УДК 528.74

Mathematical Model of the State of Objects Lighting Considering the Terrain

Aleksey I. Tishchenko^a and Igor V. Lyutikov^{*b}

*Military Education and Research Centre of Military-Air Forces «Military-Air Academy Named After Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin» 54a Starykh Bolshevikov Str., Voronezh, 394064, Russia ^bSiberian Federal University 79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041, Russia

Received 30.11.2016, received in revised form 24.02.2017, accepted 26.03.2017

This paper presents a mathematical model of the probability of hitting the objects of lightning shields taking into account the terrain with a view to its application to the problems of lightning protection of different objects.

Keywords: lightning protection, area relief, model lightning discharge.

Citation: Tishchenko A.I., Lyutikov I.V. Mathematical model of the state of objects lighting considering the terrain, J. Sib. Fed. Univ. Eng. technol., 2017, 10(4), 467-474. DOI: 10.17516/1999-494X-2017-10-4-467-474.

[©] Siberian Federal University. All rights reserved

^{*} Corresponding author E-mail address: lyutikovigor@mail.ru

Математическая модель состояния объектов молниезащиты с учетом рельефа местности

А.И. Тищенко^а, И.В. Лютиков⁶

^аВоенный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» Россия, 394064, Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а ⁶ Сибирский федеральный университет Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

Рассмотрена математическая модель вероятности поражения объектов молниезащиты с учетом рельефа местности с целью ее применения к задачам молниезащиты объектов различного назначения

Ключевые слова: молниезащита, рельеф местности, модель грозового разряда.

Введение

Исследования американских ученых, опубликованные в ноябрьском 2014 г. журнале Science, показывают, что глобальное потепление значительно увеличивает частоту ударов молний. По данным Калифорнийского университета в Беркли, на каждые два удара молнии в 2000 г. придется три удара в 2100-м. Большее число ударов молний сопровождается большим количеством пострадавших людей, вплоть до смертельных исходов.

Средством борьбы с поражением молний объектов инфраструктуры является молниеотвод. Эффективность работы молниеотводов зависит от грамотного их размещения. Оптимизировать размещение средств молниезащиты можно на основе имитационного моделирования процесса протекания разряда молнии и поражения ими объектов инфраструктуры. Одна из таких моделей представлена в работе [1]. Она на основе статистической модели распространения молнии позволяет проводить моделирование стержневой молниезащиты объектов. Модель дает распределения напряженности электростатического поля на объектах молниезащиты и вероятности их поражения молнией с учетом конфигурации защищаемых объектов. В точках с наибольшим значением наводимой напряженности электростатического поля и вероятности поражения объектов молнией рекомендуют устанавливать стержневые мониеотводы.

На развитие кучево-дождевой облачности – источника молний оказывает влияние рельеф местности. Следует ожидать, что на распределение наводимой напряженности электростатического поля на объектах молниезащиты и на вероятности их поражения молнией также будет влиять рельеф местности. Поэтому имитационные модели состояния объектов молниезащиты должны учитывать как особенности конфигурации объектов молниезащиты, так и особенности рельефа местности, на которой расположены эти объекты. Целью исследования стала разработка численной модели расчета напряженности электростатического поля и вероятности поражения объектов защиты с учетом рельефа местности.

В настоящей статье решаются следующие задачи:

- разрабатывается математическая модель состояния объектов молниезащины с учетом рельефа местности;
- производится расчет распределений напряженности электростатического поля и вероятности поражения объектов молниезащиты с учетом рельефа местности.

Математическая модель состояния объектов молниезащиты с учетом рельефа местности

В математической модели объекты защиты и рельеф местности представляются в виде полигонов, которые разбиваются на точки (узлы сетки). Пример простейшего объекта, ангар, изображен на рис. 1.

