Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 536–540

УДК 512.53

Сопряженность в конечной группе Шевалле типа E_8 больших абелевых унипотентных подгрупп

Галина С. Сулейманова*
Хакасский технический институт
Сибирского федерального университета
Щетинкина 27, Абакан, 665017,
Россия

Получена 18.07.2011, окончательный вариант 25.08.2011, принята к печати 10.09.2011

Завершено описание больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы группы Шевалле типа E_8 над конечным полем.

Ключевые слова: группа Шевалле, унипотентная подгруппа, большая абелева подгруппа

Введение

В конечной группе для любого теоретико-группового свойства $\mathcal{P}$ *большой* $\mathcal{P}$*-подгруппой* называют всякую $\mathcal{P}$-подгруппу наивысшего порядка. Пусть U есть унипотентный радикал подгруппы Бореля группы G лиева типа над конечным полем K. Вопрос описания больших абелевых подгрупп в U, изученный в 70–80-е гг. для классических типов, записан для исключительных типов в обзоре А.С. Кондратьева [3, проблема (1.6)]. Его разрабатывал Е.П. Вдовин [2], развивая метод А.И. Мальцева [6]. Мы находим решение проблемы, редуцируя ее к следующему вопросу:

Перечислить группы U, в которых большие абелевы подгруппы сопряжены в G с нормальной подгруппой в U, и описать исключительные большие абелевы подгруппы. (См. [11] и [10, § 1].)

Как показывает пример больших циклических подгрупп в $SL(2, K)$, большая нормальная $\mathcal{P}$-подгруппа может не быть большой $\mathcal{P}$-подгруппой. Согласно [5], большие нормальные абелевы подгруппы в U есть, в точности, нормальные большие абелевы подгруппы и описаны в [4] и [7]. Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *В группе G лиева типа над конечным полем либо каждая большая абелева подгруппа унипотентной подгруппы U сопряжена в G с нормальной подгруппой в U, либо G есть типа G_2, ${}^3D_4, F_4$ или ${}^2E_6$.*

1. Предварительные замечания и основная теорема

Группу Шевалле $\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, порождают корневые подгруппы $X_r = x_r(K)$, $r \in \Phi$. В унипотентной подгруппе $U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \rangle$

*suleymanova@list.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

всякий элемент допускает единственное разложение (называемое *каноническим*) в произведение корневых элементов $x_r(t_r)$ ($r \in \Phi^+$), соответствующих выбранному упорядочению Φ, [9, 5.3.1]. Стандартным в U является [9, 5.3.3] следующий центральный ряд: $U = U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_h = 1,\ U_i = \langle X_r \mid r \in \Phi,\ h(r) \geqslant i\rangle$, где h — число Кокстера системы корней Φ и $h(r)$ — функция высоты корня. Обозначая через $\{r\}^+$ совокупность $s \in \Phi^+$ с неотрицательными коэффициентами в линейном выражении $s-r$ через базу $\Pi(\Phi)$, полагаем $T(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+\rangle$, $Q(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+,\ s \neq r\rangle$, $r \in \Phi$. Если $H \subseteq T(r_1)T(r_2)\dots T(r_m)$ и все замены $T(r_i)$ на $Q(r_i)$ нарушают включение, то $\mathcal{L}(H) = \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ назовем *множеством углов* в H. Мономиальная подгруппа N группы Шевалле $\Phi(K)$ допускает естественный гомоморфизм на группу Вейля системы корней Φ, [9, теорема 7.2.2]. Если $n_r = n_r(1)$, то прообраз отражения w_r выбирают с условием $n_r x_s(t) n_r^{-1} = x_{w_r(s)}(\pm t)$ ($s \in \Phi$).

Известно, что в группе $UG_2(K)$ подгруппа $X_{a+b}U_4$ при $6K = K$ не сопряжена в G с нормальной подгруппой в U. С другой стороны, справедливо

Предложение 2. *В группе $UG_2(K)$ над конечным полем K нормальные большие абелевы подгруппы в U исчерпывают U_2 при $3K = 0$, U_3 при $6K = K$, U_3 и $\beta_c(K)U_4$ при четном $|K| > 2$, $\langle\alpha\rangle \times \langle\beta_1(1)\rangle$ в $UG_2(2)$, где*

$$\alpha = x_a(1)x_{2a+b}(1), \qquad \beta_c(t) = x_{a+b}(t)x_{2a+b}(tc) \quad (c \in K). \tag{1}$$

Каждая большая абелева подгруппа унипотентной подгруппы U сопряжена в G либо с нормальной подгруппой в U, либо при $|K| = 2$ или 4 с автоморфным образом подгруппы $\langle\alpha, \beta_1(1)\rangle U_4$ порядка $4 \cdot |K|^2$, либо при $3K = K$, $|K| \geqslant 4$ с подгруппой $X_{a+b}U_4$.

