Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 445–457

УДК 517.9

О задаче идентификации функции источника в системе уравнений составного типа

Юрий Я. Белов*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.06.2011, принята к печати 10.07.2011

Исследованы задачи идентификации функции источника для полуэволюционной системы двух уравнений в частных производных, одно из которых является параболическим, второе — эллиптическим. Рассмотрены задача Коши и первая краевая задача. Исходные задачи аппроксимируются задачами, в которых эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$ при производной по времени.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, краевые задачи, аппроксимация, малый параметр, сходимость.

В работе рассмотрены задачи идентификации функции источника для одномерной системы двух уравнений в частных производных второго порядка, одно из которых является параболическим, второе — эллиптическим. Исследованы задача Коши и первая краевая задача. Исходные задачи аппроксимируются задачами, в которых эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$ при производной по времени. Доказаны разрешимость аппроксимирующих задач и исходной задачи в классах достаточно гладких функций.

Решения задач для полуэволюционной системы находятся как пределы ω решений $\overset{\varepsilon}{\omega}$ соответствующих краевых задач для эволюционных систем при стремлении параметра ε к нулю. Разрешимость исследуемых задач при $\varepsilon > 0$ при условии периодичности по пространственной переменной, достаточной гладкости и выполнения условий согласования входных данных задачи доказана "в целом" методом слабой аппроксимации [1, 2]. Периодичность решений $\overset{\varepsilon}{\omega}$ доказывается расщеплением исходных задач на ряд задач, компоненты которых являются периодическими по x и равномерно сходятся при стремлении параметра расщепления к нулю к периодическим по x функциям $\overset{\varepsilon}{\omega}$, являющимся решениями аппроксимирующих задач. Условия периодичности решений $\overset{\varepsilon}{\omega}$ позволяют доказать равномерные по ε оценки решений $\overset{\varepsilon}{\omega}$ в нормах $C^k(\overline{Q}_T)$, $\overline{Q}_T = [0, T] \times [0, L]$, и равномерную в $\overline{Q}_T$ сходимость $\overset{\varepsilon}{\omega}$ к ω. Получены оценки скорости сходимости.

Рассмотрен случай, когда находится неизвестная компонента вектор-функции источника, принадлежащая уравнению, содержащему параметр ε. Случай, когда неизвестна компонента вектор-функции источника в уравнении, не содержащем малый параметр, изучен в [3].

Изучению прямых задач для систем составного типа посвящены работы различных авторов [4–10].

Обратные задачи для эволюционных систем составного типа см., например, в [11–14].

*belov@lan.krasu.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, 0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x < +\infty\}$, $T > 0 - \mathrm{const}$, систему уравнений

$$\begin{aligned} \overset{\varepsilon}{u}_t + a_{11}\overset{\varepsilon}{u} + a_{12}\overset{\varepsilon}{v} &= \mu_1 \overset{\varepsilon}{u}_{xx} + f, \\ \varepsilon\overset{\varepsilon}{v}_t + a_{21}\overset{\varepsilon}{u} + a_{22}\overset{\varepsilon}{v} &= \mu_2 \overset{\varepsilon}{v}_{xx} + \overset{\varepsilon}{g}F, \quad \varepsilon - \mathrm{const},\ \varepsilon \in (0,1], \end{aligned} \tag{1}$$

с данными Коши

$$\overset{\varepsilon}{u}(0,x) = u^0(x), \quad \overset{\varepsilon}{v}(0,x) = v^0(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

В (1) коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, заданы на отрезке $[0,T]$, $\mu_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1,2$, функции f, F заданы на $\Pi_{[0,T]}$, функция $F(t,x)$ удовлетворяет при $x^0 \in (0,l)$, $l > 0 - \mathrm{const}$, условию

$$F(t,x^0) \geqslant \delta, \quad \delta > 0 - \mathrm{const}, t \in [0,T]. \tag{3}$$

Требуется найти функции $\overset{\varepsilon}{u} = \overset{\varepsilon}{u}(t,x)$, $\overset{\varepsilon}{v} = \overset{\varepsilon}{v}(t,x)$, $\overset{\varepsilon}{g} = \overset{\varepsilon}{g}(t)$ при дополнительном условии (условие переопределения)

$$\overset{\varepsilon}{v}(t,x^0) = \psi(t), \quad \psi(t) \in C^2[0,T], \tag{4}$$

где $\psi(t)$ – заданная на $[0,T]$ функция.

Предположим выполнение следующих условий:

- условие согласования
$$v^0(x^0) = \psi(0); \tag{5}$$
- функции $a_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0,T]$:
$$a_{ij} \in C^2[0,T],\ i,j = 1,2; \tag{6}$$
- матрица $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ порождает симметрическую, коэрцитивную билинейную форму $a(t,\xi,\chi) = (A(t)\xi,\chi)$:
$$\begin{gathered} a(t,\xi,\chi) = a(t,\chi,\xi) \quad \forall \xi,\chi \in E_2, \\ a(t,\xi,\xi) \geqslant \kappa|\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1,\xi_2) \in E_2,\ t \in [0,T],\ \kappa > 0 - \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим четное число $p \geqslant 6$. Предположим, что функции u^0, v^0, f, F имеют непрерывные производные, входящие в (8), и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^m}{\partial t^m}F(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^m}{\partial t^m}f(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u^0(x)\right| + \\ &+ \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}v^0(x)\right| \leqslant C,\ j = 0,\dots,p+6;\ m = 0,1,2,\ (t,x) \in Q_T. \end{aligned} \tag{8}$$

В (8) и ниже через C будем обозначать постоянные, не зависящие от ε.

