*ПРОГРАММИРОВАНИЕ*, 2015, № X, с. 1–9

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

*УДК 004.92+004.94*

# АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ФОРМ ОБЪЕМА НА ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ ПО ВЫПУКЛОМУ ЦЕЛОЧИСЛЕННОМУ МНОГОГРАННИКУ

**© 2015 г. А. А. Кытманов*, А. В. Щуплев*, Т. В. Зыкова***
**Сибирский федеральный университет*
*660041 Красноярск, пр. Свободный, 79*
*E-mail: aakytm@gmail.com, alexey.shchuplev@gmail.com, zykovatv@mail.ru*
Поступила в редакцию 10.07.2015

Приводится метод и соответствующий алгоритм построения форм объема на торических многообразиях и связанных с ними форм, служащих ядрами интегральных представлений, по выпуклому целочисленному многограннику. Алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры Maple. Полученные формы объема являются аналогами формы объема метрики Фубини-Штуди на комплексном проективном пространстве и могут быть использованы для построения интегральных представлений для голоморфных функций в поликруговых областях многомерного комплексного пространства.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Торические многообразия представляют собой объекты алгебраической геометрии, имеющие достаточно простую (в зависимости от налагаемых ограничений) комбинаторную структуру. Они широко используются для решения актуальных задач многомерного комплексного анализа, в частности для построения интегральных представлений в областях многомерного комплексного пространства и вычетов. Специальные функции на торических многообразиях находят многочисленные применения в математической физике и в теории особенностей [12, 13]. Методы построения таких довольно сложных объектов, тем не менее, полностью основаны на комбинаторной структуре торических многообразий (см. [1, 3, 4]) и могут быть реализованы с помощью четко предписанных алгоритмов (см., например, [6, 8, 15]). Вычисления, необходимые для достижения результата, являются, за исключением простейших примеров, трудоемкими и громоздкими, что делает актуальной задачу создания соответствующего алгоритма и его программной реализации. Реализация алгоритма в одной из систем компьютерной алгебры позволяет производить вычисления с выражениями, содержащими параметры и, таким образом, получать параметрические классы искомых объектов.

Проективные симплициальные торические многообразия, рассматриваемые в работе, кодируются выпуклыми целочисленными многогранниками — многогранниками Ньютона. Такой $n$-мерный многогранник может быть задан списком координат своих вершин и списком наборов вершин, задающих его $(n-1)$-мерные грани (гиперграни).

В данной работе мы приводим алгоритм построения формы объемы на торическом многообразии и соответствующего ей ядра интегрального представления с помощью метода, описанного в [15] и реализованного в системе компьютерной алгебры Maple.

Основной алгоритм может быть представлен в виде следующих составляющих, приведенных в работе в виде отдельных алгоритмов: построение веера торического многообразия по многограннику Ньютона; построение торического многообразия по его вееру; построение формы объема и соответствующей дифференциальной формы — ядра интегрального представления по характеристикам торического многообразия.

## 2. ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Известно, что ядро интегрального представления Бохнера-Мартинелли в $\mathbb{C}^{n+1}$ тесно связано с формой Фубини-Штуди для проективного пространства $\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n$ следующим образом:

$$\eta_{BM}(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\lambda}{\lambda} \wedge \omega_{FS}([\xi]) \qquad (2.1)$$

(см., например, [5, с. 400]; [10, с. 162]). Здесь $\eta_{BM}$ — форма Бохнера-Мартинелли

$$\eta_{BM}(z) = \frac{n!}{(2\pi i)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n+2}}d\bar{z}[k] \wedge dz,$$

$dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{n+1}$, $d\bar{z}[k]$ получается из $d\bar{z}$ вычеркиванием дифференциала $d\bar{z}_k$. Форма $\omega_{FS}([\xi])$ — форма объема метрики Фубини-Штуди в $\mathbb{P}_n$ (см. [14, с. 21])

$$\omega_{FS}([\xi]) = \frac{n!}{(2\pi i)^n}\frac{E(\xi) \wedge \overline{E(\xi)}}{|\xi|^{2(n+1)}}, \qquad (2.2)$$

где

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\xi_k d\xi[k]$$

где $E(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\xi_k d\xi[k]$ — форма Эйлера, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ — однородные координаты точки $[\xi] \in \mathbb{P}^n$. При этом $\xi, z \in \mathbb{C}^{n+1}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ связаны соотношением $z = \lambda\xi$.

Форма Бохнера-Мартинелли есть “эталонная” форма степени $2n+1$ в множестве $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, которое является расслоением над $\mathbb{P}^n$ со слоем — одномерным тором $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Другими словами, $\mathbb{P}_n = [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}]/G$, где $G = \{(\lambda, \ldots, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+1} : \lambda \in \mathbb{C}_*\}$ — группа преобразований, образованная диагональными матрицами. Таким образом, между формой Бохнера-Мартинелли и проективным пространством существует связь: ядро представления (2.1) представляет собой произведение формы объема на базовом многообразии, умноженным на ядро Коши в слое.

