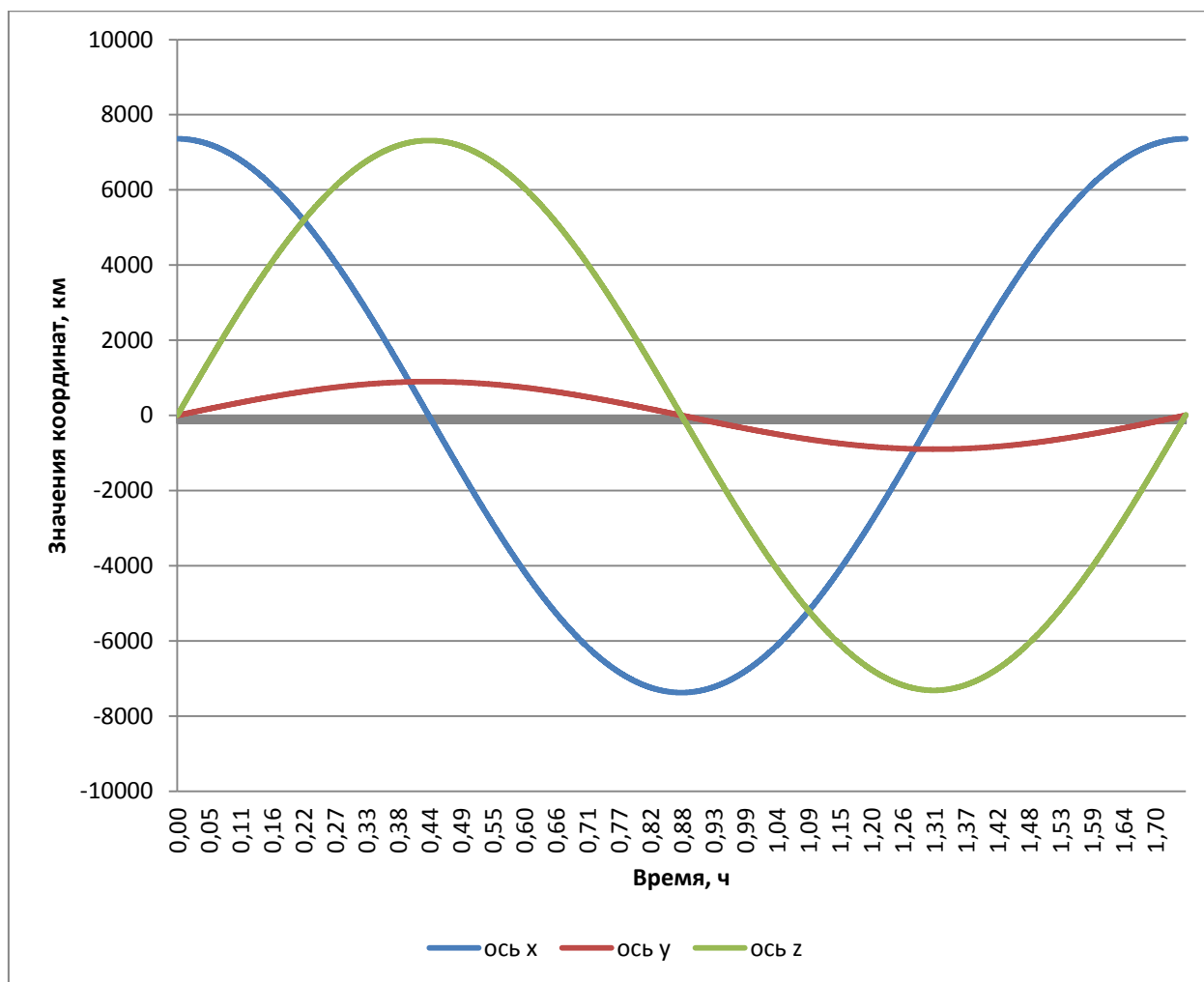


Рисунок 2.15 – График изменения координат ИСЗ во времени для модели Проскурина-Батракова

Данные по размаху величин представлены в таблице 2.16.

Таблица 2.16- амплитудные значения параметров высоты орбиты

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Высота орбиты мин. значение, км	7360,55	898,859	7315,984
Высота орбиты макс. значение, км	-7375,31	-898,859	-7315,98

Графики проекций скоростей ИСЗ для модели Проскурина-Батракова изображены на рисунке 2.16.

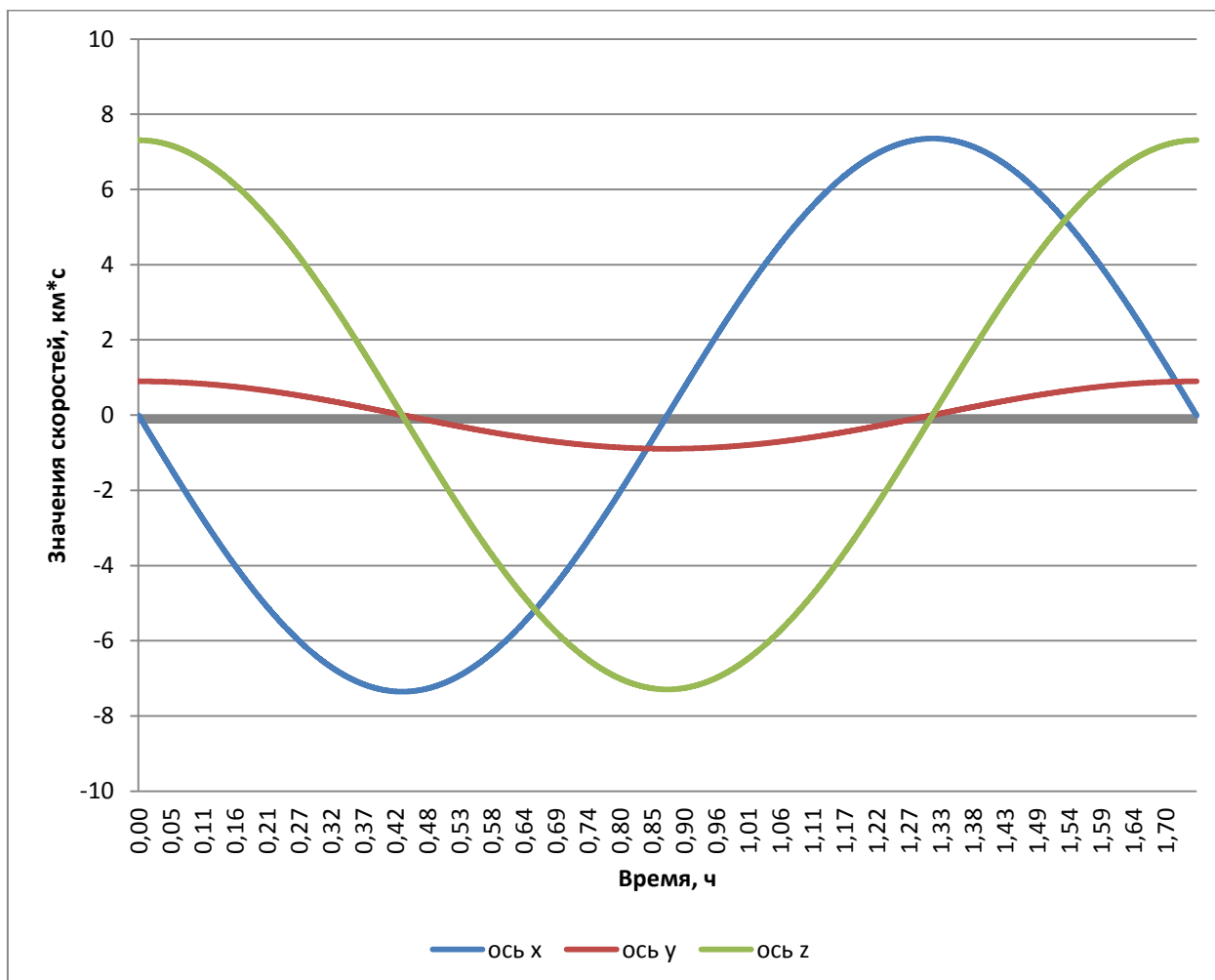


Рисунок 2.16 – График изменения проекций скоростей ИСЗ во времени для модели Проскурина-Батракова

Данные по размаху величин представлены в таблице 2.17.

Таблица 2.17- амплитудные значения параметров проекций скоростей

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Проекция скорости мин. значение, км*с	7,3537	0,896948	7,309297
Проекция скорости макс. значение, км*с	-7,3537	-0,89516	-7,29468

2.3 Построение аналитической модели движения Козаи

Аналитическая модель движения небесных тел созданная астрономом Козаи предусматривает учет вековых и периодических возмущений гравитационного поля Земли в гармонике с индексом «20» учитывающей максимальное влияние гравитационного сжатия Земли по полюсам. Для построения данной модели необходимо использовать нижеизложенные выражения, которые являются замкнутыми выражениями как относительно эксцентриситета (e) так и относительно наклона орбиты (i) [1].

Для учета возмущенного движения определим возмущения в элементах орбиты. При нахождении возмущений принимается следующее: $p = a(1 - e^2)$.

Нахождение возмущений параметров орбиты модели Козаи

Возмущение $\delta_2 a$ имеет вид (2.17):

$$\delta_2 a = \left(\frac{a}{a}\right)^2 J \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left(\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \right) + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 i \cos 2(v + \omega) \right] \quad (2.17)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.18) примет следующий вид:

$$\delta_2 a = 0.001213 \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 1.4486\right) 0.003 + 1.003 \sin^2 i \cos 2(v) \right] \quad (2.19)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.16.

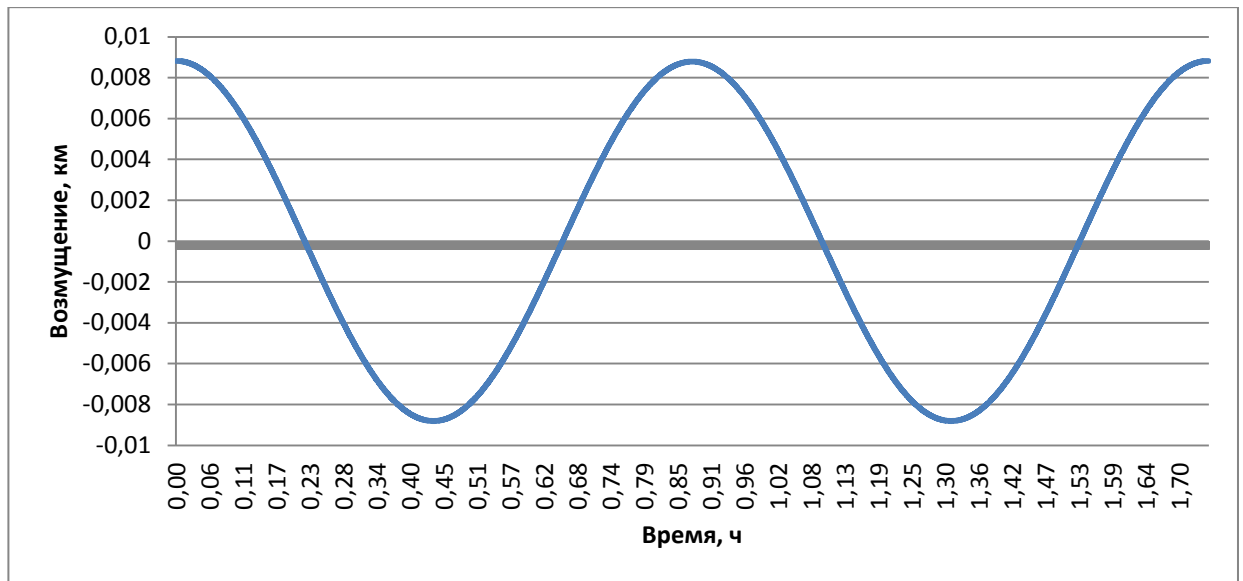


Рисунок 2.16 – График изменения параметра $\delta_2 a$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.17.

Таблица 2.17- амплитудные значения параметра $\delta_2 a$

Параметр	$\delta_2 a$
Возмущение параметра макс., км	0,008825
Возмущение параметра мин., км	-0,00881

Возмущение $\delta_2 e$ имеет вид (2.20):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 e &= \frac{1-e^2}{e} \frac{a^2}{a^2} J \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left(\left(\frac{a}{r} \right)^3 - (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(v + \omega) \right] - \\ &- \frac{\sin^2 i}{2e} \frac{a^2}{ap} J \left(\cos 2(v + \omega) + e \cos(v + 2\omega) + \frac{1}{3} e \cos(3v + 2\omega) \right) \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.21) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 e &= 1.212 \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 1.4486 \right) 0.003 + 0.501 \sin^2 i \cos(2v) \right] - \\ &- 0.597(\cos(2v) + 0.001 \cos(v) + 0.000333 \cos(3v)) \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.17.

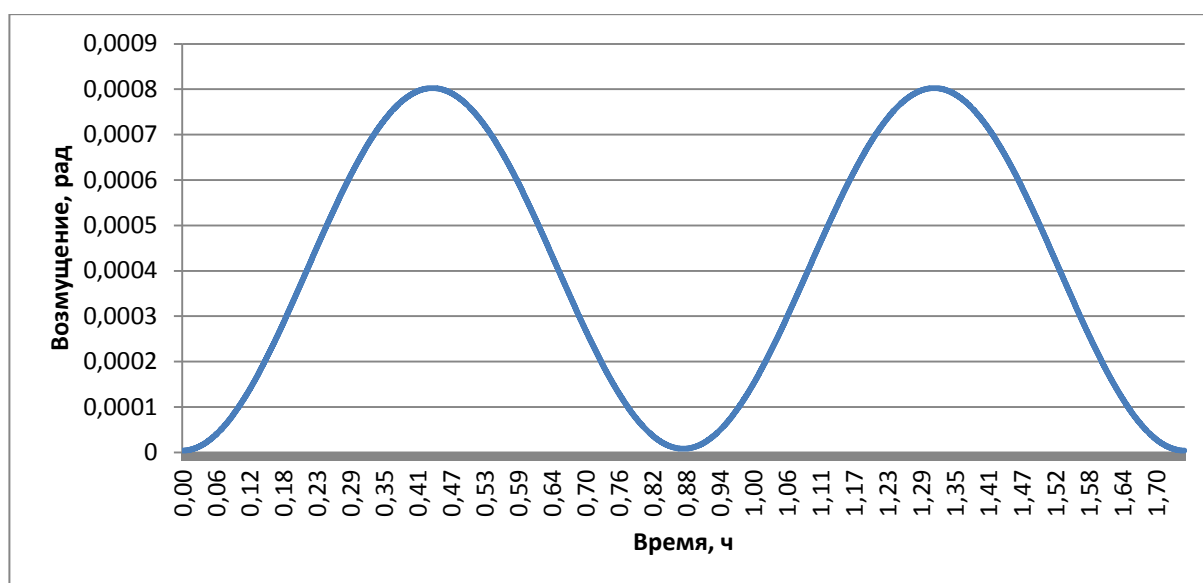


Рисунок 2.17 – График изменения параметра $\delta_2 e$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.18.

Таблица 2.18- амплитудные значения параметра $\delta_2 e$

Параметр	$\delta_2 e$
Возмущение параметра макс., рад	0,000802527
Возмущение параметра мин., рад	0,000004011

Возмущение $\delta_2 i$ имеет вид (2.22):

$$\left\{ \delta_2 i = \frac{1}{4} \frac{a^2}{a} J \sin 2i \left(\cos 2(v + \omega) + e \cos(v + 2\omega) + \frac{1}{3} e \cos(3v + 2\omega) \right) \right. \quad (2.22)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.22) примет следующий вид:

$$\left\{ \delta_2 i = 0.00007335(\cos(2v) + 0.001 \cos(v) + 0.000333 \cos(3v)) \right. \quad (2.23)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.18.

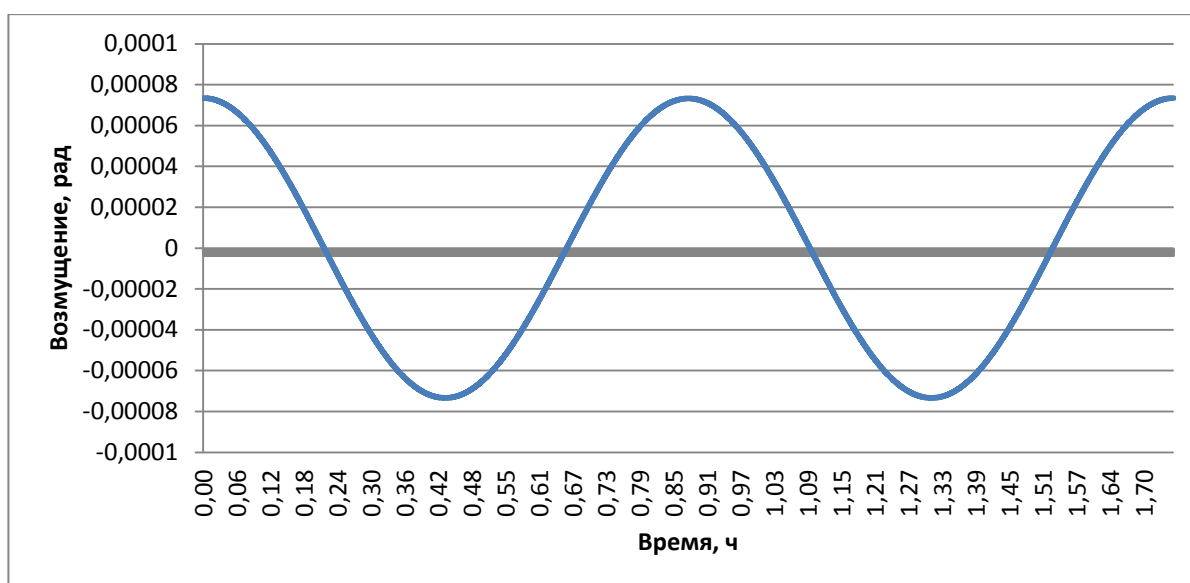


Рисунок 2.18 – График изменения параметра $\delta_2 i$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.19.

Таблица 2.19- амплитудные значения параметра $\delta_2 i$

Параметр	$\delta_2 i$
Возмущение параметра макс., рад	0,00007345
Возмущение параметра мин., рад	-0,000073353

Возмущение $\delta_2 \omega$ имеет вид (2.15):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 \omega = & \left(\frac{a}{p}\right)^2 J \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) (v - M + e \sin v) + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left(\frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{4} e^2\right) \sin v\right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sin 2v + \frac{e}{12} \sin 3v \left. - \frac{1}{e} \left(\frac{1}{4} \sin^2 i + \left(\frac{1}{2} - \frac{15}{16} \sin^2 i\right) e^2\right) \sin(3v + 2\omega) + \right. \\ & + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin(v - 2\omega) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \sin 2(v + \omega) + \quad (2.24) \\ & + \frac{1}{e} \left(\frac{7}{12} \sin^2 i - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{19}{8} \sin^2 i\right) e^2\right) \sin(3v + 2\omega) + \frac{3}{8} \sin^2 i \sin(4v + 2\omega) + \\ & \left. + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin(5v + 2\omega) \right] \end{aligned} \right.$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.24) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 \omega = & 0.0012 \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 1.448 \right) (v + 0.001 \sin v) + \right. \\ & + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 1.448 \right) (999.99975 \sin v) + \frac{1}{2} \sin 2v + 0.000083 \sin 3v \left. \right] - \\ & - 1000 \left(\frac{1}{4} \sin^2 0.001 + \left(\frac{1}{2} - \frac{15}{16} \sin^2 1.4486 \right) 0.000001 \right) \sin(3v) + \\ & + 0.0000625 \sin^2 1.4486 \sin(v) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 1.4486 \right) \sin 2(v) + \\ & + 1000 \left(\frac{7}{12} \sin^2 1.4486 - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{19}{8} \sin^2 1.4486 \right) e^2 \right) \sin(3v) + \\ & \left. + \frac{3}{8} \sin^2 1.4486 \sin(4v) + 0.0000625 \sin^2 1.4486 \sin(5v) \right] \end{aligned} \right. \quad (2.25)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.19.

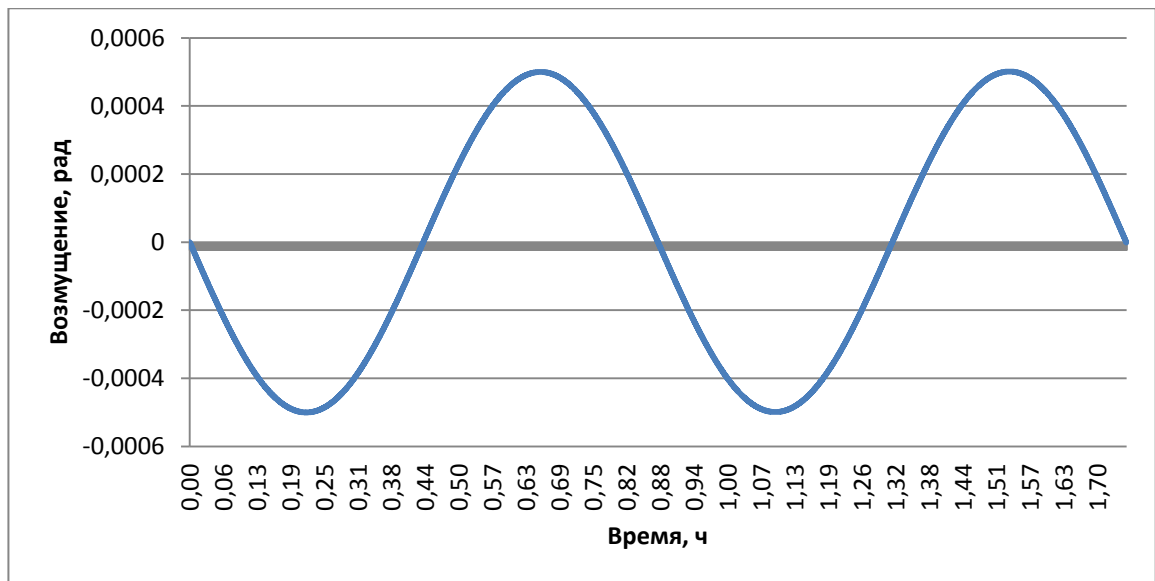


Рисунок 2.19 – График изменения параметра $\delta_2 \omega$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.20.

Таблица 2.20- амплитудные значения параметра $\delta_2 \omega$

Параметр	$\delta_2 \omega$
Возмущение параметра макс., рад	0,000501
Возмущение параметра мин., рад	-0,0005

Возмущение $\delta_2\Omega$ имеет вид (2.26):

$$\delta_2\Omega = -\frac{a^2}{a} J \cos i \left(v - M + e \sin v - \frac{1}{2} \sin 2(v + \omega) - \frac{e}{2} \sin(v + 2\omega) - \frac{e}{6} \sin(3v + 2\omega) \right) \quad (2.26)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.26) примет следующий вид:

$$\delta_2\Omega = -0.00121 \cos 1.448 \left(v + 0.001 \sin v - \frac{1}{2} \sin 2v - 0.0005 \sin(v) - 0.00016 \sin 3v \right) \quad (2.27)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.20.

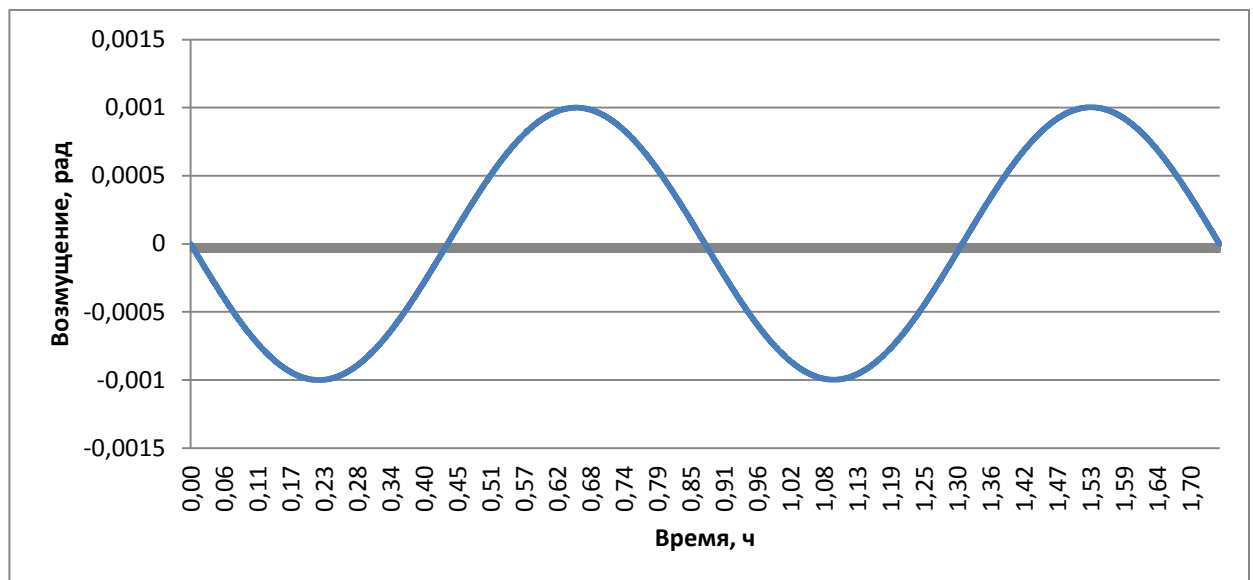


Рисунок 2.20 – График изменения параметра $\delta_2\Omega$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.21.

