Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(4), 469-482

УДК 539.374

Поверхность текучести двоякопериодического волокнистого композиционного материала

Юрий В.Немировский*
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Академгородок, Новосибирск, 630090,
Россия

Сергей Ф.Пятаев†
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Получена 18.08.2009, окончательный вариант 20.09.2009, принята к печати 20.10.2009

Предлагается метод построения поверхности текучести двоякопериодического однонаправленного композиционного материала с выполнением законов осреднения напряжений и непрерывностью перемещений на границах раздела между представительными элементами.

Ключевые слова: поверхность текучести, композиционный материал

Введение

Одной из простейших моделей для определения упругих характеристик однонаправленного композиционного материала (КМ) является модель коаксиальных цилиндров (МКЦ). Вычисленные по этой модели упругие характеристики незначительно отличаются от соответствующих упругих характеристик, полученных с использованием двоякопериодических функций Г.А.Ваниным [1] для КМ с регулярными структурами. Это можно объяснить тем, что эффективные модули упругости, явно или неявно, всегда получают из сравнений дополнительной или потенциальной энергий представительного элемента с энергией образца аналогичных размеров из композиционного материала, но уже однородного. Поскольку энергия носит интегральный характер, то упругие эффективные характеристики определяются в первую очередь "средними" значениями микронапряжений, а их концентрация в малой области представительного элемента не очень значительно влияет на величину энергии.

В противоположность этому величина предела пропорциональности появляется как результат анализа условия текучести в каждой точке представительного элемента и, следовательно, имеет "локальный" характер. Поэтому для определения этой величины важно достаточно точно описывать поля микронапряжений, поскольку именно через них вычисляется граница упругого поведения КМ. Б.Розеном и Э.Фридманом [2] было высказано предположение, что МКЦ позволяет определить микронапряжения КМ (и тем самым предел пропорциональности), по достоверности не уступающие результатам применения громоздких численных методов или теоретических моделей.

*e-mail: ntmirov@itam.nsc.ru
†e-mail: psf@icm.krasn.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

1. Постановка задачи

Провести сравнение пределов пропорциональности, вычисленных по МКЦ и модели двоякопериодического трансверсальноизотропного КМ. В плоскости изотропии структура такого КМ представлена на рис. 1,

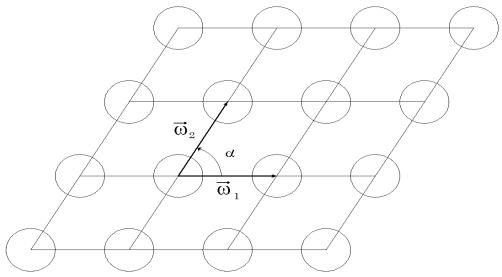

Рис. 1.

где угол $\alpha = \pi/3$, а векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ по модулю равны и отвечают за трансляционную симметрию, согласно которой при параллельных переносах вдоль этих базисных векторов на расстояния, кратные $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}_2|$, структура повторяется. В качестве элементарной ячейки выбирается более простая ячейка периодичности по сравнению с ячейкой, изображенной на

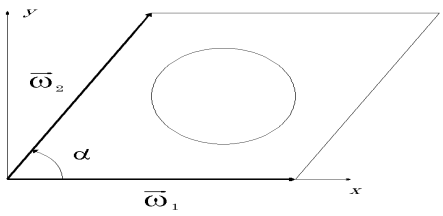

Рис. 2.

рис. 1. Такая ячейка приведена на рис. 2 и с точки зрения ее триангуляции является более привлекательной.

2. Решение задачи

В классических двумерных задачах напряженно-деформированное состояние принимается плоским либо по напряжениям, либо по деформациям. В рассматриваемом случае из-за неоднородности элемента V, изображенного на рис. 3, не реализуется ни одно из этих состояний, поскольку при нагружении представительного элемента в поперечном направлении возникает деформация ε_{33} и осевое микронапряжение σ_{33}. Поэтому нужно построить такой энергетический функционал, который бы, оставаясь двумерным по координатам, учитывал при этом ненулевые напряжения и деформации вдоль направления армирования.

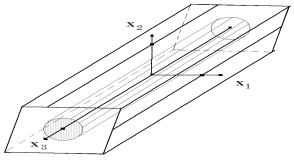

Рис. 3.