Проективное пространство есть частный случай торического многообразия. В общем случае $n$-мерное торическое многообразие является фактор-пространством (см. [1])

$$X = \left(\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)\right)/G.$$

Здесь $Z(\Sigma)$ представляет собой объединение некоторых координатных подпространств в $\mathbb{C}^d$, а $G$ — группа, изоморфная тору $(\mathbb{C}_*)^r$, $r = d - n$. Фактически, действие группы определяет отношение эквивалентности, которое определяет классы эквивалентности — элементы фактор-пространства. Множество $Z$ и группа $G$ могут быть построены по вееру $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ с $d$ образующими или по двойственному ему выпуклому целочисленному многограннику. Более подробно понятия веера, множества $Z(\Sigma)$ и группы $G$ приведены в следующем параграфе.

В работах [6, 8, 7] были рассмотрены различные методы построения форм объема на торических многообразиях и эталонных форм в $\mathbb{C}^d$.

## 3. ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Существует несколько подходов к определению торического многообразия, однако все конструкции основываются на том факте, что алгебраические свойства торического многообразия закодированы комбинаторным объектом — веером.

Пусть $N$ — решетка, изоморфная $\mathbb{Z}^n$. Подмножество $\sigma \subset N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ называется *строго выпуклым рациональным полиэдральным конусом*, если существует конечный набор элементов $v_1, \ldots, v_s$ решетки $N$, порождающий $\sigma$, то есть

$$\sigma = \{a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s : a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0\},$$

и конус $\sigma$ не содержит нетривиальных линейных подпространств.

Грань конуса $\sigma$ — это такое его подмножество $\tau$, для которого некоторые из $a_i$ в определении $\sigma$ равны нулю, такое отношение обозначается $\tau < \sigma$. Размерностью конуса называется размерность минимального подпространства в $\mathbb{R}^n$, содержащего этот конус. Конус $\sigma$ называется симплициальным, если его генераторы можно выбрать линейно независимыми.

Веер $\Sigma$ в $\mathbb{R}^n$ — это непустой конечный набор строго выпуклых рациональных полиэдральных конусов в $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, для которого выполняются следующие условия:

1. грани конуса $\sigma \in \Sigma$ также принадлежат $\Sigma$;
2. пересечение двух конусов из $\Sigma$ является гранью каждого из них.

Множество $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma$ называется носителем веера $\Sigma$.
Размерность веера равна максимальной размерности его конусов. Если все конусы веера симплициальны, то и веер называется симплициальным. Если носитель веера в $\mathbb{R}^n$ совпадает со всем пространством, то веер называется полным.

Каждые $n$-мерный веер $\Sigma$ соответствует некоторому $n$-мерному торическому многообразию $X_\Sigma$. Пусть конуса $\Sigma$ порождены $d$ минимальными целочисленными образующими (векторами) $v_1, \dots, v_d \in N$. Сопоставим каждому вектору $v_i$ комплексную переменную $\zeta_i$ и рассмотрим для $n$-конуса $\sigma \in \Sigma$ моном

$$\zeta_{\hat\sigma} := \prod_{\substack{j\in\{1,\dots,d\}\\ v_j\notin\sigma}} \zeta_j.$$

Обозначим $Z(\Sigma) \subset \mathbb{C}^d$ нулевое множество идеала, порожденного мономами $\zeta_{\hat\sigma}$ в $\mathbb{C}[\zeta_1, ..., \zeta_d]$, то есть

$$Z(\Sigma) = \{\zeta \in \mathbb{C}^d : \zeta_{\hat\sigma} = 0 \\ \forall\ n\text{-мерных конусов } \sigma \in \Sigma\}.$$

Очевидно, что $Z(\Sigma)$ состоит из координатных плоскостей различных размерностей.

В том случае, если $n$-мерный веер симплициальный и полный, существует эквивалентная конструкция $Z(\Sigma)$ [2]. Набор одномерных образующих $\mathcal{P} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ называется примитивным, если они все вместе не порождают никакого конуса из $\Sigma$, но любой собственный поднабор порождает. Тогда множество $Z(\Sigma)$ совпадает с набором координатных плоскостей

$$Z(\Sigma) = \bigcup_{\mathcal{P}} \{\zeta_{i_1} = \dots = \zeta_{i_k} = 0\},$$

объединение здесь берется по всем примитивным наборам.

Группа $G$, действующая на $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$, по определению равна

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(A_{n-1}(X_\Sigma), \mathbb{C}_*\big),$$

где $A_{n-1}(X_\Sigma)$ — группа классов дивизоров многообразия $X_\Sigma$, то есть фактор группы главных дивизоров $X_\Sigma$ по подгруппе дивизоров рациональных функций. В общем случае вычислить эту группу трудно, однако для торического многообразия, ассоциированного с $\Sigma$, согласно [4] и [3], она вычисляется из точной последовательности

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\ \nu\ } \mathbb{Z}^d \longrightarrow A_{n-1}(X_\Sigma) \longrightarrow 0,$$

где $M \simeq \mathbb{Z}^n$ — это решетка, двойственная $N$, а отображение $\nu$ задается $\nu(m) = (\langle m, v_1\rangle, \dots, \langle m, v_d\rangle)$. Поэтому группа классов дивизоров равна

$$A_{n-1}(X) \simeq \mathbb{Z}^d \big/ \nu(M)$$

и является суммой свободной абелевой группы ранга $r = d - n$ и конечной абелевой группы.