Таблица 2.21- амплитудные значения параметра $\delta_2\Omega$

Параметр	$\delta_2\Omega$
Возмущение параметра макс., рад	0,001003
Возмущение параметра мин., рад	-0,001

Возмущение $\delta_2 M$ имеет вид (2.28):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 M = \frac{a^2}{p^2} J \sqrt{1-e^2} & \left(- \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left(\left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \sin v + \frac{e}{2} \sin 2v + e^2 \sin 3v \right) + \right. \\ & + \sin^2 i \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{5}{4} e^2 \right) \sin(v + 2\omega) - \frac{e^2}{16} \sin(v - 2\omega) - \frac{7}{12} \left(1 - \frac{e^2}{28} \right) \sin(3v + 2\omega) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{8} e \sin(4v + 2\omega) - \frac{e^2}{16} \sin(5v + 2\omega) \right) \right) \end{aligned} \right. \quad (2.28)$$

Подставляя значения параметров орбит и формула (2.28) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 M = 0.001213 & \left(- \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 1.4486 \right) (0.99 \sin v + 0.0005 \sin 2v + 0.000001 \sin 3v) + \right. \\ & + 0.2462 \sin(v + 2\omega) - 0.0000000625 \sin(v) - 0.58333 \sin(3v) - \\ & \left. - 0.000375 \sin(4v) - 0.0000000625 \sin(5v) \right) \end{aligned} \right. \quad (2.29)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.21.

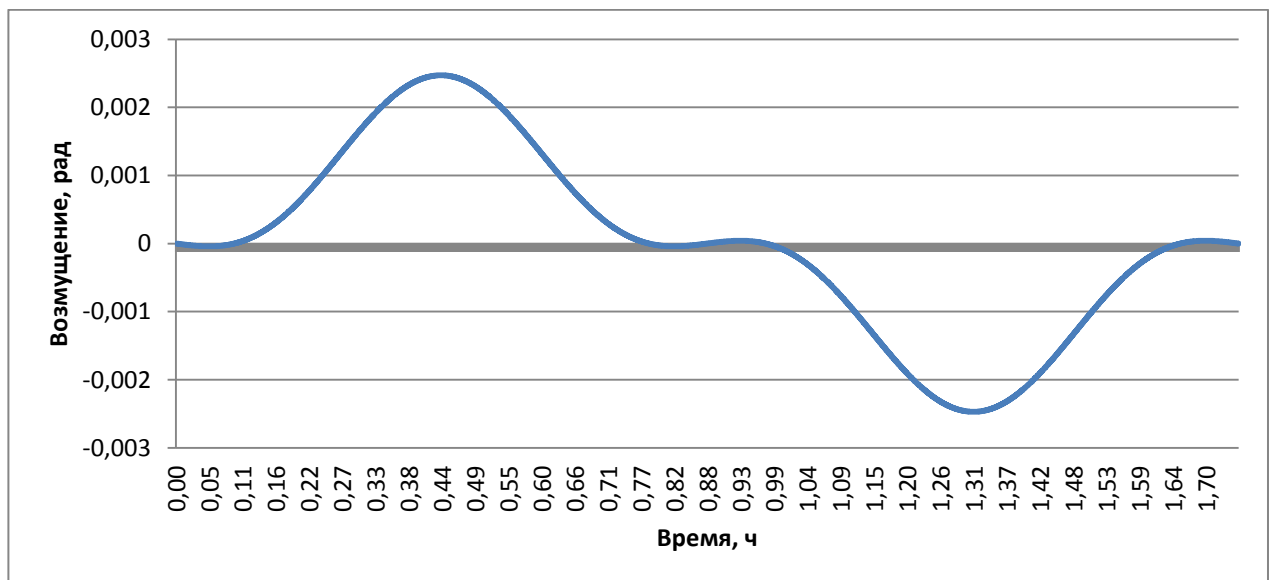


Рисунок 2.21 – График изменения параметра $\delta_2 M$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.22.

Таблица 2.22- амплитудные значения параметра $\delta_2 M$

Параметр	$\delta_2 M$
Возмущение параметра макс., рад	0,002471
Возмущение параметра мин., рад	-0,00247

Нахождение вековых возмущений модели Козаи. Формулы для нахождения вековых возмущений $\delta_1 \Omega$, $\delta_1 \omega$, $\delta_1 M_0$ имеют вид (2.30):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \Omega = -\frac{a^2}{p^2} J n t \cos i \\ \delta_1 \omega = -\frac{a^2}{p^2} J n t \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \\ \delta_1 M_0 = -\frac{a^2}{p^2} J n t \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1 - e^2} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

График изменения вековых возмущений $\delta_1 \Omega$ изображен на рисунке 2.22.

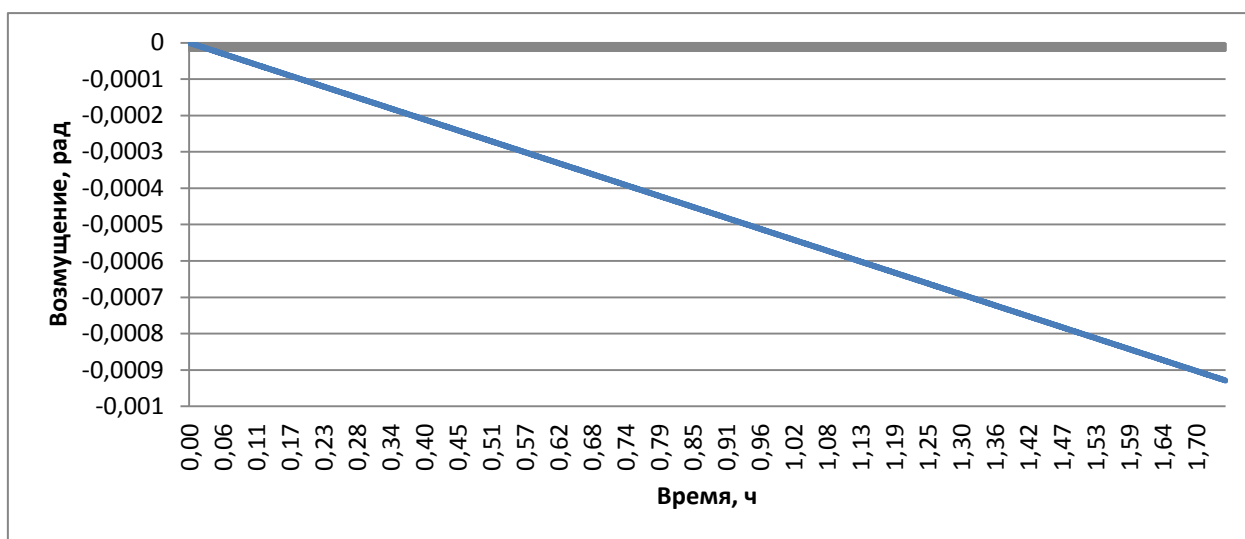


Рисунок 2.22 – График изменения вековых возмущений $\delta_1 \Omega$

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.23.

Таблица 2.23- амплитудные значения параметра $\delta_1 \Omega$

Параметр	$\delta_1 \Omega$
Возмущение параметра макс., рад	0
Возмущение параметра мин., рад	-0,00093

График изменения вековых возмущений $\delta_1 \omega$ изображен на рисунке 2.23.

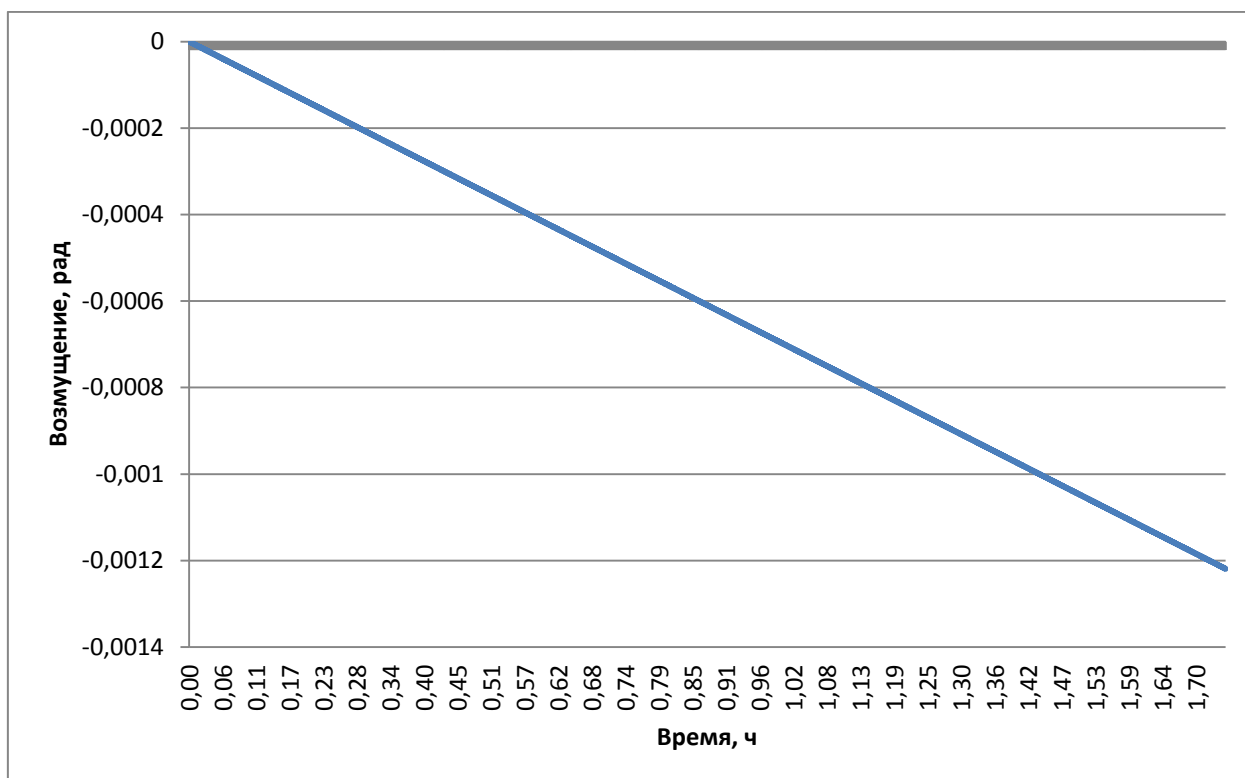


Рисунок 2.23 – График изменения вековых возмущений $\delta_1 \omega$

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.24.

Таблица 2.24- амплитудные значения параметра $\delta_1 \omega$

Параметр	$\delta_1 \omega$
Возмущение параметра макс., рад	0
Возмущение параметра мин., рад	-0,00122

График изменения вековых возмущений $\delta_1 M_0$ изображен на рисунке 2.24.

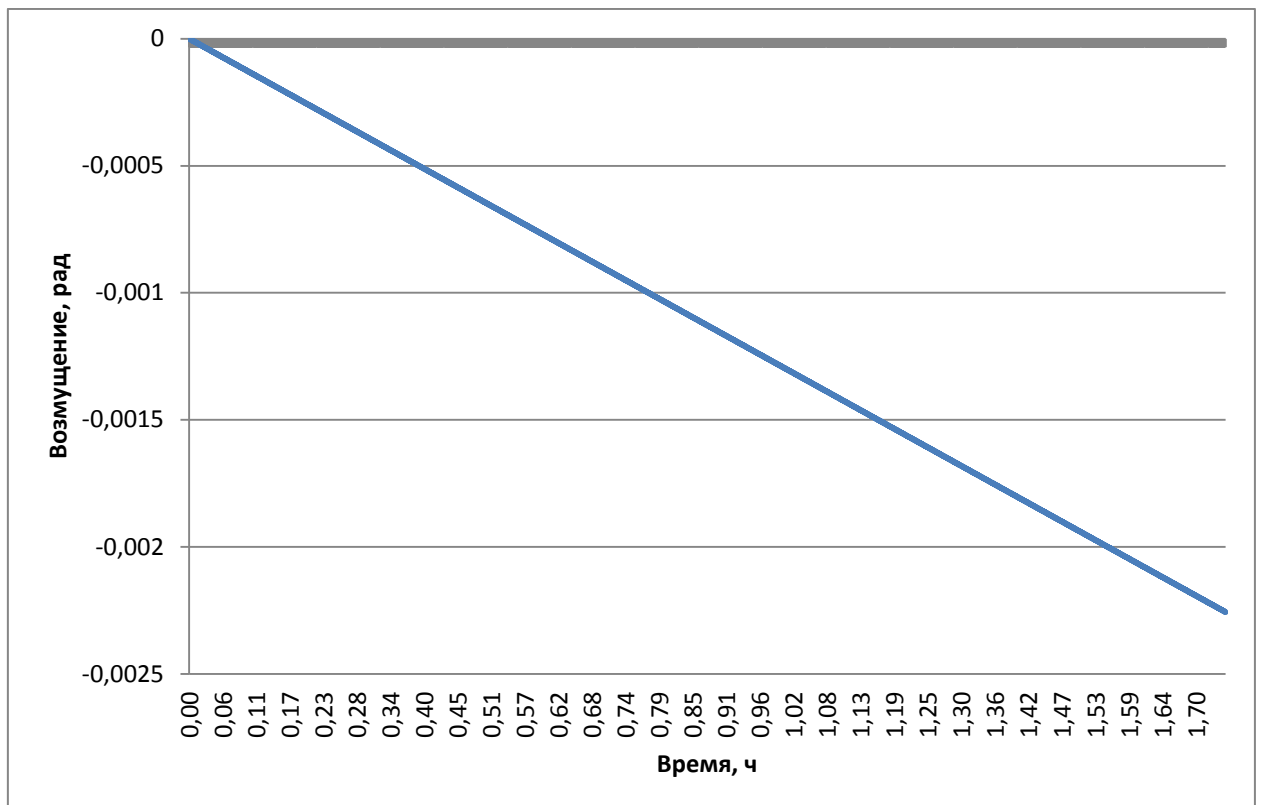


Рисунок 2.24 – График изменения вековых возмущений $\delta_1 M_0$

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.25.

Таблица 2.25- амплитудные значения параметра $\delta_1 M_0$

Параметр	$\delta_1 M_0$
Возмущение параметра макс., рад	0
Возмущение параметра мин., рад	-0,00226

Нахождение полных параметров орбит модели Козаи. Представление итоговых параметров орбиты описывается формулой (2.31):

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_0 + \delta_2 a \\ e = e_0 + \delta_2 e \\ i = i_0 + \delta_2 i \\ \Omega = \Omega_0 + \delta_1 \Omega + \delta_2 \Omega \\ \omega = \omega_0 + \delta_1 \omega + \delta_2 \omega \\ M_0 = M_0 + \delta_1 M_0 + \delta_2 M_0 \end{array} \right. \quad (2.31)$$

График изменения полного параметра a во времени изображен на рисунке 2.25.

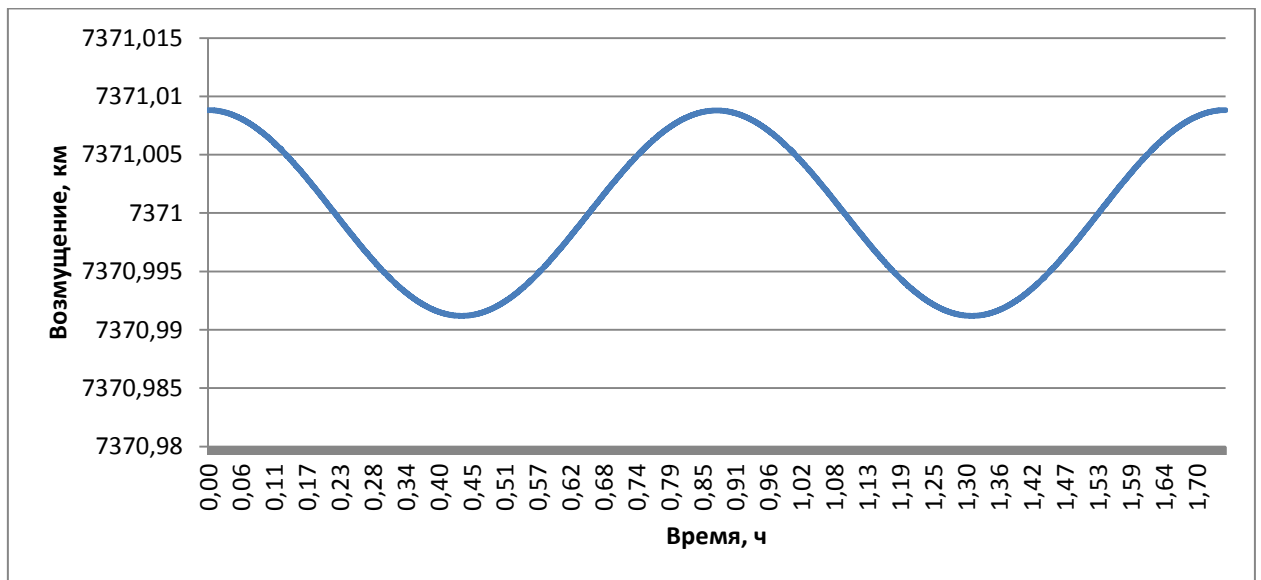


Рисунок 2.25 - Изменение полного параметра a во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.26.

Таблица 2.26- амплитудные значения параметра a

Параметр	a
Возмущение параметра макс., км	7371,0088
Возмущение параметра мин., км	7370,9912

График изменения полного параметра e изображен на рисунке 2.26.

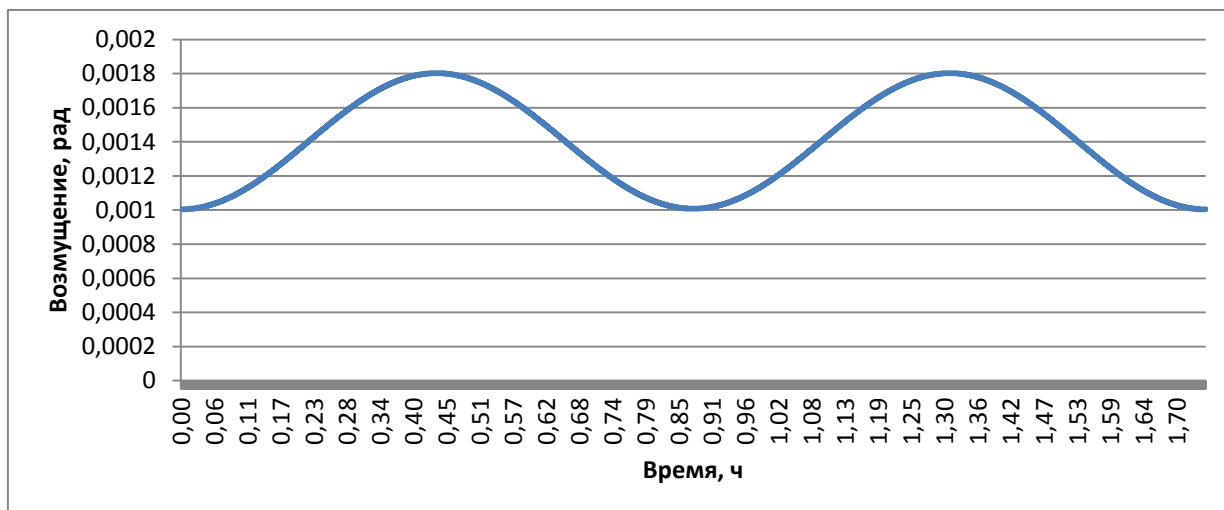


Рисунок 2.26 - Изменение полного параметра e во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.27.

Таблица 2.27- амплитудные значения параметра e

Параметр	e
Возмущение параметра макс., рад	0,001803
Возмущение параметра мин., рад	0,001004

График изменения полного параметра i изображен на рисунке 2.27.

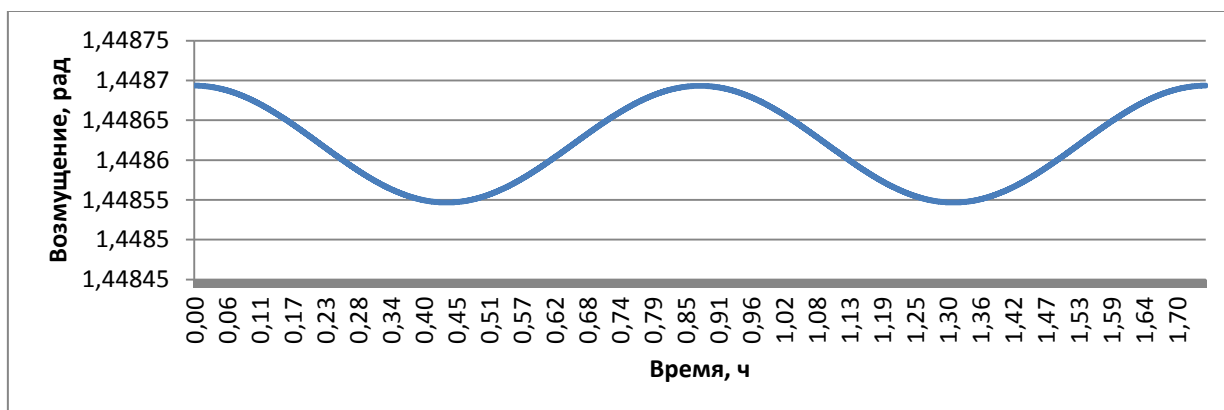


Рисунок 2.27 - Изменение полного параметра i во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.28.

Таблица 2.28- амплитудные значения параметра i

Параметр	i
Возмущение параметра макс., рад	1,44869345
Возмущение параметра мин., рад	1,448546647

График изменения полного параметра Ω изображен на рисунке 2.28.

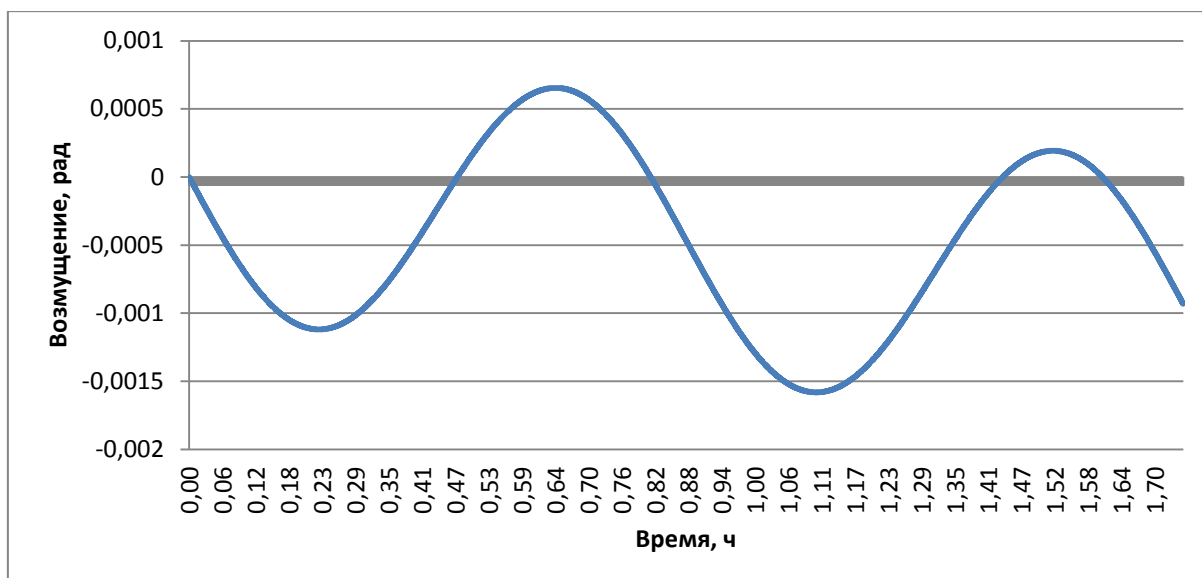


Рисунок 2.28 - Изменение полного параметра Ω во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.29.

Таблица 2.29- амплитудные значения параметра Ω

Параметр	Ω
Возмущение параметра макс., рад	0,000654
Возмущение параметра мин., рад	-0,00158

График изменения полного параметра ω изображен на рисунке 2.29.

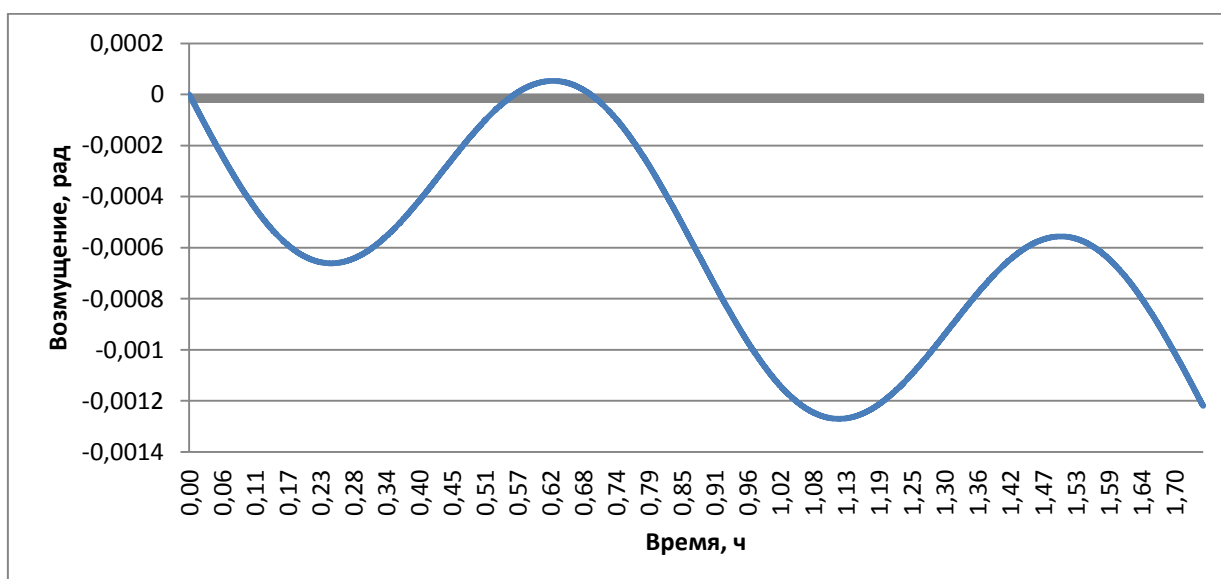


Рисунок 2.29 - Изменение полного параметра ω во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.30.