В обозначениях α_i из [1, таблицы V-VII] простых корней справедлива

Лемма 3. *В группе U нормальные большие абелевы подгруппы исчерпывают $T(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$ для типа E_8, $T(\alpha_7)$, для типа E_7, $T(\alpha_1)$ и $T(\alpha_6)$ для типа E_6. В частности, в $UE_8(K)$ такая подгруппа единственна.*

В группах U типа E_6, E_7 и ${}^2F_4$ всякая большая абелева подгруппа нормальна, в силу [6] и [2]. G-сопряженность больших абелевых подгрупп с нормальной подгруппой в U для классических типов известна [12, теорема 4]. Для оставшихся групп $UE_8(K)$ теорему 1 дает

Теорема 4. *В группе G лиева типа E_8 над конечным полем большие абелевы подгруппы унипотентной подгруппы U попарно G-сопряжены.*

2. Доказательство теоремы 4

Доказательство следует схеме, аналогичной схеме для типа F_4 в [7] и [8].

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ есть база корневой системы Φ евклидова пространства V. Если не оговорено противное, по аналогии с [9], [2], далее фиксируем на пространстве V линейный порядок $\leqslant$ (согласованный также с линейными операциями) по правилу: при $r, s \in V$ считаем, что $r < s$ тогда и только тогда, когда последняя ненулевая координата вектора $s - r$ в выбранной базе Φ (и V) является положительной. Напомним, что А.И.Мальцев [6] называет подмножество $\Psi \subseteq \Phi^+$ коммутативным, если $r + s \notin \Phi$ для любых корней $r, s \in \Psi$. Он нашел коммутативные подмножества максимального порядка всех систем корней Φ.

Далее нам понадобятся следующие обозначения из [2]. Через $\Phi(x)$ для элемента $x \in U$ обозначим множество таких корней r, что $t_r \neq 0$ в разложении $x = \prod\limits_{r \in \Phi^+} x_r(t_r)$, где корни r

выбраны в порядке возрастания относительно порядка $\leqslant$. Через $m(x)$ обозначим минимальный элемент множества $\Phi(x)$. Как следует из [2, Теорема 2], если A — абелева подгруппа группы U типа E_8, то $m(A) = \cup_{x\in A}\{m(x)\}$ есть коммутативное множество корней.

Используем также представление из [6] системы корней Φ типа E_8 со следующей записью положительных корней: $w_i - w_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 9)$, $w_1 + w_j + w_k$ $(2 \leqslant j < k \leqslant 9)$, $-w_j - w_k - w_m$ $(2 \leqslant j < k < m \leqslant 9)$. Согласно [6], коммутативные множества наибольшего порядка в Φ^+ исчерпываются следующими:

$$S_0 = \{w_1 - w_i,\ w_1 + w_i + w_j \mid 2 \leqslant i < j \leqslant 9\}, \tag{2}$$

$$S_p = \{w_1 - w_i,\ w_2 - w_i,\ w_1 + w_2 + w_i, -w_p - w_j - w_k \mid 3 \leqslant i \leqslant 9;\ j,k \neq p;\ 3 \leqslant j < k \leqslant 9\}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} S_{pabc} = \{&w_1 - w_i,\ w_p - w_j,\ -w_s - w_j - w_k,\ -w_a - w_b - w_c,\ w_1 + w_p + w_i, \\ &w_1 + w_s + w_t \mid i \neq p,\ 2 \leqslant i \leqslant 9;\ j,k = a,b,c;\ s,t \neq 1,p,a,b,c\}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} S_{abc} = \{&w_1 - w_i,\ w_1 + w_j + w_s,\ w_1 + w_j + w_k, \\ &- w_s - w_t - w_u \mid 2 \leqslant i \leqslant 9;\ j,k = a,b,c;\ s,t,u \neq a,b,c\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $p \neq 2$ для множества (3), $p \notin \{a,b,c\}$ и $p \leqslant 6$ для множества (4). Никакое из коммутативных множеств наибольшего порядка не содержит более одного простого корня. Корни α_7, α_8 не входят ни в одно коммутативное множество наибольшего порядка.

Для простых корней используем также обозначения из [1, таблица VII].) В группе Шевалле типа E_8 мономиальный элемент $n_r(1)$ для простого $r = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ обозначим через n_i. Пусть U типа E_8.