Примем следующие предположения: в элементе V действуют только макронапряжения $<\sigma_{11}>$, $<\sigma_{22}>$, $<\sigma_{12}>$, а остальные компоненты тензора макронапряжений равны нулю; микронапряженное состояние этого элемента и смещения u_1, u_2 не зависят от осевой координаты x_3, при этом $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, а остальные микронапряжения отличны от нуля; выполнены условия осреднения микронапряжений

$$\frac{1}{V}\int\limits_V \sigma_{ij}\, dV = <\sigma_{ij}> .$$

Поскольку микронапряжения не зависят от осевой координаты, то последние интегральные равенства можно переписать как

$$\frac{1}{S}\int\limits_S \sigma_{ij}\, dS = <\sigma_{ij}>, \tag{1}$$

где S — произвольное торцевое сечение представительного элемента (следуя Г.А.Ванину [1], будем его в дальнейшем называть ячейкой периодичности). Эти равенства задают связь между микро- и макронапряжениями и определяют классическое понятие осредненных напряжений [3].

Рассмотрим функционал Лагранжа для элемента V при отсутствии массовых сил, при неизвестных действующих на торцах микронапряжениях σ_{33} и заданных на боковой поверхности смещениях

$$L = \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{\varepsilon} D \vec{\varepsilon}^{\,*}\, dV - \int\limits_{S_1} \vec{u}\vec{p}_1^{\,*}\, dS - \int\limits_{S_2} \vec{u}\vec{p}_2^{\,*}\, dS,$$

где S_1 и S_2 – торцы элемента V при $x_3 = -l$ и $x_3 = l$ соответственно; $\vec{p}_1 = (0; 0; -\sigma_{33})$, $\vec{p}_2 = (0; 0; \sigma_{33})$ — векторы нагрузок на этих торцах; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \gamma_{12}; \varepsilon_{33})$ – вектор деформаций, где γ_{12} — полная сдвиговая деформация $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$; символ $*$ обозначает транспонирование вектор-строки; D — тензор жесткости:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & G & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda + 2G \end{bmatrix},$$

записанный в соответствии с порядком следования компонент вектора $\vec{\varepsilon}$ и вектора микронапряжений $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{12}; \sigma_{33})$. Компоненты тензора D являются кусочно-постоянными функциями координат x_1 и x_2.

Преобразуем поверхностные интегралы в функционале Лагранжа, предварительно показав, что смещение u_3 не зависит от x_1 и x_2, а деформация ε_{33} является константой.

Действительно, поскольку $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, то и $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \ , \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \ .$$

Так как смещения u_1 и u_2 не зависят от x_3, то

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \ ,$$

откуда следует независимость u_3 от x_1 и x_2. По предположению напряженно-деформированное состояние не зависит от x_3, поэтому

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \ ,$$

т.е. u_3 есть линейная функция x_3, $u_3 = \varepsilon_{33} x_3$. Независимость ε_{33} от x_1 и x_2 вытекает из показанной выше независимости u_3 от x_1 и x_2.

В связи с этим оба поверхностных интеграла в функционале Лагранжа можно переписать в виде

$$\int\limits_S \varepsilon_{33} \, l \, \sigma_{33} \, dS \ ,$$

где S – ячейка периодичности; отсюда с учетом ε_{33}= const и

$$\frac{1}{S} \int\limits_S \sigma_{33} \, dS = <\sigma_{33}> = 0$$

следует, что они равны нулю.

Таким образом, в функционале Лагранжа остается только объемный интеграл, который из-за независимости напряженно-деформированного состояния от x_3 сводится с точностью до положительного множителя к интегралу по ячейке периодичности:

$$L = \int\limits_S \vec{\varepsilon} D \vec{\varepsilon}^* \, dS \ .$$

Перепишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} L \ = \ & \int\limits_S \Big[(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 4G \varepsilon_{12}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \varepsilon_{33} + \\ & + (\lambda + 2G) \varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \varepsilon_{33} \Big] \, dS \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Из закона Гука для σ_{33}

$$\sigma_{33} = \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_{33} = (\lambda + 2G) \varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \tag{3}$$

после умножения этого соотношения на ε_{33} следует

$$\sigma_{33} \varepsilon_{33} = (\lambda + 2G) \varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \varepsilon_{33} \ .$$

Интегрируя это равенство по S и учитывая $\varepsilon_{33} = \text{const}$ и $<\sigma_{33}>= 0$, получим

$$\int\limits_S \Big[(\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33}\Big]\, dS = 0\ .$$

Таким образом, в (2) интеграл от двух последних слагаемых равен нулю и функционал Лагранжа преобразуется к виду

$$\begin{aligned} L \ &= \ \int\limits_S \Big[(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \ 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2\Big]\, dS + \\ &+ \varepsilon_{33} \int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, dS\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим теперь ε_{33} через ε_{11} и ε_{22}. Для этого проинтегрируем равенство (3)

$$\int\limits_S \sigma_{33}\, dS = \int\limits_S \Big[(\lambda + 2G)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\Big]\, dS\ .$$

