УДК 517.55

О ядрах Сеге и Пуассона в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$

С.Г.Мысливец[1]

Аннотация

В данной статье строятся ядра Сеге и Пуассона в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$ и изучаются их свойства.

Эта статья содержит некоторые результаты, связанные с построением ядер Сеге и Пуассона в выпуклых областях, которые имеют большое значение для интегральных представлений в этих областях.

1 Построение ядра Сеге

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей и $\mathcal{H}(D)$ — пространство голоморфных функций в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в D, а $\mathcal{H}(\overline{D})$ — пространство голоморфных функций в окрестности $\overline{D}$ с соответствующей топологией. Пространство $\mathcal{H}(\overline{D})$ является естественным подпространством в $\mathcal{L}^2(\partial D)$ по мере $d\mu$ на ∂D, где $d\mu = g(\zeta)d\sigma$, $g(\zeta) \in \mathcal{C}^1(\partial D)$, $g(\zeta) > 0$, $d\sigma$ — мера Лебега на ∂D. Отображение $\mathcal{H}(\overline{D}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\partial D)$ инъективно по теореме о максимуме модуля. Обозначим $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2(\partial D)$ замыкание $\mathcal{H}(\overline{D})$ в $\mathcal{L}^2$.

Рассмотрим отображение сужения $r : \mathcal{H}(\overline{D}) \longrightarrow \mathcal{H}(D)$. Отображение r продолжается до непрерывного из $\mathcal{H}^2$ в $\mathcal{H}(D)$.

Лемма 1. *[lemma 4.1.[1]] Отображение сужения $r : \mathcal{H}(\overline{D}) \longrightarrow \mathcal{H}(D)$ непрерывно, если $\mathcal{H}(\overline{D})$ рассматривается в топологии, индуцированной пространством $\mathcal{L}^2$.*

Следовательно, отображение r продолжается до непрерывного отображения $i : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathcal{H}(D)$. В этом случае мы говорим , что для функции $f \in \mathcal{H}^2$ существует голоморфное продолжение $\tilde{f} = i(f)$ в D. В дальнейшем мы будем это продолжение обозначать тем же символом f.

В работе [1] в качестве меры рассматривалась мера Лебега $d\sigma$ на границе области, в нашем случае для меры $d\mu = g(\zeta)d\sigma$ все доказательства совершенно аналогичны.

Поскольку пространство $\mathcal{H}^2$ — гильбертово сепарабельное пространство, то в нем существует ортонормированный базис

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \tag{1}$$

в метрике $\mathcal{L}^2$. Поэтому любая функция $f \in \mathcal{H}^2$ раскладывается в ряд Фурье по базису (1), который сходится в топологии пространства $\mathcal{L}^2$:

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(\zeta), \tag{2}$$

[1]Автор использовал финансовую поддержку РФФИ, грант 11-01-00852.

где $c_k = (f, \varphi_k) = \int\limits_{\partial D} f(u)\bar{\varphi}_k(u)\, d\mu(u)$. Тогда

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{\partial D} f(u)\bar{\varphi}_k(u)\, d\mu(u)\varphi_k(\zeta)\Bigg) = \int\limits_{\partial D} f(u)\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\varphi}_k(u)\varphi_k(\zeta)\, d\mu(u).$$

Обозначим $K(\zeta, \bar{u}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\zeta)\bar{\varphi}_k(u)$ и $K(\zeta, \bar{u}) \in \mathcal{H}(\overline{D})$ по $\zeta \in \overline{D}_u$ при фиксированном $u \in D$.

Лемма 2. *Ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}^2$ можно выбрать состоящим из функций φ_k из пространства $\mathcal{H}(\overline{D})$.*

Доказательство. Поскольку пространство $\mathcal{H}(\overline{D})$ сепарабельное, то в нем существует счетное всюду плотное множество. Оно будет таким же в $\mathcal{H}^2$, т.к. $\mathcal{H}^2$ замыкание пространства $\mathcal{H}(\overline{D})$. Применяя к функциям из этого множества процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортономированный базис в $\mathcal{H}^2$, состоящий из функций $\varphi_k \in \mathcal{H}(\overline{D})$.