Через ${K_d}^{l,k_1,k_2}(\Pi_{[0,T]})$ обозначим пространство вектор-функций $(\varphi(t,x),\psi(t,x),\chi(t))$, определенных в $\Pi_{[0,T]} \times \Pi_{[0,T]} \times [0,T]$ соответственно и таких, что в $\Pi_{[0,T]}$ функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы по x до порядка l, функция φ непрерывно дифференцируема по t до порядка k_1, функция ψ непрерывно дифференцируема k_2 раз по t и функция χ непрерывно дифференцируема d раз на $[0,T]$.

Через ${K_d}^{l,k_1,k_2}(\overline{Q}_T)$ обозначим ${K_d}^{l,k_1,k_2}(\Pi_{[0,T]})$, где вместо $\Pi_{[0,T]}$ следует рассматривать $\overline{Q}_T = [0,T] \times [0,l]$.

При некоторых дополнительных условиях мы:

- докажем существование достаточно гладкого решения $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}$ задачи (1), (2), (4) в $\Pi_{[0,T]}$ при любом $\varepsilon > 0$;
- при условии периодичности по x и нечетности входных данных f, F, u^0, v^0 докажем существование достаточно гладкого решения задачи определения $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}$ в $\overline{Q}_T = [0,T]\times[0,l]$ при первом краевом условии

$$\overset{\varepsilon}{u}(t,0) = \overset{\varepsilon}{v}(t,0) = \overset{\varepsilon}{u}(t,l) = \overset{\varepsilon}{v}(t,l) = 0,\ t \in [0,T]; \tag{9}$$

- докажем существование решения u, v, g первой краевой задачи (1^0), (2^0), (4^0), (9^0), где $u = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \overset{\varepsilon}{u}$, $v = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \overset{\varepsilon}{v}$, $g = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \overset{\varepsilon}{g}$, и через ($1^0$), ($2^0$), ($4^0$), ($9^0$) обозначены соответственно (1), (2), (4), (9) при $\varepsilon = 0$ (при $\overset{\varepsilon}{u} = u$, $\overset{\varepsilon}{v} = v, \overset{\varepsilon}{g} = g$);
- получим оценку скорости сходимости $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}$ к u, v, g соответственно при $\varepsilon \to 0$.

Предположение 1. *Предположим, что входные данные $u^0(x)$, $v^0(x)$, $f(t,x)$, $F(t,x)$ — периодические по x функции и ряды*

$$\begin{gathered} u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad v^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \\ f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad F(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x. \end{gathered} \tag{10}$$

сходятся равномерно соответственно в $[0,l]$ и $\overline{Q}_T$ вместе со своими производными по x до порядка $p+4$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *При выполнении условий (3), (5)–(8) задача (1), (2), (4) имеет единственное решение $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ класса ${K_1}^{p+4,1,1}(\Pi_{[0,T]})$, удовлетворяющее соотношениям*

$$\begin{gathered} \sum_{j=0}^{p+4}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{u}(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{v}(t,x)\right|\right) + \|\overset{\varepsilon}{g}\|_{C^1[0,T]} + \left|\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}(t,x)\right| + \\ + \left|\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}(t,x)\right| \leqslant C(\varepsilon),\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \end{gathered} \tag{11}$$

Постоянная $C(\varepsilon)$ в (11) зависит, вообще говоря, от ε и входных данных, представление функции $\overset{\varepsilon}{g}$ см. в (22).

Теорема 2. *При выполнении предположения 1 и условий теоремы 1 при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1]$ компоненты $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$ решения $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ задачи (1), (2), (4) являются периодическими функциями по переменной x и удовлетворяют условиям*

$$\frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{u}(t,0)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{u}(t,l)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{v}(t,0)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m}\overset{\varepsilon}{v}(t,l)}{\partial x^{2m}} = 0,\ m = 0,1,\ldots,p/2+2. \tag{12}$$

Замечание 1. *Из (11) и системы (1) следует, что $\dfrac{\partial^m}{\partial t^m}\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{u}(t,x)$, $\dfrac{\partial^m}{\partial t^m}\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{v}(t,x)$, $2m+j \leqslant p+4$, существуют, непрерывны в $\Pi_{[0,T]}$ и*

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{u}(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{v}(t,x)\right| \leqslant C(\varepsilon)\ при\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{13}$$

Доказательство теорем 1,2 можно провести на основе метода расщепления [11, 12]. Периодичность $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$ в теореме 2 доказывается в силу (10) расщеплением задачи (1), (2), (4) на ряд задач, компоненты решений которых $\overset{\varepsilon}{u^\tau}$, $\overset{\varepsilon}{v^\tau}$ являются периодическими по x, удовлетворяют (12) и равномерно сходятся при $\tau \to 0$ к периодическим по x функциям $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, удовлетворяющим (12).

Пусть $M_k = \max\limits_{\overline{Q}_T}\left|\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}F(t,x)\right|$, $m_k = \max\limits_{\overline{Q}_T}\left|\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}f(t,x)\right|, k = 0,1,\ldots,p+4$. Ниже считаем выполненными условия теорем 1, 2 и следующее предположение:

существует такая постоянная $\beta > 0$, что имеют место неравенства

$$\begin{gathered}\kappa > \mu_2 l^{1/2} M_2/2\delta\beta,\\ 1 > \beta l^{3/2} M_2/2\delta.\end{gathered} \tag{14}$$

1. Априорные оценки

Докажем равномерные по ε оценки семейства $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ решений задачи (1), (2), (4) при выполнении условий (3), (5)–(14).