Если хотя бы один $n$-мерный конус в $\Sigma$ примитивный, то есть его образующие порождают всю решетку, то $A_{n-1}(X_\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^d \big/ \nu(M) \simeq \mathbb{Z}^r$ согласно

$$x \longrightarrow \big(k_1(x), \dots, k_r(x)\big),$$

где $k_1(x), \dots, k_r(x)$ — линейные формы, определяющие $n$-мерное ядро $\nu$. Группа $G$ тогда изоморфна $\mathbb{C}_*^r$.

Для описания действия группы рассмотрим решетку соотношений между образующими конусов $\Sigma$. Другими словами, $r$ линейно независимых соотношений между $v_1, \dots, v_d$ над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \dots + a_{1d}v_d = 0,\\ \dots\\ a_{r1}v_1 + \dots + a_{rd}v_d = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Линейные формы этих соотношений совпадают с формами $k_j$, определяющими ядро $\nu$. Действие $G$ на $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ задается значениями гомоморфизмов на классах базисных элементов $D_1, \dots, D_d$ решетки $\mathbb{Z}^d$ в $A_{n-1}(\Sigma)$

$$g \cdot \zeta = \Big(g\big([D_1]\big)\zeta_1, \dots, g\big([D_d]\big)\zeta_d\Big).$$

Таким образом, группа $G$ определяет на $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ отношение эквивалентности

$$\xi \sim \zeta \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}_*^r : \\ \xi = (\lambda_1^{a_{11}} \dots \lambda_r^{a_{r1}}\zeta_1, \dots, \lambda_1^{a_{1d}} \dots \lambda_r^{a_{rd}}\zeta_d). \tag{3.2}$$

Согласно [3], если веер $\Sigma$ симплициальный, то фактор-пространство

$$X_\Sigma = \big(\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)\big) \big/ G,$$

где $Z(\Sigma)$ и $G$ построены выше, есть алгебраическое многообразие, и $\zeta$ — однородные координаты классов $[\zeta]$. Мы берем это представление за определение симплициального торического многообразия.

**Алгоритм 1** Алгоритм построения двойственного веера к многограннику

**Input:** Список *vert_list* координат вершин многогранника; список *face_list* наборов вершин, образующих $(n-1)$-мерные грани (гиперграни) многогранника.

**Output:** Список *vec_list* векторов — одномерных образующих двойственного веера, список *cone_list* наборов векторов, задающих конусы максимальной размерности двойственного веера.

**procedure** POLYTOPE_FAN(*vert_list*, *face_list*)
  $m :=$ число элементов в *vert_list*
  $n :=$ длина *vert_list*[1] ▷ длины *vert_list*[$i$] должны совпадать для всех $i$
  $d :=$ число элементов в *face_list*
  *vec_list* := пустой список
  $t := 0$
  **for** $i = 1 \dots d$ **do**
    $nv :=$ внутренняя нормаль к гиперграни *face_list*[$i$]
    добавить элемент $nv$ в *vec_list*
  **end for**
  *cone_list* := пустой список
  **for** $i = 1 \dots m$ **do**
    *cone* := пустой список
    **for** $j = 1 \dots d$ **do**
      **if** $i \in$ *face_list*[$j$] **then**
        добавить элемент $j$ в *cone*
      **end if**
    **end for**
    добавить элемент *cone* в *cone_list*
  **end for**
  **return** {*vec_list*, *cone_list*}
**end procedure**

Множество $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ можно рассматривать как расслоение над базой $X_\Sigma$ со слоем, изоморфным $G \simeq \mathbb{C}_*^r$. Это позволяет построить, по аналогии с (2.1), ядро с особенностями на $Z(\Sigma)$, при условии, что на $X_\Sigma$ задана форма объема. Для этого вложим $X_\Sigma$ в торическое многообразие $X_{\widetilde{\Sigma}}$ так, чтобы множество $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ лежало в некоторой аффинной карте, а $X_\Sigma$ лежало на бесконечности относительно нее. В этом случае однородные координаты $X_\Sigma$ совпадают с аффинными координатами. Алгоритмическая реализация конструкции $X_{\widetilde{\Sigma}}$, а именно, веера $\widetilde{\Sigma}$, была предложена в [9].

Для проективных торических многообразий форма объема может быть построена естественным образом. Проективное торическое многообразие допускает замкнутое вложение в проективное пространство [4], а его веер имеет двойственный многогранник. Более того, построение многообразия удобнее начинать с многогранника. Пусть $\Delta$ — $n$-мерный простой (в каждой вершине сходится $n$ ребер) целочисленный многогранник в $\mathbb{R}^n$. Его двойственный веер состоит из $n$-мерных конусов, определенных следующим образом: для каждой вершины мы рассматриваем конус в $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, порожденный внутренними нормалями к $n$ граням, сходящимся в этой вершине. Объединение таких конусов со всеми их гранями — полный симплициальный веер.