Таблица 2.30- амплитудные значения параметра ω

Параметр	ω
Возмущение параметра макс., рад	0,000053
Возмущение параметра мин., рад	-0,00127

График изменения полного параметра M_0 изображен на рисунке 2.30.

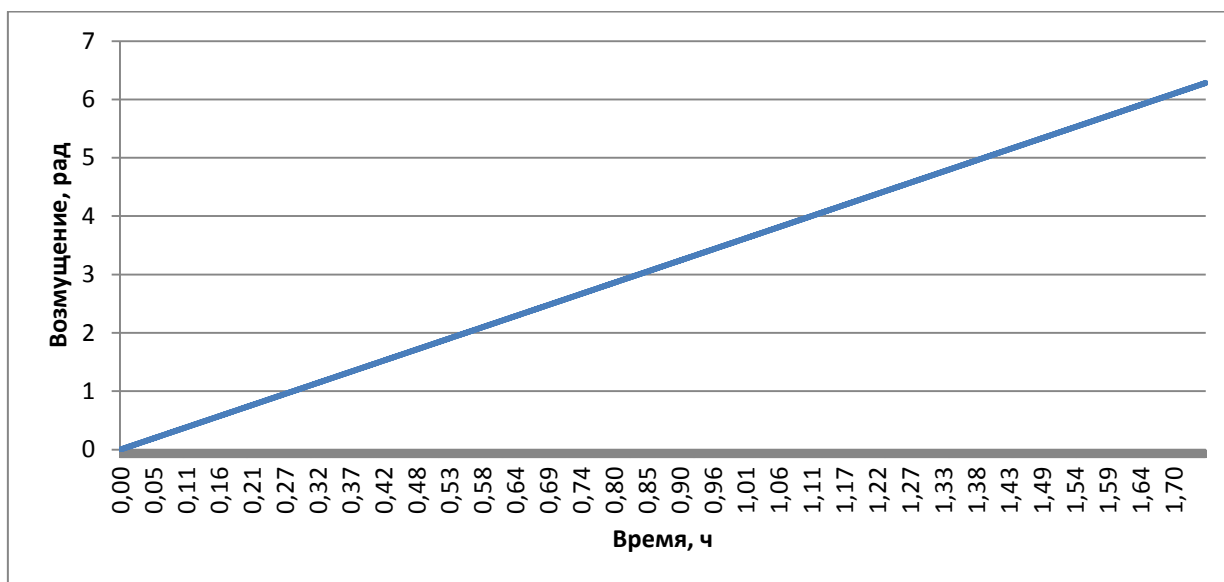


Рисунок 2.30 - Изменение полного параметра M_0 во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.31.

Таблица 2.31- амплитудные значения параметра M_0

Параметр	M_0
Возмущение параметра макс., рад	6,282954935
Возмущение параметра мин., рад	0

Определение координат и проекций скоростей КА модели Козаи. Определяются координаты и проекции скоростей ИСЗ по формулам (1.1 - 1.12).
Графики координат ИСЗ для модели Козаи изображены на рисунке 2.31.

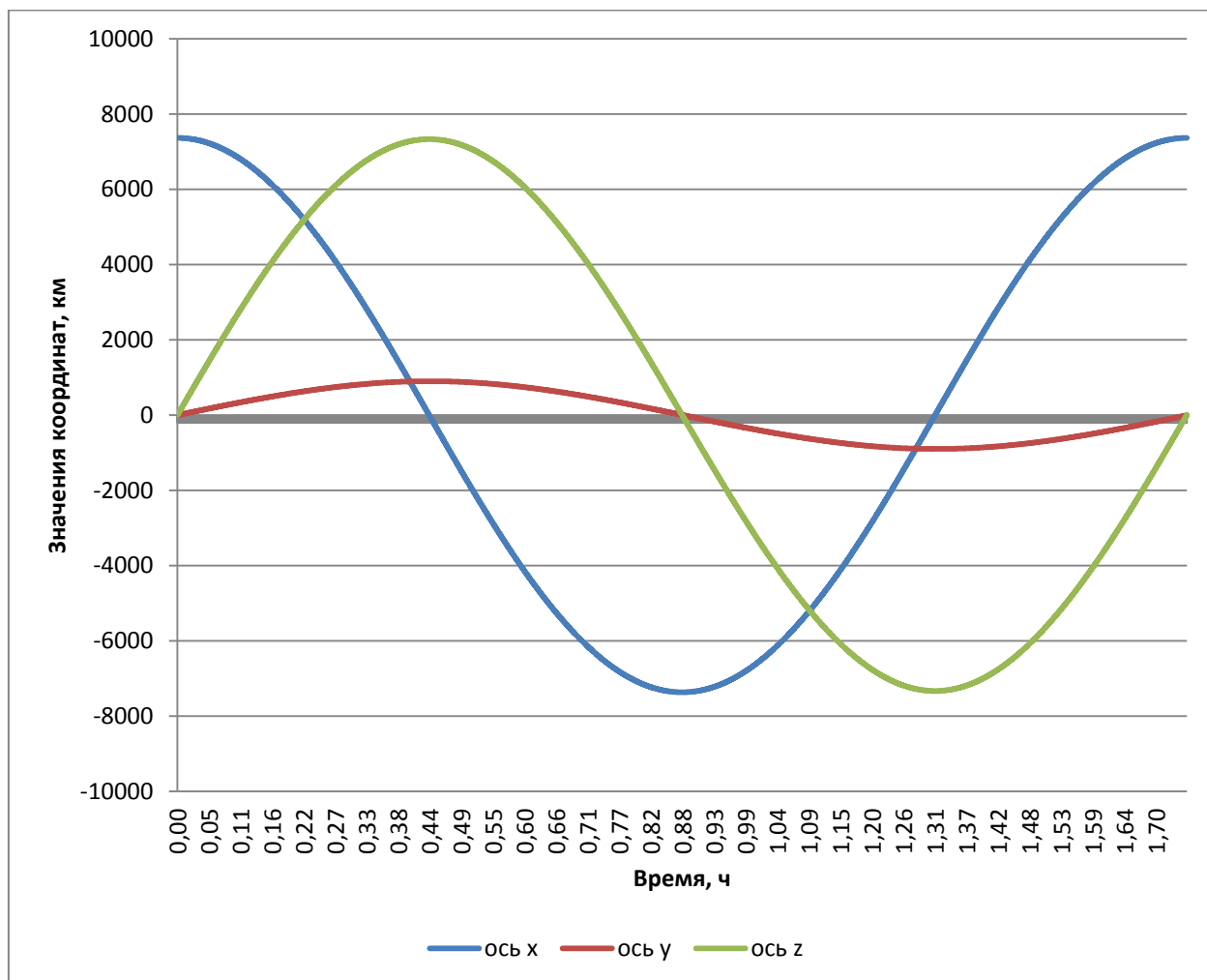


Рисунок 2.31 - График изменения координат ИСЗ во времени для модели Козаи

Данные по размаху величин представлены в таблице 2.32.

Таблица 2.32- амплитудные значения параметров высоты орбиты

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Высота орбиты мин. значение, км	7363,608254	900,4803	7329,167
Высота орбиты макс. значение, км	-7363,57764	-900,492	-7329,17

Графики проекций скоростей ИСЗ для модели Козаи изображены на рисунке 2.32.

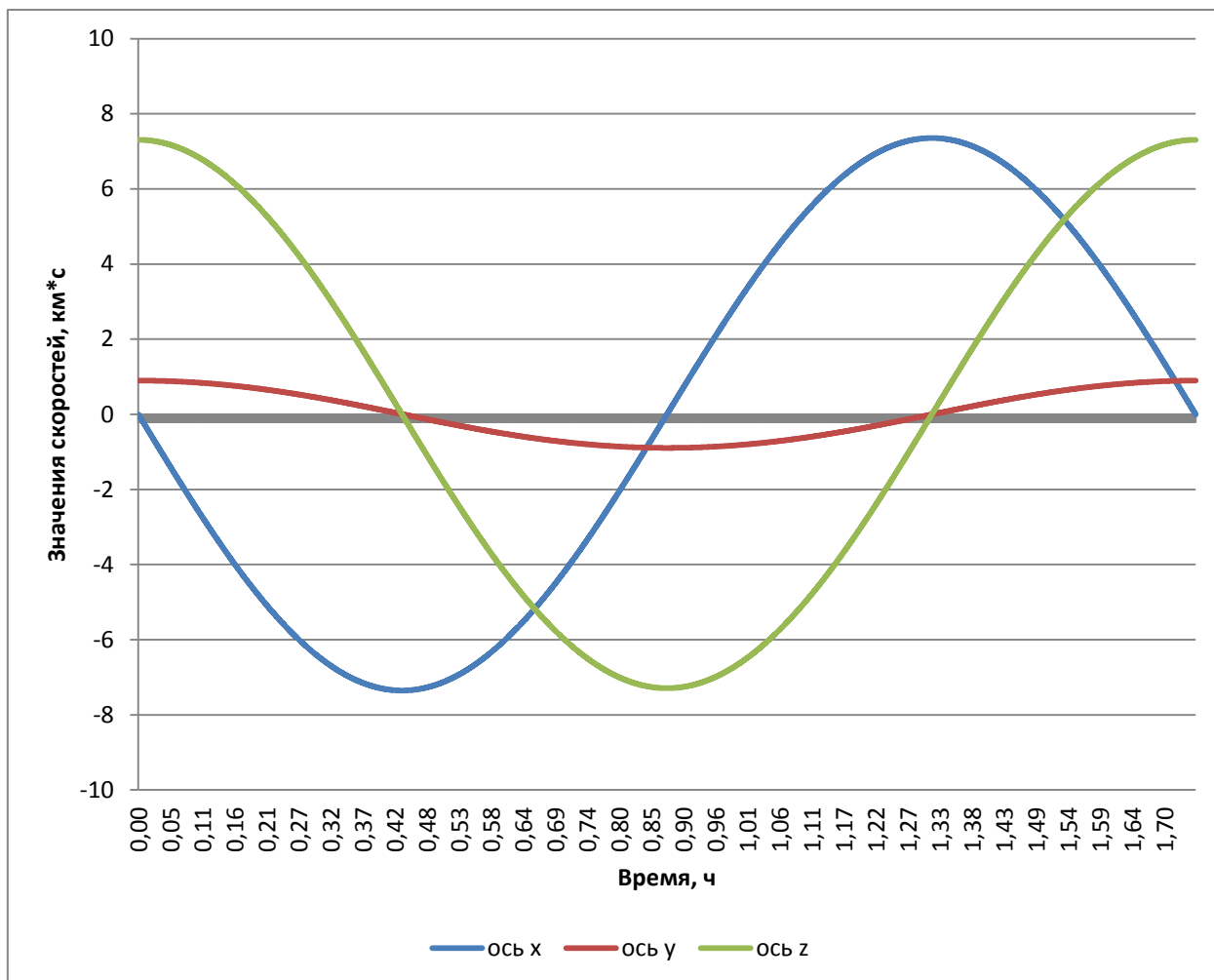


Рисунок 2.32 - График изменения проекций скоростей ИСЗ во времени для модели Козаи

Данные по размаху величин представлены в таблице 2.33.

Таблица 2.33- амплитудные значения параметров проекций скоростей

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Проекция скорости мин. значение, км*с	7,353711	0,896583	7,306278
Проекция скорости макс. значение, км*с	-7,3537	-0,89478	-7,29159

2.4 Построение аналитической модели движения космического аппарата с учетом возмущения второго порядка

С помощью рассматриваемого метода расчёта параметров орбит по аналитическим зависимостям, возможно, определить погрешность модели орбит КА расположенных на низких круговых орбитах (НКО).

Данная модель была разработана В.И. Кудымовым.

Эта модель предусматривает различие в периодических возмущениях, которые могут быть короткопериодическими или суточными, так и долгопериодическими и резонансными.

Короткопериодические возмущения возникают из-за собственного движения КА. Суточные возмущения проявляются за счет вращения Земли. Долгопериодические возмущения возникают за счет прецессии перигея. Основные резонансные возмущения появляются в результате взаимодействия вращения Земли и собственного движения КА, при условии, что КА за сутки делает полное число оборотов.

Для построения аналитической модели движения КА в поле сжатой Земли необходимо рассчитать возмущения характеризующие элементы орбиты в данной модели.

Нахождение возмущений параметров орбиты модели учитывающей возмущения второго порядка.

Возмущение $\delta_2 a$ имеет вид (2.32) [6]:

$$\delta_2 a \approx -25 \cos 2\lambda + 4 \cos 4\lambda \quad (2.32)$$

где $\lambda = \omega + M$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.33.

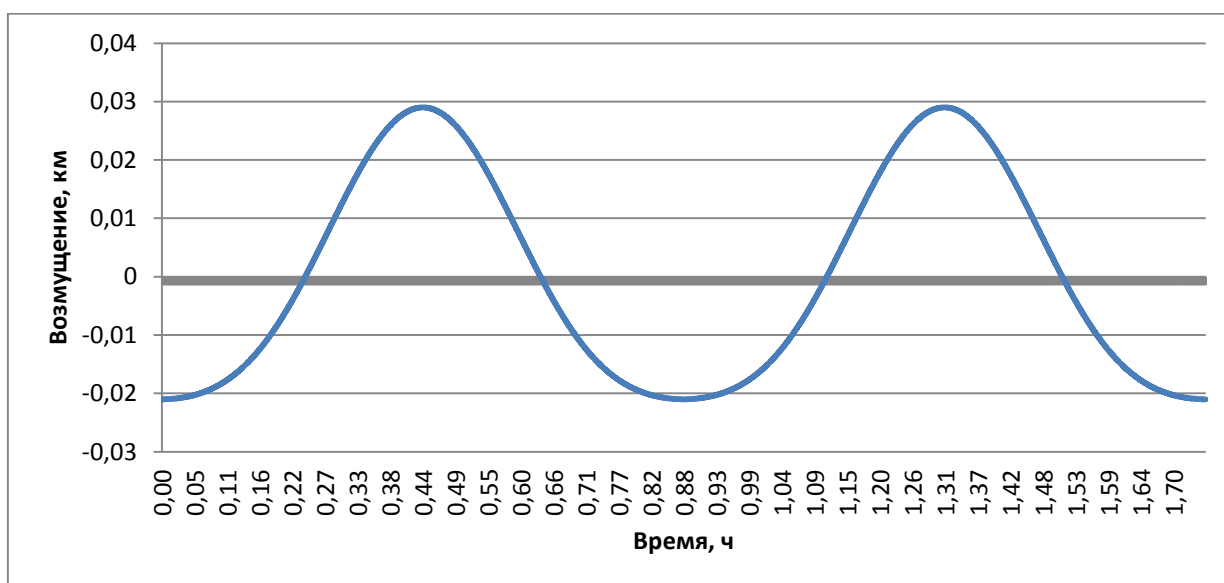


Рисунок 2.33 – График изменения параметра $\delta_2 a$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.34.

Таблица 2.34- амплитудные значения параметра $\delta_2 a$

Параметр	$\delta_2 a$
Возмущение параметра макс., км	0,029
Возмущение параметра мин., км	-0,021

Возмущение $\delta_2 a$ имеет вид (2.33):

$$a\delta_2 \Omega \approx 0 \quad (2.33)$$

Возмущение δe имеет вид (2.34):

$$a\delta_2 e \approx -6 \cos(\lambda + \omega) + 5 \cos(\lambda - \omega) - 12 \cos(3\lambda - \omega) \quad (2.34)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.34.

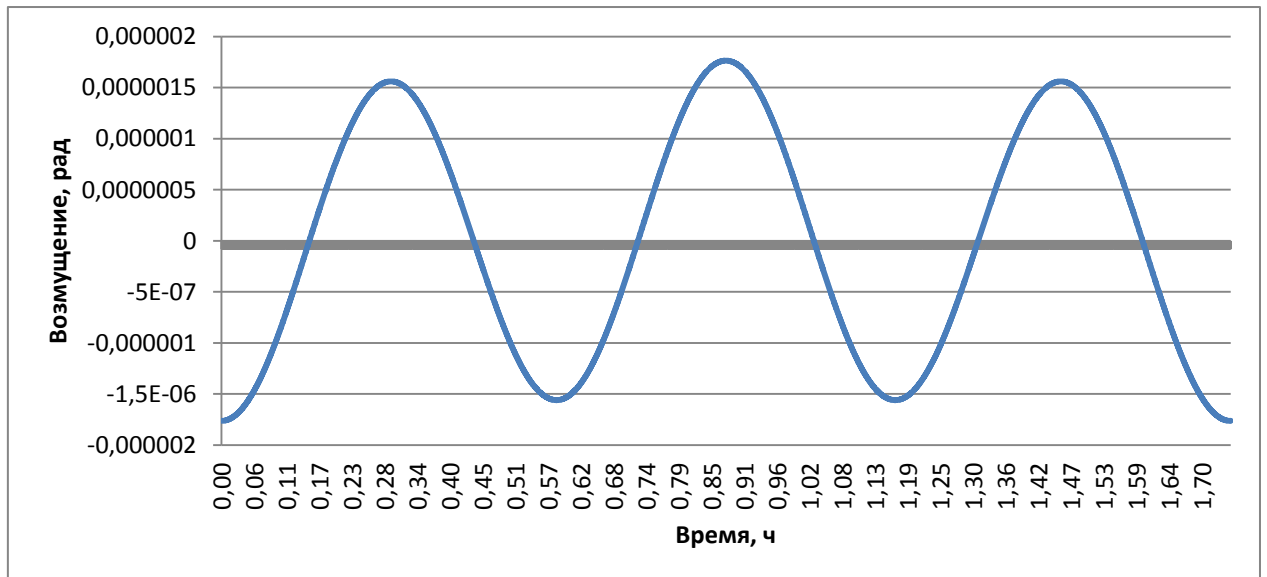


Рисунок 2.34 – График изменения параметра $\delta_2 e$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.35.

Таблица 2.35- амплитудные значения параметра $\delta_2 e$

Параметр	$\delta_2 e$
Возмущение параметра макс., рад	0,000001764
Возмущение параметра мин., рад	-0,000001764

Возмущение δi имеет вид (2.35):

$$a\delta_2 i \approx \cos 2\lambda \quad (2.35)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.35.

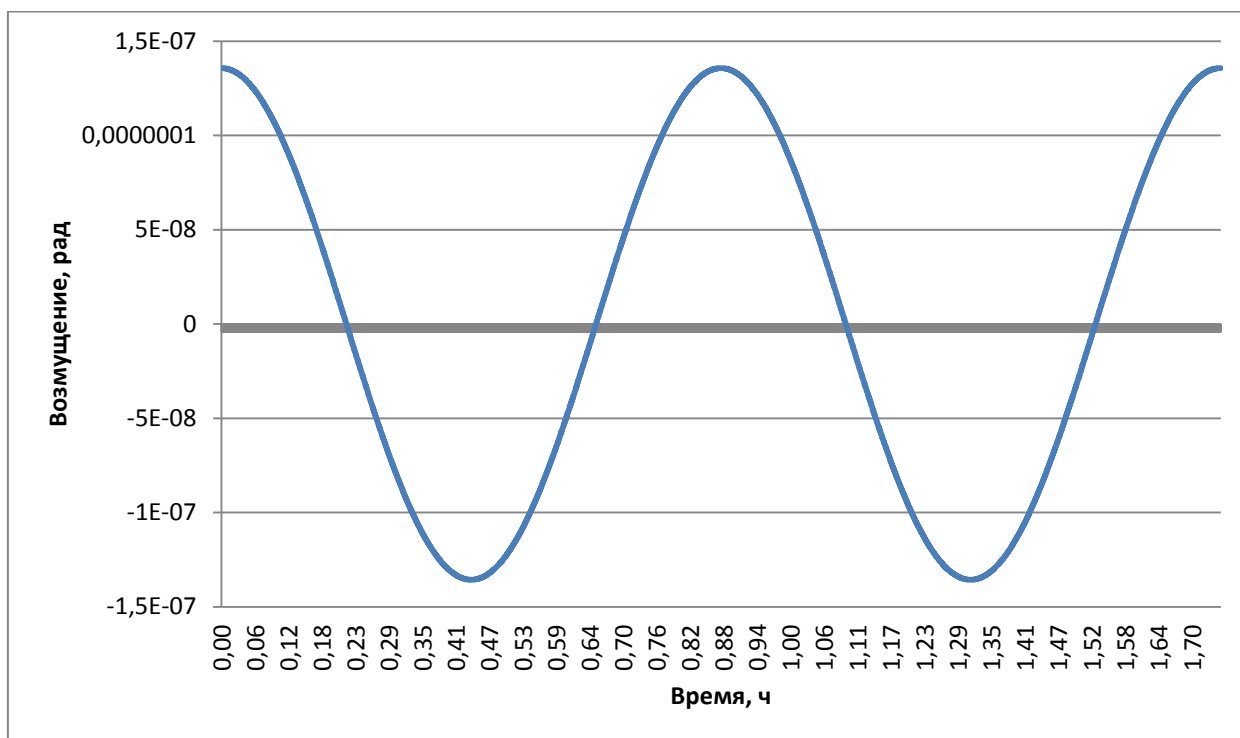


Рисунок 2.35 – График изменения параметра $\delta_2 i$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.19.

Таблица 2.36- амплитудные значения параметра $\delta_2 i$

Параметр	$\delta_2 i$
Возмущение параметра макс., рад	0,000000136
Возмущение параметра мин., рад	-0,00000014

Возмущение $\delta_2\omega$ имеет вид (2.36):

$$ae\delta_2\omega \approx 6 \sin(\lambda + \omega) + 5 \sin(\lambda - \omega) - 12 \sin(3\lambda - \omega) \quad (2.36)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.36.

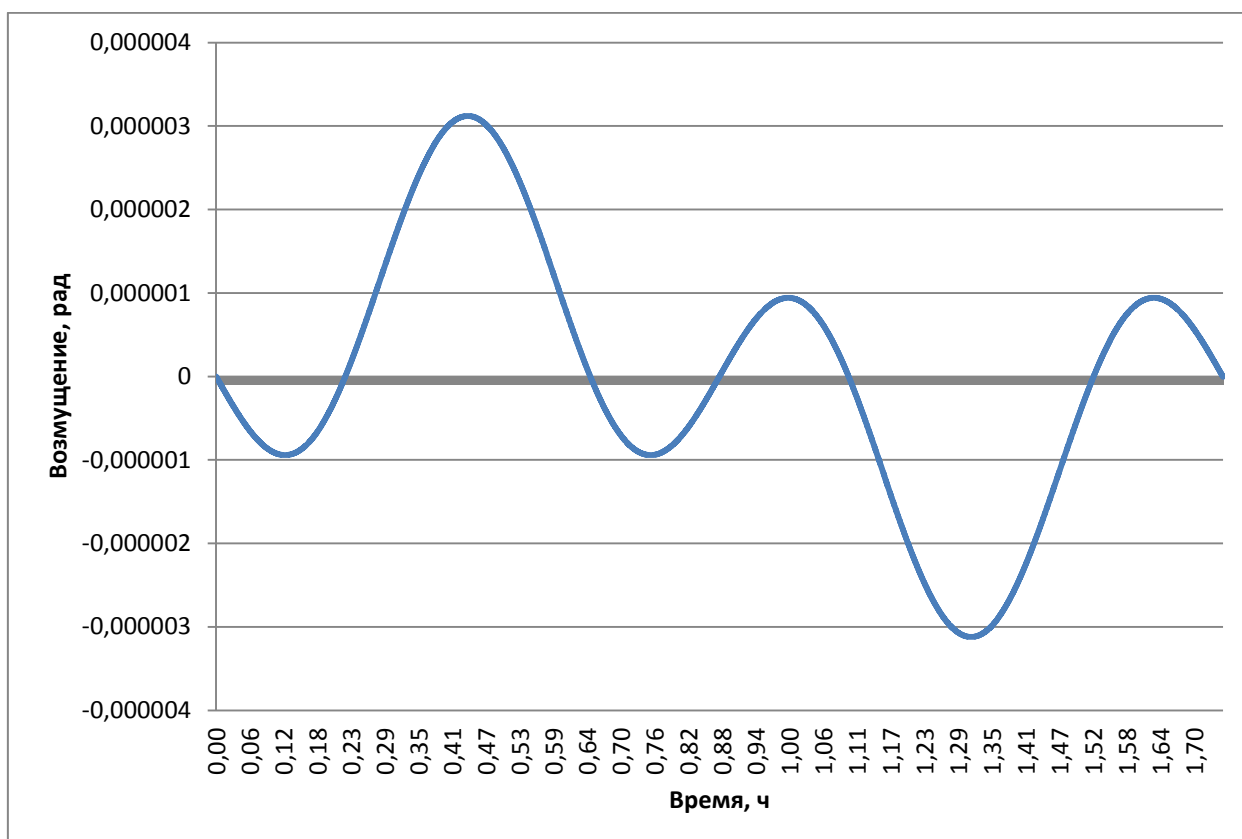


Рисунок 2.36 – График изменения параметра $\delta_2\omega$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.20.

Таблица 2.37- амплитудные значения параметра $\delta_2\omega$

Параметр	$\delta_2\omega$
Возмущение параметра макс., рад	0,00000312
Возмущение параметра мин., рад	-0,00000312

Возмущение $\delta_2\lambda$ имеет вид (2.37):

$$a\delta_2\lambda \approx -5 \sin 2\lambda - 3 \sin 4\lambda \quad (2.37)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.37.