Поскольку левая часть полученного соотношения равна $S <\sigma_{33}>= 0$ и $\varepsilon_{33} = \text{const}$, то его можно переписать как

$$\varepsilon_{33} \int\limits_S (\lambda + 2G)\, dS + \int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, dS = 0. \tag{5}$$

Т.к. упругие коэффициенты являются кусочно-постоянными функциями на S, то

$$<\lambda + 2G>= \frac{1}{S}\int\limits_S (\lambda + 2G)\, dS = (\lambda_m + 2G_m)c_m + (\lambda_p + 2G_p)c_p\ ,$$

где $c_m,\ c_p$ — концентрации материала матрицы и волокна, $\lambda_m,\ G_m,\ \lambda_p,\ G_p$ — коэффициенты Ламе и модули сдвига матрицы и волокна соответственно. Тогда из (5) определяется ε_{33}

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{S <\lambda + 2G>} \int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, dS\ . \tag{6}$$

Подстановка (6) в (4) приводит функционал L к виду, в котором присутствуют только ε_{11}, ε_{22} и ε_{12}:

$$\begin{aligned} L \ &= \ \int\limits_S \Big[(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \ 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2\Big]\, dS - \\ &- \ \frac{1}{S <\lambda + 2G>} \Big[\int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, dS\Big]^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, от трехмерной упругой задачи мы перешли к двумерной по координатам задаче для области S, на границе которой заданы смещения u_1 и u_2.

Докажем теперь, что полученный функционал в пространстве обобщенных функций $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$, квадратично интегрируемых вместе со своими первыми производными и имеющих на

∂S нулевой след, является положительно определенным, т.е. существует константа $k > 0$, такая, что

$$L(\vec{u}) \geq k \, \|\vec{u}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}} \quad \forall \vec{u} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)} \ ,$$

откуда будет следовать, согласно теореме Лакса–Мильграма [4], существование и единственность элемента $\vec{u}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$, доставляющего минимум функционалу L.

Для доказательства введем скалярное произведение с весом $\lambda(x_1, x_2) > 0$ (λ — параметр Ламе ячейки периодичности):

$$(f, g)_\lambda = \int\limits_S \lambda(x_1, x_2) f(x_1, x_2) g(x_1, x_2) \, dS \ .$$

Тогда последнее слагаемое в (7) согласно неравенству Коши–Буняковского можно оценить сверху:

$$\left[\int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \, dS \right]^2 = (1, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2_\lambda \leqslant (1, 1)_\lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})_\lambda =$$
$$= \int\limits_S \lambda \, dS \cdot \int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 \, dS = S < \lambda > \int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 \, dS \leqslant$$
$$\leqslant S < \lambda + 2G > \int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 \, dS \ .$$

Из последнего неравенства и (7) следует

$$\begin{aligned} L \ &\geqslant \ \int\limits_S \Big[(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \ 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2\Big] \, dS - \int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 \, dS = \\ &= \ 2\int\limits_S G(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2) \, dS \geqslant 2G_{\min} \int\limits_S (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2) \, dS, \qquad (8) \\ &\quad \text{где} \qquad G_{\min} = \min(G_m, \ G_p) \ . \end{aligned}$$

Согласно неравенству Корна [5] существует константа $k_1 > 0$, зависящая только от области S, такая, что

$$\int\limits_S (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2) \, dS \geqslant k_1 \int\limits_S \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dS \ . \qquad (9)$$

Применим неравенство Фридрихса [6] к функциям u_1 и u_2. Тогда существует такая константа $k_2 > 0$, также зависящая только от области S, что

$$\int\limits_S \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dS \geqslant k_2(\|u_1\|^2_{L_2(S)} + \|u_2\|^2_{L_2(S)}) = k_2\|\vec{u}\|^2_{L_2(S)} \ .$$

Разобьем правую часть неравенства (9) на сумму двух положительных слагаемых, например

$$\alpha k_1 \int\limits_S \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dS + (1-\alpha) k_1 \int\limits_S \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dS \ , \quad \text{где} \ \ \alpha \in (0; 1) \ ,$$

и применим неравенство Фридрихса к первому слагаемому. Тогда оценка (9) на интеграл от суммы квадратов деформаций может только усилиться:

$$\int\limits_S (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)\, dS \geqslant \alpha k_1 k_2 \|\vec{u}\|^2_{L_2(S)} + (1-\alpha) k_1 \left(\left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \right\|^2_{L_2(S)} + \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} \right\|^2_{L_2(S)} \right).$$

