

УДК 532.61.096

# ДВУМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ\*

**В. К. Андреев, Е.Н. Лемешкова**

*660036, Красноярск, Академгородок 50/44, Институт вычислительного моделирования СО РАН*

e-mail: [andr@icm.krasn.ru](mailto:andr@icm.krasn.ru), [elena\\_cher@icm.krasn.ru](mailto:elena_cher@icm.krasn.ru)

Поступила в редакцию

Изучается задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале с твёрдыми стенками на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела учитывается изменение межфазной энергии. Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая сопряжённая краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет три различных решения. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Для каждого из решений построены характерные структуры течения.

*Ключевые слова:* граница раздела, термокапиллярность, обратная задача, тау-метод.

---

\*Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ №17-01-00229

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании, вообще говоря, нестационарного движения жидких сред с поверхностью раздела  $\Gamma$  в неоднородном поле температур разность потоков тепла на ней, в общем случае, не равна нулю [1], [2]

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = \varkappa \theta \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} + \omega(\theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma} \theta), \quad (1.1)$$

где  $\varkappa = -\partial \sigma / \partial \theta$ ,  $\omega = \partial(\sigma(\theta) + \varkappa(\theta)) / \partial \theta$ ,  $\sigma(\theta)$  — коэффициент поверхностного натяжения. В равенстве (1.1)  $k_j$ ,  $\theta_j$  — коэффициенты теплопроводностей и температуры жидкостей,  $j = 1, 2$ ;  $\theta = \theta_1 = \theta_2$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$  — общие значения температур и векторов скоростей на поверхности раздела  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $\Gamma$ , направленная во вторую жидкость. Для многих жидких сред  $\sigma(\theta)$  хорошо аппроксимируется линейной функцией

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 - \varkappa(\theta - \theta_0) \quad (1.2)$$

с положительными постоянными  $\sigma_0$ ,  $\varkappa$ ,  $\theta_0$ . В этом случае энергетическое равенство (1.1) упрощается

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = \varkappa \theta \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}. \quad (1.3)$$

Порядок отношения правой части равенства (1.3) к первому члену левой её части оценивается параметром  $E = \varkappa \theta^* / \mu_2 k_2$  (для второго надо положить  $\mu_1 k_1$ ,  $\mu_j$  — динамические вязкости), определяющим влияние межфазной энергии на динамику движения жидкостей внутри слоёв;  $\theta^*$  — характерная температура на границе раздела. Эти параметры для обычных жидкостей при комнатной температуре малы [2] — [4]. Так, в экспериментах в системе воздух — этиловый спирт при  $\theta^* = 15^\circ C$  имеем  $E \sim 5 \cdot 10^{-4}$ . Поэтому часто правую часть в (1.1) опускают и говорят о равенствах потока тепла через границу раздела. Однако для маловязких жидкостей эти слагаемые надо учитывать. Расчёты [4], проведённые для движения пузырьков в различных жидкостях, показали, что значение  $E = O(1)$  дости-

гаются при достаточно высоких температурах — вязкость быстро уменьшается с ростом температуры. Кроме того, этот факт имеет место и для некоторых криогенных жидкостей, например для жидкого  $CO_2$ . Максимальные значения  $E$  достигаются вблизи критических точек. Так для воды  $E \sim 0.02$  при  $\theta = 303.15K$ ;  $E \sim 0.6$  при  $\theta = 573.15K$ ;  $E \sim 0.7$  при  $\theta = 623.15K$  (критическая точка для воды  $\theta_{кр} = 647.30K$ ).

В книге [2] на простых примерах двухслойных систем, когда основное состояние либо покой, либо однонаправленное стационарное течение показано влияние теплоты, поглощаемой или выделяющейся при локальных изменениях площади межфазной поверхности, на формирование напряжений Марангони и слаболинейных волновых режимов на границе раздела жидкостей, вязкость которых достаточно мала. В [5] изучено влияние изменения межфазной поверхностной энергии на характер и тип неустойчивостей основного однонаправленного течения, когда для возмущений использовано условие (1.3). Показано, что существенное отличие от классического случая (правая часть в (1.3) равна нулю) в поведении возмущений наблюдается в области коротких волн. Именно, в задаче с полным условием кризис течения вызывается тепловой колебательной модой и сопровождается формированием поперечных бегущих волн, которые распространяются в противоположном основному течению направлении. В задаче с классическим условием неустойчивость проявляется в виде поперечных стоячих волн. Учёт дополнительного слагаемого в энергетическом условии позволил получить результат, качественно совпадающий с экспериментальными данными для системы FC-72 – азот.

В задачах упомянутых выше основное стационарное двухслойное течение не зависело от изменения межфазной энергии. В настоящей работе исследуется такая зависимость для двумерного двухслойного стационарного течения с полем скоростей типа Хименца.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоское двухслойное стационарное течение вязких теплопроводных жидкостей в слоях, ограниченных твёрдыми стенками  $y = 0$ ,  $y = h$  с общей поверхностью раздела  $y = l < h$  в отсутствие массовых сил.