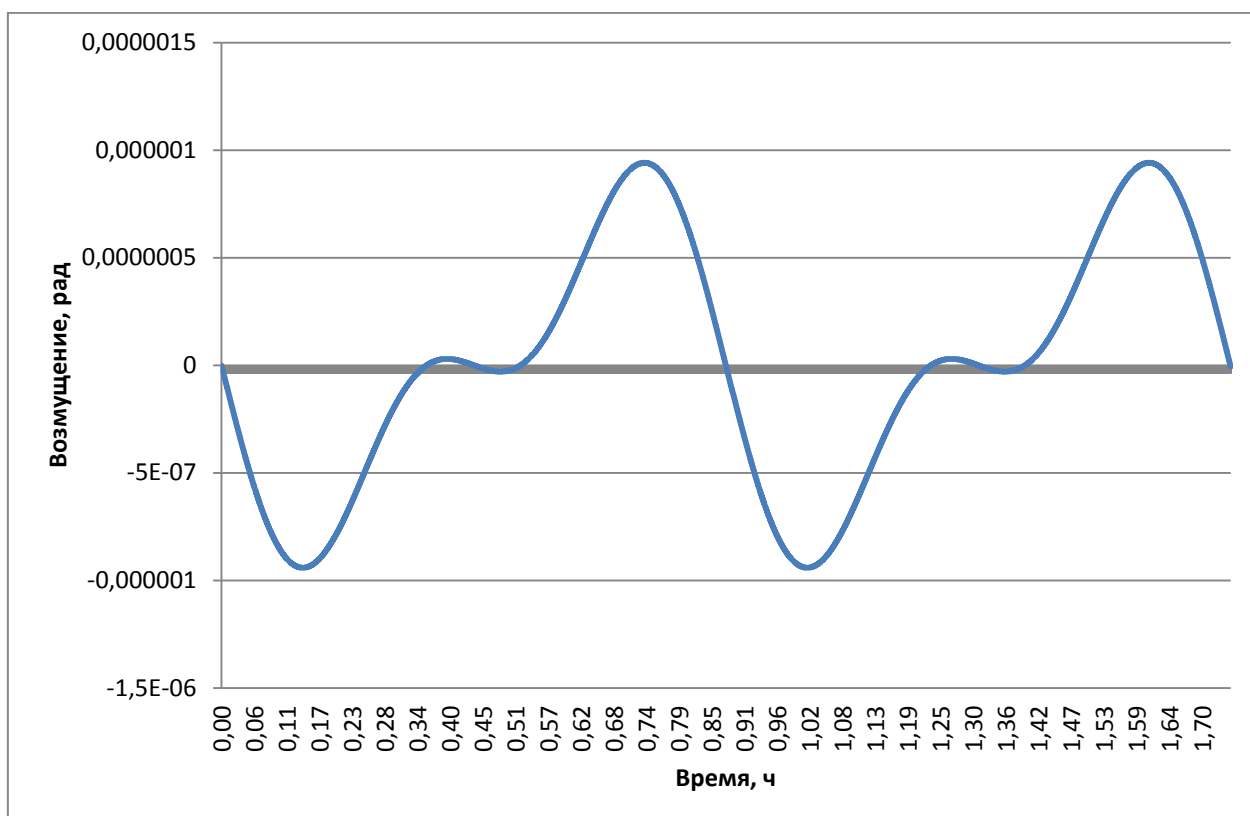


Рисунок 2.37 – График изменения параметра $\delta_2\lambda$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.21.

Таблица 2.38- амплитудные значения параметра $\delta_2\lambda$

Параметр	$\delta_2\lambda$
Возмущение параметра макс., рад	0,00000094
Возмущение параметра мин., рад	-0,0000009

Возмущение $\delta_2 M$ имеет вид (2.38):

$$\delta_2 M \approx \delta_2 \lambda - \delta_2 \omega \quad (2.38)$$

График изменения параметра возмущения изображен на рисунке 2.38.

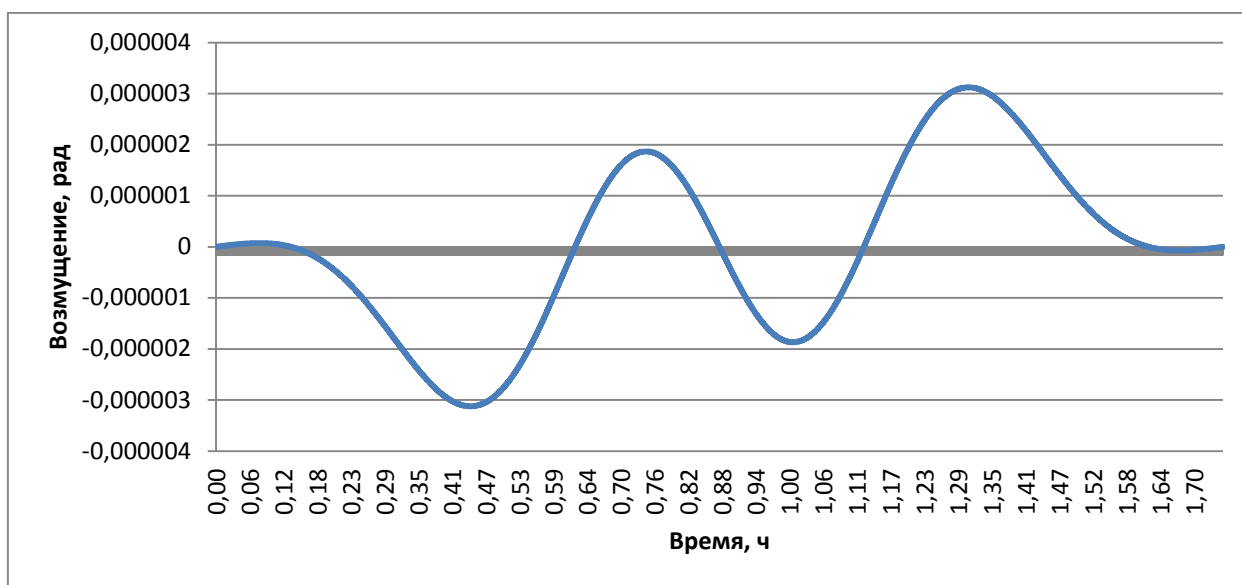


Рисунок 2.38 – График изменения параметра $\delta_2 \lambda$ во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.22.

Таблица 2.39- амплитудные значения параметра $\delta_2 M$

Параметр	$\delta_2 M$
Возмущение параметра макс., рад	0,000003123
Возмущение параметра мин., рад	-0,000003123

Нахождение полных параметров орбит модели учитывающей возмущения второго порядка.

Представление итоговых параметров орбиты описывается формулой (2.39):

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \dots + \delta_n a + \dots \\ e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e + \dots + \delta_n e + \dots \\ i = i_0 + \delta_1 i + \delta_2 i + \dots + \delta_n i + \dots \\ \Omega = \Omega_0 + \delta_1 \Omega + \delta_2 \Omega + \dots + \delta_n \Omega + \dots \\ \omega = \omega_0 + \delta_1 \omega + \delta_2 \omega + \dots + \delta_n \omega + \dots \\ M_0 = M_0 + \delta_1 M_0 + \delta_2 M_0 + \dots + \delta_n M_0 + \dots \end{array} \right. \quad (2.39)$$

График изменения полного параметра a во времени изображен на рисунке 2.39.

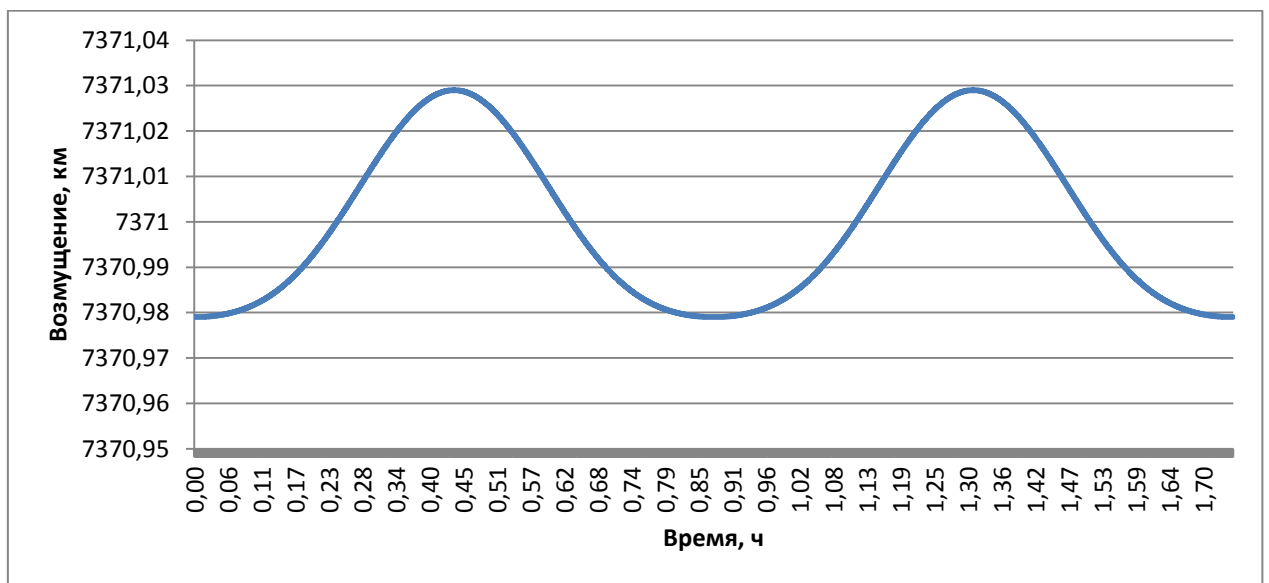


Рисунок 2.39 – График изменения полного параметра a во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.40.

Таблица 2.40- амплитудные значения параметра a

Параметр	a
Возмущение параметра макс., км	7372,029
Возмущение параметра мин., км	7369,979

График изменения полного параметра e изображен на рисунке 2.40.

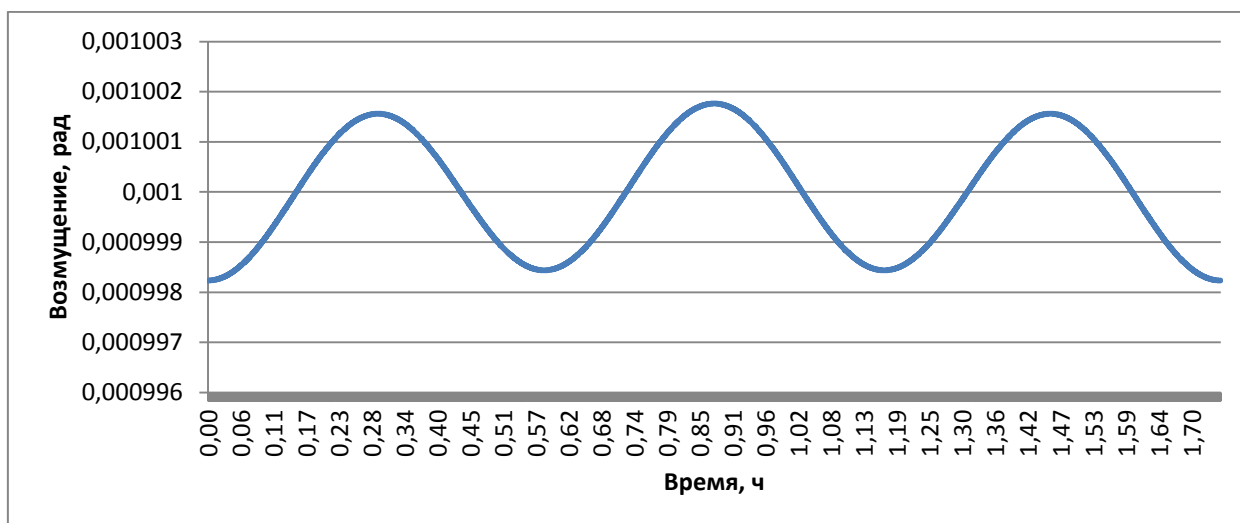


Рисунок 2.40 – График изменения полного параметра e во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.41.

Таблица 2.41- амплитудные значения параметра e

Параметр	e
Возмущение параметра макс., рад	0,001001764
Возмущение параметра мин., рад	0,000998236

График изменения полного параметра i изображен на рисунке 2.41.

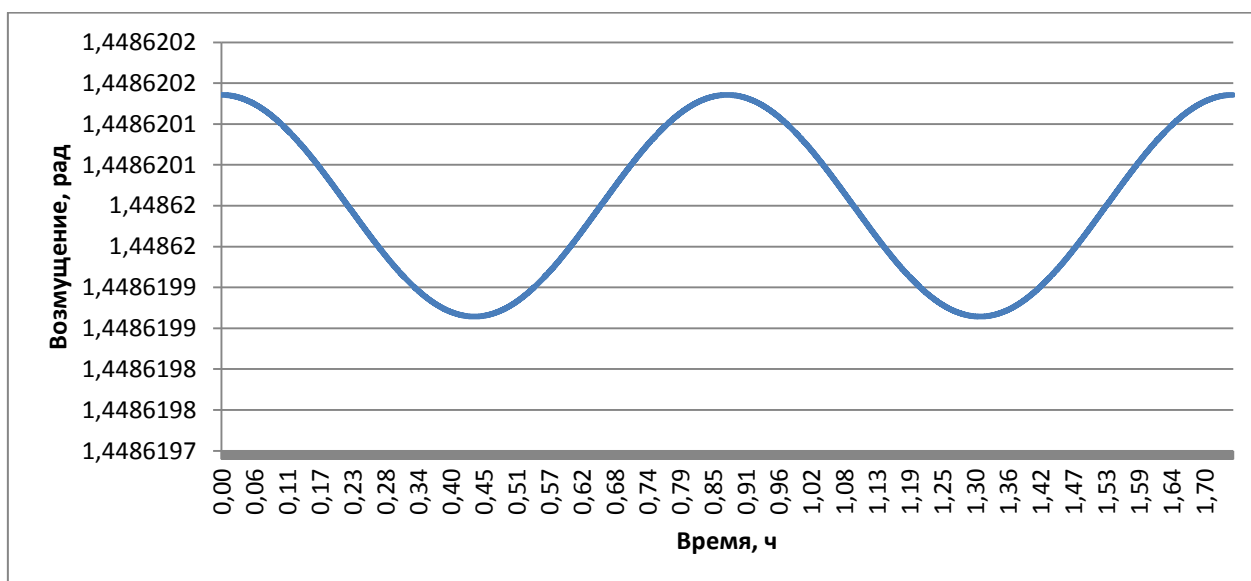


Рисунок 2.41 – График изменения полного параметра i во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.42.

Таблица 2.42- амплитудные значения параметра i

Параметр	i
Возмущение параметра макс., рад	1,448620136
Возмущение параметра мин., рад	1,448619864

График изменения полного параметра Ω изображен на рисунке 2.42.

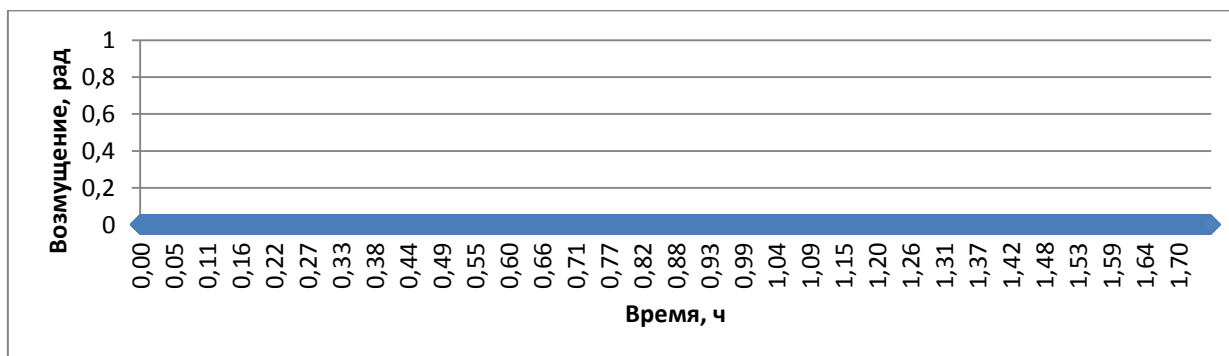


Рисунок 2.42 – График изменения полного параметра Ω во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.43.

Таблица 2.43- амплитудные значения параметра ω

Параметр	ω
Возмущение параметра макс., рад	0
Возмущение параметра мин., рад	0

График изменения полного параметра ω изображен на рисунке 2.43.

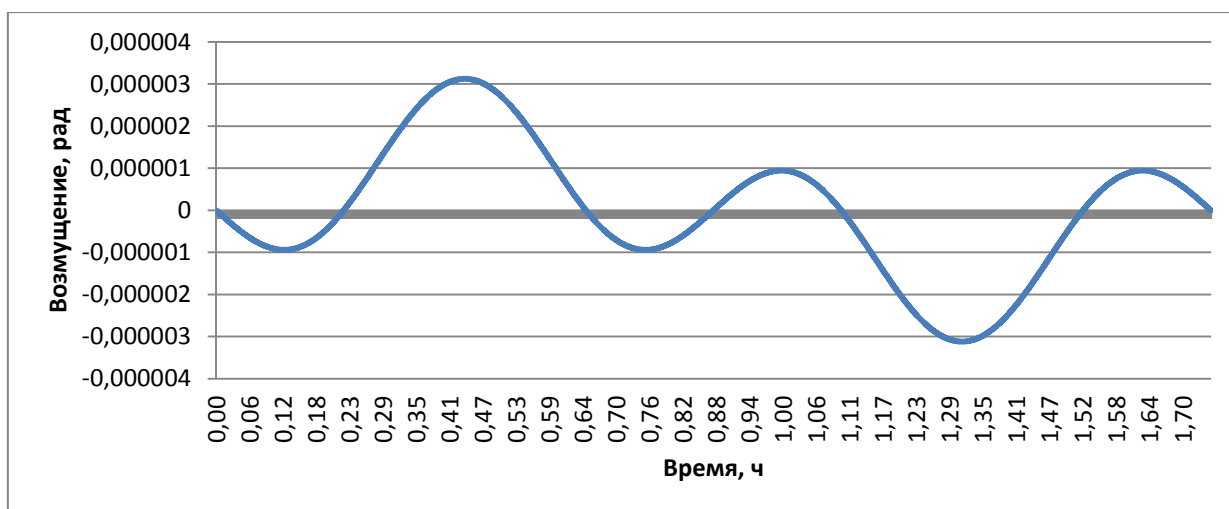


Рисунок 2.43 – График изменения полного параметра ω во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.44.

Таблица 2.44 - амплитудные значения параметра ω

Параметр	ω
Возмущение параметра макс., рад	0,00000312
Возмущение параметра мин., рад	-0,00000312

График изменения полного параметра M_0 изображен на рисунке 2.44.

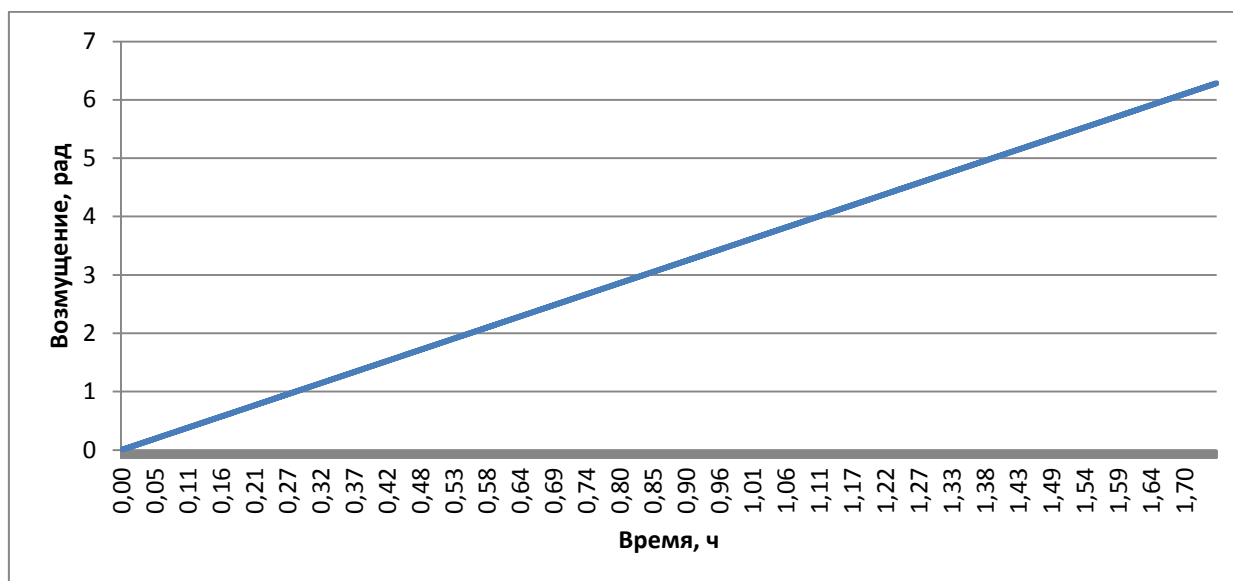


Рисунок 2.44 – График изменения полного параметра M_0 во времени

Данные по размаху величины представлены в таблице 2.45.

Таблица 2.45 - амплитудные значения параметра M_0

Параметр	M_0
Возмущение параметра макс., рад	6,285210861
Возмущение параметра мин., рад	0

Определение координат и проекций скоростей КА модели учитывающей возмущения второго порядка. Определяются координаты и проекции скоростей ИСЗ по формулам (1.1 - 1.12).

Графики координат ИСЗ для модели учитывающей возмущения второго порядка изображены на рисунке 2.45.

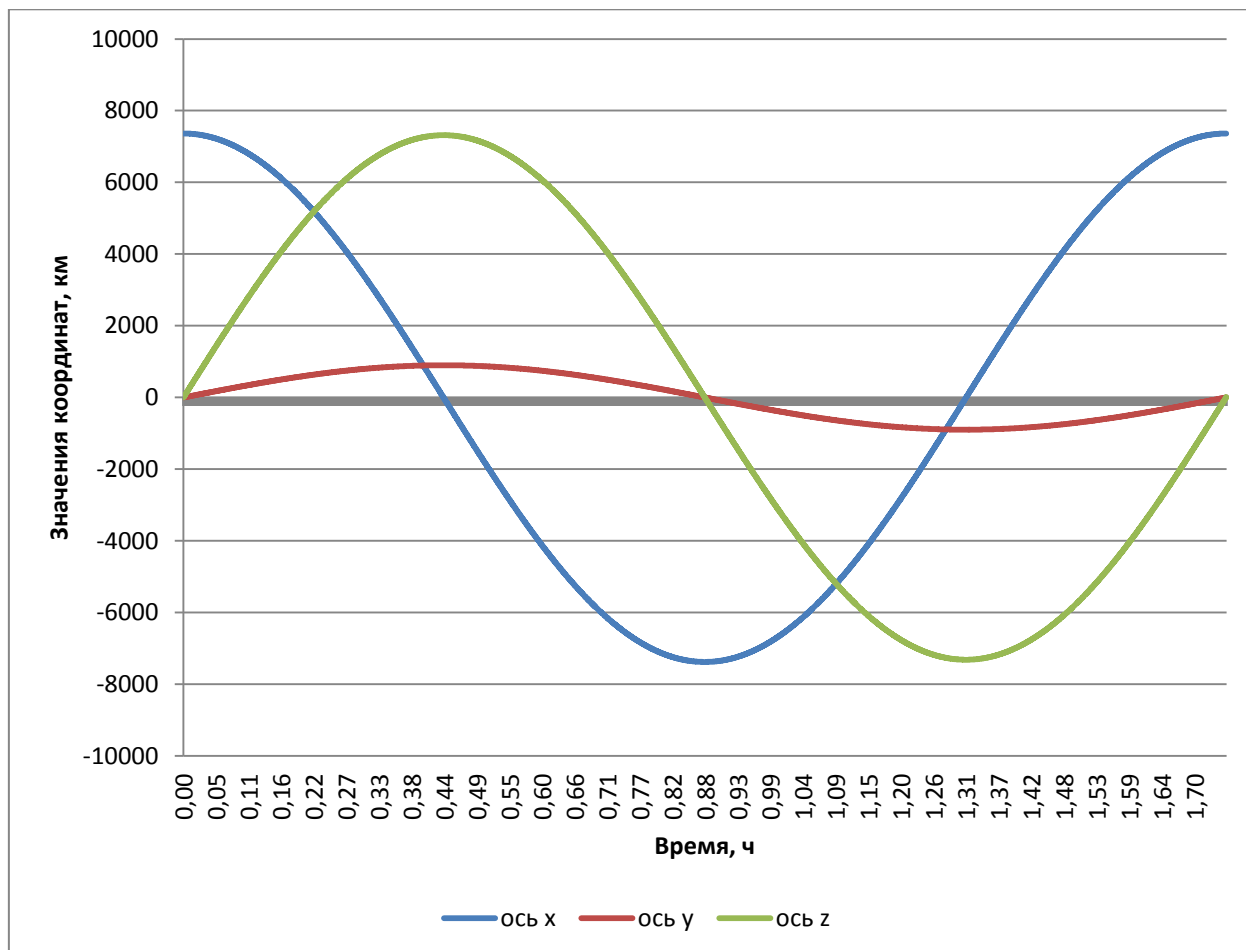


Рисунок 2.45 - График изменения координат ИСЗ во времени для модели, учитывающей возмущения второго порядка

Данные по размаху величин представлены в таблице 2.46.

Таблица 2.46- амплитудные значения параметров высоты орбиты

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Высота орбиты мин. значение, км	7363,621	898,3269	7316,079
Высота орбиты макс. значение, км	-7378,362	-898,327	-7316,08

Графики проекций скоростей ИСЗ для модели учитывающей возмущения второго порядка изображены на рисунке 2.46.