Выберем α так, чтобы коэффициенты при обеих нормах совпадали:

$$\alpha k_2 = 1 - \alpha\ , \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{1}{1+k_2}\ .$$

Вынося этот коэффициент из правой части последнего неравенства, получим

$$\int\limits_S (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)\, dS \geqslant \frac{k_1 k_2}{1+k_2} \left(\|\vec{u}\|^2_{L_2(S)} + \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \right\|^2_{L_2(S)} + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} \right\|^2_{L_2(S)} \right) = \frac{k_1 k_2}{1+k_2} \|\vec{u}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}}\ .$$

С помощью полученного неравенства оценка (8) для функционала (7) усиливается:

$$L \geqslant 2G_{\min} \frac{k_1 k_2}{1+k_2} \|\vec{u}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}}\ ,$$

что доказывает положительную определенность функционала L.

При решении задачи минимизации функционала (7) методом конечных элементов мы получим за счет последнего слагаемого полностью заполненную глобальную матрицу жесткости. Во избежание этого преобразуем последний интеграл в (7):

$$\int\limits_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, dS = \lambda_m \int\limits_{S_m} \operatorname{div} \vec{u}\, dS \ + \ \lambda_p \int\limits_{S_p} \operatorname{div} \vec{u}\, dS\ ,$$

где S_m, S_p — области, занимаемые материалами матрицы и волокна соответственно; $\vec{u} = (u_1; u_2)$ — вектор перемещений. По формуле Гаусса–Остроградского эти два интеграла переписываются в виде

$$\int\limits_{S_p} \operatorname{div} \vec{u}\, dS = \int\limits_{\partial S_p} \vec{u}\, \vec{n}_p^{\,*}\, d\gamma\ , \qquad \int\limits_{S_m} \operatorname{div} \vec{u}\, dS = \int\limits_{\partial S_m} \vec{u}\, \vec{n}_m^{\,*}\, d\gamma\ - \int\limits_{\partial S_p} \vec{u}\, \vec{n}_p^{\,*}\, d\gamma\ .$$

Здесь $\vec{n}_m$ — внешняя нормаль к внешней границе ∂S_m области S_m; $\vec{n}_p$ — внешняя нормаль к границе ∂S_p области S_p, см. рис. 4; символ $*$ обозначает транспонирование вектор-строки.

Таким образом, функционал (7) в окончательном варианте примет вид

$$\begin{aligned} L \ &= \ \int\limits_S \Big[(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \ 2\lambda \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2 \Big]\, dS - \\ &- \ \frac{1}{S < \lambda + 2G >} \left[(\lambda_p - \lambda_m) \int\limits_{\partial S_p} \vec{u}\, \vec{n}_p^{\,*}\, d\gamma + \lambda_m \int\limits_{\partial S_m} \vec{u}\, \vec{n}_m^{\,*}\, d\gamma \right]^2 . \end{aligned} \tag{10}$$

Полученный функционал порождает матрицу жесткости, которая уже не будет целиком заполненной. Алгебраические уравнения, возникающие при вариации u_1 и u_2 на внутренних узлах областей S_m и S_p, по количеству ненулевых коэффициентов не отличаются от

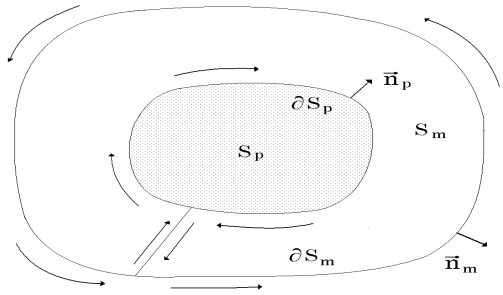

Рис. 4.

уравнений, полученных для плоского напряженного или плоского деформированного состояний. Исключением являются уравнения, которые возникают при варьировании переменных, связанных с узлами, лежащими на границе ∂S_p (на границе ∂S_m смещения заданы, а потому в этих узлах они не варьируются). Каждый узел $\vec{x}_i \in \partial S_p$ порождает уравнение с $2(n_p + n_m + l_i)$ ненулевыми коэффициентами, где n_p и n_m — количество узлов на ∂S_p и ∂S_m соответственно, а l_i — количество внутренних узлов, инцидентных узлу $\vec{x}_i$. Однако часть слагаемых этих уравнений содержит известные узловые значения, поскольку в узлах, расположенных на ∂S_m, смещения заданы. Поэтому, при переброске известных величин в правую часть количество ненулевых коэффициентов каждого уравнения уменьшается до $2n_p + 2l_i$, причем $2n_p$ коэффициентов порождены криволинейными интегралами в (10), а $2l_i$ коэффициентов — интегралами по области.