Межфазная поверхность предполагается плоской, для этого достаточно потребовать, чтобы капиллярное число  $Ca = \mu_1 \chi_1 / \sigma_0 l \ll 1$  [6],  $\chi$  — коэффициент температуропроводности. Поле скоростей и температур системы уравнений вязкой теплопроводной жидкости в слоях ищется в виде

$$\begin{aligned} u_j^1(x, y) &= w_j(y)x, & u_j^2(x, y) &= v_j(y), \\ \theta_j(x, y) &= a_j(y)x^2 + b_j(y), \end{aligned} \quad (2.1)$$

причём  $0 < y < l$  при  $j = 1$ ,  $l < y < h$  при  $j = 2$  и  $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} = w_1(l)$ . Такое представление поля скоростей соответствует известному решению Хименца [7]. Подстановка (2.1) в уравнения движения и переноса тепла и их анализ на совместность приводит к следующим следствиям: функции  $w_j(y)$ ,  $v_j(y)$ ,  $a_j(y)$  и  $b_j(y)$  есть решения нелинейных систем уравнений

$$\begin{aligned} v_j w_{jy} + w_j^2 &= \nu_j w_{jyy} + f_j, & w_j + v_{jy} &= 0, \\ 2w_j a_j + v_j a_{jy} &= \chi_j a_{jyy}, \\ v_j b_{jy} &= \chi_j b_{jyy} + 2\chi_j a_j, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\nu_j$  — кинематические вязкости,  $\rho_j = \mu_j / \nu_j$  — плотности,  $f_j$  — постоянные. Давления в жидкостях распределены по законам

$$\frac{1}{\rho_j} p(x, y) = \nu_j v_{jy} - \frac{v_j^2}{2} - f_j \frac{x^2}{2} + d_{0j}, \quad d_{0j} = \text{const}, \quad (2.3)$$

так что значения  $f_j$  характеризуют градиенты давлений вдоль оси  $x$ .

Будем считать, что на твёрдой стенке  $y = 0$  (подложке) задано распределение температуры  $\theta_1(x, 0) = a_{10}x^2 + b_{10}$  с постоянными  $a_{10}$ ,  $b_{10}$ . При  $a_{10} > 0$  температура имеет в точке  $x = 0$  минимальное значение, а при  $a_{10} < 0$  — максимальное. Верхняя стенка теплоизолирована:  $\theta_{2y}(x, h) = 0$ . Таким образом, на твёрдых стенках для искомым функций

заданы условия

$$\begin{aligned} w_1(0) = v_1(0) = 0, \quad a_1(0) = a_{10}, \quad b_1(0) = b_{10}, \\ w_2(h) = v_2(h) = 0, \quad a_{2y}(h) = b_{2y}(h) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

На границе раздела  $y = l$  выполнены соотношения

$$\begin{aligned} w_1(l) = w_2(l), \quad v_1(l) = v_2(l) = 0, \quad a_1(l) = a_2(l), \quad b_1(l) = b_2(l), \\ \mu_2 w_{2y}(l) - \mu_1 w_{1y}(l) = -2\alpha a_1(l), \\ k_2 a_{2y}(l) - k_1 a_{1y}(l) = \alpha a_1(l) w_1(l), \\ k_2 b_{2y}(l) - k_1 b_{1y}(l) = \alpha b_1(l) w_1(l). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первые четыре условия в (2.5) есть следствия непрерывности поля скоростей и температур на границе раздела, а пятое — динамическое условие. Последние два условия получены с учётом зависимости коэффициента поверхностного натяжения (1.2) и соотношения (1.3).

**Замечание 1.** *Поставленная задача является обратной, поскольку наряду с функциями  $w_j, v_j, a_j, b_j$  постоянные  $f_j$  (градиенты давлений вдоль слоёв) также неизвестны. Сами давления по известным  $v_j$  и  $f_j$  определяются по формулам (2.3).*

Исключим вертикальные скорости  $v_j(y)$  из уравнений неразрывности с учётом условий прилипания на стенках (2.4)

$$v_1(y) = - \int_0^y w_1(z) dz, \quad 0 \leq y \leq l; \quad v_2(y) = - \int_y^h w_2(z) dz, \quad l \leq y \leq h. \quad (2.6)$$

Тогда основной будет следующая обратная сопряжённая краевая задача

$$\begin{aligned}
\nu_1 w_{1yy} &= w_1^2 - f_1 - w_{1y} \int_0^y w_1(z) dz, \\
\chi_1 a_{1yy} &= 2a_1 w_1 - a_{1y} \int_0^y w_1(z) dz, \quad 0 < y < l, \\
\nu_2 w_{2yy} &= w_2^2 - f_2 - w_{2y} \int_y^h w_2(z) dz, \\
\chi_2 a_{2yy} &= 2a_2 w_2 - a_{2y} \int_y^h w_2(z) dz, \quad l < y < h.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Граничные условия для неё следуют из (2.4), (2.5) и представлений (2.6)

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= 0, \quad a_1(0) = a_{10}, \quad w_2(h) = 0, \quad a_{2y}(h) = 0, \\
\int_0^l w_1(z) dz &= 0, \quad \int_l^h w_2(z) dz = 0, \\
\mu_2 w_{2y}(l) - \mu_1 w_{1y}(l) &= -2\alpha a_1(l), \quad w_1(l) = w_2(l), \\
a_1(l) &= a_2(l), \quad k_2 a_{2y}(l) - k_1 a_{1y}(l) = \alpha a_1(l) w_1(l).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Задача для функций  $b_j(y)$  отделяется и они находятся после решения задачи (2.7), (2.8) и не влияют на поле скоростей в слоях.