Лемма 5. *Большая абелева подгруппа группы U имеет не более одного простого угла, причем этот угол не может совпадать с α_7 или α_8.*

Доказательство. Пусть A — произвольная большая абелева подгруппа группы U. Предположим противное, что A имеет по крайней мере два простых угла α_i и α_j. Занумеруем простые корни двумя способами так, чтобы в первом случае первым корнем был корень α_i (нумерация (*)), а во втором случае – корень α_j (нумерация (**)). Так как множество $m(A)$ в общем случае зависит от нумерации простых корней, то обозначим его через $m^*(A)$ и $m^{**}(A)$ в нумерациях (*) и (**), соответственно. Тогда $m^*(A)$ содержит корень α_i, а $m^{**}(A)$ содержит корень α_j. Так как ни одно коммутативное множество корней наибольшего порядка не содержит α_7 или α_8, то $i, j \leqslant 6$. Заметим, что, если $r = w_1 - w_k$ $(k \geqslant 4)$, то для всех $s \in \Phi^+$, $s \neq r$, в выражении $s - r$ через простые корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ ненулевые коэффициенты будут одного знака. Таким образом, если $m(x) = r$ для некоторого $x \in A$, то это равенство останется верным при любой нумерации простых корней.

Пусть $i = 1$. Тогда $m^*(A) = S_p$ для некоторого p или $m^*(A) = S_{2abc}$. В обоих случаях $m^*(A)$ содержит корни $w_1 - w_k$ для $3 \leqslant k \leqslant 9$. Если $j \geqslant 3$, то $m^{**}(A)$ имеет вид S_{jabc} и не содержит корень $w_1 - w_j$. При $j \geqslant 4$ это противоречит включению $w_1 - w_j \in m^*(A)$. Пусть $j = 3$ или $j = 2$. Так как $\alpha_1 \in m^*(A)$, то $m^*(A)$ содержит корни $w_1 + w_2 + w_3$ и $w_1 + w_2 + w_4$, а также все корни вида $w_1 - w_k$, $3 \leqslant k \leqslant 9$. Следовательно, подгруппа A содержит элементы вида $x = x_{w_1+w_2+w_4}(t)x_{w_1-w_2}(u)$ и $y = x_{w_1+w_2+w_3}(t)$, где $t \neq 0$. Выберем в A элемент z с углом α_j. Тогда в первом случае $\Phi([x,z])$ содержит корень $w_1 + w_2 + w_3$, во втором —

$\Phi([y,z])$ содержит корень $w_1 - w_4$, то есть $[x,z] \neq 1$ или $[y,z] \neq 1$, соответственно. Таким образом, $i \neq 1$.

Пусть $i = 2$. Тогда $m^*(A)$ имеет вид S_{abc}, а $m^{**}(A)$ имеет вид S_{jabc}, $j \geqslant 3$. Так как $m^*(A)$ содержит корни $w_1 - w_k$ $(2 \leqslant k \leqslant 9)$, то $m^{**}(A)$ должно содержать корни $w_1 - w_k$ $(4 \leqslant k \leqslant 9)$. Но S_{jabc} не содержит корень $w_1 - w_j$, следовательно, $j = 3$. В этом случае $m^{**}(A)$ содержит корень $w_1 + w_3 + w_4$, то есть подгруппа A содержит элемент x с условием $m(x) = w_1 + w_3 + w_4$. Но тогда $w_1 - w_2 \in \Phi([x,y])$, где y — элемент с углом α_2.

Пусть $i = 3$ и $j \geqslant 5$. Тогда $m^*(A)$ имеет вид S_{3abc} и содержит корни $w_1 - w_k$, $4 \leqslant k \leqslant 9$. Следовательно, $m^{**}(A)$ также содержит корни $w_1 - w_k$, $4 \leqslant k \leqslant 9$, что противоречит тому, что $m^{**}(A)$ не содержит корень $w_1 - w_j$. В случаях, когда $4 \leqslant i < j \leqslant 6$, множество $m^*(A)$ имеет вид S_{iabc}, а множество $m^{**}(A)$ — вид S_{jabc}. Но S_{iabc} содержит все корни $w_1 - w_k$, $4 \leqslant k \leqslant 9$, кроме $w_1 - w_i$, а S_{jabc} — все корни $w_1 - w_k$, $4 \leqslant k \leqslant 9$, кроме $w_1 - w_j$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Лемма 6. *Если большая абелева подгруппа A группы U имеет простой угол p, то $A \subseteq T(p)$.*

Доказательство. Пусть подгруппа A имеет угол $r \notin \{p\}^+$. Рассмотрим случай $p = \alpha_1$. Подгруппа A^{n_i} при $i \neq 1,3$ лежит в U и имеет угол α_1. Как легко убедиться непосредственной проверкой, для любого корня $s \notin \{\alpha_1\}^+$ высоты $\geqslant 2$ найдется простой корень $q \neq \alpha_1, \alpha_3$ такой, что $s - q \in \Phi^+$. Тогда подгруппа A^{n_q} имеет углы α_1 и $r - q \notin \{\alpha_1\}^+$. Применяя индукцию по $h - h(r)$ (h — число Кокстера системы корней), получаем большую абелеву подгруппу с двумя простыми углами, что противоречит лемме 5. Аналогично рассматриваются остальные случаи. □