□

Лемма 3. *Если область D ограниченная строго выпуклая область с гладкой границей, то базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать из полиномов.*

Доказательство. Так как область D строго выпуклая, то $\overline{D}$ полиномиально выпуклый компакт. На полиномиально выпуклом компакте функция, голоморфная в его окрестности, равномерно приближается на нем полиномами [2]. Следовательно, полиномы плотны в классе функций из $\mathcal{H}(\overline{D})$ и поэтому из $\mathcal{H}^2$. Применяя к этому множеству процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим базис в $\mathcal{H}^2$, состоящий из полиномов.

□

В дальнейшем будем считать, что базис выбран согласно теореме 5.1 [1]. По этой теореме продолжение ядра $K(\zeta, \bar{u})$ обладает свойством:

$$i(f)(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)K(z, \bar{\zeta})\, d\mu(\zeta), \quad z \in D,$$

где $K(z, \bar{\zeta}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} i(\varphi_k)(z) i(\bar{\varphi}_k)(\zeta)$ и ряд равномерно сходится на компактных подмножествах из $D \times D$. Это ядро мы будем называть *ядром Сеге*. Тогда

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)K(z, \bar{\zeta})\, d\mu(\zeta), \tag{3}$$

где $f(z)$ отождествлена с $\tilde{f}(z) = i(f)(z)$ и $f \in \mathcal{H}^2$. Определим *ядро Пуассонна*

$$P(z,\zeta) = \frac{K(z,\bar{\zeta}) \cdot K(\zeta,\bar{z})}{K(z,\bar{z})} = \frac{K(z,\bar{\zeta}) \cdot \overline{K}(z,\bar{\zeta})}{K(z,\bar{z})} = \frac{|K(z,\bar{\zeta})|^2}{K(z,\bar{z})},$$

причем $K(z,\bar{z}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)\bar{\varphi}_k(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 \geqslant 0$.

Лемма 4. *Ядро $K(z,\bar{z}) > 0$ для любого $z \in D$.*

Доказательство. Пусть $K(z,\bar{z}) = 0$ для некоторого $z \in D$. Тогда $\varphi_k(z) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, поэтому

$$\varphi_k(z) = \int\limits_{\partial D} \varphi_k(\zeta) K(z,\bar{\zeta})\, d\mu(\zeta) = 0. \tag{4}$$

Поскольку любая функция $f \in \mathcal{H}^2$ разлагается в ряд Фурье (2), то $f(\zeta) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\zeta)$. Применяя отображение i, получим, что $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k i(\varphi_k)(z) = 0$ в силу (4), т.е. $f(z) \equiv 0$ в D для любой функции $f \in \mathcal{H}^2$, что невозможно. Поэтому ядро $K(z,\bar{z}) > 0$ для любого $z \in D$.

□

Лемма 5. *Для функции $f \in \mathcal{H}(\overline{D})$ справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) P(z,\zeta)\, d\mu(\zeta), \tag{5}$$

для $z \in D$.

Доказательство. По определению ядра $P(z,\zeta)$ и интегрального представления (3) имеем

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta) P(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{K(z,\bar{\zeta}) \cdot K(\zeta,\bar{z})}{K(z,\bar{z})}\, d\mu(\zeta) =$$
$$= \frac{1}{K(z,\bar{z})} \int\limits_{\partial D} \big(f(\zeta) K(\zeta,\bar{z})\big) K(z,\bar{\zeta})\, d\mu(\zeta) = \frac{f(z) K(z,\bar{z})}{K(z,\bar{z})} = f(z).$$

□

Следствие 1. *Если пространство $\mathcal{H}(\overline{D})$ плотно в пространстве $\mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\partial D) = \mathcal{A}(D)$, то формула (5) справедлива для функции $f \in \mathcal{A}(D)$.*

Предположим, что область D удовлетворяет *условию* (A): для любой точки $\zeta \in \partial D$ и любой окрестности $U(\zeta)$ ядро Сеге $K(z,\bar\zeta)$ равномерно ограничено по $z \in D$ при $z \notin U(\zeta)$. В дальнейшем будем предполагать, что область D всегда удовлетворяет условию (A).