Введём безразмерные функции и параметры

$$\begin{aligned}
W_j(\xi) &= \frac{h^2}{M\chi_1} w_j(y), \quad A_j(\xi) = \frac{a_j(y)}{a_{10}}, \quad F_j = \frac{h^4}{M\chi_1^2} f_j, \quad \xi = \frac{y}{h}, \quad P_j = \frac{\nu_j}{\chi_j}, \\
M &= \frac{\alpha a_{10} h^3}{\chi_1 \mu_2}, \quad E = \frac{\alpha^2 a_{10} h^2}{\mu_2 k_2},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где  $P_j$  — числа Прандтля,  $M$  — число Марангони,  $\theta^* = |a_{10}|h^2$  — характерная температура, так что  $M$ ,  $E$  могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Тогда в

безразмерных переменных нелинейная сопряжённая краевая задача примет вид

$$\begin{aligned} W_{1\xi\xi} &= \frac{M}{P_1} \left[ W_1^2 - W_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z) dz \right] - \frac{F_1}{P_1}, \\ A_{1\xi\xi} &= M \left[ 2A_1W_1 - A_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z) dz \right], \quad 0 < \xi < \gamma, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} W_{2\xi\xi} &= \frac{\chi M}{P_2} \left[ W_2^2 - W_{2\xi} \int_1^\xi W_2(z) dz \right] - \frac{\chi F_2}{P_2}, \\ A_{2\xi\xi} &= \chi M \left[ 2A_2W_2 - A_{2\xi} \int_1^\xi W_2(z) dz \right], \quad \gamma < \xi < 1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$W_1(0) = 0, \quad W_2(1) = 0, \quad A_1(0) = 1, \quad A_{2\xi}(1) = 0, \quad (2.12)$$

$$W_1(\gamma) = W_2(\gamma), \quad A_1(\gamma) = A_2(\gamma), \quad (2.13)$$

$$W_{2\xi}(\gamma) - \mu W_{1\xi}(\gamma) = -2A_1(\gamma), \quad (2.14)$$

$$A_{2\xi}(\gamma) - kA_{1\xi}(\gamma) = EA_1(\gamma)W_1(\gamma), \quad (2.15)$$

где  $\gamma = l/h < 1$ ,  $\mu = \mu_1/\mu_2$ ,  $\chi = \chi_1/\chi_2$ ,  $k = k_1/k_2$ . К граничным условиям (2.12) – (2.15) необходимо добавить интегральные условия переопределения

$$\int_0^\gamma W_1(z) dz = 0, \quad \int_\gamma^1 W_2(z) dz = 0, \quad (2.16)$$

которые позволяют найти неизвестные постоянные (градиенты давлений вдоль слоёв)  $F_j$ ,  $j = 1, 2$ .

### 3. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ – ПОЛЗУЩИЕ ТЕЧЕНИЯ

Предположим, что  $|M| \ll 1$  и ищем решение задачи (2.10) – (2.16) в виде  $W_j = W_j^0 + MW_j^1 + \dots$ ,  $F_j = F_j^0 + MF_j^1 + \dots$ ,  $A_j = A_j^0 + MA_j^1 + \dots$ , тогда решение для нулевого

приближения имеет вид [8]

$$\begin{aligned} W_1^0(\xi) &= \frac{\nu(1-\gamma)^2}{6\gamma^2 P_1} F_2^0(-3\xi^2 + 2\gamma\xi), \\ A_1^0(\xi) &= 1 + C_1\xi, \quad 0 \leq \xi \leq \gamma, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} W_2^0(\xi) &= \frac{\chi F_2^0}{6P_2} (-3\xi^2 + 2(\gamma+2)\xi - 1 - 2\gamma), \\ A_2^0(\xi) &= 1 + \gamma C_1 \equiv C_2, \quad \gamma \leq \xi \leq 1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

причём

$$F_1^0 = \frac{\nu(1-\gamma)^2}{\gamma} F_2^0, \quad F_2^0 = \frac{3\gamma P_1 C_2}{\nu(\gamma-1)(\gamma+\mu(1-\gamma))}, \quad (3.3)$$

и  $C_2$  есть решение квадратного уравнения

$$\frac{\gamma^2(1-\gamma)EC_2^2}{2k(\gamma+\mu(1-\gamma))} + C_2 - 1 = 0 \quad (3.4)$$

с дискриминантом

$$D = 1 + \frac{2\gamma^2(1-\gamma)E}{k[\gamma+\mu(1-\gamma)]}.$$

Поэтому при

$$E > -\frac{k[\gamma+\mu(1-\gamma)]}{2\gamma^2(1-\gamma)} = E^*$$

имеется два решения (для  $a_{10} > 0$  это всегда так), при  $E = E^*$  — одно, а при  $E < E^*$  решений нет. Последние два случая реализуются только для  $a_{10} < 0$ , когда температура на нижней стенке имеет максимум в точке  $x = 0$ . Выражения для безразмерных вертикальных скоростей определяются по формуле (2.6) и будут иметь вид

$$\begin{aligned} V_1^0(\xi) &= \frac{\nu(1-\gamma)^2}{6\gamma^2 P_1} F_2^0(\xi^3 - \gamma\xi^2), \quad 0 \leq \xi \leq \gamma, \\ V_2^0(\xi) &= \frac{\chi F_2^0}{6P_2} (\xi^3 - (\gamma+2)\xi^2 + (1+2\gamma)\xi - \gamma), \quad \gamma \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Замечание 2.** Простые вычисления показывают, что при  $E = 0$  единственное