## 4. ФОРМЫ ОБЪЕМА

Веер $\Sigma$, двойственный к простому целочисленному многограннику $\Delta$, кодирует компактное симплициальное проективное торическое многообразие $X_\Sigma$. Форма объема метрики Фубини-Штуди на проективном пространстве индуцирует форму объема на $X_\Sigma$ [15].

Занумеруем точки $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ многогранника $\Delta \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим следующее вложение комплексного алгебраического тора $\mathbb{C}_*^n$ в $\mathbb{P}_N$

$$f\colon (z_1, \dots, z_n) \longmapsto (\sqrt{c_{\alpha_0}} z^{\alpha_0} : \dots : \sqrt{c_{\alpha_N}} z^{\alpha_N}),$$

с произвольными неотрицательными параметрами $c_{\alpha_j}$ такими, что многогранник Ньютона полинома Лорана

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N} c_{\alpha_j} x^{\alpha_j}$$

совпадает с $\Delta$ (для этого необходимо и достаточно того, чтобы коэффициенты мономов, соответствующих вершинам многогранника, были отличны от нуля). Замыкание образа $\overline{f(\mathbb{C}_*^n)}$ в $\mathbb{P}_N$ есть образ $X_\Sigma$.

**Алгоритм 2** Алгоритм построения торического многообразия по вееру

**Input:** Список *vec_list* векторов — одномерных образующих веера; список *cone_list* наборов векторов, задающих конусы максимальной размерности веера.

**Output:** Число $d$; список соотношений, задающих множество $Z(\Sigma)$; список мономов параметров, задающих действие группы $G$.

**procedure** ToricVariety(*vec_list*, *cone_list*)
  $d :=$ число элементов в vec_list
  $n :=$ длина $vec\_list[1]$ ▷ длины $vec\_list[i]$ должны совпадать для всех $i$
  $CL :=$ пустой список
  **for** $i = 1 \dots$ длина *cone_list* **do**
    $Cl :=$ пустой список
    **for** $j = 1 \dots$ длина $cone\_list[i]$ **do**
      добавить элемент $v\big[cone\_list[i][j]\big]$ в $Cl$
    **end for**
    добавить элемент $Cl$ в $CL$
  **end for**
  $LR :=$ список всех линейно-независимых соотношений на векторы из *vec_list*
  $M :=$ матрица коэффициентов системы $LR$
  $r := d - n$
  $M_G :=$ пустой список
  **for** $i = 1 \dots d$ **do**
    $g := \lambda_1^{a_{1i}} \dots \lambda_r^{a_{ri}}$, где $(a_{1i}, \dots, a_{ri})$ — $i$-й столбец $M$
    добавить элемент $g$ в $M_G$
  **end for**
  $PC :=$ список всех примитивных наборов векторов из *cone_list*
  $Z(\Sigma) :=$ пустой список
  **for** $i = 1 \dots$ число элементов в $PC$ **do**
    **if** $\{i[1], \dots, i[n]\} \in PC$ **then**
      добавить соотношение $z[i[1]] = \dots = z[i[n]] = 0$ в $Z(\Sigma)$
    **end if**
  **end for**
  **return** $\{d, Z(\Sigma), M_G\}$
**end procedure**

Метрика Фубини-Штуди $\mathbb{P}_N$ определяет дифференциальную форму Фубини-Штуди. В однородных координатах $\xi$ эта форма записывается следующим образом

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2|\xi|^4}\left(\sum_{k=0}^{N}|\xi_k|^2\sum_{k=0}^{N}d\xi_k\wedge d\bar{\xi}_k - \sum_{k=0}^{N}\bar{\xi}_k d\xi_k \wedge \sum_{k=0}^{N}\xi_k d\bar{\xi}_k\right) = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log|\xi|^2 = \mathrm{dd^c}\log|\xi|^2;$$

где $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$, $\mathrm{d^c} = \dfrac{i}{4}(\bar{\partial} - \partial)$, а $|\xi|^2$ обозначает $|\xi_0|^2 + \dots + |\xi_N|^2$.

Дифференциальная форма $\omega_{FS}$ измеряет объемы всех комплексных подмногообразий $\mathbb{P}_N$. Именно, если $A \subset \mathbb{P}_N$ комплексное аналитическое подмножество чистой размерности $k$, тогда объем $A$ вычисляется как интеграл

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{k!}\int_A \omega_{FS}^k.$$

Определим $(n, n)$-форму $\omega$ на торе $\mathbb{C}_*^n$ как прообраз формы $\omega_{FS}^n$ относительно $f$:

$$\omega = \frac{1}{n!}f^*(\omega_{FS}^n) = \frac{1}{n!}\Big(\mathrm{dd^c}\ln P\big(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2\big)\Big)^n.$$

Форма $\omega$ положительна на $\mathbb{C}_*^n \subset X_\Sigma$, и, хотя она может обращаться в нуль в некоторых точках $X_\Sigma$, это не меняет величины интеграла

$$\int\limits_{\mathrm{reg}X_\Sigma}\omega = \int\limits_{\mathbb{T}^n}\omega.$$

Нетрудно показать, что этот интеграл, величину которого мы называем объемом $X_\Sigma$, равен $\pi^n\mathrm{Vol}(\Delta)$ (см. [15, Prop. 3]). Однако, для построения интегрального представления, связанного с $X_\Sigma$, эту форму следует вычислить.