Таким образом, блок глобальной матрицы жесткости, соответствующий криволинейным интегралам в (10), целиком заполнен и имеет размеры $2n_p \times 2n_p$. Однако на самом деле элементы этого блока таковы, что весь блок хранить не нужно, т.к. он является диадным произведением вектора длины $2n_p$ на себя, и поэтому вместо всего блока хранится только один вектор, с помощью которого легко вычисляется любой элемент этого блока.

Покажем структуру блока. Для этого сначала вычислим криволинейный интеграл для произвольной границы γ:

$$J = \int\limits_{\gamma} \vec{u}\vec{n}^* d\gamma \ ,$$

которая предварительно разбита на одномерные конечные элементы узлами $\vec{x}_1 = (x_1; y_1)$, $\vec{x}_2 = (x_2; y_2)$, ... , $\vec{x}_n = (x_n; y_n)$. Тогда

$$J = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_{i+1}} \vec{u}\vec{n}^* d\gamma \ , \quad \text{где} \quad \vec{x}_{n+1} = \vec{x}_1 \ .$$

В силу линейности перемещений $\vec{u}$ на элементе $[\vec{x}_i \, ; \vec{x}_{i+1}]$ интеграл по элементу есть

$$\int\limits_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_{i+1}} \vec{u}\vec{n}^* d\gamma = \frac{1}{2} d_i \big(\vec{u}_i + \vec{u}_{i+1}\big) \vec{n}_i^* \ ,$$

где d_i — длина элемента $[\vec{x}_i \, ; \vec{x}_{i+1}]$, $\vec{n}_i$ — его внешняя нормаль

$$\vec{n}_i = \frac{1}{d_i} (y_{i+1} - y_i; x_i - x_{i+1}) \ ,$$

$\vec{u}_i$ — вектор перемещений в узле $\vec{x}_i$. Тогда интеграл по границе γ после группировки слагаемых относительно узловых перемещений есть

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} \vec{u}_i(\vec{n}^*_{i-1} + \vec{n}^*_i) + \frac{1}{2}\vec{u}_1(\vec{n}^*_1 + \vec{n}^*_n) \ ,$$

что можно переписать в виде произведения векторов-строк $\vec{a}_\gamma$ и $\vec{U}_\gamma$:

$$J = \frac{1}{2}\vec{a}_\gamma \vec{U}^*_\gamma \ ,$$

компоненты которых вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}_\gamma)_1 = y_2 - y_n \ , \quad (\vec{a}_\gamma)_2 = x_n - x_1 \ , \\
&(\vec{a}_\gamma)_{2i-1} = y_{i+1} - y_{i-1} \ , \quad (\vec{a}_\gamma)_{2i} = x_{i-1} - x_{i+1} \ , \quad i = 2, ..., n \ , \\
&\left(\vec{U}_\gamma\right)_{2j-1} = u_1(\vec{x}_j) \ , \quad \left(\vec{U}_\gamma\right)_{2j} = u_2(\vec{x}_j) \ , \quad j = 1, ..., n \ .
\end{aligned}$$

Тогда последнее слагаемое в (10) можно записать в виде

$$J_2 = \frac{1}{4S < \lambda + 2G >}\Big((\lambda_p - \lambda_m)\vec{a}_p\vec{U}^*_p + \lambda_m\vec{a}_m\vec{U}^*_m\Big)^2 \ , \tag{11}$$

где вектор-строки $\vec{U}_p$ и $\vec{U}_m$ — значения перемещений $\vec{u}$ в узлах, расположенных на ∂S_p и ∂S_m, с компонентами

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{U}_p\right)_{2i-1} = u_1(\vec{x}_{k_i}) \ , \quad \left(\vec{U}_p\right)_{2i} = u_2(\vec{x}_{k_i}) \ , \\
&\left(\vec{U}_m\right)_{2j-1} = u_1(\vec{x}_{l_j}) \ , \quad \left(\vec{U}_m\right)_{2j} = u_2(\vec{x}_{l_j}) \ ,
\end{aligned}$$

где k_i $(i = 1, ..., n_p)$, l_j $(j = 1, ..., n_m)$ — номера узлов на ∂S_p и ∂S_m.