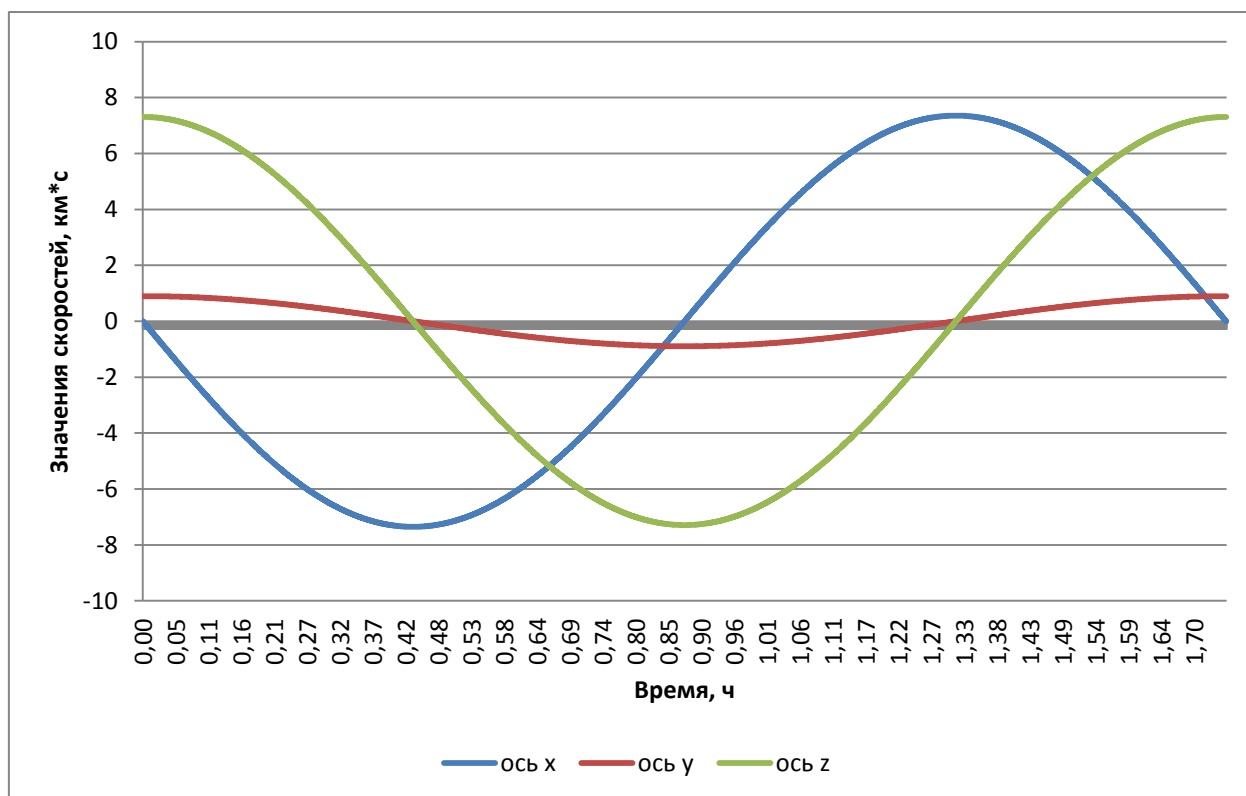


Рисунок 2.46 - График изменения проекций скоростей ИСЗ во времени для модели, учитывающей возмущения второго порядка

Данные по размаху величин представлены в таблице 2.47.

Таблица 2.47 - амплитудные значения параметров проекций скоростей

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Проекция скорости мин. значение, км*с	7,3537	0,897108	7,30617
Проекция скорости макс. значение, км*с	-7,3537	-0,89532	-7,29157

Согласно системе уравнений не учёт возмущений второго порядка при баллистических расчётах приведёт к погрешностям вдоль орбиты и по высоте до нескольких метров. В целом точность расчёта параметров движения по рассмотренной аналитической методике будет зависеть от точности расчёта амплитуд и полноты учёта периодических возмущений.

3 Исследование аналитических моделей в поле сжатой Земли

3.1 Сравнение моделей движения космического аппарата при шаге интегрирования 1 секунда

Для исследования точностных характеристик аналитических моделей было предложено сравнить их расхождения с эталоном между собой.

За эталон примем численную модель в поле сжатой Земли и сравниваем с аналитическими моделями движения КА в поле сжатой Земли Проскурина-Батракова, Козаи, модели учитывающей возмущения второго порядка (Кудымова). Производится исследование с учетом полученных данных.

Сравнение численной модели с моделью Проскурина-Батракова. График расчета расхождения координат x , y , z ИСЗ по численной модели и модели Проскурина-Батракова, с шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.1.

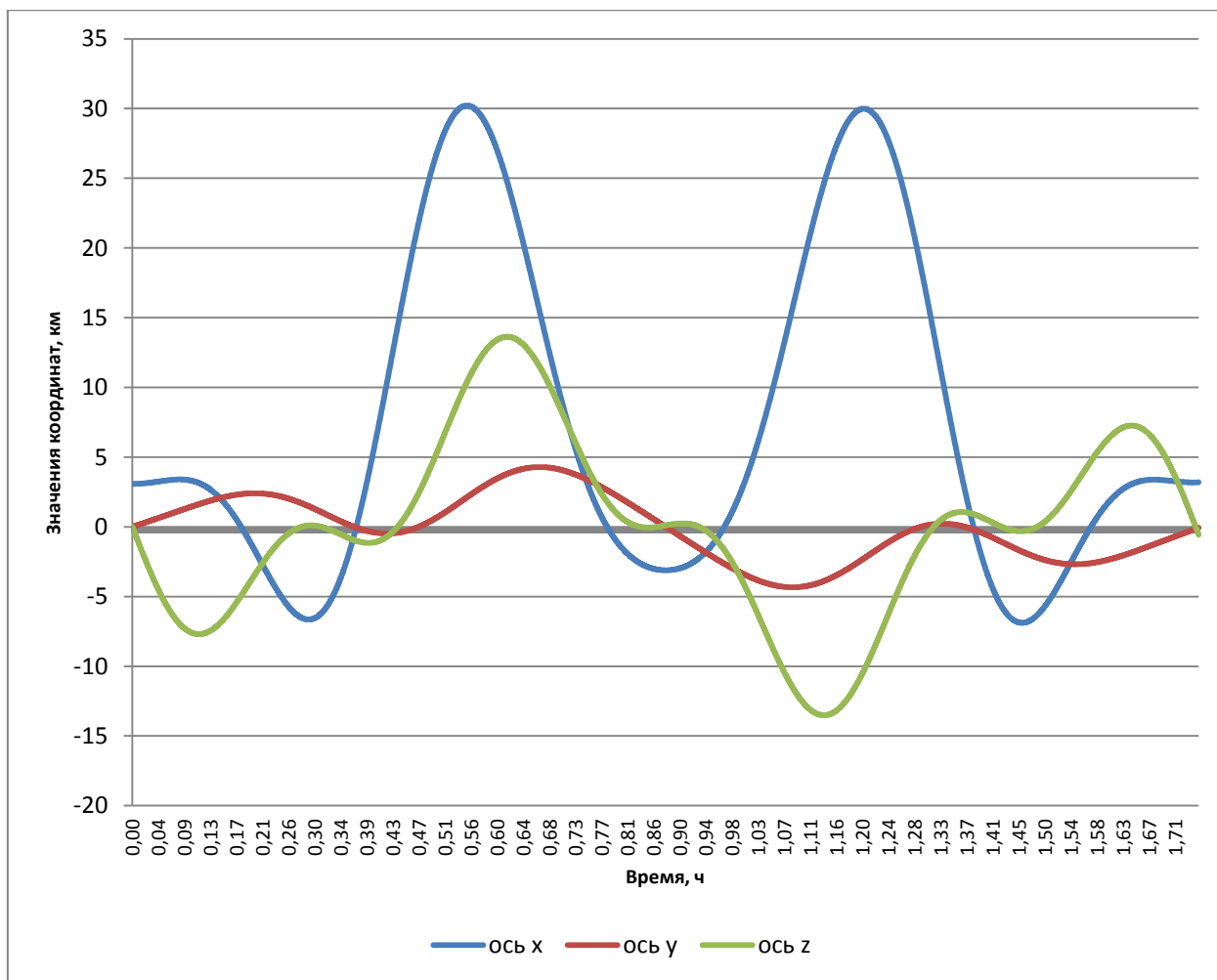


Рисунок 3.1 – График расхождения значений координат ИСЗ по численной модели и модели Проскурина-Батракова

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1- амплитудные значения параметров высоты

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Высота орбиты макс. значение, км	30,21305	4,283855	13,63089
Высота орбиты мин. значение, км	-6,88583	-4,33717	-13,5168

График расчета расхождения проекций скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ по численной модели и модели Проскурина-Батракова, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.2.

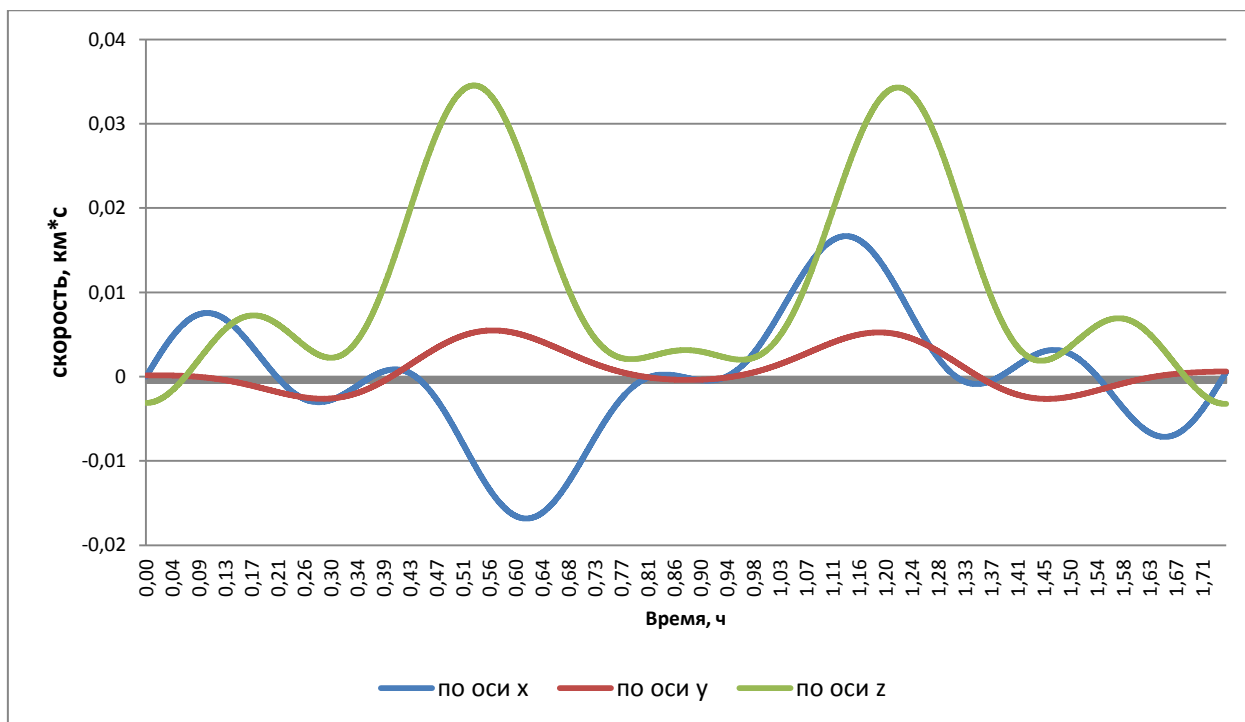


Рисунок 3.2 – График расхождения значений проекций скоростей ИСЗ по численной модели и модели Проскурина-Батракова

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2- амплитудные значения проекций скоростей

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,016668	0,005487	0,034541
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,01683	-0,00264	-0,00323

График расчета расхождения радиус-вектора ИСЗ по численной модели и модели Проскурина-Батракова, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.3.

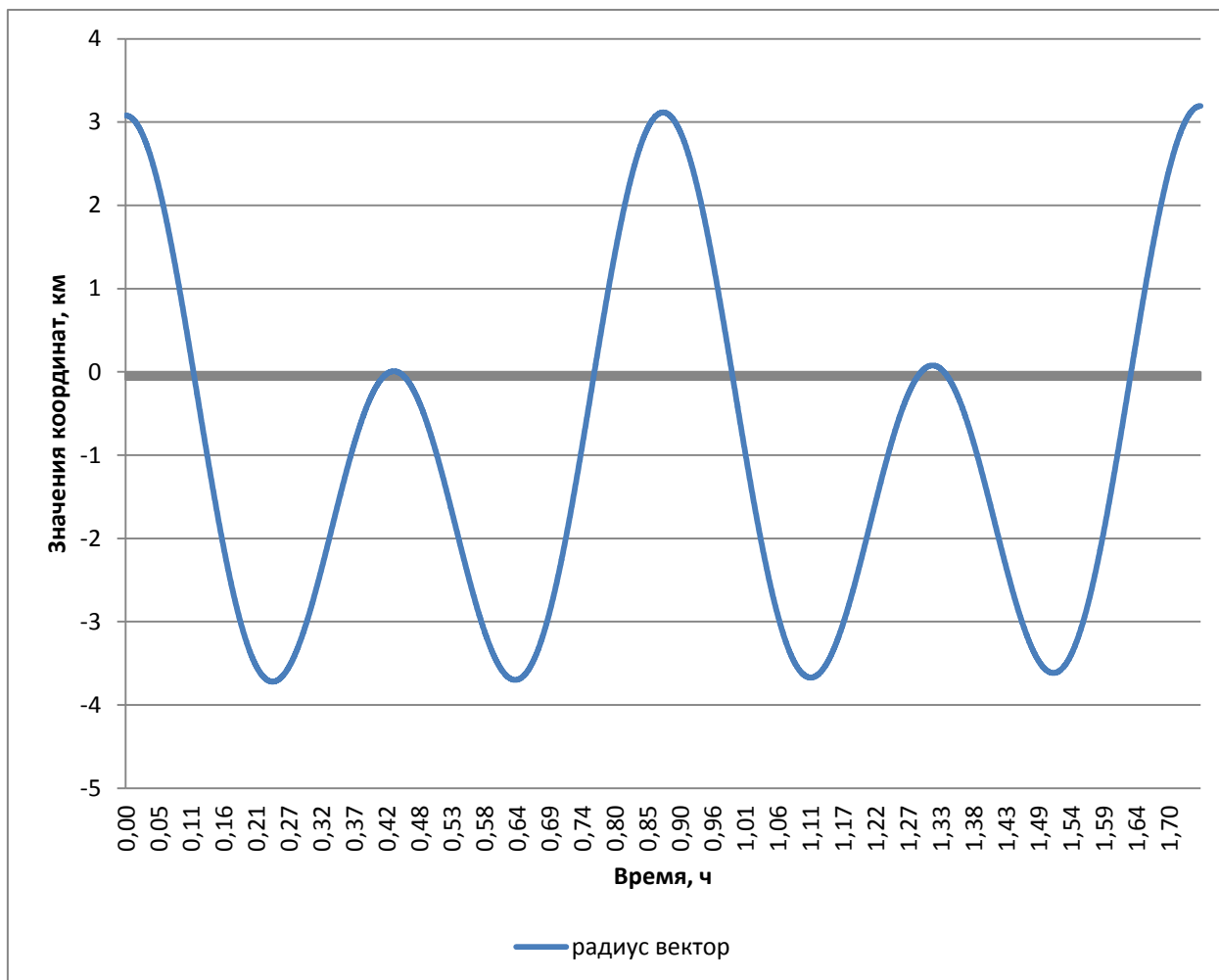


Рисунок 3.3 – График расхождения проекций скоростей ИСЗ по численной модели и модели Проскурина-Батракова

Данные по расхождению значений радиус-вектора представлен в таблице 3.3.

Таблица 3.3- амплитудные значения радиус вектора

Параметр	Радиус вектор
Радиус вектор макс. значение, км	3,192522
Радиус вектор мин. значение, км	-3,71981

Сравнение численной модели с моделью Козаи.

График расчета расхождения координат x , y , z ИСЗ по численной модели и модели Козаи, с шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.4.

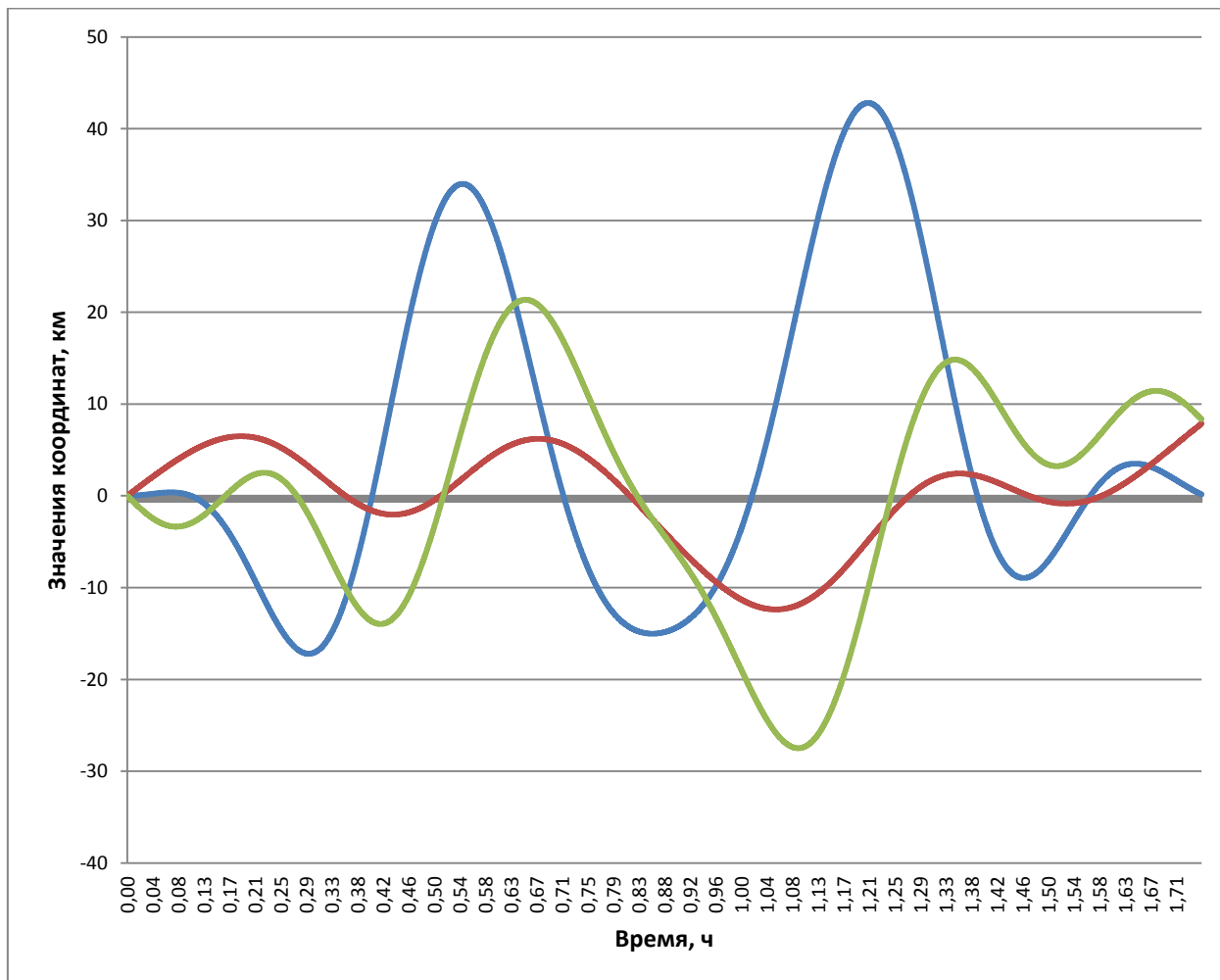


Рисунок 3.4 – График расхождения координат ИСЗ по численной модели и модели Козаи

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4- амплитудные значения параметров высоты

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Высота орбиты макс. значение, км	42,81144	7,851452	21,36529
Высота орбиты мин. значение, км	-17,2054	-12,3812	-27,4928

График расчета расхождения проекций скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ по численной модели и модели Козаи, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.5.

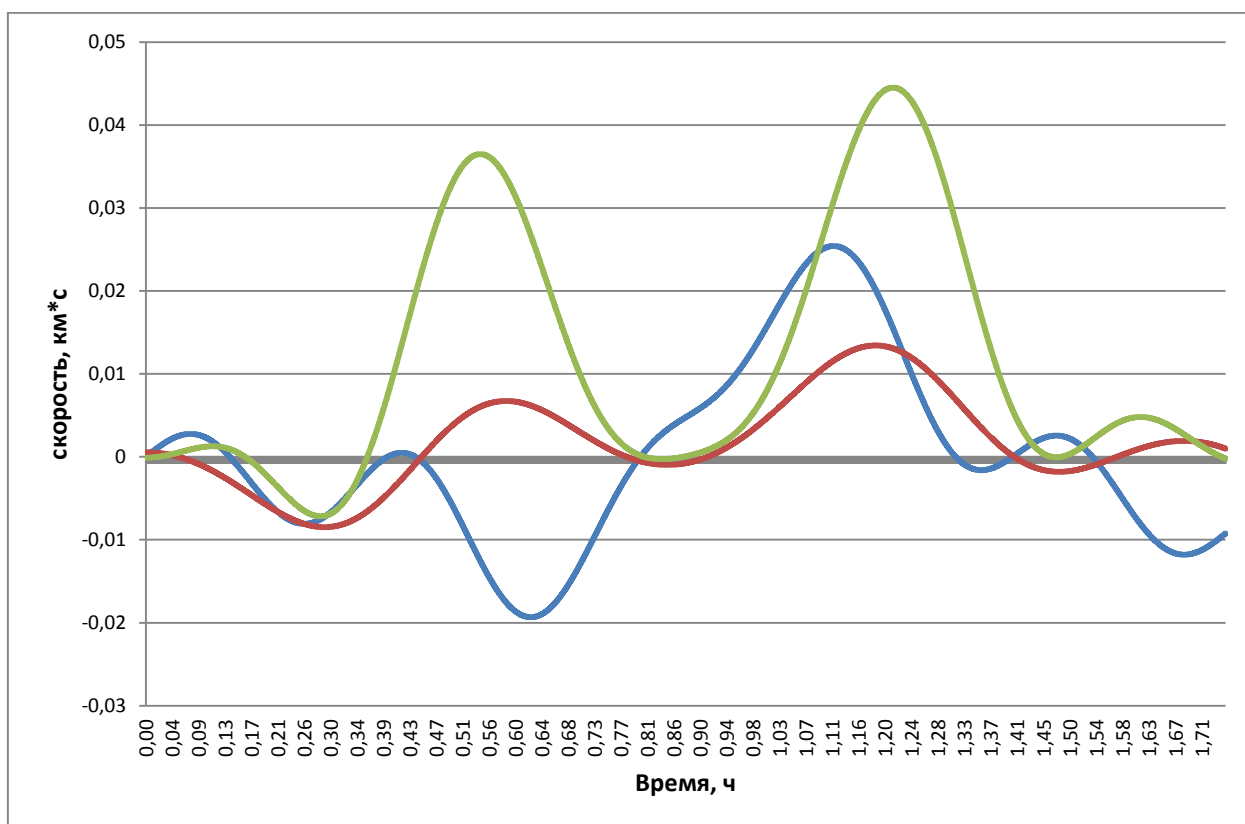


Рисунок 3.5 – График расхождения проекций скоростей ИСЗ по численной модели и модели Козаи

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5- амплитудные значения проекций скоростей

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,025415	0,013426	0,044509
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,01933	-0,00848	-0,00717

График расчета расхождения радиус-вектора ИСЗ по численной модели и модели Козаи, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.6.

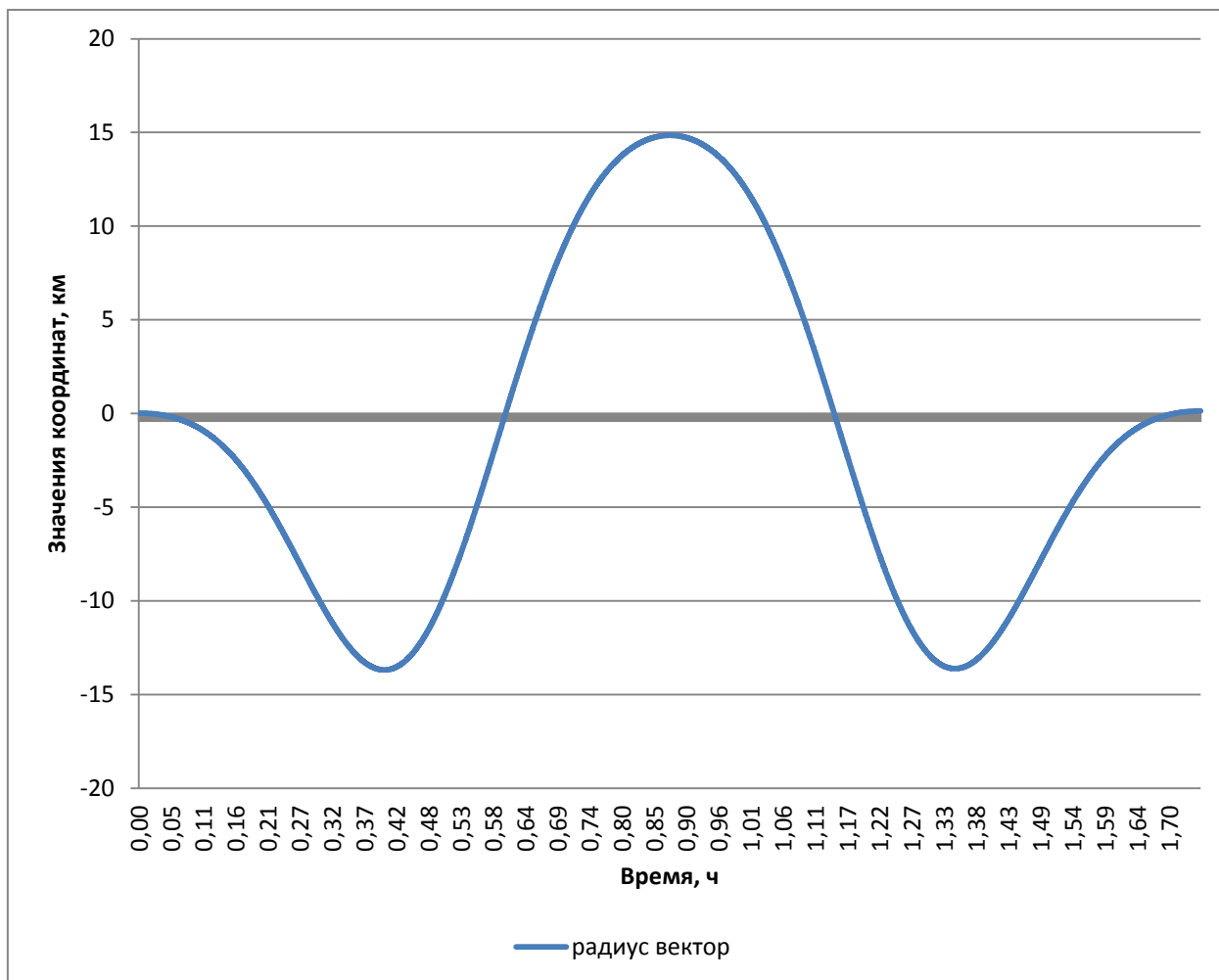


Рисунок 3.6 – График расхождения радиус-вектора ИСЗ по численной модели и модели Козаи

Данные по расхождению значений радиус-вектора представлен в таблице 3.6.