Форма $\mathrm{dd^c}\ln P\big(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2\big)$ равна

$$\frac{i}{2}\sum_{l,m=1}^{n}\left(\frac{\sum c_{\alpha_k}\alpha_k^l\alpha_k^m|z|^{2\alpha_k}}{\sum c_{\alpha_k}|z|^{2\alpha_k}} - \frac{\left(\sum c_{\alpha_k}\alpha_k^l|z|^{2\alpha_k}\right)\left(\sum c_{\alpha_k}\alpha_k^m|z|^{2\alpha_k}\right)}{\left(\sum c_{\alpha_k}|z|^{2\alpha_k}\right)^2}\right)\frac{dz_l}{z_l}\wedge\frac{d\bar{z}_m}{\bar{z}_m},$$

а определитель из коэффициентов этой формы — коэффициент при $dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$ в $(n,\, n)$-форме $\omega$. Этот $n \times n$-определитель равен произведению

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{|z_1|^2 \ldots |z_n|^2 \left(\sum c_{\alpha_k} |z|^{2\alpha_k}\right)^n}$$

и следующего $(n+1) \times (n+1)$-определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum c_{\alpha_k} \alpha_k^1 |z|^{2\alpha_k} & \ldots & \sum c_{\alpha_k} \alpha_k^n |z|^{2\alpha_k} \\ \dfrac{\sum c_{\alpha_k} \alpha_k^1 |z|^{2\alpha_k}}{\sum c_{\alpha_k} |z|^{2\alpha_k}} & \sum c_{\alpha_k} \alpha_k^1 \alpha_k^1 |z|^{2\alpha_k} & \ldots & \sum c_{\alpha_k} \alpha_k^1 \alpha_k^n |z|^{2\alpha_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\sum c_{\alpha_k} \alpha_k^n |z|^{2\alpha_k}}{\sum c_{\alpha_k} |z|^{2\alpha_k}} & \sum c_{\alpha_k} \alpha_k^n \alpha_k^1 |z|^{2\alpha_k} & \ldots & \sum c_{\alpha_k} \alpha_k^n \alpha_k^n |z|^{2\alpha_k} \end{vmatrix}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно из каждой строки вычесть первую, умноженную на первый элемент этой строки, а затем разложить определитель по первому столбцу.

Вынесем знаменатель элементов первого столбца, матрица оставшегося определителя равна произведению двух матриц

$$\begin{pmatrix} \sqrt{c_{\alpha_0}} z^{\alpha_0} & \ldots & \sqrt{c_{\alpha_N}} z^{\alpha_N} \\ \alpha_0^1 \sqrt{c_{\alpha_0}} z^{\alpha_0} & \ldots & \alpha_N^1 \sqrt{c_{\alpha_N}} z^{\alpha_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^n \sqrt{c_{\alpha_0}} z^{\alpha_0} & \ldots & \alpha_N^n \sqrt{c_{\alpha_N}} z^{\alpha_N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{c_{\alpha_0}} \bar{z}^{\alpha_0} & \ldots & \alpha_0^n \sqrt{c_{\alpha_0}} \bar{z}^{\alpha_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{c_{\alpha_N}} \bar{z}^{\alpha_N} & \ldots & \alpha_N^n \sqrt{c_{\alpha_N}} \bar{z}^{\alpha_N} \end{pmatrix}$$

размера $(n+1) \times (N+1)$ и $(N+1) \times (n+1)$. По формуле Коши-Бине определитель произведения равен сумме произведений определенных $(n+1)$-миноров этих матриц. Таким образом, форма объема $\omega$ (без учета коэффициента $(i/2)^n$) равняется

$$\frac{\sum'_{|J|=1+n} \det^2(A_J) c_{\alpha_{j_0}} \ldots c_{\alpha_{j_n}} |z|^{2\alpha_{j_0} + \cdots + 2\alpha_{j_n}}}{|z_1|^2 \ldots |z_n|^2 P(|z|^2)^{n+1}} \times dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n, \quad (4.1)$$

где $J = (j_0, \ldots, j_n)$, а сумма берется по всем возрастающим последовательностям индексов$0 \leqslant j_0 < \ldots < j_n \leqslant N$, $A_J$ обозначает матрицу, со-

**Алгоритм 3** Алгоритм построения формы объема и соответствующего ядра интегрального представления

**Input:** Список $vert\_list$ координат вершин многогранника Ньютона, список $vec\_list$ векторов — одномерных образующих двойственного веера.