Блок матрицы жесткости, соответствующий квадратичной форме (11), получают варьированием только перемещений $\vec{U}_p$, поскольку $\vec{U}_m$ задан. Таким образом,

$$\delta J_2 = \frac{1}{2S < \lambda + 2G >}\Big((\lambda_p - \lambda_m)^2\vec{a}_p\vec{U}^*_p + \lambda_m(\lambda_p - \lambda_m)\vec{a}_m\vec{U}^*_m\Big)\vec{a}_p\delta\vec{U}^*_p \ .$$

Если слагаемые с известными перемещениями $\vec{U}_m$ перенести в правую часть, то этот блок соответствует линейной форме относительно вектора перемещений $\vec{U}_p$

$$\frac{1}{2S < \lambda + 2G >}(\lambda_p - \lambda_m)^2\vec{a}_p\vec{U}^*_p\vec{a}_p\delta\vec{U}^*_p$$

и он есть

$$\frac{(\lambda_p - \lambda_m)^2}{2S < \lambda + 2G >}\vec{a}_p \otimes \vec{a}_p \ .$$

Таким образом, для поиска микронапряжений в ячейке периодичности композиционного материала, на границе которой заданы смещения, будем использовать функционал Лагранжа (10) и равенства (1), задающие связь между микро- и макронапряжениями.

На границе γ ячейки периодичности зададим краевые условия в виде

$$u_1 \Big|_\gamma = c_1x_1 + c_3x_2 \ , \quad u_2 \Big|_\gamma = c_2x_2 \ , \tag{12}$$

где c_1, c_2, c_3 — пока произвольные постоянные. Линейность перемещений на γ обосновывается тем, что в трансверсально-изотропном теле при действии в плоскости изотропии однородных макронапряжений $<\sigma_{11}>, <\sigma_{22}>, <\sigma_{12}>$ перемещения с точностью до трансляции и вращения тела как жесткого целого будут $u_1 =<\varepsilon_{11}> x_1 + 2 <\varepsilon_{12}> x_2$, $u_2 =<\varepsilon_{22}> x_2$. Кроме того, краевые условия (12) гарантируют непрерывность перемещений при переходе от одной ячейки к другой, поскольку

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x} + \vec{\omega}_i) + \mathrm{const}_i, \quad \vec{x} \in \gamma\ , \ \ i = 1, 2.$$

Для того чтобы подобрать константы c_i в (12) так, чтобы решение упругой задачи удовлетворяло условиям осреднения (1), разобьем эту задачу на три задачи со следующими краевыми условиями

$$\begin{array}{lll} \text{задача 1:} & u_1 \big|_\gamma = x_1\ , & u_2 \big|_\gamma = 0\ , \\ \text{задача 2:} & u_1 \big|_\gamma = 0\ , & u_2 \big|_\gamma = x_2\ , \\ \text{задача 3:} & u_1 \big|_\gamma = x_2\ , & u_2 \big|_\gamma = 0\ . \end{array} \tag{13}$$

Обозначим через $\sigma_{ij}^{(k)}$ микронапряжения k-ой упругой задачи ($k = 1, 2, 3$) и воспользуемся тем, что линейная комбинация решений

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} c_k \sigma_{ij}^{(k)}\ , \qquad \sigma_{33} = \sum_{k=1}^{3} c_k \sigma_{33}^{(k)}\ , \quad i, j = 1, 2 \tag{14}$$

будет решением задачи с краевыми условиями (12). Тогда из условий осреднения (1) интегрированием соотношений (14) получим систему трех уравнений для определения констант c_k:

$$\sum_{k=1}^{3} c_k \frac{1}{S} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(k)} dS =<\sigma_{ij}>\ , \qquad i, j = 1, 2. \tag{15}$$

Заметим, что условие осреднения для σ_{33} выполнено, поскольку функционал (10) строился так, что

$$\int\limits_S \sigma_{33}^{(k)} dS = 0.$$

Введем обозначения

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3), \quad <\vec{\sigma}> = (<\sigma_{11}>, <\sigma_{22}>, <\sigma_{12}>), \quad \vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}),$$

и пусть A — матрица коэффициентов системы (15):

$$A = \begin{bmatrix} <\sigma_{11}^{(1)}> & <\sigma_{22}^{(1)}> & <\sigma_{12}^{(1)}> \\ <\sigma_{11}^{(2)}> & <\sigma_{22}^{(2)}> & <\sigma_{12}^{(2)}> \\ <\sigma_{11}^{(3)}> & <\sigma_{22}^{(3)}> & <\sigma_{12}^{(3)}> \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad <\sigma_{ij}^{(k)}>= \frac{1}{S} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(k)} dS\ .$$

Тогда решение системы (15) можно записать в виде

$$\vec{c} = <\vec{\sigma}> A^{-1}.$$

После нахождения вектора $\vec{c}$ линейная комбинация (14) может быть представлена в форме

$$\vec{\sigma} = <\vec{\sigma}>A^{-1}B\ , \quad \text{где} \quad B = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)} & \sigma_{22}^{(1)} & \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{33}^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{22}^{(2)} & \sigma_{12}^{(2)} & \sigma_{33}^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(3)} & \sigma_{22}^{(3)} & \sigma_{12}^{(3)} & \sigma_{33}^{(3)} \end{bmatrix} . \tag{16}$$

Таким образом, полученная зависимость (16) выражает вектор микронапряжений $\vec{\sigma}$ через заданные макронапряжения $<\vec{\sigma}>$.