Каждый узел представляется в виде сферы с зарядом, наводимым внешним полем с некоторой напряжённостью E_0 , созданной кучево-дождевой облачностью с грозовыми явлениями, и радиусом, равным половине шага регулярной сетки d. Для полученной системы сфер с центрами в точках (x_i , y_i , z_i) (i=1,..., n) вычисляют значения зарядов q_i , используя закон Кулона, принцип суперпозиции и зеркального отражения зарядов, в предположении, что сферы заземлены и имеют нулевой потенциал:

$$\frac{l}{d} \frac{1}{2z_{l}+d} q_{l} + \frac{l}{a_{l2}} \frac{1}{b_{l2}} q_{2} + \dots + \frac{l}{a_{ln}} \frac{1}{b_{ln}} q_{n} = 4\pi\varepsilon_{0}E_{0}z_{l},$$

$$\frac{l}{a_{2l}} \frac{1}{b_{2l}} q_{l} + \frac{l}{d} \frac{1}{2z_{2}+d} q_{2} + \dots + \frac{l}{a_{2n}} \frac{1}{b_{2n}} q_{n} = 4\pi\varepsilon_{0}E_{0}z_{2},$$

$$\dots$$
(1)

$$\frac{1}{a_{nl}} \quad \frac{1}{b_{nl}} \quad q_{l} + \frac{1}{a_{n2}} \quad \frac{1}{b_{n2}} \quad q_{2} + \dots + \frac{1}{d} \quad \frac{1}{2z_{n} + d} \quad q_{n} = 4\pi\varepsilon_{0}E_{0}z_{n},$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость воздуха, x_m , y_m , z_m – координаты центра *m*-й сферы; x_n , y_n , z_n – координаты центра *n*-й сферы; $a_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2}$ – расстояние между центрами *m*-й и *n*-й сфер; $b_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m + z_n)^2}$ – расстояние между центрами *m*-й сферы и зеркального отражения *n*-й сферы.



Рис. 1. Полигональная модель ангара (*a*) и ее дискретизация (*b*)

По значениям заряда q_i рассчитывается напряжённость E_i для каждой заряженной сферы:

$$E_{i} = \frac{q_{i}}{4\pi\varepsilon_{0}d^{2}} \quad \frac{q_{i}}{4\pi\varepsilon_{0}(d+2z_{i})^{2}} + \sum_{j=1}^{i} \frac{q_{j}}{4\pi\varepsilon_{0}R_{ij}^{2}} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{q_{j}}{4\pi\varepsilon_{0}R_{ij}^{2}} \sum_{j=1}^{i} \frac{q_{j}}{4\pi\varepsilon_{0}R_{0ij}^{2}} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{q_{j}}{4\pi\varepsilon_{0}R_{0ij}^{2}},$$

$$(2)$$

где $R_{i,j} = \sqrt{(x_i \ x_j)^2 + (y_i \ y_j)^2 + (z_i \ z_j)^2}$ расстояние между центрами *i*-й и *j*-й сфер;

 $R_{0i,j} = \sqrt{(x_i - x_{j0})^2 + (y_i - y_{j0})^2 + (z_i - z_{j0})^2}$ – расстояние между центрами *i*-й сферы и зеркального отражения *j*-й сферы.

По значению напряжённости электростатического поля в каждом узле получаем распределение напряжённости на защищаемом объекте.

Распределение напряжённости электростатического поля является основным входным параметром для расчёта траектории молниевого разряда, движущегося в сторону точки с наибольшим значением напряжённости. При этом лидер молнии испытывает постоянные возмущения в виде неоднородности электрического сопротивления воздуха, в результате чего молниевый разряд представляется в виде системы ломаных. Для воспроизведения этих ломаных в модели развития молнии используется две системы координат: глобальная и локальная. Глобальная система координат (X,Y,Z) неподвижна. Начало отсчета совпадает с началом молнии. Поверхность Земли сдвинута на расстояние H, т. е. (X, Y, Z + H). Локальная система координат (x',y',z') перемещается вместе с молнией. Начало отсчета там, где находится лидер. Направление оси х' выбирается так, чтобы она совпадала с направлением последней ступени лидера молнии. Электрическое поле молнии на много порядков превышает суммарное поле всего остального, стримеры, окружающие лидер, как бы «нащупывают» направление движения на некотором расстоянии от лидера Lop, а само поле молнии можно считать «источником» хаоса, которое и приводит к случайному характеру последующего продвижения лидера. Расстояние L_{op} не превышает размеров стримерной зоны, которая определяется длиной стримеров l_{cmn} , и зависит от линейной плотности объемного заряда т в соответствии с соотношением [1]

$$l_{cmp} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 - E_{cmp}},\tag{3}$$

где E_{cmp} – средняя напряженность электрического поля в стримерной зоне.