решение задачи (1.10) – (1.16), при малых числах Марангони, таково

$$\begin{aligned}
W_1^0(\xi) &= -\frac{(\gamma-1)}{2\delta\gamma} (3\xi^2 - 2\gamma\xi), \quad A_1^0(\xi) = 1, \quad 0 \leq \xi \leq \gamma, \\
W_2^0(\xi) &= -\frac{\gamma}{2\delta(\gamma-1)} (3\xi^2 - 2(\gamma+2)\xi + 2\gamma + 1), \quad A_2^0(\xi) = 1, \quad \gamma \leq \xi \leq 1, \\
F_1^0 &= \frac{3(\gamma-1)P_1}{\gamma\delta}, \quad F_2^0 = \frac{3P_2\gamma}{\chi\delta(\gamma-1)}, \quad \delta = \gamma - \mu(\gamma-1).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Полученное решение существенно отличается от решения (3.1) – (3.4).

#### 4. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Для решения общей нелинейной задачи (2.10) – (2.16) применяется тау-метод, являющийся модификацией метода Галёркина [9]. Произведём замену переменных:  $\xi' = \xi/\gamma$  для  $j = 1$  и  $\xi' = (1 - \xi)/(1 - \gamma)$  для  $j = 2$ . Тогда задача (2.10) – (2.16) переписется в виде (штрихи опущены)

$$\begin{aligned}
L_1(W_1, F_1) &\equiv W_{1\xi\xi} - \frac{\gamma^2 M}{P_1} \left[ W_1^2 - W_{1\xi} \int_0^{\gamma\xi} W_1(z) dz \right] - \frac{\gamma^2 F_1}{P_1} = 0, \\
N_1(W_1, A_1) &\equiv A_{1\xi\xi} - \gamma^2 M \left[ 2A_1 W_1 - A_{1\xi} \int_0^{\gamma\xi} W_1(z) dz \right] = 0, \quad 0 < \xi < 1,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
L_2(W_2, F_2) &\equiv W_{2\xi\xi} - \frac{\chi(1-\gamma)^2 M}{P_2} \left[ W_2^2 - W_{2\xi} \int_0^{1-(1-\gamma)\xi} W_2(z) dz \right] - \frac{\chi(1-\gamma)^2 F_2}{P_2} = 0, \\
N_2(W_2, A_2) &\equiv A_{2\xi\xi} - \chi(1-\gamma)^2 M \left[ 2A_2 W_2 - A_{2\xi} \int_0^{1-(1-\gamma)\xi} W_2(z) dz \right] = 0, \quad 0 < \xi < 1,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$W_1(0) = W_2(0) = 0, \quad A_1(0) = 1, \quad A_{2\xi}(0) = 0, \tag{4.3}$$

$$W_1(1) = W_2(1), \quad A_1(1) = A_2(1), \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{1-\gamma} W_{2\xi}(1) + \frac{\mu}{\gamma} W_{1\xi}(1) = 2A_1(1), \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{1-\gamma} A_{2\xi}(1) + \frac{k}{\gamma} A_{1\xi}(1) = -EA_1(1)W_1(1), \tag{4.6}$$

$$\int_0^1 W_1(z) dz = 0, \quad \int_0^1 W_2(z) dz = 0, \quad (4.7)$$

Приближённое решение задачи (4.1) – (4.7) ищется в виде сумм

$$W_{jn}(\xi) = \sum_{k=1}^n W_j^k R_k(\xi), \quad A_{jn}(\xi) = \sum_{k=0}^n A_j^k R_k(\xi), \quad (4.8)$$

где  $R_k(z) = P_k(2z - 1)$  — смещённые полиномы Лежандра,  $z \in [0, 1]$ ,  $P_k(z)$  — обычные полиномы Лежандра. В общем виде  $R_k(z)$  определяются следующим образом [10]

$$R_k(z) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} [(z^2 - z)^k].$$

Из интегральных условий (3.7), учитывая ортогональность полиномов Лежандра  $R_k(z)$  на отрезке  $[0, 1]$  [10]

$$\int_0^1 R_k(z) R_m(z) dz = \delta_{km} h_m, \quad h_m = \frac{1}{2m + 1}, \quad \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

получим  $W_1^0 = W_2^0 = 0$ . Остальные коэффициенты  $W_j^k$ ,  $A_j^k$  и постоянные  $F_1$ ,  $F_2$  находятся из системы галёркинских приближений

$$\int_0^1 L_j(W_{jn}, F_j) R_m(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 N_j(W_{jn}, A_{jn}) R_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 0, \dots, n - 2, \quad j = 1, 2 \quad (4.9)$$

и преобразованных граничных условий (4.3) – (4.6)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (-1)^k W_1^k &= 0, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k W_2^k = 0, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k A_1^k = 1, \quad \sum_{k=0}^n A_2^k R'_k(0) = 0, \\
\sum_{k=1}^n W_1^k &= \sum_{k=1}^n W_2^k, \quad \sum_{k=0}^n A_1^k = \sum_{k=0}^n A_2^k, \\
\frac{1}{1-\gamma} \sum_{k=1}^n W_2^k R'_k(1) + \frac{\mu}{\gamma} \sum_{k=1}^n W_1^k R'_k(1) &= 2 \sum_{k=0}^n A_1^k, \\
\frac{1}{1-\gamma} \sum_{k=0}^n A_2^k R'_k(1) + \frac{k}{\gamma} \sum_{k=0}^n A_1^k R'_k(1) &= -E \sum_{k=0}^n A_1^k \sum_{k=1}^n W_1^k.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