Таблица 3.6- амплитудные значения радиус вектора

Параметр	Радиус вектор
Радиус вектор макс. значение, км	14,84957
Радиус вектор мин. значение, км	-13,6847

Сравнение численной модели с моделью учитывающей возмущения второго порядка.

График расчета расхождения координат x , y , z ИСЗ по численной модели и модели, учитывающей возмущения второго порядка, с шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.7.

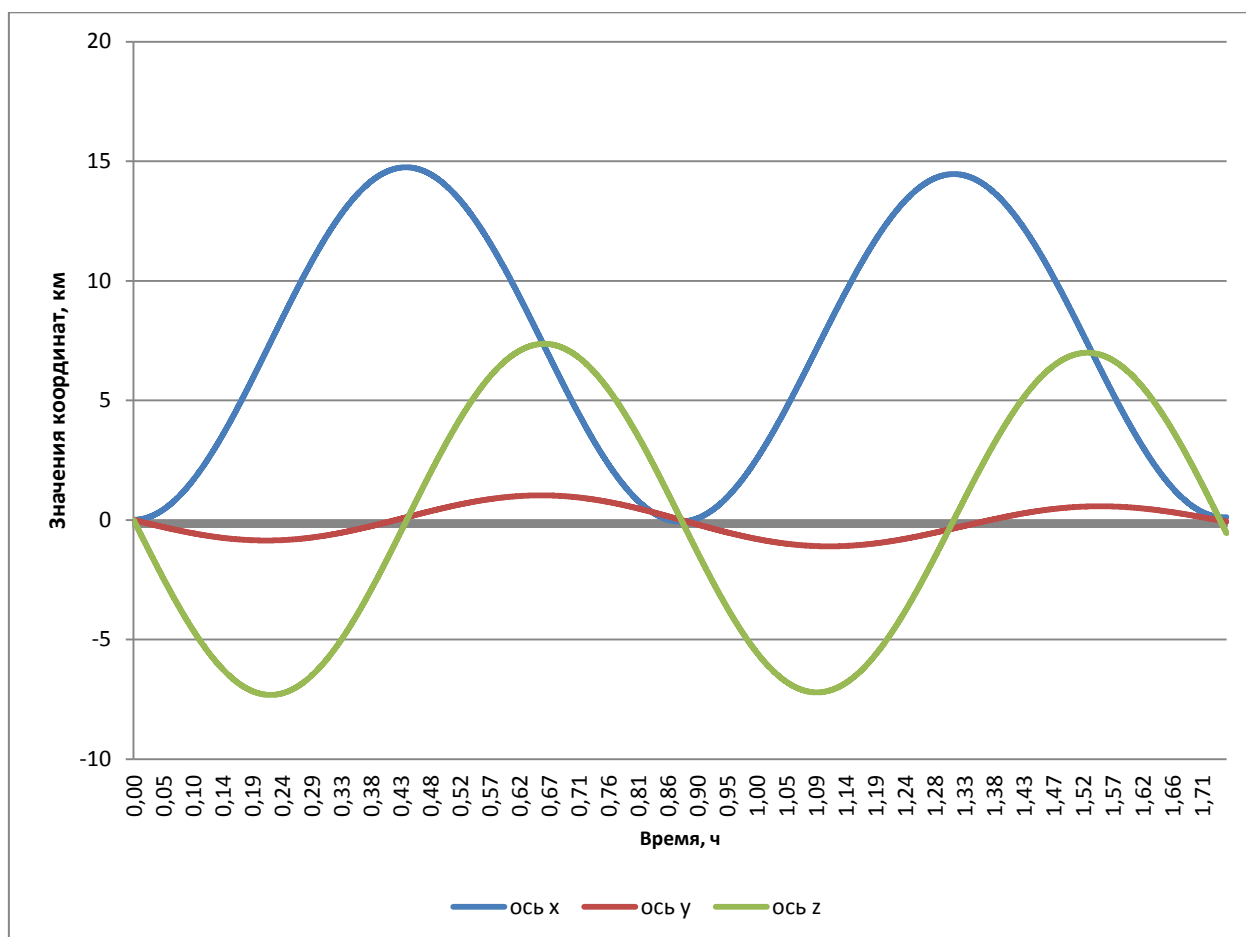


Рисунок 3.7 – График расхождения координат ИСЗ по численной модели и модели, учитывающей возмущения второго порядка

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7- амплитудные значения параметров высоты

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Высота орбиты макс. значение, км	14,74817	1,029648	7,366389
Высота орбиты мин. значение, км	-0,06571	-1,10178	-7,31624

График расчета расхождения проекций скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ по численной модели и модели, учитывающей возмущения второго порядка, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.8.

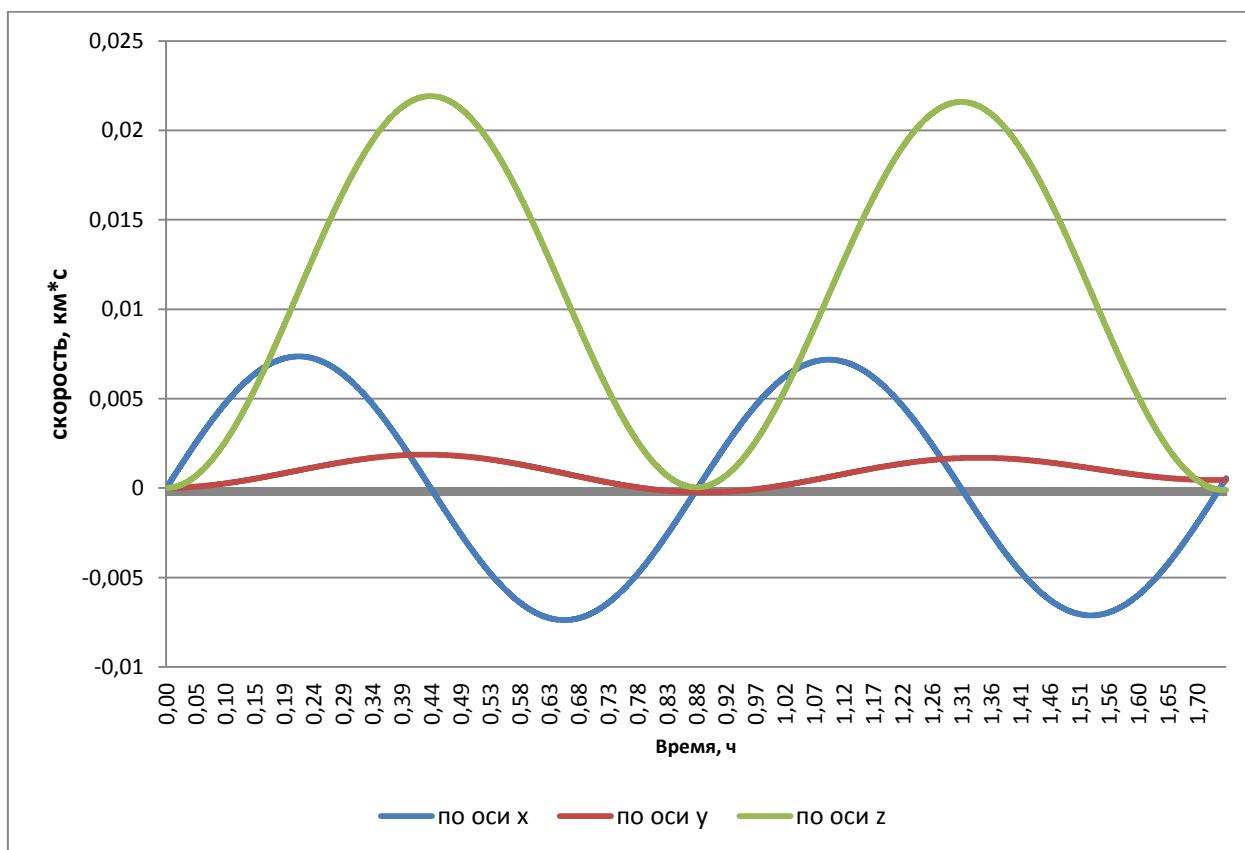


Рисунок 3.8 – График расхождения проекций скоростей ИСЗ по численной модели и модели, учитывающей возмущения второго порядка

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.8.

Таблица 3.8- амплитудные значения проекций скоростей

Параметр	Ось x	Ось y	Ось z
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,007363	0,001873	0,021916
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,00738	-0,00023	-0,0001

График расчета расхождения радиус-вектора ИСЗ по численной модели и модели учитывающей возмущения второго порядка, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.9.

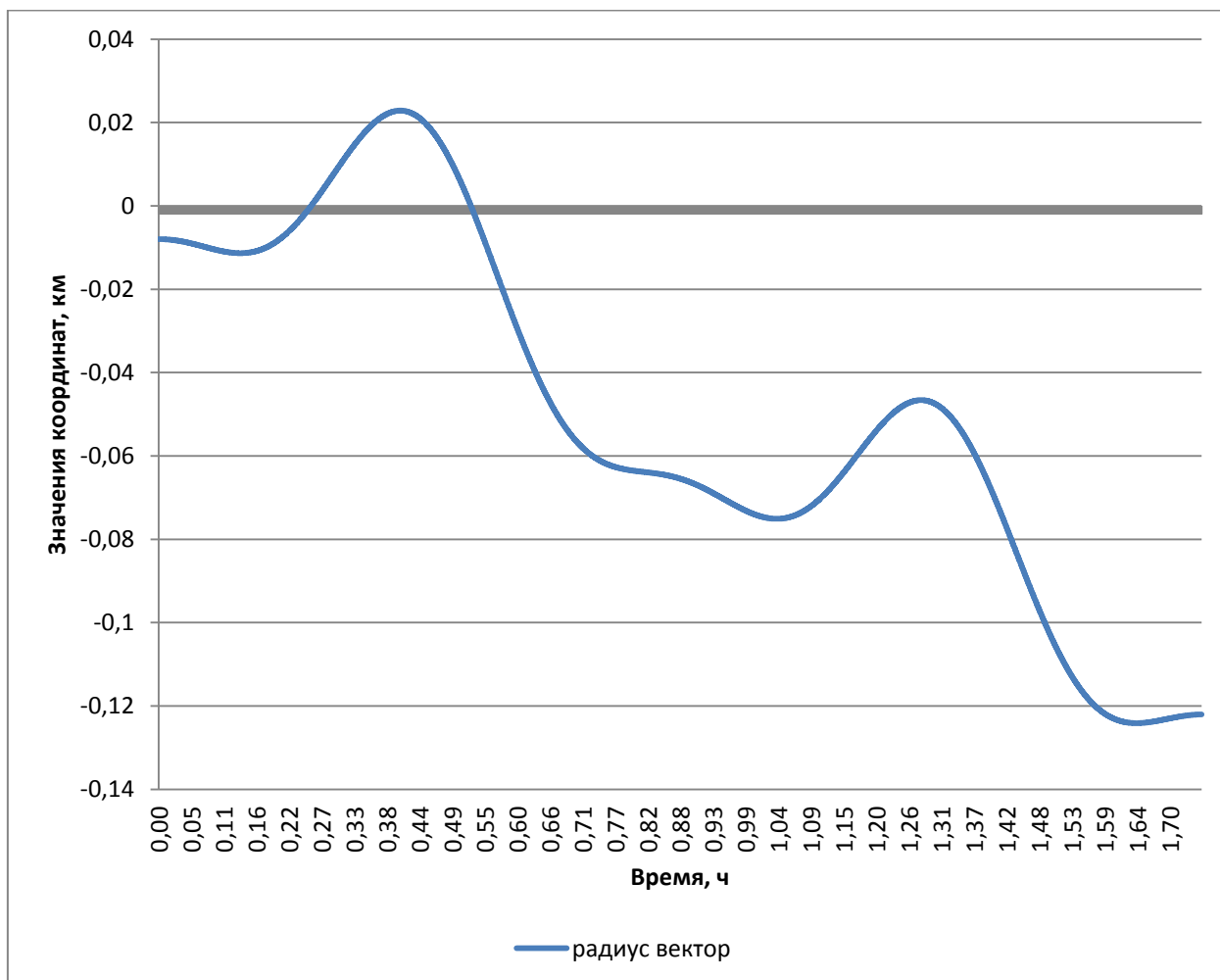


Рисунок 3.9 – График расхождения радиус-вектора ИСЗ по численной модели и модели учитывающей возмущения второго порядка

Данные по расхождению значений радиус-вектора представлен в таблице 3.9.

Таблица 3.9- амплитудные значения радиус-вектора

Параметр	Радиус вектор
Радиус вектор макс. значение, км	0,022853
Радиус вектор мин. значение, км	-0,12411

3.2 Сопоставление аналитических моделей на промежутке одного витка

Расхождение по координатам искусственных спутников Земли

График расхождения координат орбиты по оси x моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.19.

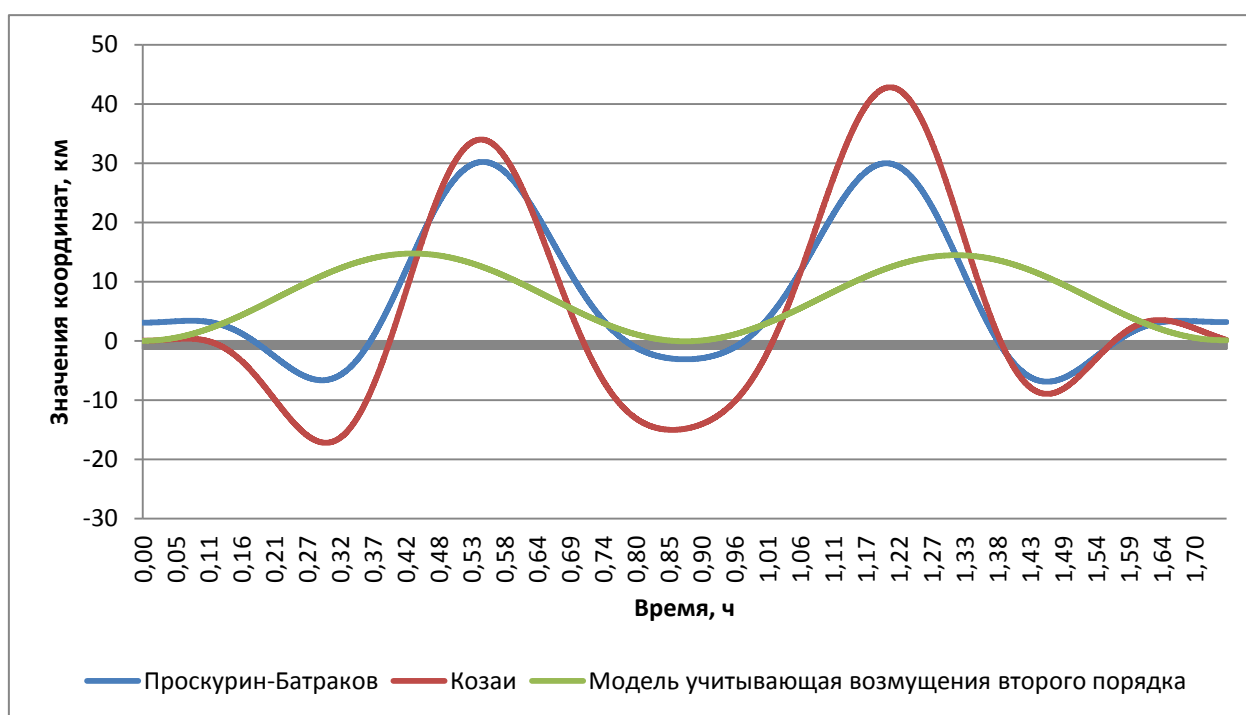


Рисунок 3.19 – График расхождения координат ИСЗ по оси x

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.19.

Таблица 3.19- амплитудные значения высоты орбиты по оси x

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Высота орбиты макс. значение, км	30,21305	42,81144	14,74817
Высота орбиты мин. значение, км	-6,88583	-17,2054	-0,06571

График расхождения координат орбиты по оси у моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.20.

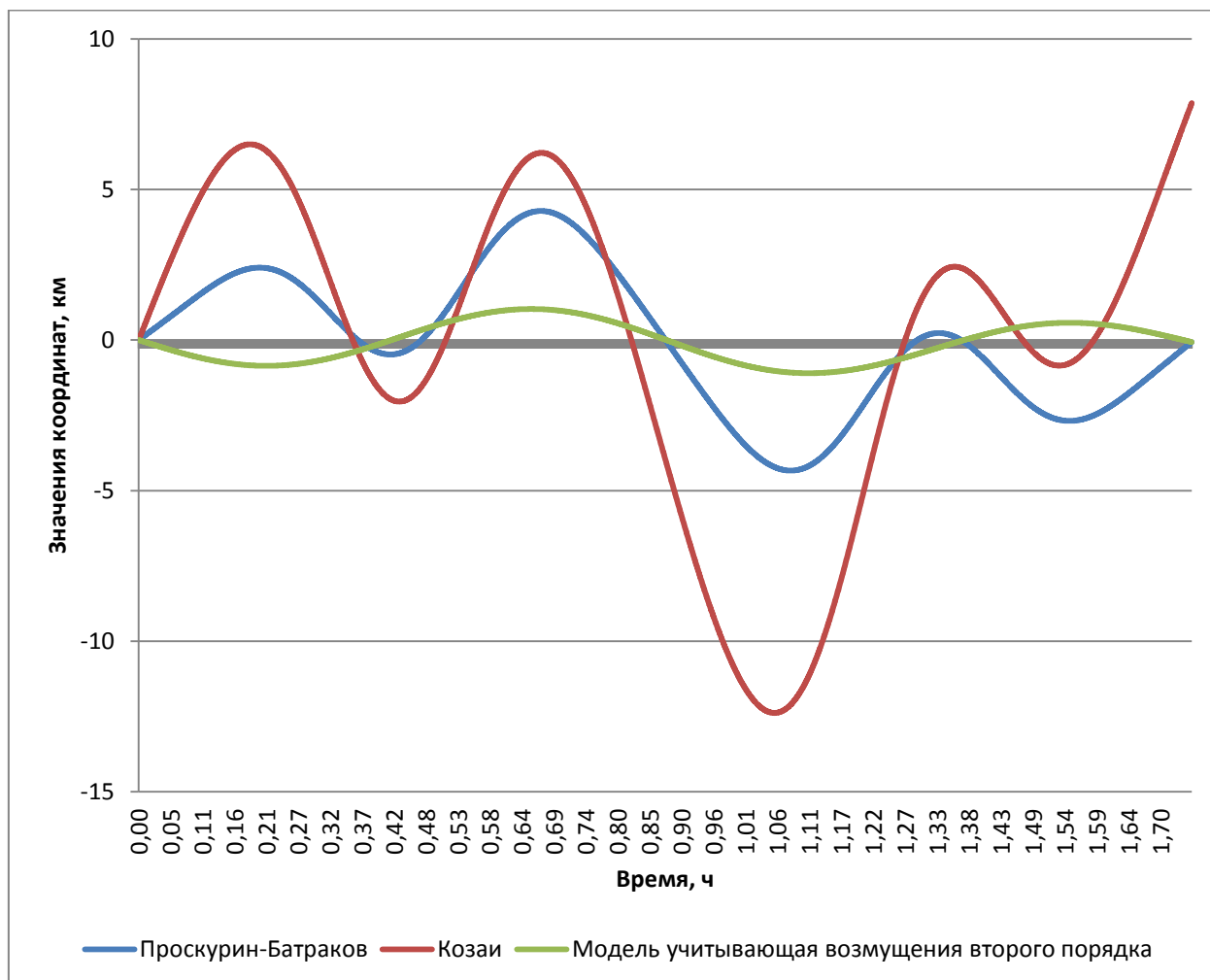


Рисунок 3.20 – График расхождения координат ИСЗ по оси у

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.20.

Таблица 3.20- амплитудные значения высоты орбиты по оси у

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Высота орбиты макс. значение, км	4,283855	7,851452	1,029648
Высота орбиты мин. значение, км	-4,33717	-12,3812	-1,10178

График расхождения координат орбиты по оси z моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.21.

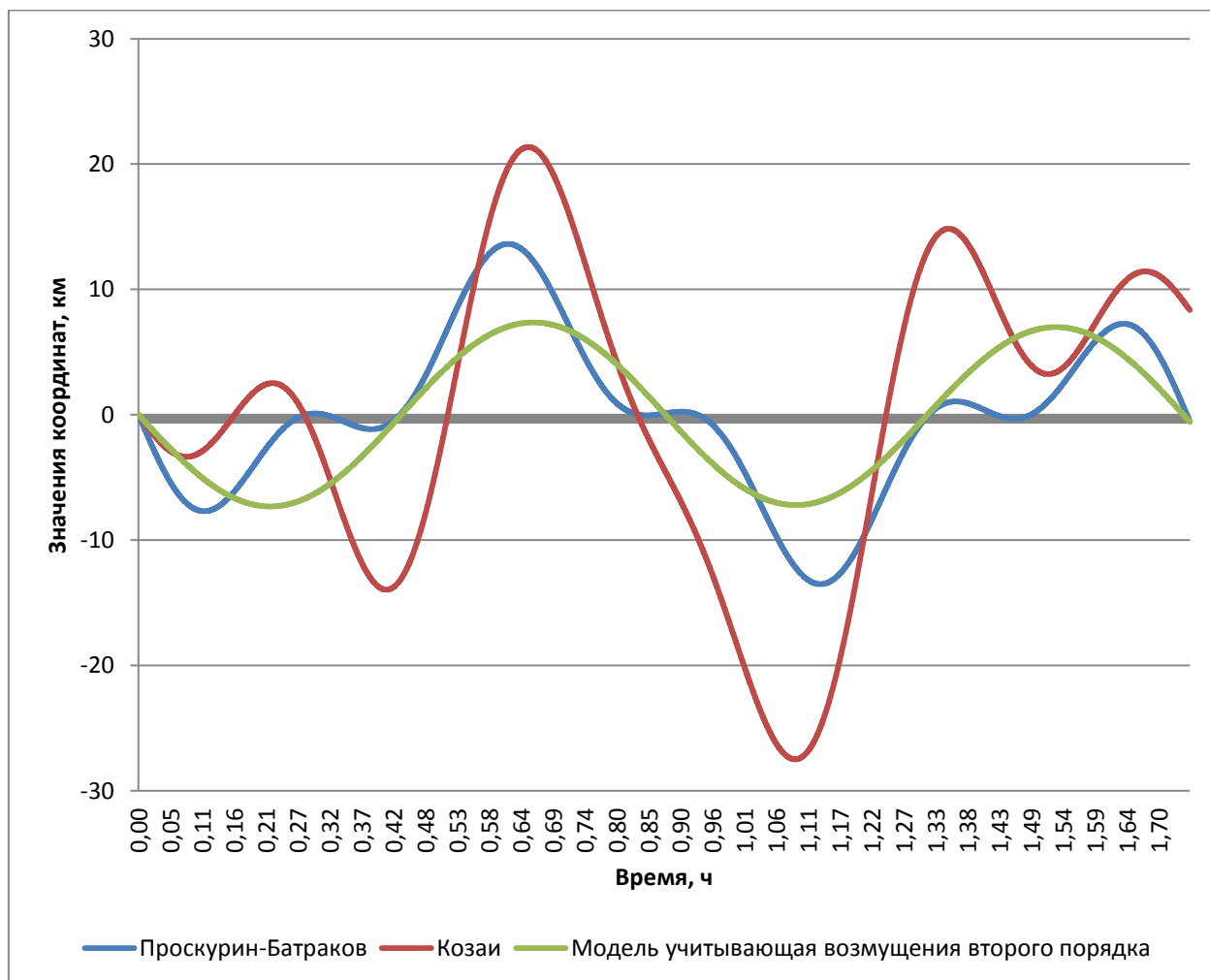


Рисунок 3.21 – График расхождения координат ИСЗ по оси z

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.21.

Таблица 3.21- амплитудные значения высоты орбиты по оси z

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Высота орбиты макс. значение, км	13,63089	21,36529	7,366389
Высота орбиты мин. значение, км	-13,5168	-27,4928	-7,31624

Расхождение по проекциям скоростей искусственных спутников Земли.

График расхождения проекций скоростей по оси x моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.22.