Пусть $\overset{\varepsilon}{\omega} = (\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v})$ и $\overset{\varepsilon}{\omega}_j = (\overset{\varepsilon}{u}_j, \overset{\varepsilon}{v}_j) = \left(\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{u}, \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{v}\right) = \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}) = \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\overset{\varepsilon}{\omega}$ — производная от $\overset{\varepsilon}{\omega}$ по x порядка j, $j \geqslant 0$ — целое.

1.1. Оценки производных $\overset{\varepsilon}{\omega}_j$

Продифференцируем j раз ($j \geqslant 0$) по переменной x задачу (1), (2), умножим результат дифференцирования на $e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{\omega}_j$, где $\theta > 0$ — фиксированная постоянная, и проинтегрируем результат умножения по области $Q_\sigma = (0,\sigma) \times (0,l)$, $\sigma \in (0,T]$. Получим равенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{u}_j)^2 dtdx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}_j)^2 dtdx + \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_j, \overset{\varepsilon}{\omega}_j) dtdx = \\ = \mu_1 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}\overset{\varepsilon}{u}_j dtdx + \mu_2 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}\overset{\varepsilon}{v}_j dtdx + \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{u}_j f_j dtdx + \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{g} F_j \overset{\varepsilon}{v}_j dtdx.\end{gathered} \tag{15}$$

Имеют место следующие соотношения.

$$\begin{gathered}I^\sigma_{1,j} = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{u}_j)^2 dtdx = \\ = \frac{1}{2}e^{-\theta\sigma}\int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{u}_j(\sigma,x))^2 dx + \frac{\theta}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}(\overset{\varepsilon}{u}_j)^2 dtdx - \frac{1}{2}\int\limits_0^l (u^0_j(x))^2 dx,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}I^\sigma_{2,j} = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}_j)^2 dtdx = \\ = \frac{\varepsilon}{2}e^{-\theta\sigma}\int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{v}_j(\sigma,x))^2 dx + \frac{\varepsilon\theta}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}(\overset{\varepsilon}{v}_j)^2 dtdx - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^l (v^0_j(x))^2 dx,\end{gathered} \tag{17}$$

$$I^{\sigma}_{3,j} = \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a(t; \overset{\varepsilon}{\omega}_j, \overset{\varepsilon}{\omega}_j) dtdx \geqslant \kappa \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} |\overset{\varepsilon}{\omega}_j(t,x)|^2 dtdx, \tag{18}$$

$$I^{\sigma}_{4,j} = \mu_1 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{u}_{j+2} \overset{\varepsilon}{u}_j dtdx = -\mu_1 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} (\overset{\varepsilon}{u}_{j+1})^2 dtdx, \tag{19}$$

$$I^{\sigma}_{5,j} = \mu_2 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}_{j+2} \overset{\varepsilon}{v}_j dtdx = -\mu_2 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} (\overset{\varepsilon}{v}_{j+1})^2 dtdx, \tag{20}$$

$$I^{\sigma}_{6,j} = \left| \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} f_j \overset{\varepsilon}{u}_j dtdx \right| \leqslant \frac{1}{2d} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} (f_j)^2 dtdx + \frac{d}{2} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} (\overset{\varepsilon}{u}_j)^2 dtdx, \ \forall d > 0 - \text{const}. \tag{21}$$

Положим $x = x^0$ во втором уравнении системы (1). Находим, что

$$\overset{\varepsilon}{g}(t) = \frac{1}{F(t,x^0)} \{\varepsilon \psi'(t) + a_{22}(t)\psi(t) + a_{21}(t) \overset{\varepsilon}{u}(t,x^0) - \mu_2 \overset{\varepsilon}{v}_{xx}(t,x^0)\}. \tag{22}$$

Из (22), (3), (4), (6) следует, что

$$|\overset{\varepsilon}{g}(t)| \leqslant \frac{1}{\delta} \{k + k_1 |\overset{\varepsilon}{u}(t,x^0)| + \mu_2 |\overset{\varepsilon}{v}_{xx}(t,x^0)|\}, \tag{23}$$

где $k = \max\limits_{[0,T]} \{|\psi'(t)| + |a_{22}(t)\psi(t)|\}$,

$$k_1 = \max_{[0,T]} |a_{21}(t)|. \tag{24}$$

Ниже мы оценим

$$I^{\sigma}_{7,j} = \left| \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{g}(t) F_j(t,x) \overset{\varepsilon}{v}_j(t,x) dtdx \right|. \tag{25}$$

В силу (12)

$$|\overset{\varepsilon}{u}_j(t,x^0)| \leqslant \max_{x \in [0,l]} |\overset{\varepsilon}{u}_j(t,x)| \leqslant l^{\frac{1}{2}} ||\overset{\varepsilon}{u}_{j+1}(t)||,$$

$$|\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x^0)| \leqslant \max_{x \in [0,l]} |\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| \leqslant l^{\frac{1}{2}} ||\overset{\varepsilon}{v}_{j+1}(t)|| \leqslant l^{\frac{3}{2}} ||\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}(t)||. \tag{26}$$

Из (23), (26) следует, что

$$|\overset{\varepsilon}{g}(t)| \leqslant \frac{k}{\delta} + \frac{k_1 l^{\frac{3}{2}}}{\delta} ||\overset{\varepsilon}{u}_{xx}(t)|| + \frac{\mu_2 l^{\frac{1}{2}}}{\delta} ||\overset{\varepsilon}{v}_{xxx}(t)||. \tag{27}$$

Здесь $||\overset{\varepsilon}{u}(t)|| = \left(\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}^2(t,x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \ t \in [0,T]$.