**Output:** Форма объема, ядро интегрального представления.

**procedure** $Vol\_Ker(vert\_list, vec\_list)$
- $d :=$ число элементов в $vert\_list$
- $n :=$ длина $vert\_list[1]$ $\triangleright$ длины $vert\_list[i]$ должны совпадать для всех $i$
- $L := vert\_list$ $\triangleright$ $L = \{(l_1^1, \ldots, l_n^1), \ldots, (l_1^d, \ldots, l_n^d)\}$
- $P(t_1, \ldots, t_n) := t_1^{l_1^1} \cdot \ldots \cdot t_n^{l_n^1} + \ldots + t_1^{l_1^n} \cdot \ldots \cdot t_n^{l_n^n}$
- $\tilde{P} := P(z_1\bar{z}_1, \ldots, z_n\bar{z}_n)$
- $M := \mathrm{Matrix}(vec\_list)$ $\triangleright$ $M = (m_{ij})_{i,j}$ — матрица размера $n \times d$ с вектор-столбцами $vec\_list[i]$
- $A := M$ с вектор-строкой $(1, \ldots, 1)$ длины $d$, добавленной сверху.
- $J :=$ список всех мультииндексов $(j_0, \ldots, j_n)$, таких что $0 \leqslant j_0 < \ldots < j_n \leqslant N$
- $S := 0$
- **for** $i = 1 \ldots$ длина $J$ **do**
  - $AJ[i] :=$ матрица из вектор-столбцов матрицы $A$ с номерами $J[i] = (j_0^i, \ldots, j_n^i)$
  - $f := 1$
  - **for** $k = 1 \ldots n$ **do**
    - $t := 0$
    - **for** $j = 1 \ldots n+1$ **do**
      - $t := t + l_{J[i][j]}^k$
    - **end for**
    - $f := f \cdot (x_k y_k)^t$
  - **end for**
  - $S := S + \left[\det\left(AJ[i]\right)\right]^2 \cdot f;$
- **end for**
- $t := z_1\bar{z}_1 \cdot \ldots \cdot z_n\bar{z}_n$
- $d := dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$
- $Vol\_form := \dfrac{S}{t \cdot \tilde{P}^{n+1}} \cdot d$
- $\widetilde{X} := \{w_1^{m_{11}} \cdots w_d^{m_{1d}}, \ldots, w_1^{m_{n1}} \cdots w_d^{m_{nd}}\}$
- $\widetilde{Y} := \{\bar{w}_1^{m_{11}} \cdots \bar{w}_d^{m_{1d}}, \ldots, \bar{w}_1^{m_{n1}} \cdots \bar{w}_d^{m_{nd}}\}$
- $K := Vol\_form\left(\widetilde{X}[1], \widetilde{Y}[1], \ldots, \widetilde{X}[n], \widetilde{Y}[n]\right)$
- $Kernel := K \wedge \dfrac{dw_{n+1}}{w_{n+1}} \wedge \ldots \wedge \dfrac{dw_d}{w_d}$
- **return** $\{Vol\_form, Kernel\}$

**end procedure**

стоящую из соответствующих столбцов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0^1 & \dots & \alpha_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^n & \dots & \alpha_N^n \end{pmatrix}.$$

Одновременно мы получили новое доказательство интегральной формулы для $\mathrm{Vol}(\Delta)$ [11]. Действительно, переписав (4.1) в полярных координатах и проинтегрировав по угловым координатам, мы получим

$$\mathrm{Vol}(X_\Sigma) = (2\pi)^n \times \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\sum'_{|J|=1+n} \det^2(A_J) c_{\alpha_{j_0}} \dots c_{\alpha_{j_n}} r^{2\alpha_{j_0}+\dots+2\alpha_{j_n}+I}}{r_1^2 \dots r_n^2 P(r^2)^{n+1}} \times dr_1 \dots dr_n.$$

Сделав замену $t_j = r_j^2$ и используя [15, Prop. 3], мы придем к

**Предложение 1.**

$$\mathrm{Vol}(\Delta) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\sum'_{|J|=1+n} \det^2(A_J) c_{\alpha_{j_0}} \dots c_{\alpha_{j_n}} t^{\alpha_{j_0}+\dots+\alpha_{j_n}}}{t_1 \dots t_n P(t)^{n+1}} \times dt_1 \dots dt_n.$$

Построим теперь «каноническую» дифференциальную форму по заданной форме объема $\omega$ на $X_\Sigma$. Предположим, что образующие $v_1, \dots, v_n$ конуса $\sigma \in \Sigma$ образуют базис $N$. Через $d\zeta_{\hat\sigma}/\zeta_{\hat\sigma}$ мы обозначим внешнее произведение ядер Коши по всем $\zeta$, кроме тех, что соответствуют образующим конуса $\sigma$. Тогда форма

$$\eta(\zeta) = \omega([\zeta]) \wedge \frac{d\zeta_{\hat\sigma}}{\zeta_{\hat\sigma}}, \tag{4.2}$$

является ядром интегрального представления в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ (см. [15]). Отметим, что форма $\omega$ здесь записана в однородных координатах $\zeta$, тогда как в формуле (4.1) выше она записана в локальных координатах $z$ тора $(\mathbb{C}_*)^n \subset X_\Sigma$. Связь однородных и локальных координат дана в (3.2) и следует из соотношений (3.1) между образующими конусов в $\Sigma$. Таким образом, для вычисления $\eta$ сначала следует сделать замену переменных в $\omega$, а затем умножить результат на $r$-мерное ядро Коши.