Теорема 1. *Пусть D — строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и при фиксированном $z \in D$ ядро $K(z,\bar\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ по $\zeta \in \partial D$. Тогда область D и ядро $K(z,\bar\zeta)$ удовлетворяют условию (A).*

Доказательство. Пусть

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \ \rho(z) < 0\}, \tag{6}$$

где $\rho \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$ и $\operatorname{grad}\rho\big|_{\partial D} \neq 0$. Для доказательства воспользуемся следствием 26.13 [3] для интегрального представления Лере для голоморфных функций $f \in \mathcal{A}(D)$ в строго выпуклых областях:

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\, d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta}{\big[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)\big]^n},$$

где

$$\delta_k = \begin{vmatrix} \rho'_{\zeta_1} & \ldots & \rho'_{\zeta_n} \\ \rho''_{\zeta_1\bar\zeta_1} & \ldots & \rho''_{\zeta_n\bar\zeta_1} \\ & [k] & \\ \rho''_{\zeta_1\bar\zeta_n} & \ldots & \rho''_{\zeta_n\bar\zeta_n} \end{vmatrix}, \quad k = 1,\ldots,n,$$

$d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, $d\bar\zeta[k] = d\bar\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\bar\zeta_{k-1} \wedge d\bar\zeta_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\bar\zeta_n$.

Знаменатель ядра $\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n) \neq 0$ для $\zeta \in \partial D$, $z \in \overline{D}$ и $\zeta \neq z$. Действительно, равенство $\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n) = 0$ определяет комплексную касательную плоскость к ∂D в точке ζ. Если область D строго выпуклая, то касательная плоскость пересекает границу области D только в точке ζ.

Ядро Сеге $K(z,\bar\zeta)$ для области D является (обобщенным) ядром Коши-Фантаппье (Лере) по следствию 26.13 [3], поэтому такие области удовлетворяют условию (A).

□

Рассмотрим сужение формы

$$L(z,\zeta,\bar\zeta) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\, d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta}{\big[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)\big]^n}$$

на ∂D, тогда оно примет вид

$$L(z,\zeta,\bar\zeta) =$$
$$= \frac{\psi(\zeta,\bar\zeta)\, d\sigma(\zeta)}{\big[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)\big]^n} = \frac{\psi(\zeta,\bar\zeta)\, d\mu(\zeta)}{g(\zeta)\big[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)\big]^n} =$$

$$= \frac{\psi_1(\zeta,\bar\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\big[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)\big]^n} = \widetilde{L}(z,\zeta,\bar\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Доказательство теоремы 1 показывает, что

$$K(z,\bar\zeta) = \widetilde{L}(z,\zeta,\bar\zeta) \tag{7}$$

при $\zeta \in \partial D$.

Лемма 6. *Функция $K(z,z)$ является неограниченной при $z \to \zeta$ и $\zeta \in \partial D$, $z \in D$.*

Доказательство. Рассмотрим точку $z^0 \in D$, тогда область D является сильно звездной относительно z^0, т.е. для люблой точки $\zeta^0 \in \partial D$ отрезок $[z^0,\zeta^0] \in \overline{D}$. Пусть этот отрезок имеет вид $\{z \in D:\ z = \zeta^0 + t(z^0 - \zeta^0),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Тогда

$$\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1^0 - z_1) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n^0 - z_n) = t\big(\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1^0 - z_1^0) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n^0 - z_n^0)\big).$$

Если $z \to \zeta^0$, то $t \to 0$ и $\big(\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1^0 - z_1^0) + \ldots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n^0 - z_n^0)\big) \to 0$. Тогда $K(z,z) \to \infty$ при $z \to \zeta$, $\zeta \in \partial D$.

□

2 Ядро Пуассона и его свойства

Для функции $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ определим интеграл Пуассона:

$$P[f](z) = F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) P(z,\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

В строго выпуклых областях, удовлетворяющих условию (A), из равенства (7) и вида ядра $P(z,\zeta)$ следует, что это ядро является непрерывной функцией по $z \in D$ и поэтому функция $F(z)$ непрерывна в D.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию (A), и $f \in \mathcal{C}(\partial D)$, тогда функция $F(z)$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $F(z)\big|_{\partial D} = f(z)$.*

Доказательство. Теорема 1 и лемма 6 показывают, что ядро $P\big(\zeta, t(z^0 - z)\big)$ равномерно стремится к нулю вне любой окрестности точки ζ для $\zeta, z \in \partial D$, $z^0 \in D$, $\zeta \neq z$ и $t \to 1$. Кроме того $P(z,\zeta) > 0$ и $P[1](\zeta) = 1$. Следовательно, ядро Пуассона $P(z,\zeta)$ является аппроксимативной единицей [4, теорема 1.9].