Наиболее интересными являются поверхности текучести КМ в пространстве главных напряжений $<\sigma_{11}>$, $<\sigma_{22}>$, $<\sigma_{33}>$. Однако связь (16) не отражает зависимости микронапряжений $\vec{\sigma}$ от макронапряжения $<\sigma_{33}>$. Для получения такой зависимости необходимо решить упругую задачу, когда в КМ действует только $<\sigma_{33}>$. Можно показать [8], что если в КМ реализуется это макронапряженное состояние, то все микронапряжения, отличные от σ_{33}, равны или близки к нулю, а микронапряжение σ_{33} постоянно в пределах каждой фазы и связано с $<\sigma_{33}>$ правилом смеси; деформация ε_{33} постоянна во всех КМ, все остальные деформации или нулевые, или близкие к нулевым.

Из-за малости всех деформаций по сравнению с ε_{33} отличие $\sigma_{33}(\vec{x})$ от $E(\vec{x})\varepsilon_{33}$ весьма незначительно, тогда с большой степенью точности можно положить $\sigma_{33}(\vec{x}) = E(\vec{x})\varepsilon_{33}$, и из правила смеси получим

$$\varepsilon_{33} = \frac{<\sigma_{33}>}{<E>}\ , \quad \text{где} \quad <E>= (1-c)E_m + cE_p\ ,$$

откуда следует зависимость σ_{33} от $<\sigma_{33}>$:

$$\sigma_{33}(\vec{x}) = \frac{E(\vec{x})}{<E>} <\sigma_{33}>\ . \tag{17}$$

Таким образом, суммируя решение (17) при равных нулю других напряжениях с решением (16), получим искомую связь микронапряжений $\vec{\sigma}$ с макронапряжениями $<\sigma_{11}>$, $<\sigma_{22}>$, $<\sigma_{12}>$, $<\sigma_{33}>$, которую можно записать в матричном виде

$$\vec{\sigma} = <\vec{\sigma}>M\ , \tag{18}$$

если к вектору $<\vec{\sigma}>$ добавить четвертую компоненту $<\sigma_{33}>$, а к матрице $A^{-1}B$, имеющей размеры 3×4 — четвертую строку

$$M = \begin{bmatrix} A^{-1}B & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E(\vec{x})}{<E>} \end{bmatrix} ,$$

$$<\vec{\sigma}> = (<\sigma_{11}>, <\sigma_{22}>, <\sigma_{12}>, <\sigma_{33}>)\ .$$

В дальнейших расчетах матрицу M получали методом конечных элементов через решение трех упругих задач с краевыми условиями (13) и функционалом (10), при этом возникающие системы линейных алгебраических уравнений решались методом сопряженных градиентов.

Построим в пространстве главных напряжений $<\sigma_{11}>, <\sigma_{22}>$, $<\sigma_{33}>$ поверхность текучести, основываясь на методике расчета таких поверхностей, предложенной в работах

[7, 8]. Для этого с помощью алгоритма триангуляции, предложенного в работе [9], разобьем ячейку периодичности, представленную на рис. 3, на треугольные элементы, построим матрицу M и, задав однопараметрический закон нагружения $<\vec{\sigma}> = t\vec{k}, \quad |\vec{k}| = 1$ при $< \sigma_{12} >= 0$, вычислим микронапряжения σ_{ij} на каждом элементе. По условию наступления пластичности вычислим для каждого элемента критическое значение параметра t, при котором элемент переходит в пластичность, и затем из всех этих значений выберем минимальное значение t_*, которое и будет являться критическим для всего композиционного материала в направлении нагружения $\vec{k}$.