## 5. ПРИМЕРЫ

На следующих примерах была проведена проверка вышеописанных алгоритмов. Алгоритмы были реализованы в среде Maple 18 64bit. Полный код программы доступен по адресу https://www.dropbox.com/s/mzfhbc362smeymv/volume.mws. Вычисления производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 7 Enterprise x64 SP1. Время счета для приведенных примеров составило от 0.01 до 0.03 сек.

Входные данные программы совпадают с входными данными Алгоритма 1. Например, в случае многогранника, приведенного на рис. 2, программа получит на вход

```
[[0, 0], [2, 0], [2, 1], [1, 2], [0, 2]],
[[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 1]]
```

Здесь первый список представляет собой координаты вершин многогранника, указанные в произвольном порядке. Второй список состоит из наборов порядковых номерах векторов из первого списка, образующих гиперграни. Например, `[1, 2]` означает, что векторы `[0, 0]` и `[2, 0]` образует гипергрань (в данном случае — одномерную грань или ребро) многогранника.

**Пример 1.** Форма объема для $\mathbb{CP}_n$ и соответствующее ядро в $\mathbb{C}^{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots, 10)$.

Пусть $\Delta$ — стандартный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Его двойственный веер $\Sigma$ с $(n+1)$ образующими кодирует проективное пространство $\mathbb{P}_n$, образующие любого конуса максимальной размерности порождают всю решетку. Форма объема $\omega$ на проективном пространстве совпадает с формой объема метрики Фубини-Штуди (2.2), проективное пространство $\mathbb{P}_n$ вкладывается на бесконечности в $\mathbb{P}_{n+1}$, а форма $\eta$ — ядро Бохнера-Мартинелли (2.1) в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Входными данными алгоритма в случае $n = 3$ будут

```
[[0, 0, 0], [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]],
[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 4], [2, 3, 4]]
```

**Пример 2.** Форма объема для $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

Произведение двух сфер Римана является торическим многообразием, связанным с веером, изображенном на Рис. 1 (b). Возьмем многочлен

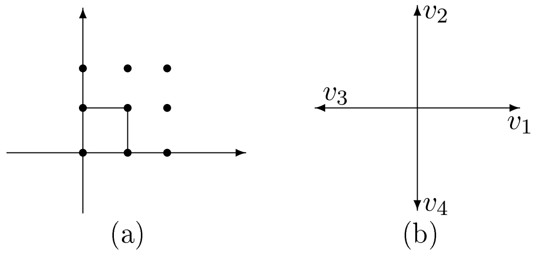


Рис. 1.: Многогранник Ньютона и двойственный веер для $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

$P(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2 + a x_1 x_2$ с положительным коэффициентом $a$. Его многогранник Ньютона — это квадрат в $\mathbb{R}^2$ (Рис. 1 (a)), двойственный веер изображен на Рис. 1 (b).

Входными данными алгоритма будут

```
[[0, 0], [1, 0], [1, 1], [0, 1]],
[[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 1]]
```

Следуя изложенной конструкции, определим дифференциальную форму на $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ как прообраз $\omega^2_{FS}$ относительно отображения $f\colon (z_1, z_2) \mapsto (1\colon z_1\colon z_2\colon \sqrt{a} z_1 z_2)$.

$$\omega = \frac{1}{2!} f^*(\omega^2_{FS}) =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \frac{1 + a|z_1|^2 + a|z_2|^2 + a|z_1|^2|z_2|^2}{(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + a|z_1|^2|z_2|^2)^3} \cdot$$
$$\cdot\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2$$

Объем $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, определенный этой формой, равен $\pi^2$. Заметим, что полученная форма не совпадает с произведением форм объема на каждом из $\mathbb{P}_1$ (они совпадают только в случае $a = 1$), хотя объем получается тот же самый.

**Пример 3.** Ядро, связанное с раздутием $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в начале координат.

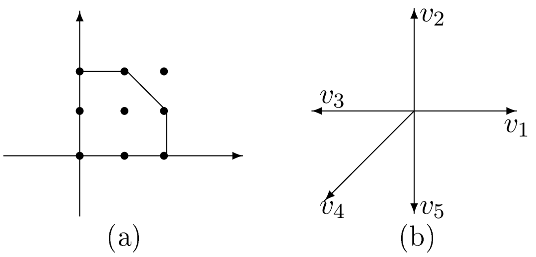


Рис. 2.: Многогранник Ньютона и двойственный веер для раздутия $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в начале координат.

Рассмотрим многочлен $P(z) = 1 + z_1^2 + z_2^2 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2$ с многогранником Ньютона, изображенным на Рис. 2 (a). Двойственный веер $\Sigma$ имеет 5 целочисленных образующих, а соответствующее торическое многообразие есть раздутие произведения $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в начале координат.