Имеют место следующие соотношения.

$$I^{\sigma}_{7,j} \leqslant M_j \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} |\overset{\varepsilon}{g}(t)| |\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| dtdx \leqslant M_j \frac{k}{\delta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} |\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| dtdx +$$

$$+ M_j k_1 \frac{l^{\frac{3}{2}}}{\delta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} ||\overset{\varepsilon}{u}_{xx}(t)|| |\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| dtdx + M_j \mu_2 \frac{l^{\frac{1}{2}}}{\delta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} ||\overset{\varepsilon}{v}_{xxx}(t)|| |\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| dtdx. \tag{28}$$

В силу неравенств Шварца и Коши (с $\alpha > 0$)

$$I^{\sigma}_{7,j,1} = M_j \frac{k}{\delta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} |\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| dtdx \leqslant \frac{\alpha}{2} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_j(t,x) dtdx + C(l,T,\alpha,M_j,k,\delta), \tag{29}$$

где постоянная C зависит лишь от l, T, α, M_j, k, δ и не зависит от ε.

$$\begin{gathered} I^{\sigma}_{7,j,2} = M_j k_1 \frac{l^{\frac{3}{2}}}{\delta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} ||\overset{\varepsilon}{u}_{xx}(t)|||\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| dtdx \leqslant \\ \leqslant \frac{\alpha}{2} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_j(t,x) dtdx + C(l,T,\alpha,M_j,k_1,\delta) \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{xx}(t,x) dtdx, \end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered} I^{\sigma}_{7,j,3} = M_j \mu_2 \frac{l^{\frac{1}{2}}}{\delta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} ||\overset{\varepsilon}{v}_{xxx}(t)|||\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)| dtdx \leqslant \\ \leqslant \frac{\beta l^{\frac{3}{2}} M_j \mu_2}{2\delta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{xxx}(t,x) dtdx + \frac{l^{\frac{1}{2}} M_j \mu_2}{2\delta\beta} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_j(t,x) dtdx, \end{gathered} \tag{31}$$

Из равенства (15) и соотношений (16)–(21), (27)–(31) при $j = 2$ получим неравенство

$$\begin{gathered} (\frac{\theta}{2} + \kappa - C(\delta,\alpha,l,T,M_2,k_1)) \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{u}{}^2_2(t,x) dtdx + \frac{1}{2} e^{-\theta\sigma} \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_2(\sigma,x) dx + \\ +(\mu_1 - \alpha) \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{xxx}(t,x) dtdx + (\kappa - \alpha - \frac{M_2 \mu_2 l^{\frac{1}{2}}}{2\delta\beta}) \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_2(t,x) dtdx + \\ +\mu_2 (1 - \tfrac{M_2 l^{\frac{3}{2}} \beta}{2\delta}) \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \overset{\varepsilon}{v}{}^2_3(t,x) dtdx \leqslant C(\delta,\alpha,\beta,k,l,T,M_2,m_2),\ \sigma \in [0,T]. \end{gathered} \tag{32}$$

Выберем в (32) постоянную $\alpha > 0$ достаточно малой такой, что (в силу (14))

$$\kappa - \alpha - \frac{\mu_2 l^{\frac{1}{2}} M_2}{2\delta\beta} > d_1 > 0, \tag{33}$$

$$\mu_2 (1 - \beta l^{\frac{3}{2}} M_2 / 2\delta) > d_1 > 0, \tag{34}$$

затем возьмем θ достаточно большим таким, что

$$(\frac{\theta}{2} + \kappa - C(\alpha,\beta,\delta,l,T,M_2,m_2)) > d_1. \tag{35}$$

В силу (33)–(35) из (32) получим неравенства

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_2\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{u}_3\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}_2\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}_3\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_1, \tag{36}$$

$$\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_2(\sigma,x) dx \leqslant C_2,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant T. \tag{37}$$

Из (27), (36) следует, что

$$\|\overset{\varepsilon}{g}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_3. \tag{38}$$

Здесь и ниже через C_m, $m = 1, 2, 3$, обозначены постоянные, зависящие от α, β, δ, l, T, M_2, m_2, μ_1, μ_2 и независящие от $\varepsilon \in (0, 1]$.

Рассмотрим $j \geqslant 3$. Заметим, что в этом случае соотношения (16)–(21) имеют место.

Оценим $I^{\sigma}_{7,j}$ при $0 \leqslant j \leqslant p+2$. В силу (38)

$$I^{\sigma}_{7,j} \leqslant \int\limits_0^{\sigma} e^{-\theta t}|\overset{\varepsilon}{g}(t)| \int\limits_0^{l} |F_j(t,x)||\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)|dxdt \leqslant M_j \int\limits_0^{l}\int\limits_0^{\sigma} |\overset{\varepsilon}{g}(t)||\overset{\varepsilon}{v}_j(t,x)|e^{-\theta t}dtdx \leqslant$$
$$\leqslant \nu M_j \int\limits_0^{l}\int\limits_0^{\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_j(t,x)dtdx + \frac{M_j}{\nu}\int\limits_0^{l}\int\limits_0^{\sigma} e^{-\theta t}(\overset{\varepsilon}{g}(t))^2 dtdx \leqslant \nu M_j \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_j(t,x)dtdx + N, \tag{39}$$

где $\nu > 0$ – произвольная постоянная, постоянная N зависит от M_j, l, ν, C_3.