Для сравнения с ранее полученными результатами был взят КМ алюминиевая матрица — борные волокна с упругими характеристиками составляющих фаз $E_m = 7200$ кгс/мм^2, $E_p = 42180$ кгс/мм^2, $\nu_m = \nu_p = 0,3$, прочностями $\sigma_m = 7$ кгс/мм^2, $\sigma_p = 351,2$ кгс/мм^2 и концентрацией волокон $c = 0.3$. Расчеты поверхности текучести проводились на ячейке периодичности, разбитой на 6340 элементов и имеющей 3227 узлов. Результаты триангуляции показаны на рис. 5.

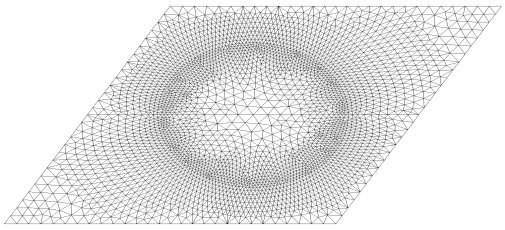

Рис. 5.

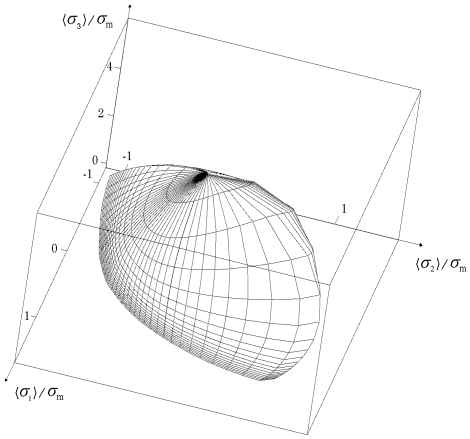

Рис. 6.

Полученная поверхность текучести представлена на рис. 6 и близка к поверхности, вычисленной по МКЦ. Было проведено сравнение их сечений плоскостями $< \sigma_{33} >= \text{const}$, при этом наибольшее отличие наблюдалось при $< \sigma_{33} >= 0$. Эти два сечения изображены на рис. 7, где Γ_2 — сечение поверхности, полученной в результате расчетов по МКЦ, Γ_1 — по предложенной модели.

Сравнение поверхностей текучести и наиболее отличающихся сечений этих поверхностей показывает, что результаты расчетов текучести композиционного материала, полученные по МКЦ, надежны, поскольку они практически совпадают с результатами, полученными по двоякопериодической модели композиционного материала.

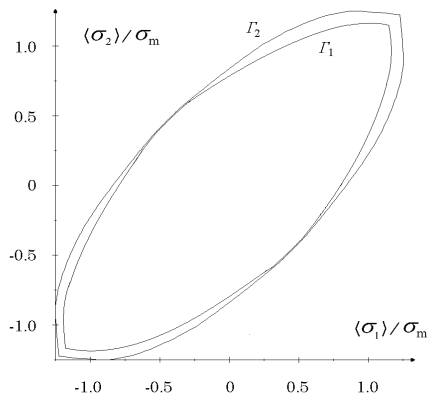

Рис. 7.

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН №40.

Список литературы

[1] Г.А.Ванин, Микромеханика композиционных материалов, Киев, Наукова думка, 1985.

[2] Б.Розен, Э.Фридман, Механика армированных материалов, *Монокристальные волокна и армированные ими материалы,* М., Мир, 1973, 184-219.

[3] Т.Д.Шермергор, Теория упругости микронеоднородных сред, М., Наука, 1977.

[4] Ж.-П.Обэн, Приближенное решение эллиптических краевых задач, М., Мир, 1977.

[5] К.Ректорис, Вариационные методы в математической физике и технике, М., Мир, 1985.

[6] С.Г.Михлин, Курс математической физики, М., Наука, 1968.

[7] Ю.В.Немировский, С.Ф.Пятаев, Прочность и жесткость композиционных материалов волокнистой структуры с учетом переходной зоны, Тр. международ. научно-техн. конф. "Проблемы обеспечения качества изделий в машиностроении", Красноярск, 1994, 345-353.

[8] Ю.В.Немировский, С.Ф.Пятаев, Определение предельного упругого сопротивления композитов при сложном напряженном состоянии, *Проблемы прочности и пластичности*, Нижний Новгород, 2000, 5-18.

[9] Ю.В.Немировский, С.Ф.Пятаев, Автоматизированная триангуляция многосвязных областей со сгущением и разрежением узлов, *Вычислительные технологии*, **5**(2000), №2, 82-91.

Fluidity Surface of Doubly Periodic Fibrous Composite Material

Yury V.Nemirovskii
Sergey F.Pyataev

Construction method of fluidity surface of doubly periodic fibrous composite material is proposed. This method is based on laws of strain averaging and displacement continuity on boundaries between representative elements.

Keywords: fluidity surface, composite material.