Входные данные алгоритма приведены в начале параграфа.

Занумеруем образующие, как показано на Рис. 2 (b), тогда ядро интегрального представления равно

$$\eta = \frac{u(\zeta, \bar{\zeta})\overline{E(\zeta)}}{v(\zeta, \bar{\zeta})} \wedge d\zeta,$$

где

$$u(\zeta, \bar{\zeta}) = |\zeta_1|^8|\zeta_2|^4|\zeta_5|^4 + 4|\zeta_1|^6|\zeta_2|^4|\zeta_3|^2|\zeta_4|^2|\zeta_5|^4 +$$
$$+ 4|\zeta_1|^6|\zeta_3|^2|\zeta_4|^6|\zeta_5|^8 + |\zeta_1|^4|\zeta_2|^8|\zeta_3|^4 +$$
$$+ 4|\zeta_1|^4|\zeta_2|^6|\zeta_3|^4|\zeta_4|^2|\zeta_5|^2 + 9|\zeta_1|^4|\zeta_2|^4|\zeta_3|^4|\zeta_4|^4|\zeta_5|^4 +$$
$$+ 16|\zeta_1|^4|\zeta_2|^2|\zeta_3|^4|\zeta_4|^6|\zeta_5|^6 + 16|\zeta_1|^2|\zeta_2|^4|\zeta_3|^6|\zeta_4|^6|\zeta_5|^4 +$$
$$+ 16|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2|\zeta_3|^6|\zeta_4|^8|\zeta_5|^6 + 4|\zeta_2|^6|\zeta_3|^8|\zeta_4|^6|\zeta_5|^2,$$

$$v(\zeta, \bar{\zeta}) = \big(|\zeta_3|^4|\zeta_4|^6|\zeta_5|^4 + |\zeta_1|^4|\zeta_4|^2|\zeta_5|^4 +$$
$$+ |\zeta_2|^4|\zeta_3|^4|\zeta_4|^2 + |\zeta_1|^4|\zeta_2|^2|\zeta_5|^2 + |\zeta_1|^2|\zeta_2|^4|\zeta_3|^2\big)^3,$$

и

$$E(\zeta) = \zeta_3\zeta_4\zeta_5 d\zeta_1 d\zeta_2 - \zeta_2\zeta_3\zeta_5 d\zeta_1 d\zeta_4 - \zeta_2\zeta_3\zeta_4 d\zeta_1 d\zeta_5 +$$
$$\zeta_1\zeta_4\zeta_5 d\zeta_2 d\zeta_3 + \zeta_1\zeta_3\zeta_5 d\zeta_2 d\zeta_4 + \zeta_1\zeta_2\zeta_5 d\zeta_3 d\zeta_4 +$$
$$\zeta_1\zeta_2\zeta_4 d\zeta_3 d\zeta_5 + \zeta_1\zeta_2\zeta_3 d\zeta_4 d\zeta_5.$$

## 6. БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке грантов РФФИ 15-31-20008-мол_а_вед (все авторы), 15-01-00277-а (первый автор), 14-01-00283-а (третий автор), гранта Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания 1.1462.2014/K (первый автор) и гранта Правительства Российской Федерации государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых 14.Y26.31.0006 (второй автор).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Audin M.* The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1991.
2. *Batyrev V. V.* Quantum cohomology ring of toric manifolds. // Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992). Astérisque, 1993, No 218, P. 9–34.
3. *Cox D. A.* The homogeneous coordinate ring of a toric variety. // J. Alg. Geom., 1995, No 4, P. 17–50.
4. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Annals of Mathematics Studies, 131. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
5. *Griffiths P. and Harris J.* Principles of Algebraic Geometry. Wiley, New York, 1978.
6. *Кытманов А. А.* Об аналоге формы Фубини-Штуди для двумерных торических многообразий. // Сиб. матем. журн., 2003, Т. 44, No 2, С. 358–371.
7. *Кытманов А. А.* Алгоритм построения интегрального представления по вееру торического многообразия. // Вестник НГУ. Математика, механика, информатика, 2010, No 2, С. 61–70.
8. *Kytmanov A. A., Semusheva A. Y.* Averaging of the Cauchy kernels and integral realization of the local residue. // Mathematische Zeitschrift, 2010, V. 264, No 1, P. 87–98.
9. *Кытманов А. А., Щуплев А. В.* Алгоритм построения торических компактификаций. // Программирование, 2013, Т. 39, No 4, С. 66–71.
10. *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
11. *Passare M.* Amoebas, convexity and the volume of integer polytopes. // Advanced Studies in Pure Mathematics, 2004, No 42, P. 263–268.
12. *Садыков Т. М., Цих А. К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
13. *Sadykov T. M.* The Hadamard product of hypergeometric series. // Bull. Sci. Math., 2002, V. 126, No 1, P. 31–43.
14. *Шабат Б. В.* Распределение значений голоморфных отображений. М.: Наука, 1982.
15. *Shchuplev A. V., Tsikh A. K., Yger A.* Residual kernels with singularities on coordinate planes. // Тр. МИАН, 2006, No 253, С. 277–295.