Из (15)–(21), (39) аналогично доказательству неравенств (36), (37), полученных для $j = 2$, получим, что имеют место соотношения

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_j\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{u}_{j+1}\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}_j\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}_{j+1}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C,$$

$$\int\limits_0^{l} \overset{\varepsilon}{u}{}^2_j(\sigma,x)dx \leqslant C, \quad 0 \leqslant j \leqslant p+3. \tag{40}$$

Из первого уравнения системы (1) и соотношений (6), (8), (40) следует, что

$$\|\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_j\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C, \quad 0 \leqslant j \leqslant p+1. \tag{41}$$

1.2. Априорные оценки $\overset{\varepsilon}{\omega}_j$ в норме $C(\overline{Q}_T)$

Предположим, что выполняются условия согласования входных данных

$$\mu_2 v^0_{xx}(x) - a_{21}(0)u^0(x) - a_{22}(0)v^0(x) + g(0)F(0,x) = 0. \tag{42}$$

В (42)

$$g(0) = [a_{21}(0)u^0(x^0) + a_{22}(0)\psi(0) - \mu_2 v^0_{xx}(x^0)]\frac{1}{F(0,x^0)}. \tag{43}$$

Из (22), (43) следует равенство

$$\overset{\varepsilon}{g}(0) = g(0) + \frac{\varepsilon\psi'(0)}{F(0,x^0)}. \tag{44}$$

Введем обозначения

$$\overset{\varepsilon}{u}{}'_j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \overset{\varepsilon}{u}}{\partial t}\right), \overset{\varepsilon}{v}{}'_j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \overset{\varepsilon}{v}}{\partial t}\right), \overset{\varepsilon}{\omega}{}'_j = (\overset{\varepsilon}{u}{}'_j, \overset{\varepsilon}{v}{}'_j).$$

Продифференцируем систему (1) по переменной t, что возможно в силу замечания 1. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}{}' + a_{11}\overset{\varepsilon}{u}{}' + a_{12}\overset{\varepsilon}{v}{}' + a'_{11}\overset{\varepsilon}{u} + a'_{12}\overset{\varepsilon}{v} = \mu_1 \overset{\varepsilon}{u}{}'_{xx} + f', \\ &\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}{}' + a_{21}\overset{\varepsilon}{u}{}' + a_{22}\overset{\varepsilon}{v}{}' + a'_{21}\overset{\varepsilon}{u} + a'_{22}\overset{\varepsilon}{v} = \mu_2 \overset{\varepsilon}{v}{}'_{xx} + \overset{\varepsilon}{g}{}' F + \overset{\varepsilon}{g} F' \end{aligned} \tag{45}$$

с начальными данными

$$\overset{\varepsilon}{u}{}'(0,x) = \mu_1 u^0_{xx}(x) + f(0,x) - a_{11}(0)u^0(x) - a_{12}(0)v^0(x) \equiv \Phi(x), \tag{46}$$

и, в силу (42)–(44)

$$\overset{\varepsilon}{v}{}'(0,x) = \frac{\psi'(0)F(0,x)}{F(0,x^0)} \equiv \Psi(x). \tag{47}$$

Продифференцируем j раз по переменной x задачу (45)-(47), умножим результат дифференцирования системы (45) на $e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{\omega}{}'_j$ и проинтегрируем полученное равенство по области Q_σ, $\sigma \in (0,T]$, что можно сделать в силу замечания 1. Так как функции $a'_{11}\overset{\varepsilon}{u}_j$, $a'_{12}\overset{\varepsilon}{v}_j$, f'_j, $a'_{21}\overset{\varepsilon}{u}_j$, $a'_{22}\overset{\varepsilon}{v}_j$, $\overset{\varepsilon}{g}F'_j$ ограничены в норме пространства $L_2(Q_T)$ равномерно по $\varepsilon > 0$, то по аналогии с тем, как были получены соотношения (40), получим соотношения

$$\|\overset{\varepsilon}{u}{}'_j\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{u}{}'_{j+1}\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}{}'_j\|_{L_2(Q_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}{}'_{j+1}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C, \tag{48}$$

$$\int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{u}{}'_j(\sigma,x))^2 dx \leqslant C, \quad \sigma \in (0,T], \quad 0 \leqslant j \leqslant p+1. \tag{49}$$

Умножим j раз продифференцированную систему (1) по x на $e^{-\theta t}\dfrac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+2}$ и проинтегрируем результат умножения по Q_σ, $\sigma \in (0,T]$. Получим равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+1})^2 dtdx + \varepsilon \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}(\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+1})^2 dtdx - \\ - \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_j, \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+2}) dtdx + \mu_1 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2} dtdx + \\ + \mu_2 \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2} dtdx = - \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} f_j \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}_{j+2} dtdx - \\ - \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{g}F_j \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}_{j+2} dtdx.\end{gathered} \tag{50}$$

Имеют место следующие соотношения.