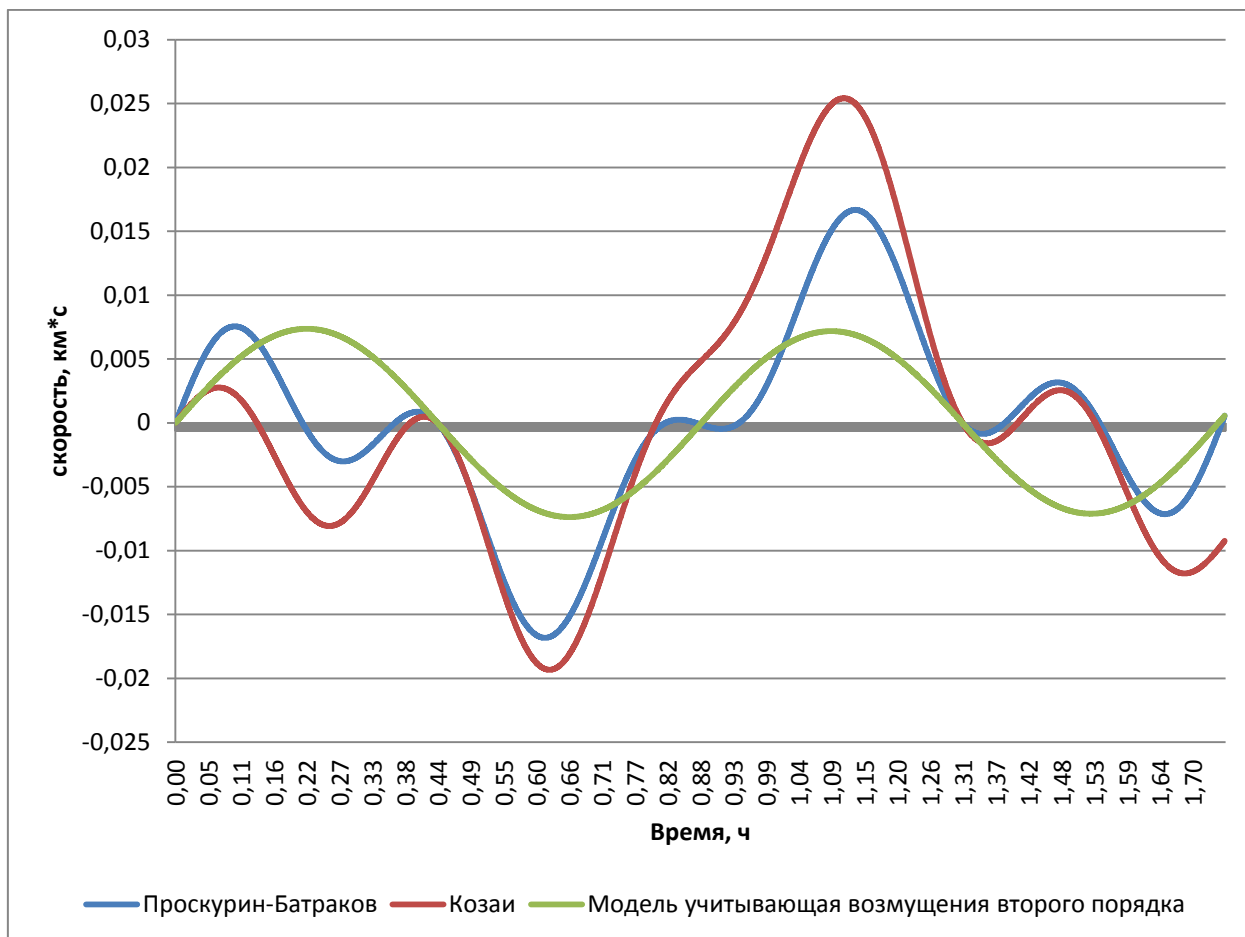


Рисунок 3.22 – График расхождения проекций скоростей по оси x

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.22.

Таблица 3.22- амплитудные значения высоты орбиты по оси x

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,016668	0,025415	0,007363
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,01683	-0,01933	-0,00738

График расхождения проекций скоростей по оси у моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.23.

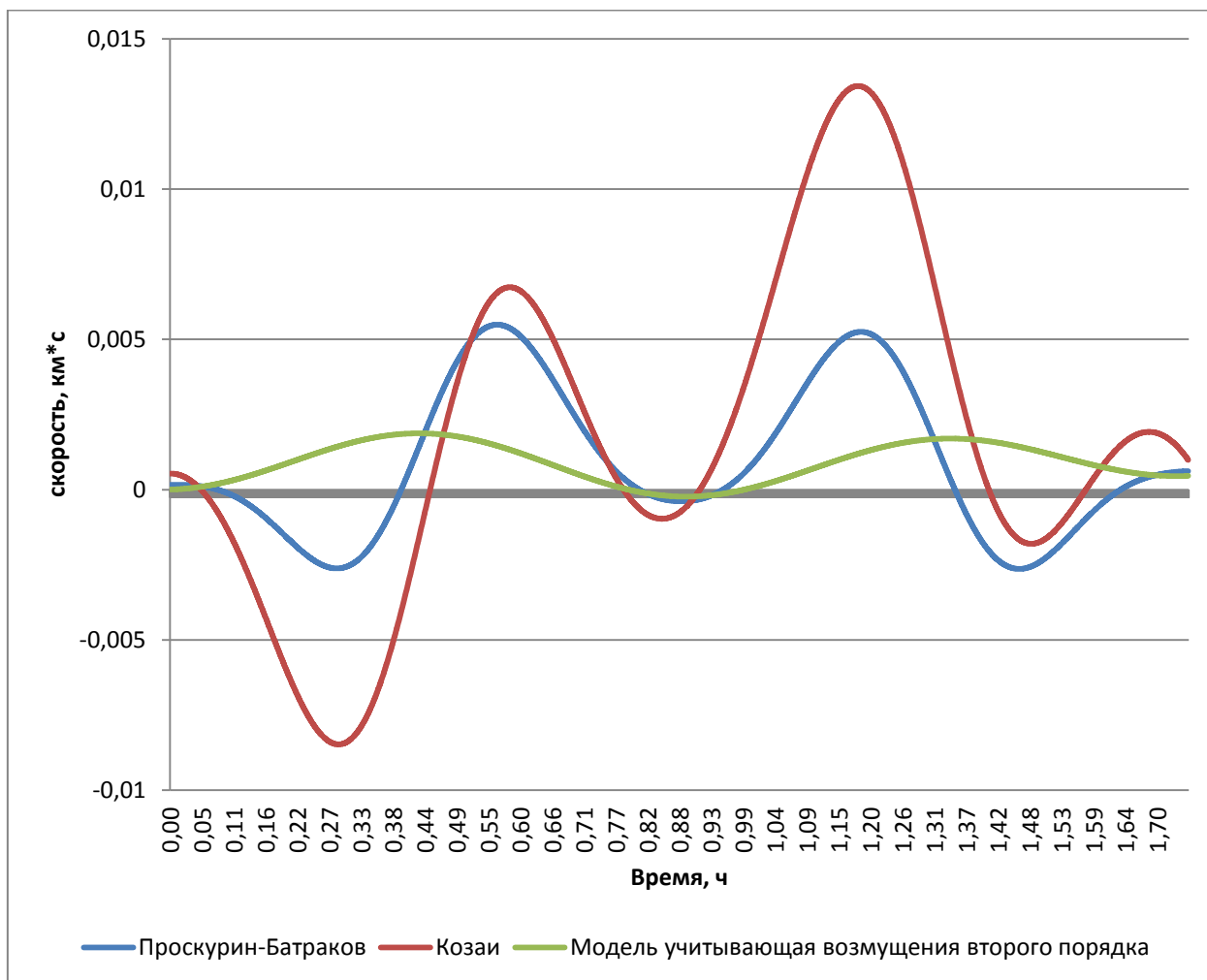


Рисунок 3.23 – График расхождения проекций скоростей по оси у

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.23.

Таблица 3.23- амплитудные значения высоты орбиты по оси у

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,005487	0,013426	0,001873
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,00264	-0,00848	-0,00023

График расхождения проекций скоростей по оси z моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.24.

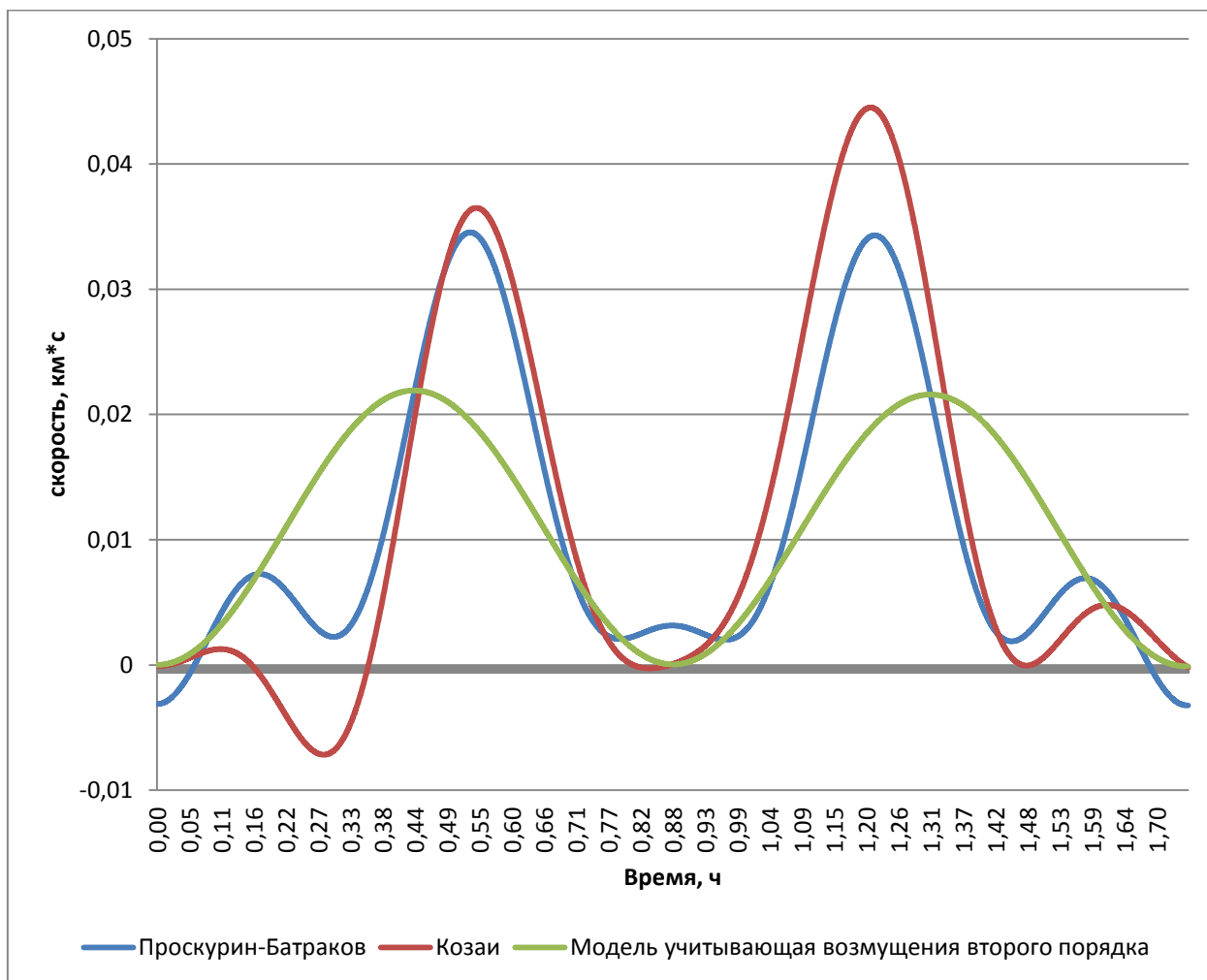


Рисунок 3.24 – График расхождения проекций скоростей по оси z

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.24.

Таблица 3.24- амплитудные значения высоты орбиты по оси z

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,034541	0,044509	7,366389
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,00323	-0,00717	-7,31624

Расхождение радиус-вектора искусственного спутника Земли.

График расхождения радиус-вектора моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 1 с, изображен на рисунке 3.25.

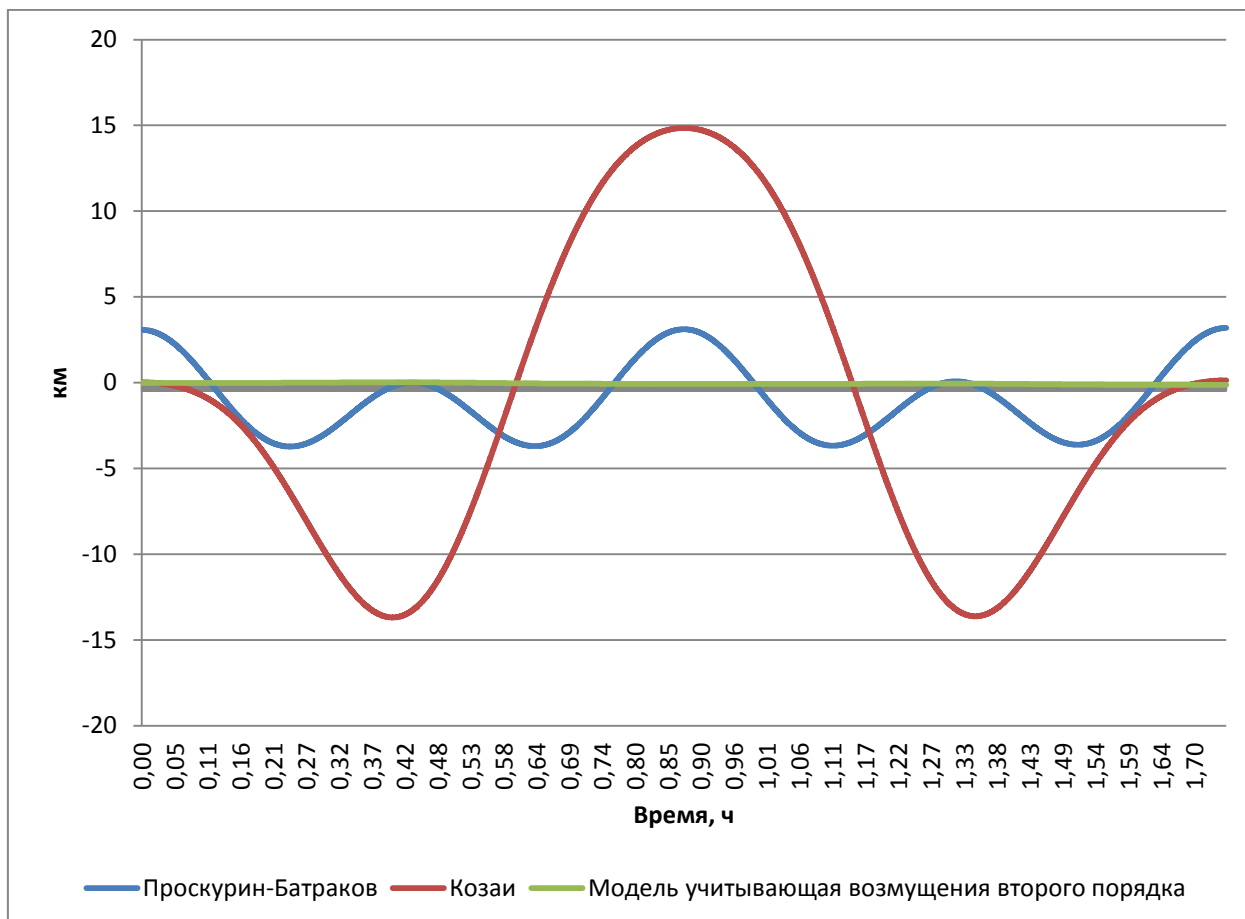


Рисунок 3.25 – График расхождения радиус-вектора

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.25.

Таблица 3.25- амплитудные значения высоты орбиты по оси x

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Радиус вектор макс. значение, км	3,192522	14,84957	0,022853
Радиус вектор мин. значение, км	-3,71981	-13,6847	-0,12411

3.3 Сопоставление аналитических моделей на промежутке 14 витков

Одной из важных характеристик моделей движения КА является возможность прогнозировать координаты КА на длительном промежутке времени. Для более проработанной оценки рассмотренных аналитических моделей было предложено рассмотреть расхождение моделей с эталоном на более длительных промежутках времени. Был произведен расчёт для промежутка 14 витков, что равно на данной орбите интервалу времени в 24,5 часа.

Расхождение по координатам искусственных спутников Земли.

График расхождения координат орбиты по оси x моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 10 с, изображен на рисунке 3.26. Шаг времени в 10 с обоснован большим объемом вычислений, и невозможности снизить шаг при использовании неспециализированных вычислительных средств.

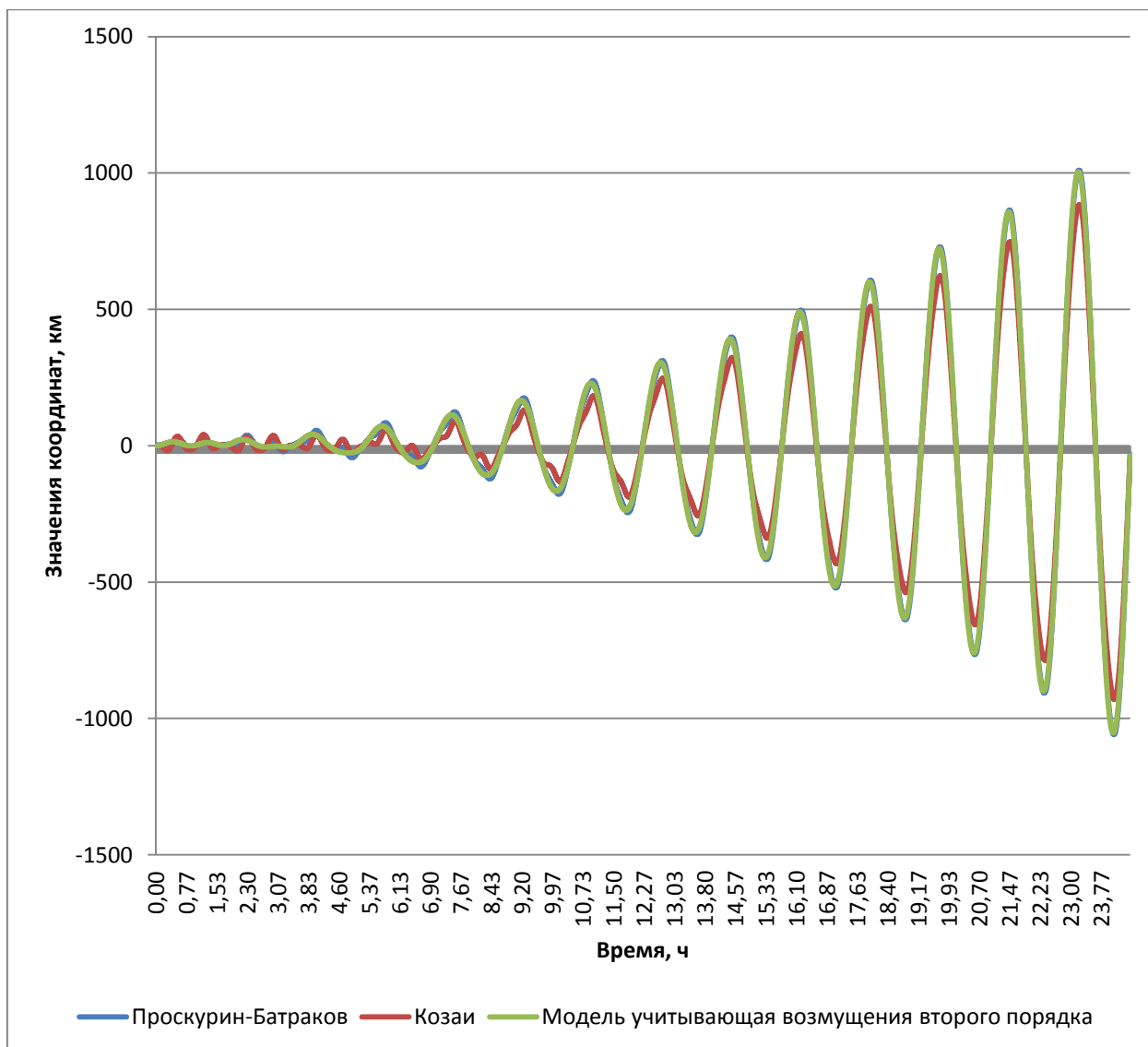


Рисунок 3.26 – График расхождения координат ИСЗ по оси x

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.26.

Таблица 3.26- амплитудные значения орбиты по оси x

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Высота орбиты макс. значение, км	1010,07	884,92	1003,861
Высота орбиты мин. значение, км	-1059,4	-929,965	-1052,62

График расхождения координат орбиты по оси y у моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 10 с, изображен на рисунке 3.27.

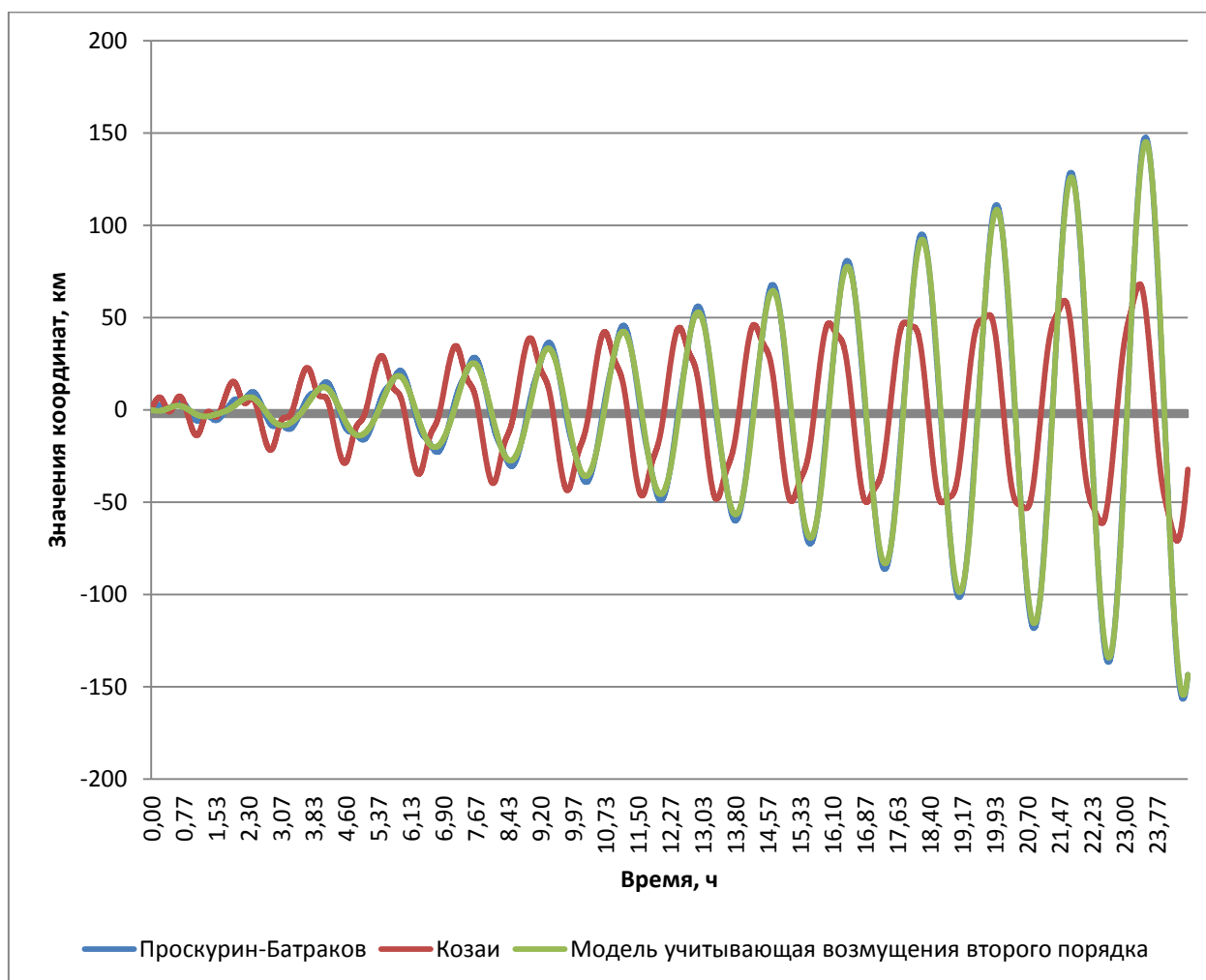


Рисунок 3.27 – График расхождения координат ИСЗ по оси y

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.27.

Таблица 3.27- амплитудные значения орбиты по оси y

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Высота орбиты макс. значение, км	147,5188	68,11301	145,1232
Высота орбиты мин. значение, км	-156,603	-70,9314	-154,405

График расхождения координат орбиты по оси z моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 10 с, изображен на рисунке 3.28.