При выводе системы (4.10) было учтено, что  $R_k(1) = 1$ ,  $R_k(0) = (-1)^k$ . Таким образом уравнения (4.9), (4.10) образуют замкнутую систему алгебраических нелинейных уравнений на коэффициенты  $W_j^k$ ,  $A_j^k$  и постоянные  $F_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Расчёты проводились для следующих значений определяющих параметров, соответствующих системе вода ( $j = 1$ ) – водяной пар ( $j = 2$ ) на линии насыщения при температуре  $300^\circ\text{C}$ :  $\rho_1 = 712 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 46.8 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu_1 = 1.3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\nu_2 = 4.2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\chi_1 = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\chi_2 = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $k_1 = 0.54 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  $k_2 = 0.0719 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  $\varkappa = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  $P_1 = 0.96$ ,  $P_2 = 1.69$ ,  $E = 0.6$ ,  $M = 16.5$ ,  $h = 1 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ,  $l = 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$  и  $n = 15$ . Было получено три различных значения безразмерных постоянных  $F_1, F_2$ :  $\{F_1^1 = -16.4524, F_2^1 = -55.8561\}$ ,  $\{F_1^2 = 399.756, F_2^2 = 1256.7683\}$  и  $\{F_1^3 = -1137.0024, F_2^3 = -5820.4456\}$  (верхний индекс означает номер решения). При этом разность значений полученных при  $n = 15$  и  $n = 16$  составляет порядка  $10^{-20}$ ,  $10^{-12}$  и  $10^{-7}$  для  $F^1$ ,  $F^2$  и  $F^3$  соответственно, что

Фиг 1

говорит о хорошей сходимости  $\tau$  – метода при решении данной краевой задачи. На фиг.1 приведены профили безразмерных функций  $W_j(\xi)$  и поперечных скоростей  $V_j(\xi)$  для значений  $F^1$  и  $F^2$ , соответственно. Здесь и далее функции  $W(\xi)$  и  $V(\xi)$  совпадают с функциями  $W_j(\xi)$  и  $V_j(\xi)$ ,  $j = 1, 2$ , соответственно, на своих областях определения. Для  $F^3$  профили  $W(\xi)$  и  $V(\xi)$  качественно совпадают с профилями как при  $F^1$ . Однако, стоит отметить, что течение, отвечающее  $F^3$ , является более интенсивным, так  $\max_{\xi \in [0,1]} |V(\xi, F^3)| = 6.023$ ,  $\max_{\xi \in [0,1]} |W(\xi, F^3)| = 99.895$ , а  $\max_{\xi \in [0,1]} |V(\xi, F^1)| = 0.053$ ,  $\max_{\xi \in [0,1]} |W(\xi, F^1)| = 0.718$ .

Фиг 2

На фиг.2 изображена зависимость безразмерных постоянных  $F_j^1$  и  $F_j^2$ ,  $j = 1, 2$  от

числа Марангони  $M$ . Видно, что с ростом  $M$  значения безразмерных постоянных увеличиваются по модулю. Стоит также отметить, что с уменьшением числа Марангони полученные решения  $F_1^1, F_2^1$  и  $F_1^2, F_2^2$  стремятся к решениям модельной задачи  $F_1^{01} = -0.001036$ ,  $F_2^{01} = -0.003505$  и  $F_1^{02} = 0.57784$ ,  $F_2^{02} = 1.95525$ , соответственно (см. (3.3)), так, при  $M = 0.001$ , получим  $|F_j^{01} - F_j^1| \approx 10^{-9}$  и  $|F_j^{02} - F_j^2| \approx 10^{-3}$ ,  $j = 1, 2$ .

Фиг 3,4

На фиг. 3, 4 изображена зависимость безразмерных постоянных  $F_1^1$  и  $F_1^2$  от чисел Прандтля  $(P_1, P_2)$ . Видно, что с ростом  $P_1$  значения  $F_1^1$  и  $F_1^2$  увеличиваются по модулю, а с ростом  $P_2$  значение  $F_1^1$  увеличивается, а  $F_1^2$  — уменьшается. Зависимость безразмерных постоянных  $F_2^1$  и  $F_2^2$  от  $P_1, P_2$  аналогична  $F_1^1$  и  $F_1^2$ , соответственно.

Фиг 5

На фиг. 5 изображены профили безразмерной функции  $W(\xi)$  и поперечной скорости  $V(\xi)$  для  $F^1$  в зависимости от безразмерного параметра  $E$ . Случай, когда  $E, M < 0$ , означает, что  $a_{10} < 0$  и температура в точке  $x = 0, y = 0$  максимальна.