В локальной системе координат направление перемещения лидера по углу φ (рис. 2) подчиняется равномерному распределению на интервале [0; π], а по углу α относительно оси x' – нормальному закону распределения со среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\theta}=0.2\div0.3$ и больше (в зависимости от длины и мощности молнии) относительно нулевого среднего значения [1]:

$$f_{norm}(\alpha) = \frac{l}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\theta}} \quad exp \quad \frac{\alpha^2}{2\sigma_{\theta}^2}.$$
(4)

Длина *L* отрезка молнии, «выросшей» по следу стримера, является случайной величиной с логнормальным законом распределения [2]:

$$f_{lognorm}(L) = \frac{I}{\sqrt{2\pi} \sigma_p - L} \exp - \frac{(ln(L/L_0))^2}{2 \sigma_p^2}.$$
(5)

Величины *L* и *т* выбирают из диапазона величин наблюдаемых в природе. Знак заряда выбираются случайно, исходя из условия, что 90 % молний имеют отрицательный заряд.

В общем виде определяется направление *S* при заданном максимальном значении направляющего вектора *E* и угле раскрытия *α* [2]:

$$\overline{S} = \overline{E} + \overline{d}_1, \tag{6}$$

где \overline{d}_1 – случайно отклоняющий вектор, определяемый через вектор \overline{d}_0 , лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору \overline{E} .

Для разряда молнии необходимо наличие как облачного, так и встречного лидера (стримера), характеризующего электрофизические процессы на поверхности земли и на объектах молниезащиты.

Модель формирования стримера схожа с моделью возникновения и развития облачного лидера молнии. Объясняется это тем, что зарождение и развитие стримера происходит практически в той же среде и в тех же условиях, что и облачного лидера. Отличительная особенность – электрофизические процессы на объектах защиты. Рассмотрим их.

Наличие достаточной ионизации воздуха вокруг объектов защиты служит одним из условий появления стримера от этих объектов. Это наблюдается, когда средняя напряженность электрического поля в пространстве между облаком и точкой начала зарождения стримера на объекте защиты не меньше средней напряженности поля в канале лидера ($E \ge E_{\kappa p} = 3 \cdot 10^6 \text{ B/m}^2$). Развитие стримера будет наблюдаться при условии, когда электрическое поле в головке стримера достаточно для удлинения стримера на такое расстояние, при котором усиление поля будет достаточным для дальнейшего продвижения стримера и лидера молнии.



Рис. 2. Формирование ступени лидера

Моделирование указанных условий производится на основе коррекции q_i и E_i с учетом зон ионизации (7), стримерной зоны (8) и проверки скорректированных значений E_i с критическим $E_{\kappa p}$. При выполнении условия $E \ge E_{\kappa p}$, принимается решение, что ионное облако растет и есть условия для зарождения и развития стримера в узле объекта защиты, в противном случае зарождения и развития нет [2].

$$R_{\mu,3i} = \sqrt{\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 E_{1i}}},\tag{7}$$

$$R_{\rm c.3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 E_{2i}R_0},\tag{8}$$

где $R_{u.s.i}$ – радиус зоны ионизации воздуха вокруг *i*-го узла; E_{li} – электрическая прочность воздуха; $R_{c.s.i}$ – радиус стримерной зоны *i*-го узла; E_{2i} – напряженность электрического поля в стримерной зоне *i*-го узла; R_0 – радиус ионного облака.

Моделирование процесса дальнейшего развития стримера производится на основе расчета: скорости роста ионного облака V в условиях внешнего электрического поля E_0 (9); увеличения первоначального радиуса ионного облака ΔR (10); радиуса сферы, образованного объемным электрическим зарядом ионного облака $R_{c.o.}$ (11). В качестве радиуса ионного облака используется $R_{u.o.} \leq R_{c.s.}$, в противном случае – $R_{c.s.}$

$$V = \mu E_{\phi},\tag{9}$$

$$\Delta R = \mu E_{\phi} \Delta t, \tag{10}$$

$$R_{c.o.} = r_0 + \varDelta R,\tag{11}$$

где μ – подвижность ионов; Δt – время действия поля.

