УДК 517.55

О СТЕПЕННЫХ РЯДАХ, НЕПРОДОЛЖИМЫХ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ СВОЕЙ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

Мкртчян А.Д.
Научный руководитель д-р физ.-мат. наук Цих А. К.
Сибирский федеральный университет

Примеры рядов, аналитически непродолжимых за пределы своего круга сходимости, строятся в учебниках по теории функций комплексного переменного. Эти примеры относятся к серии “сильно лакунарных” рядов, иными словами, у этих рядов “много” мономов с нулевыми коэффициентами. К таким рядам относятся следующие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^n}.$$

В 1891г. Фредгольм [1] построил примеры “умеренно лакунарных” непродолжимых рядов, причем представляющих бесконечно дифференцируемые функции в замыкании их круга сходимости. Эти ряды зависят от параметра a и они имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \qquad 0 < a < 1.$$

Здесь степень n^2 имеет порядок роста 2 относительно индекса суммирования n, поэтому будем говорить, что ряды Фредгольма имеют порядок лакунарности 2.

В работе показывается, что пример Фредгольма можно усилить, уменьшая степенной порядок лакунарности от 2 до $1+\varepsilon$.

Теорема 1. *Если возрастающая последовательность натуральных чисел* n_k *удовлетворяет неравенству* $n_k \geq const * k^{1+\varepsilon}$, *где* $\varepsilon > 0$, *то степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{n_k}, \qquad 0 < a < 1$$

не продолжается за пределы единичного круга и представляет бесконечно дифференцируемую функцию в замыкании круга.

Доказательство основано на теореме Полиа (см. [2], стр. 108) о рядах Дирихле.

В многомерном случае задача построения рядов, непродолжимых за пределы своей области сходимости, значительно сложнее. Используя теорему 1, можно построить простейшие примеры двойных степенных рядов, которые непродолжимы за пределы единичного бикруга.

Теорема 2. *Пусть дан двойной степенной ряд вида*

$$\sum_{(k_1,k_2)\in A} {z_1}^{k_1} {z_2}^{k_2}, \tag{1}$$

с множеством суммирования

$$A = \{(k_1,k_2) \in Z_+^2 : \; k_2 \geq {k_1}^{1+\varepsilon}\} \cup \{(k_1,k_2) \in Z_+^2 : \; k_1 \geq {k_2}^{1+\varepsilon}\}, \qquad \text{где} \qquad \varepsilon > 0,$$

то двойной ряд (1) не продолжается за пределы единичного бикруга $|z_1| < 1, |z_2| < 1$.

В многомерной ситуации интерес к рядам вида (1) возникает в термодинамике с несколькими гамильтонианами [3]. Теорему 2 можно интерпритировать также как пример двумерной версии теоремы Сеге [4] (см. также [5]) о рядах с конечным числом различных коэффициентов Тейлора.

ЛИТЕРАТУРА

1 G. Mittag-Leffler. Sur une transcendente remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d`une letter de M. Mittag-Leffler á M. Poincaré. Acta Math. 15, 1891, 279-280.
2 А. Ф. Леонтьев. Целые функции, ряды экспонент. Москва: Наука 1983. 108с.
3 M. Passare, D. Pochekutov, A. Tsikh. Amoebas of complex hypersurfaces in statistical thermodynamics. Math. Phis., Analysis and Geometry, V. 16, N3, 2013, pp. 89-108.
4 G. Szegõ. Uber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Sitzgsber. pruess. Akad. Wiss., Math.-phys. K1., 1922. 88-91.
5 Л. Бибербах. Аналитическое продолжение. Москва: Наука, 1967. 241с.