Для случая, когда  $E = 0$  было получено два различных значения безразмерных постоянных  $F_1, F_2$ :  $\{F_1^1 = -16.44687, F_2^1 = -55.91119\}$  и  $\{F_1^2 = 414.4302, F_2^2 = 1299.6786\}$ . Напомним, что при  $E = 0$  имеется только однорешение краевой задачи, описывающее ползущее течение, см. формулы (3.6). Стоит также отметить, что с уменьшением числа Марангони полученное решение  $F_1^1, F_2^1$  стремится к единственному решению модельной задачи (3.6)  $F_1^0 = -0.001037$ ,  $F_2^0 = -0.003511$ , так при  $M = 0.001$  имеем  $|F_j^0 - F_j^1| \approx 10^{-9}$ ,  $j = 1, 2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andreev V. K. [et al.]* Mathematical Models of Convection. Berlin/Boston : Walter de Gruyter GmbH and CO KG, 2012.
2. *Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А.* Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Harper J. F.* The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. P. 361-366.
4. *Torres F. E.* Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles // Phys. Fluids A. 1993. V. 5. № 3. P. 537-549.
5. *Bekezhanova V. B., Kabov O. A.* Influence of internal variations of the interface on the stability of film flow // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2016. 4(2-3). P. 133-156.
6. *Зейтунян Р. Х.* Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони // УФН. 1998. Т. 168. № 3. С. 259-286.
7. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // Dinglers Polytech. J. 1911. V. 326. P. 321-440.
8. *Андреев В. К.* Свойства решений сопряженной нелинейной краевой задачи, описывающей стационарное течение двух жидкостей в канале // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2018. Материалы научной конференции. 9-13 апреля 2018 г. - СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена. 2018. - 288 с.
9. *Fletcher C.A.J.* Computational Galerkin method. Springer-Verlag. 1984.
10. *Szego, Gabor.* Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 23. Revised ed. American Mathematical Society. Providence. R.I. 1959. 421 p.

Подписи к ФИГУРАМ ст. Андреева Виктора Константиновича, Лемешковой Елены Николаевны

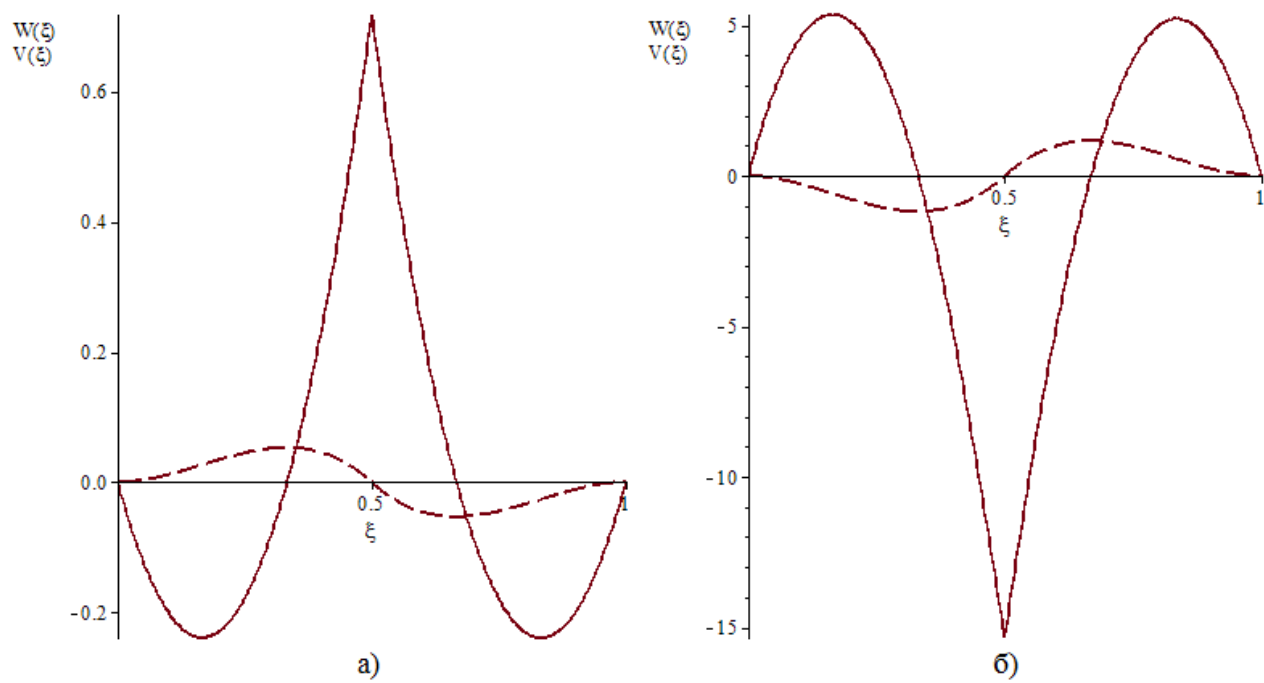
Фиг.1. Профили безразмерной функции  $W(\xi)$  (—) и поперечной скорости  $V(\xi)$  (---) для  $F^1$  (а) и  $F^2$  (б)

Фиг.2. Зависимость безразмерных постоянных  $F^1$  (а) и  $F^2$  (б) от числа Марангони:  
1 —  $F_1^1, F_1^2$ ; 2 —  $F_2^1, F_2^2$

Фиг.3. Зависимость безразмерных постоянных  $F_1^1$  (а) и  $F_1^2$  (б) от числа Прандтля ( $P_1$ )