$$\begin{gathered} I_1^\sigma = - \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_j, \overset{\varepsilon}{\omega}{}'_{j+2}) dtdx = \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}{}'_{j+1}) dtdx = \\ = \tfrac{1}{2}\int\limits_{Q_\sigma} \frac{\partial}{\partial t}[e^{-\theta t} a(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1})] dtdx + \frac{\theta}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}) dtdx - \\ - \tfrac{1}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a'(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}) dtdx = \frac{1}{2}e^{-\theta\sigma}\int\limits_0^l a(\nu;\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}(\sigma,x), \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}(\sigma,x)) dx - \\ - \tfrac{1}{2}\int\limits_0^l a(0;\overset{0}{\omega}_{j+1}(x), \overset{0}{\omega}_{j+1}(x)) dx + \frac{\theta}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}) dtdx - \\ - \tfrac{1}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} a'(t;\overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}, \overset{\varepsilon}{\omega}_{j+1}) dtdx, \end{gathered} \tag{51}$$

$$I_2^\sigma = \tfrac{\mu_1}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dtdx = \frac{\mu_1}{2}e^{-\theta\sigma}\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}(\sigma,x)dx+$$
$$+\tfrac{\theta\mu_1}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}dtdx - \frac{\mu_1}{2}\int\limits_0^l \overset{0}{u}{}^2_{j+2}(x)dx, \tag{52}$$

$$I_3^\sigma = \tfrac{\mu_2}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dtdx = \frac{\mu_2}{2}e^{-\theta\sigma}\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}(\sigma,x)dx+$$
$$+\tfrac{\theta\mu_2}{2}\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}dtdx - \frac{\mu_2}{2}\int\limits_0^l \overset{0}{v}{}^2_{j+2}(x)dx. \tag{53}$$

В силу (8), (38), (48)

$$\left|\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t}(f_j\overset{\varepsilon}{u}{}'_{j+2} + \overset{\varepsilon}{g}F_j\overset{\varepsilon}{v}{}'_{j+2})dtdx\right| \leqslant C, \quad j = 0,1,\ldots,p. \tag{54}$$

Из (50)–(54) следует, что

$$\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}(\sigma,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+2}(\sigma,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+1}(\sigma,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_{j+2}(\sigma,x)dx \leqslant C,\ j = 0,1,\ldots,p, \tag{55}$$

где постоянная C не зависит от $\sigma \in [0,T]$ и $\varepsilon \in (0,1]$.

Из (55) равномерно по ε и $\sigma \in [0,T]$

$$\int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{u}{}^2_j(\sigma,x)dx + \int\limits_0^l \overset{\varepsilon}{v}{}^2_j(\sigma,x)dx \leqslant C, \quad j = 0,1,\ldots,p+2. \tag{56}$$

Лемма 1. *Множества* $\{\overset{\varepsilon}{u}_j\}$, $\{\overset{\varepsilon}{v}_j\}$ *равномерно по* $\varepsilon \in (0,1]$ *ограничены в* $\overline{Q}_T$*:*

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C, \quad j = 0,1,\ldots,p+1. \tag{57}$$

Доказательство. В силу (12), (56)

$$|\overset{\varepsilon}{u}_j(t,x)| \leqslant l^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{u}{}^2_{j+1}(t,x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C,\ t \in [0,T],\ j = 0,1,\ldots,p+1.$$

Отсюда следует, что

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C,\ j = 0,1,\ldots,p+1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|\overset{\varepsilon}{v}_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C,\ j = 0,1,\ldots,p+1.$$

□

Лемма 2. *Множество* $\{\overset{\varepsilon}{g}(t)\}$ *равномерно по* $\varepsilon \in (0,1]$ *ограничено на* $[0,T]$*:*

$$\|\overset{\varepsilon}{g}\|_{C[0,T]} \leqslant C. \tag{58}$$

Доказательство леммы 2 следует из соотношений (27), (57). □

2. Оценки $\|\overset{\varepsilon}{u}{}'_j\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $\|\overset{\varepsilon}{v}{}'_j\|_{C(\overline{Q}_T)}$

Продифференцированную j раз по переменной x систему (45) умножим на выражение $e^{-\theta t}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{u}{}'_{j+2}), \dfrac{\partial}{\partial t}(\overset{\varepsilon}{v}{}'_{j+2})\right)$ и проинтегрируем результат умножения по области Q_σ, $\sigma \in [0,T]$. На основании (12), (13), (46),(47), в основном повторяя рассуждения, приведенные при получении неравенства (56), получим неравенство

$$\int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{u}{}'_j(\sigma,x))^2 dx + \int\limits_0^l (\overset{\varepsilon}{v}{}'_j(\sigma,x))^2 dx \leqslant C,\ j = 0,1,\ldots,p. \tag{59}$$

В силу (59) (см. доказательство леммы 1) имеет место

Лемма 3. *Множества* $\{\overset{\varepsilon}{u}{}'_j\}$, $\{\overset{\varepsilon}{v}{}'_j\}$ *равномерно по* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *ограничены в* $\overline{Q}_T$:

$$\|\overset{\varepsilon}{u}{}'_j\|_{C(\overline{Q}_T)} + \|\overset{\varepsilon}{v}{}'_j\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C,\ j = 0,1,\ldots,p-1. \tag{60}$$

В силу неравенств (57), (60) множества $\{\overset{\varepsilon}{u}_j\}$, $\{\overset{\varepsilon}{v}_j\}$, $j = 0,1,\ldots,p-1$, удовлетворяют условиям теоремы Арцела (о компактности в $C(\overline{Q}_T)$). На основании теоремы Арцела существует подпоследовательность $(\overset{\mu}{u},\overset{\mu}{v})$ последовательности векторов $(\overset{\varepsilon}{u},\overset{\varepsilon}{v})$ и вектор-функция (u,v) такие, что при $\mu \to 0$

$$\overset{\mu}{u}_j \to u_j, \quad \overset{\mu}{v}_j \to v_j \quad \text{сильно в} \quad C(\overline{Q}_T), \quad j = 0,1,\ldots,p-1. \tag{61}$$