Лемма 7. *Каждая большая абелева подгруппа группы U сопряжена в группе Шевалле с подгруппой, лежащей в U_2.*

Доказательство. Пусть A – большая абелева подгруппа группы U, имеющая простой угол α_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$. Пусть $i = 6$. В этом случае $m(A)$ имеет вид S_{6abc}. Выберем элемент из A с углом α_6, то есть вида $x = x_{w_6 - w_7}(t) \mod U_2$, $t \neq 0$. Применяя U- и n_5-сопряжения, получим элемент вида $x = x_{w_5 - w_7}(t) x_{w_6 - w_8}(u) \mod U_3$, $u \in K$. Так как $m(x) = w_5 - w_7 \in m(A^{n_5})$, то $m(A^{n_5})$ имеет вид S_{5abc}. Множество S_{6abc} не содержит корень α_6. Кроме того, $A^{n_5} \subseteq T(\alpha_6)$, поэтому A^{n_5} не может иметь угол α_6, следовательно, $A^{n_5} \subseteq U_2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Лемма 8. *Если большая абелева подгруппа A группы U имеет угол r высоты 2, то $r \neq w_6 - w_8, w_7 - w_9$ и $A \subseteq T(r)$.*

Доказательство. Обозначим $\Phi(A) = \cup_{x \in A} \Phi(x)$. Пусть $r = w_2 - w_4$. Тогда $-w_2 - w_8 - w_9 \notin \Phi(A)$, так как в противном случае подгруппа A^{n_3} имеет угол α_1 и $-w_2 - w_8 - w_9 \in \Phi(A^{n_3})$, то есть $A^{n_3} \not\subseteq T(\alpha_1)$, что противоречит лемме 6. Таким образом, $A \subseteq T(w_2 - w_4)$. Аналогично рассматриваются случаи, когда r равняется корню $-w_2 - w_3 - w_5$, $w_3 - w_5, w_4 - w_6$ или $w_5 - w_7$. Случаи $r = w_6 - w_8$ и $r = w_7 - w_9$ невозможны, так как тогда A^{n_6} имеет угол α_7 или A^{n_7} имеет угол α_8, соответственно, что противоречит лемме 5.

Продолжая далее доказательство теоремы 4 по нашей схеме, получаем, что произвольная большая абелева подгруппа группы U сопряжена с единственной большой абелевой нормальной подгруппой в U из леммы 3. □

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00717).

Список литературы

[1] Н.Бурбаки, Группы и алгебры Ли (главы IV–VI), М., Мир, 1972.

[2] Е.П.Вдовин, Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле, *Алгебра и логика,* **40**(2001), №5, 523–544.

[3] А.С.Кондратьев, Подгруппы конечных групп Шевалле, *Успехи мат. наук,* **41**(1986), №1(247), 57–96.

[4] В.М.Левчук, Г.С.Сулейманова, Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы, *Докл. РАН,* **419**(2008), №5, 595–598.

[5] В.М.Левчук, Г.С.Сулейманова, Нормальное строение и экстремальные подгруппы в унипотентной подгруппе групп лиева типа, *Фундам. и прикл. математика,* **17**(2011), №10, 169–182.

[6] А.И.Мальцев, Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **9**(1945), №4, 291–300.

[7] Г.С.Сулейманова, О сопряженности в группе Шевалле больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы, *Фундам. и прикл. математика,* **15**(2009), №7, 205–216.

[8] Г.С.Сулейманова, Классы сопряженных в группе Шевалле типа F_4 больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы, *Владикавказский матем. журн.,* **13**(2011), №2, 45–55.

[9] R.Carter, Simple groups of Lie type, New York, Wiley and Sons, 1972.

[10] C.K.Gupta, V.M.Levchuk, Yu.Yu.Ushakov, Hypercentral and monic automorphisms of classical algebras, rings and groups, *J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics*, **1**(2008), №. 4, 280–290.

[11] V.M.Levchuk, G.S.Suleymanova, T.Yu.Voitenko, Some questions for the unipotent subgroup of the Chevalley group, Тез. докл. конф. "Алгебра и ее приложения", Красноярск, СФУ, 2007, 168–169.

[12] V.M.Levchuk, G.S.Suleimanova, Automorphisms and normal structure of unipotent subgroups of finitary Chevalley groups, *Proceed. of the Steklov Inst. Math.,* Pleiades Publ., Suppl. **3**(2009), 118–127.

Conjugacy of Large Abelian Unipotent Subgroups in a Finite Chevalley Group of Type E_8

Galina S. Suleimanova

The description of large abelian subgroups of the unipotent subgroup of the Chevalley group of type E_8 is complete.

Keywords: Chevalley group, unipotent subgroup, large abelian subgroup.