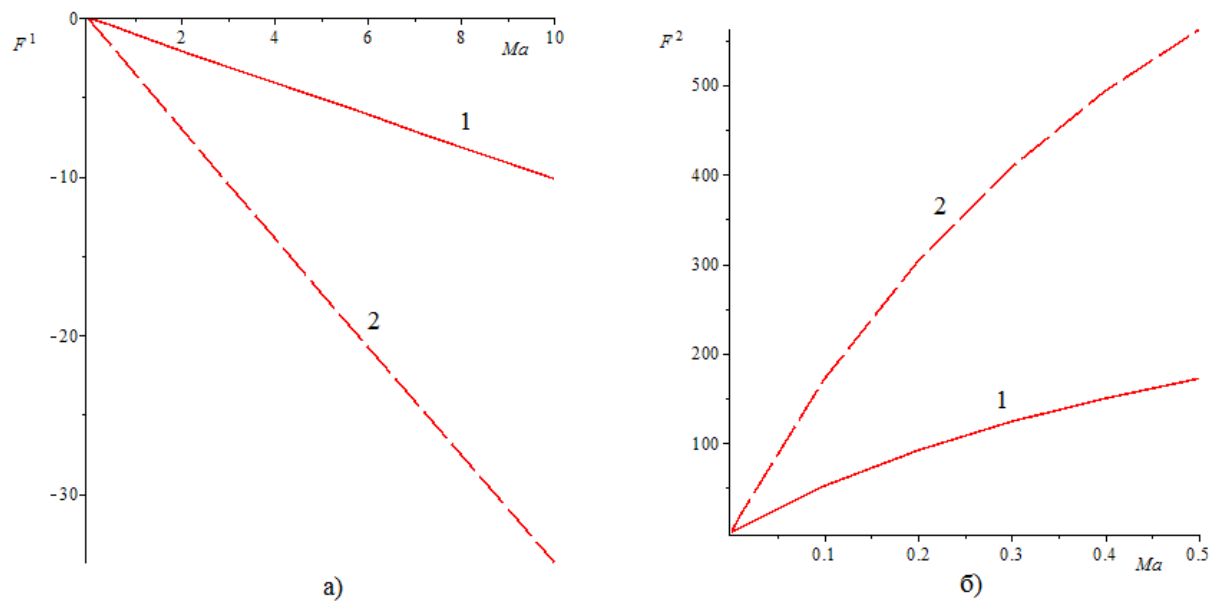
Фиг.4. Зависимость безразмерных постоянных  $F_2^1$  (а) и  $F_2^2$  (б) от числа Прандтля ( $P_2$ )

Фиг.5. Профили безразмерной функции  $W(\xi)$  (а) и поперечной скорости  $V(\xi)$  (б) в зависимости от безразмерного параметра  $E$ ,  $M = 16.5$ : 1 —  $E = 0.6$ ; 2 —  $E = 0.4$ ; 3 —  $E = 0.2$ ; 4 —  $E = -0.2$ ; 5 —  $E = -0.4$ ; 6 —  $E = -0.6$



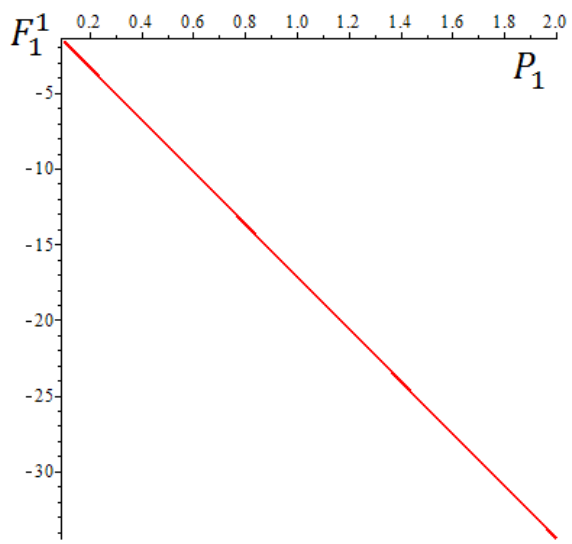
Фиг. 1.

Андреев, Лемешкова. Фигура 2

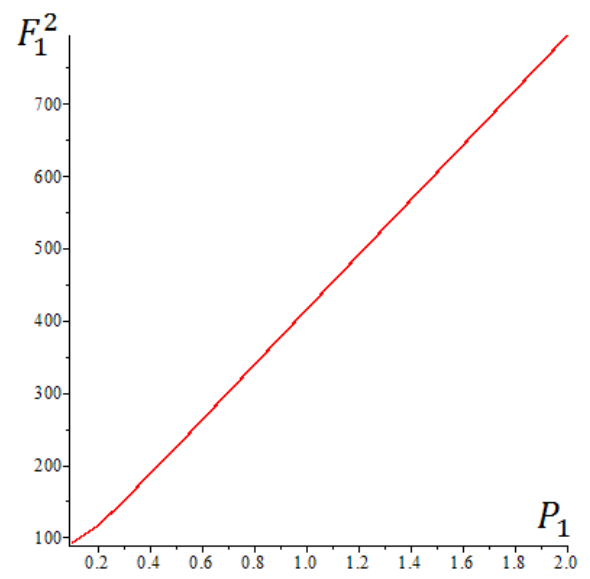


Фиг. 2. Зависимость безразмерных постоянных  $F^1$  (а) и  $F^2$  (б) от числа Марангони: 1 —  $F_1^1, F_1^2$ ; 2 —  $F_2^1, F_2^2$