Переходя к пределу при $\mu \to 0$ в системе (1) (при $\varepsilon = \mu$) и учитывая при этом оценку (60) (при $j = 0$), в силу (61) получим, что вектор (u,v) удовлетворяет в $\overline{Q}_T$ системе уравнений

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + a_{11}(t)u(t,x) + a_{12}(t)v(t,x) &= \mu_1 u_{xx}(t,x) + f(t,x), \\ a_{21}(t)u(t,x) + a_{22}(t)v(t,x) &= \mu_2 v_{xx}(t,x) + g(t)F(t,x), \end{aligned} \tag{62}$$

начальным условиям

$$u(0,x) = u^0(x), \quad v(0,x) = v^0(x), \quad x \in [0,l], \tag{63}$$

краевым условиям

$$u(t,0) = v(t,0) = u(t,l) = v(t,l) = 0 \tag{64}$$

и условию переопределения

$$v(t,x^0) = \psi(t). \tag{65}$$

В (62) в силу (22), (61)

$$g(t) = \frac{1}{F(t,x^0)}\{a_{21}(t)u(t,x^0) + a_{22}(t)\psi(t) - \mu_2 v_{xx}(t,x^0)\},$$

и

$$\overset{\varepsilon}{g}(t) \to g(t) \quad \text{сильно в} \quad C[0,T]. \tag{66}$$

Из (61), (62), (66) следует, что $(u,v,g) \in K_0{}^{p-1,1,0}(\overline{Q}_T)$.

3. Единственность решения задачи (62)-(65)

Пусть векторы $(\overset{1}{u}, \overset{1}{v}, \overset{1}{g})$, $(\overset{2}{u}, \overset{2}{v}, \overset{2}{g})$ – два решения задачи (62)–(65) класса $K_0{}^{p-1,1,0}(\overline{Q}_T)$ и $\tilde{u} = \overset{1}{u} - \overset{2}{u}$, $\tilde{v} = \overset{1}{v} - \overset{2}{v}$, $\tilde{g} = \overset{1}{g} - \overset{2}{g}$.

Вектор $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{g})$ удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{u}_t + a_{11}\tilde{u} + a_{12}\tilde{v} = \mu_1 \tilde{u}_{xx}, \tag{67}$$

$$a_{21}\tilde{u} + a_{22}\tilde{v} = \mu_2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{g}F, \tag{68}$$

начальным условиям

$$\tilde{u}(0,x) = \tilde{v}(0,x) = 0, \tag{69}$$

краевым условиям

$$\tilde{u}(t,0) = \tilde{v}(t,0) = \tilde{u}(t,l) = \tilde{v}(t,l) = 0 \tag{70}$$

и условию переопределения

$$\tilde{v}(t,x^0) = 0. \tag{71}$$

В силу однородности уравнения (67), условий (69)–(71) и равенства

$$\tilde{g}(t) = (a_{21}(t)\tilde{u}(t,x^0) - \mu_2 \tilde{v}_{xx}(t,x^0))/F(t,x^0),$$

имеет место (см. вывод оценки (36)) равенство

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(\overline{Q}_T)} + \|\tilde{v}\|_{L_2(\overline{Q}_T)} = 0,$$

откуда следует, что $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ в $\overline{Q}_T$.

Доказана

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (3)–(8), (12), (42) и предположение 1. Тогда решение (u,v,g) задачи (62)-(65) существует и единственно в классе $K_0{}^{p-1,1,0}(\overline{Q}_T)$.*

В силу единственности решения задачи (62)–(65) в классе $K_0{}^{p-1,1,0}(\overline{Q}_T)$ и принадлежности (u,v,g) этому классу следует, что последовательность $(\overset{\varepsilon}{u}, \overset{\varepsilon}{v}, \overset{\varepsilon}{g})$ сходится к (u,v,g) так же, как и выбранная нами выше подпоследовательность $(\overset{\mu}{u}, \overset{\mu}{v}, \overset{\mu}{g})$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\overset{\varepsilon}{u}_j \to u_j, \quad \overset{\varepsilon}{v}_j \to v_j \quad \textit{сильно в} \quad C(\overline{Q}_T), \quad j = 0,1,\ldots,p-1,$$

$$\overset{\varepsilon}{g} \to g \quad \textit{сильно в} \quad C[0,T]. \tag{72}$$

4. Скорость сходимости $\overset{\varepsilon}{\omega}$ к ω при $\varepsilon \to 0$

Вычтем из системы (1) систему (62). Обозначив $\overset{\varepsilon}{\omega} - \omega = (\overset{\varepsilon}{u} - u, \overset{\varepsilon}{v} - v) = (\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}, \overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)}) = \overset{\varepsilon}{r}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)} + a_{11}\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)} + a_{12}\overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)} &= \mu_1 \frac{\partial^2 \overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}}{\partial x^2}, \\ \varepsilon\frac{\partial \overset{\varepsilon}{v}}{\partial t} + a_{21}\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)} + a_{22}\overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)} &= \mu_2 \frac{\partial^2 \overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)}}{\partial x^2} + \overset{\varepsilon}{G}F \end{aligned} \tag{73}$$

для вектора $\overset{\varepsilon}{r} = (\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}, \overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)})$, удовлетворяющего условиям

$$\overset{\varepsilon}{r}(0,x) = 0, \quad x \in [0,l], \tag{74}$$

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\overset{\varepsilon}{r}(t,0)=\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\overset{\varepsilon}{r}(t,l)=0,\quad m=0,1,2. \tag{75}$$