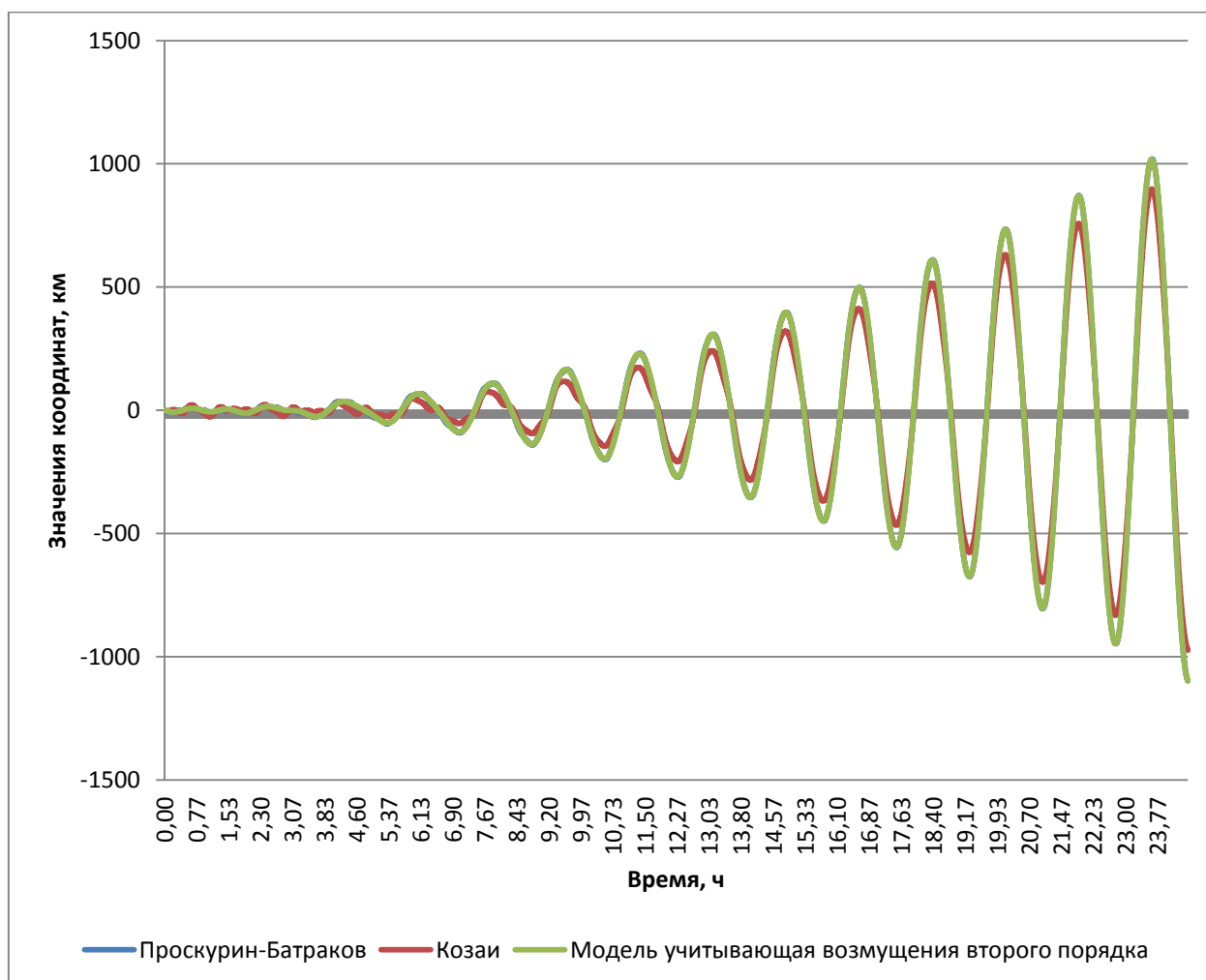


Рисунок 3.28 – График расхождения координат орбиты по оси z

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.28.

Таблица 3.28- амплитудные значения орбиты по оси z

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Высота орбиты макс. значение, км	1018,76	896,8741	1017,561
Высота орбиты мин. значение, км	-1097,36	-972,633	-1097,15

Расхождение по проекциям скоростей искусственных спутников Земли.

График расхождения проекций скоростей по оси x моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 10 с, изображен на рисунке 3.29.

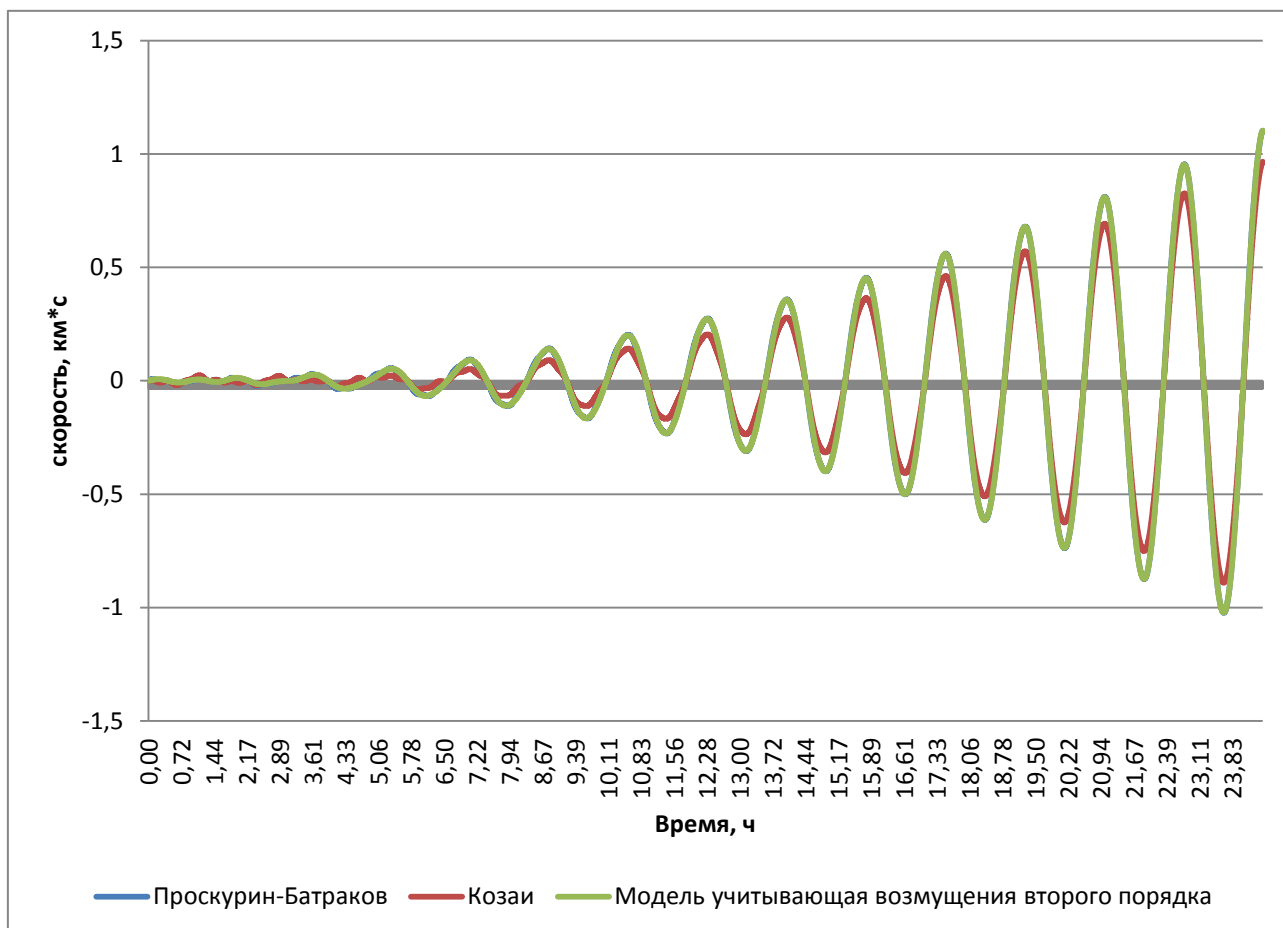


Рисунок 3.29 – График расхождения проекций скоростей по оси x

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.29.

Таблица 3.29- амплитудные значения высоты орбиты по оси x

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Проекция скорости макс. значение, км*с	1,101961	0,9646	1,101702
Проекция скорости мин. значение, км*с	-1,02261	-0,8895	-1,02098

График расхождения проекций скоростей по оси у моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 10 с, изображен на рисунке 3.30.

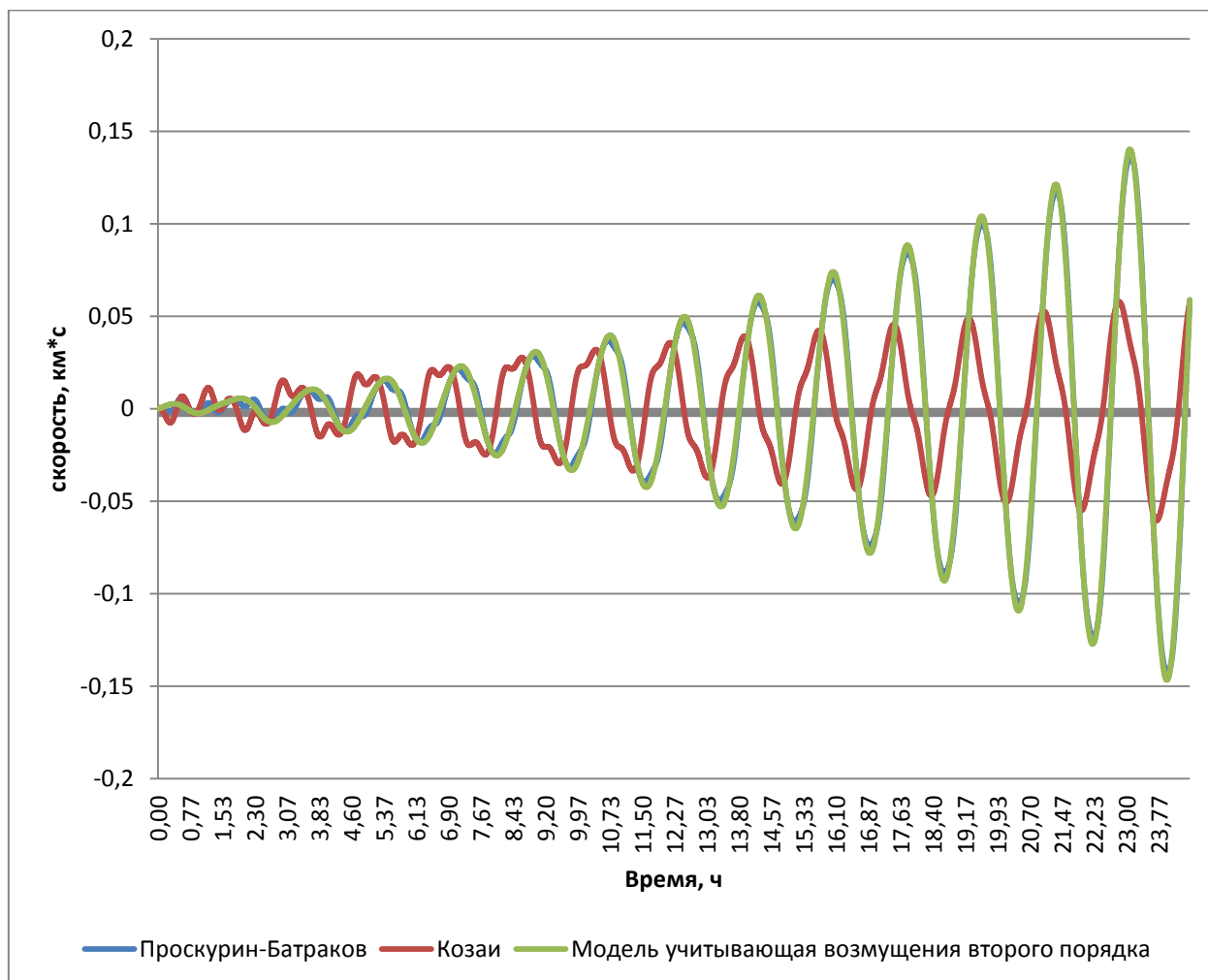


Рисунок 3.30 – График расхождения проекций скоростей по оси у

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.30.

Таблица 3.30- амплитудные значения высоты орбиты по оси у

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Проекция скорости макс. значение, км*с	0,136605	0,05778	0,140179
Проекция скорости мин. значение, км*с	-0,1432	-0,0604	-0,14672

График расхождения проекций скоростей по оси z моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 10 с, изображен на рисунке 3.31.

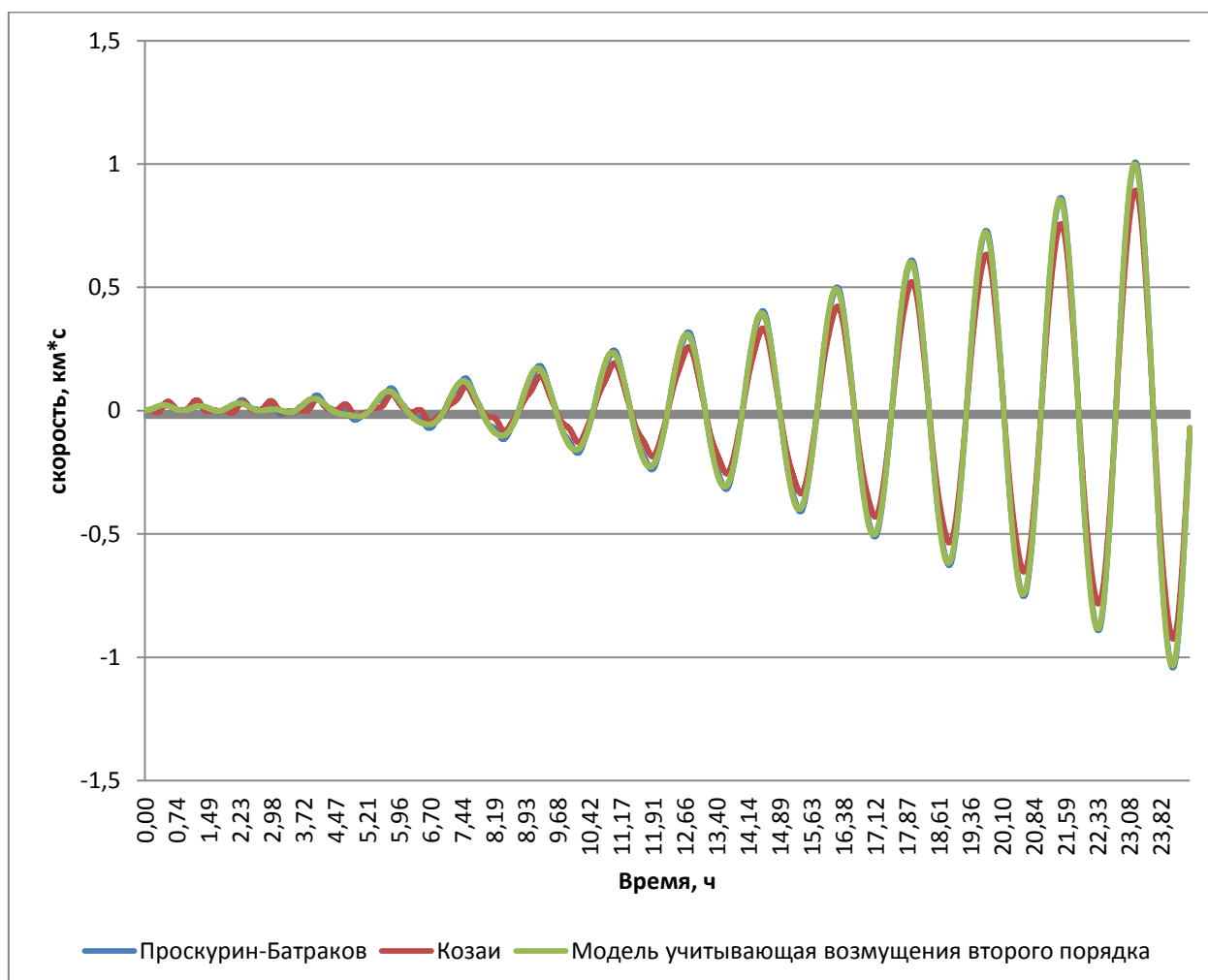


Рисунок 3.31 – График расхождения проекций скоростей по оси z

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.31.

Таблица 3.31- амплитудные значения высоты орбиты по оси z

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Проекция скорости макс. значение, км*с	1,007351	0,893236	0,999938
Проекция скорости мин. значение, км*с	-1,04219	-0,9245	-1,03383

Расхождение значений радиус-вектора координат искусственных спутников Земли. График расхождения радиус-вектора моделей Проскурина-Батракова, Козаи и модели учитывающей возмущения второго порядка от эталонной численной модели, шагом в 10 с, изображен на рисунке 3.32.

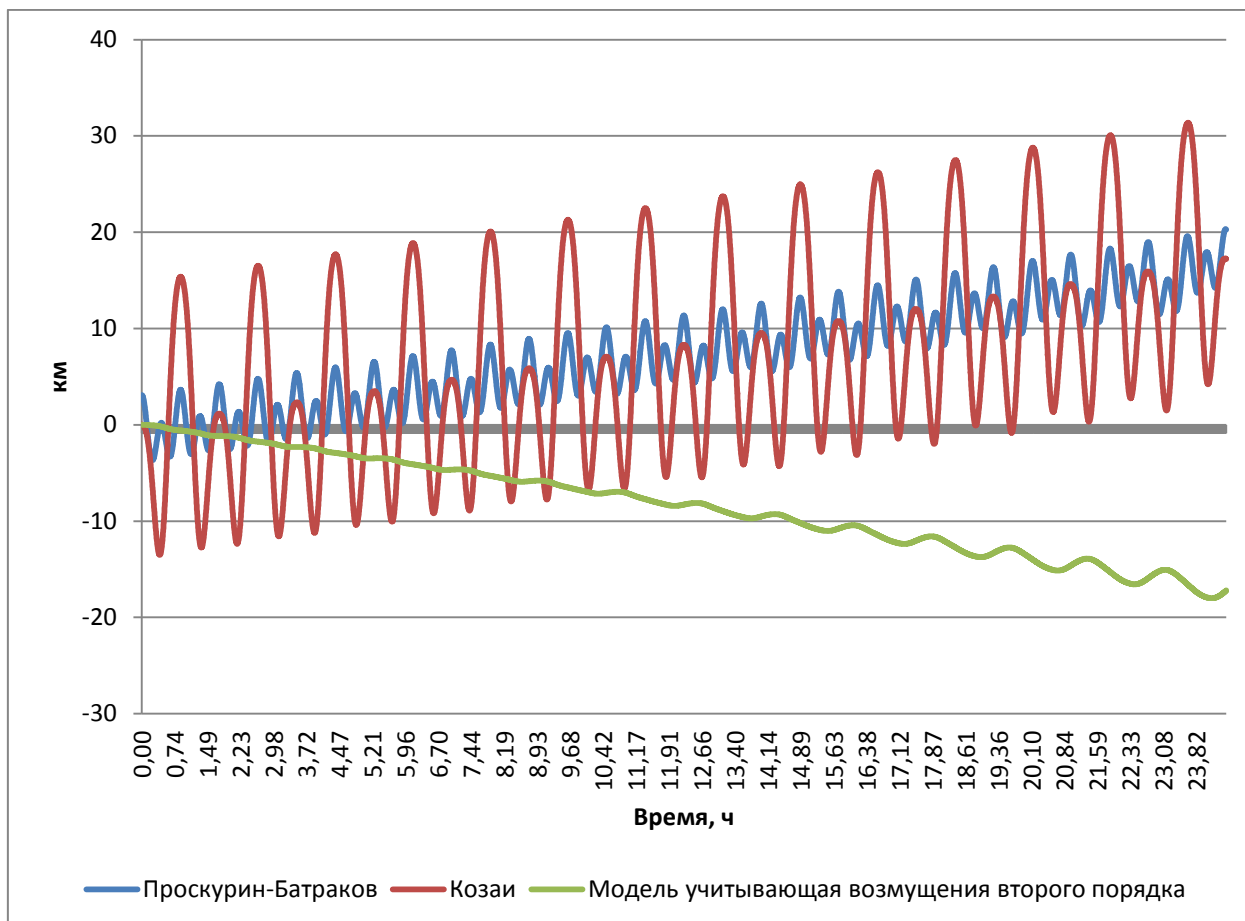


Рисунок 3.32 – График расхождения радиус-вектора по оси x

Данные по размаху величин представлены в таблице 3.32.

Таблица 3.32- амплитудные значения радиус векторов

Параметр	Проскурин-Батраков	Козаи	Модель учитывающая возмущения второго порядка
Радиус вектор макс. значение, км	20,32317	31,36311	-4,63306
Радиус вектор мин. значение, км	0,915953	-8,90721	-18,0044

По результатам расчетов и сравнений аналитических моделей с моделью Рунге-Кутты наиболее приближенной к эталонной численной модели движения КА в поле сжатой Земли является модель, учитывающая возмущения второго порядка.

Также было произведено сравнение моделей между собой, на участке одного витка с шагом в 1 с и на участке 14 витков с шагом в 10 с на коротком промежутке времени (до 2 часов) наиболее точной является модель, учитывающая возмущения второго порядка.

Главным достоинством аналитической модели учитывающей возмущения второго порядка является значительная простота формул для нахождения возмущений движения в сравнении с аналогами.

Её точность сопоставима с аналогами, а накопления возмущений характеризуется гармоническим законом, предлагается в дальнейшем провести работу над нахождением закономерности в накапливаемых возмущениях, и значительно повысить точность прогнозирования местоположения КА модели учитывающей возмущения второго порядка на длительных промежутках времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В проделанной работе были построены:

- 1) аналитическая модель в центральном поле по модели Кеплера;
- 2) численная модель на основе уравнений Рунге-Кутты 4го порядка в центральном поле;
- 3) численная модель на основе уравнений Рунге-Кутты 4го порядка в поле сжатой земли;
- 4) аналитическая модель движения КА Проскурина-Батракова;
- 5) аналитическая модель движения КА Козаи;
- 6) аналитическая модель движения КА, учитывающая возмущения второго порядка.

В моделях рассчитаны значения координат положения КА на орбите, а также проекций скоростей в заданных точках.

При исследовании аналитических моделей и анализе их точностных характеристик были определены невязки аналитических моделей с эталонной моделью, а также произведено сравнение точностных характеристик аналитических моделей между собой.

Модель, учитывающая возмущения второго порядка, превосходит аналогичные аналитические модели движения КА в поле сжатой Земли в части точности определения координат и проекций скоростей КА. Представляется целесообразным использовать её для нахождения параметров координат и скоростей КА на относительно небольшом участке времени (до 2 часов).

Также, в связи с гармоническим законом накопления возмущений, модель, учитывающая возмущения второго порядка, может быть уточнена для достижения высоких точностных характеристик на длительных интервалах прогнозирования. Данное уточнение позволит использовать аналитическую модель в системе управления движением КА для самонавигации и прогнозирования местоположения на орбите на основе эфемерид второго рода.

Точность определения местоположения КА на орбите в таком случае

будет сопоставима с точностью современных численных моделей при существенно меньших требуемых вычислительных ресурсах.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- ИСЗ – искусственный спутник Земли;
- КА – космический аппарат;
- НКО – низко круговая орбита.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Чеботарев, Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики : учебное пособие / Г. А. Чеботарев. – Москва-Ленинград: Изд. «Наука», 1965. – 369 с.
- 2 Сухих, Б. И. Аналитические методы в определении орбит навигационных ИСЗ : учебное пособие / Б. И. Сухих ; –КБПМ: Министерство общего машиностроения, 1973. – 104 с.
- 3 Брауэр, Д. Методы небесной механики : учебное пособие/ Д. Брауэр, Дж. Клеменс. – Москва: Мир, 1964. – 514 с.
- 4 Эльясберг, П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли : учебное пособие / П. Е. Эльясберг. – Москва: Наука, 1965. – 540 с.
- 5 Дубошин, Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Г. Н. Дубошин. – Москва: Изд. «Наука», 1978. – 889 с.
- 6 Кудымов, В. И. Повышение точности навигационного обеспечения с использованием низкоорбитальных космических аппаратов на основе численно-аналитических моделей движения : дис. канд. техн. наук20.02.11 / Кудымов Владимир Иванович. – Красноярск, 1988. – 252 с.
- 7 Меллер, И. Введение в спутниковую геодезию : учебное пособие / И. Меллер. – Москва: Мир, 1967. – 367 с.
- 8 Арнольд, К. Методы спутниковой геодезии : учебное пособие/ К. Арнольд : – Москва: Недра, 1973. – 223 с.
- 9 Каула, У. Спутниковая геодезия. Теоретические основы : учебное пособие/ У. Каула. – Москва: Мир, 1970. – 172 с.
- 10 Пеллинен Л.П. Высшая геодезия: учебное пособие/ Л.П.Пеллинен. – Москва: Недра,1978.-264с.
- 11 Изотов А.А. Основы спутниковой геодезии: учебное пособие/ А.А.Изотов. – Москва: Недра, 1974.-320с.
- 12 Вейс, Г. Геодезическое использование искусственных спутников Земли : учебное пособие/ Георге Вейс. – Москва: Недра, 1967. – 116 с.

13 Бордовицына, Т.В. Теория движения искусственных спутников Земли, аналитические и численные методы: учеб. пособие / Т.В. Бордовицына, В.А. Авдюшев. – Томск: Томский. ун-т, 2007.– 178 с.

14 Чеботарев, В. Е. Основы проектирования космических аппаратов информационного обеспечения : учеб. пособие / В.Е. Чеботарев, В.Е. Косенко. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2011.– 488 с.

15 Зеленцов, В.В Основы баллистического проектирования искусственных спутников Земли / В.В. Зеленцов, В.П. Казаковцев. – Москва Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 174 с.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
институт

Межинститутская базовая кафедра
«Прикладная физика и космические технологии»
кафедра

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

В.Е. Косенко

подпись

инициалы, фамилия

«26» 06 20 19 г

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«Исследование точностных характеристик аналитической модели движения
КА в поле сжатой Земли»

тема

01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

код и наименование направления

01.04.02.04 «Навигация и управление движением»

код и наименование магистерской программы

Научный
руководитель


20.06.19
подпись, дата

Профессор МБК ПФиКТ,
д-р техн. наук
должность, ученая степень

В.И. Кудымов
инициалы, фамилия

Выпускник


20.06.19
подпись, дата

В.А. Гебгардт
инициалы, фамилия


Рецензент


20.06.19
подпись, дата

Начальник сектора АО
«ИСС» канд. техн. наук
должность, ученая степень

Е.В. Ислентьев
инициалы, фамилия

Нормоконтролер


22.06.19 г.
подпись, дата

Е.С. Сидорова
инициалы, фамилия

Красноярск 2019