Следующим этапом моделирования является проверка выполнения условия рождения лидера внутри ионного облака. Для преодоления ионного облака необходимо, чтобы напряжение внутри облака было больше $0.6\sqrt{R_{co}}$, а в узле – больше (12):

$$U \ge \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Delta U_{\min}^4 \mu \Delta t}{2R_{c.3.}^2}},\tag{12}$$

где ΔU_{\min} – минимальное напряжение стримерной зоны, при которой лидер прекращает свое существование.

При выполнении указанных условий формируется первая ступень стримера. Формирование траектории движения встречного лидера осуществлялся по аналогии с формированием траектории движения облачного лидера.

Для моделирования процесса формирования последующих ступеней встречного лидера рассчитывается скорость роста встречного лидера V_{π} (13), время действия внешнего электрического поля и переносимый за это время заряд (14) и ток лидера (15):

$$V_{_{\Pi}} = a \sqrt{\Delta U_{_{\Gamma}}}, \tag{13}$$

$$Q = \frac{i_{\rm T} R_{\rm c.s.}}{V_{\rm m}},$$
(14)

- 472 -

$$i_{\rm T} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a\Delta U_{\rm r}^{3/2}}{\ln\left(\frac{1,28E_{\rm cr}}{E_0}\right)},\tag{15}$$

где *a* – константа, равная 15 м/с \sqrt{B} ; ΔU_r – превышение потенциала головки лидера над потенциалом внешнего поля; E_{cr} – поле в стримерной зоне при нормальных условиях.

На основе полученных результатов определяется линейная плотность электрического заряда τ (16) и длина L (17) ступени лидера:

$$\tau = \frac{Q}{R_{\rm c.3}},\tag{16}$$

$$L = V_{\rm n} \Delta t. \tag{17}$$

Эти данные используются для определения координат точки на границе стримерной зоны, необходимой для задания направления формирования ступени встречного лидера.

Результаты численного моделирования лидера и стримера на объекте молниезащиты, расчетов распределений напряженности электростатического поля и вероятности поражения объектов молниезащиты с учетом рельефа местности

Результаты численного моделирования облачного лидера и стримера на объектах молниезащиты представлены на рис. 3.

Используя описанную математическую модель грозового разряда и введя в нее произвольный рельеф местности, получили расчётное распределение наводимой напряжённости электростатического поля (рис. 4). Распределение не противоречит реальной действительности.

На основе выборки, состоящей из 1500 случаев численного эксперимента поражения объектов молниезащиты с учетом рельефа местности, получено расчетное распределение вероятности поражения объектов защиты (рис. 5). Анализ результатов показывает, что чем выше рельеф местности, тем выше вероятность попадания в эту местность молниевого разряда. Полученные результаты не противоречат реальной действительности. Распределения вероятно-



Рис. 3. Пример численного моделирования лидера и стримера на объекте молниезащиты



Рис. 4. Распределение напряжённости с учетом рельефа местности



Рис. 5. Распределения вероятности поражения объектов молниезащиты

стей поражения объектов молниезащиты, расчитанные для конкретных местностей, позволят повысить эффективность молниезащиты.

Выводы

Предложена математическая модель состояния объектов молниезащиты с учетом рельефа местности. Она позволяет оптимизировать размещение средств пассивной молниезащиты объектов, а для средств активной молниезащиты – определить момент их активации и оценить эффективность их функционирования.

Список литературы

[1] Писаревский С.Ю. Моделирование и выбор оптимальных проектных решений в САПР средств молниезащиты промышленных объектов. Дис. кан. тех. наук: Воронеж, Воронежский государственный технический университет. 2016. 161 с. [Pisarevsky S.Yu. Modeling and selection of optimal design solutions in CAD funds lightning protection of industrial facilities. Dis. can. technical Sciences: Voronezh. Voronezh state technical University, 2016, 161 р. (in Russian)]

[2] Писаревский С.Ю., Писаревский Ю.В. Имитационное моделирование процесса воздействия молнии на промышленные объекты. Электротехнические комплексы и системя управления: научно-технический журнал, 2009, 4, 59-64 [Pisarevsky Yu.V., Pisarevsky S.Yu. Simulation of the impact of lightning of industrial facilities. *Electrical and control system: nauch.-technology*, 2009, 4, 59-64 (in Russian)]