В (73) функция $\overset{\varepsilon}{G}$ имеет вид

$$\overset{\varepsilon}{G}(t)=\overset{\varepsilon}{g}(t)-g(t)=(a_{21}(t)\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}(t,x^0)-\mu_2\overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)}_{xx}(t,x^0)+\varepsilon\psi')\frac{1}{F(t,x^0)}. \tag{76}$$

Продифференцируем трижды задачу (73), (74) по переменной x. Умножим продифференцированную систему на $e^{-\theta t}\overset{\varepsilon}{r}_3$ и проинтегрируем результат умножения по Q_σ, $\sigma\in(0,T]$. Получим, в основных моментах повторяя вывод соотношений (40), неравенство

$$\int\limits_0^l(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}_3(\sigma,x))^2dx+\int\limits_{Q_T}(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}_4(t,x))^2dtdx+\int\limits_{Q_T}(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)}_4(t,x))^2dtdx\leqslant\varepsilon C. \tag{77}$$

В силу (75) можно доказать, что

$$\int\limits_0^l(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}_j(\sigma,x))^2dx\leqslant C\int\limits_0^l(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}_3(\sigma,x))^2dx,\quad\forall\sigma\in[0,T],\quad j=0,1,2,3;$$

$$\int\limits_{Q_T}(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}_m(t,x))^2dtdx\leqslant C\int\limits_{Q_T}(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(1)}_4(t,x))^2dtdx,$$

$$\int\limits_{Q_T}(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)}_m(t,x))^2dtdx\leqslant C\int\limits_{Q_T}(\overset{\varepsilon}{r}{}^{(2)}_4(t,x))^2dtdx,\quad m=0,1,\ldots,4. \tag{78}$$

Из (77), (78) следуют неравенства

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_j-u_j\|_{C(\overline{Q}_T)}\leqslant\varepsilon^{1/2}C,\quad j=0,1,2, \tag{79}$$

$$\|\overset{\varepsilon}{u}_m-u_m\|_{L_2(Q_T)}+\|\overset{\varepsilon}{v}_m-v_m\|_{L_2(Q_T)}\leqslant\varepsilon^{1/2}C,\quad m=0,1,\ldots,4. \tag{80}$$

Доказана

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда имеют место соотношения (79), (80).*

Рассмотрим задачу (1), (2), (4). Предположим выполнение условий теоремы 2. В силу периодичности входных данных (см. предположение 1 и доказательство теорем 3-5) имеет место

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда решение (u,v,g) задачи*

$$u_t+a_{11}u+a_{12}v=\mu_1u_{xx}+f,$$

$$a_{21}u+a_{22}v=\mu_2v_{xx}+gF,$$

$$u|_{t=0}=u^0,\quad v|_{t=0}=v^0,$$

$$u(t,x^0)=\psi(t)$$

существует и единственно в классе ${K_0}^{p-1,1,0}(\Pi_{[0,T]})$. При $\varepsilon\to0$

$$\overset{\varepsilon}{u}_j\to u_j,\quad\overset{\varepsilon}{v}_j\to v_j\quad\text{равномерно в}\quad\Pi_{[0,T]},\quad j=0,1,\ldots,p-1,$$

$$\overset{\varepsilon}{g}\to g\quad\text{равномерно в}\quad C[0,T],\qquad|\overset{\varepsilon}{u}(t,x)-u(t,x)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}C,\quad(t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

и выполняется соотношение (79).

В теореме 6 вектор $(\overset{\varepsilon}{u},\overset{\varepsilon}{v},\overset{\varepsilon}{g})$ – решение задачи (1), (2), (4), и функция $\overset{\varepsilon}{g}(t)$ определяется равенством (22).

Список литературы

[1] Н.Н.Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, Наука, 1967.

[2] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, Краснояр. гос. ун-т, 1999.

[3] Ю.Я.Белов, О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **3**(2010), №4, 487–499.

[4] А.П.Осколков, Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему уравнений Навье-Стокса, *Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР*, **21**(1971), 78–103.

[5] П.Е.Соболевский, В.В.Васильев, Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса, *Численные методы механики сплошной среды*, **9**(1978), №5, 115–139.

[6] Ю.Я.Белов, Теоремы однозначной разрешимости и аппроксимации некоторых краевых задач для систем уравнений, описывающих течение океана, *Сиб. матем. журн.*, **20**(1979), №6, 1206–1225.

[7] В.П.Кочергин, Теория и методы расчета океанических течений, М., Наука, 1978.

[8] С.Н.Антонцев, А.В.Кажихов, В.Н.Монахов, Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосибирск, 1983.

[9] Ж.Л.Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., 1972.

[10] Р.Рихтмайер, Звук и теплопроводность, *Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики*, Новосибирск, Наука, 1966, 183–185.

[11] Yu.Ya.Belov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, *VSP*, Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, 2002.

[12] П.Ю.Вячеславова, Р.В.Сорокин, Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **2**(2009), №3, 288–297.

[13] Р.В.Сорокин, Т.Н.Шипина, О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа, *Вычислительные технологии*, **8**(2003), №3, 139–146.

[14] A.I.Prilepko, D.G.Orlovsky, I.A.Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York, Marcel Dekkar, 1999.

An Identification Problem of Source Function in the System of Composite type

Yury Ya. Belov

An identification problem of source function for the semievolutionary system of two partial differential equations, one of which is parabolic, and the second - elliptic are investigated. The Cauchy problem and the first boundary-value problem are considered. Initial problems are approximated by problems in which the elliptic equation is replaced with the parabolic equation containing the small parameter $\varepsilon > 0$ at a derivative with respect to time.

Keywords: partial differential equations, boundary-value problems, approximation, small parameter, convergence.