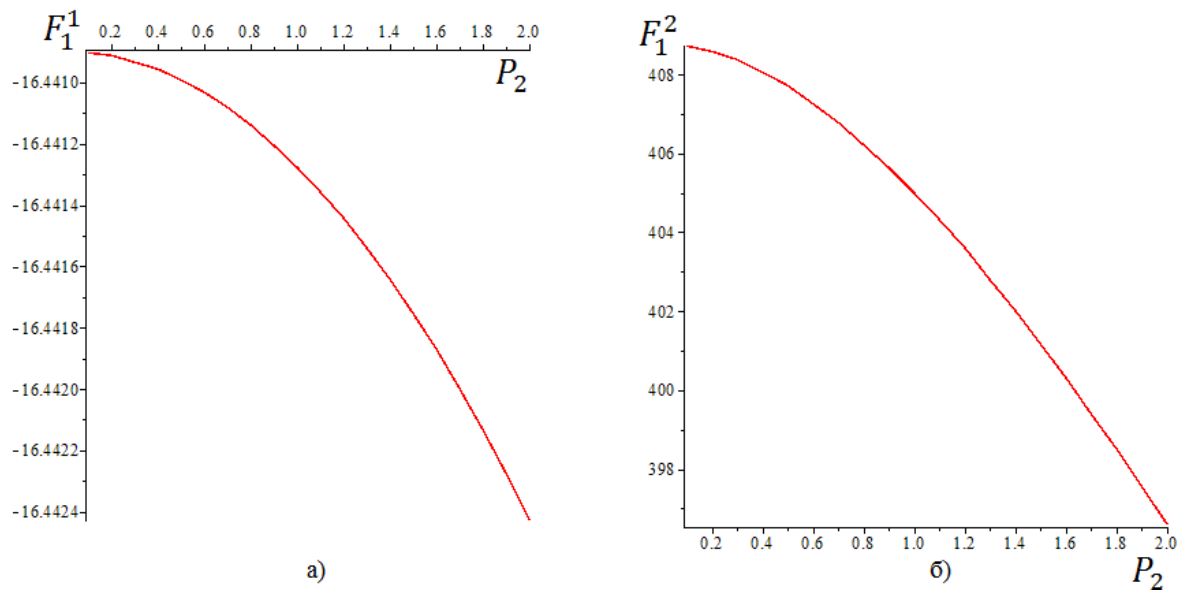


а)

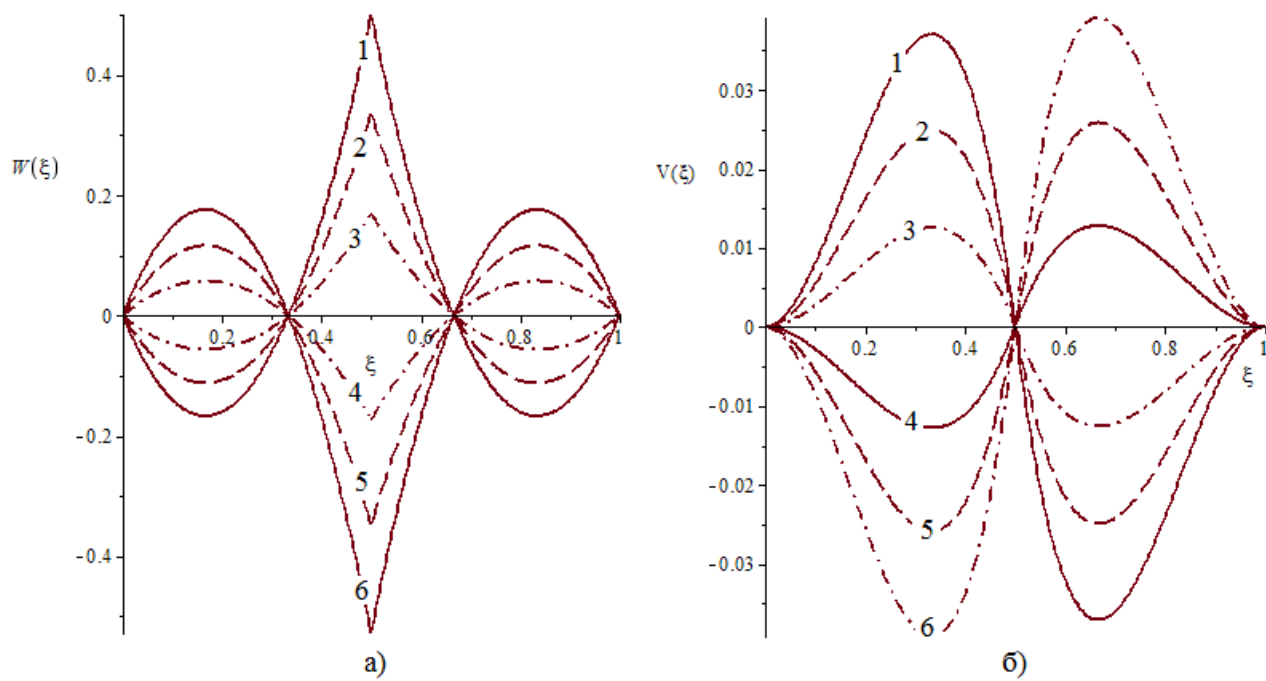


б)

Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.