□

Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = c\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\bar\zeta_k\, d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta,$$

где $c = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$. Найдем сужение этой формы на ∂D для области D вида (6). Тогда по лемме 3.5 [5] получим

$$d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta = (-1)^{k-1} 2^{n-1} i^n \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k} \cdot \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} \rho|}.$$

Поэтому сужение ω на ∂D равно

$$d\mu = \omega\big|_{\partial D} = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=1}^n \bar\zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k} \cdot \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} \rho|}.$$

Обозначим

$$g(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=1}^n \bar\zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k} \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} \rho|}.$$

Предложение 1. *Если D круговая строго выпуклая область, то $g(\zeta)$ вещественнозначная функция, не обращающаяся в ноль на ∂D.*

Доказательство. Так как для круговой области $\rho(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \rho(\zeta_1 e^{i\theta}, \dots, \zeta_n e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, то дифференцируя это равенство по θ, получим

$$0 = \sum_{k=1}^n i\zeta_k e^{i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} - \sum_{k=1}^n i\bar\zeta_k e^{-i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k}.$$

Тогда при $\theta = 0$ получим, что $\sum\limits_{k=1}^n \zeta_k \dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} = \sum\limits_{k=1}^n \bar\zeta_k \dfrac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k}$. Вещественность функции $g(\zeta)$ означает, что

$$\sum_{k=1}^n \bar\zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k} = \overline{\sum_{k=1}^n \bar\zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k}} = \sum_{k=1}^n \zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k}.$$

Функция $g(\zeta) \neq 0$ на ∂D, поскольку комплексная касательная плоскость в точке ζ не проходит через ноль. Поэтому функция $g(\zeta)$ сохраняет знак на ∂D.

□

В дальнейшем можно считать, что $d\mu$ — мера, т.е. $g(\zeta) > 0$ на ∂D.

Предложение 2. *Пусть область D — $(p_1, \dots, p_n)$-круговая строго выпуклая, т.е.*

$$\rho(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \rho(\zeta_1 e^{ip_1\theta}, \dots, \zeta_n e^{ip_n\theta}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

где $p_1, \dots, p_n$ — положительные рациональные числа. Тогда функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar\zeta_k p_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k}$$

вещественная и не равна нулю.

Доказательство повторяет доказательство предыдущей леммы.

Свойства ядер Сеге и Пуассона имеют непросредственное отношение к функциям с одномерным свойством голоморфного продолжения.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей. Рассмотрим комплексную прямую вида

$$l_{z,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta = z+bt, t \in \mathbb{C}\} = \{(\zeta_1, \dots \zeta_n) : \zeta_j = z_j+b_jt, j = 1, 2, \dots, n, t \in \mathbb{C}\}, \quad (8)$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$.

Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямой* $l_{z,b}$, если $\partial D \cap l_{z,b} \neq \varnothing$ и существует функция $F_{l_{z,b}}$ со следующими свойствами:

1) $F_{l_{z,b}} \in \mathcal{C}(\overline{D} \cap l_{z,b})$,

2) $F_{l_{z,b}} = f$ на множестве $\partial D \cap l_{z,b}$,

3) функция $F_{l_{z,b}}$ голоморфна во внутренних (относительно топологии $l_{z,b}$) точках множества $\overline{D} \cap l_{z,b}$.

Изучению таких функций посвящено достаточно много работ (см., например, []).

Пусть $\zeta = bt$, $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$, $t \in \mathbb{C}$, как показано в [?] тогда

$$\omega = c\frac{dt}{t} \wedge \lambda(b), \quad (9)$$

где $\lambda(b)$ — дифференциальная форма, не зависящая от t.

Рассмотрим модифицированное ядро Пуассона

$$Q(z, w, \zeta) = \frac{K(z, \bar{\zeta}) \cdot K(\zeta, w)}{K(z, w)}$$

Тогда при $w = \bar{z}$ получим, что $Q(z, \bar{z}, \zeta) = P(z, \zeta)$, а $K(z, \bar{z}) > 0$. Поэтому существует окрестность U диагонали $w = \bar{z}$ в $D_z \times D_w$, в которой $K(z, w) \neq 0$.

Введем функцию

$$\Phi(z, w) = \int_{\partial D} f(\zeta) Q(z, w, \zeta)\, d\mu(\zeta),$$

которая определена для $(z, w) \in U$. Эта функция голоморфна по $(z, w) \in U$, а при $w = \bar{z}$ функция $\Phi(z, w) = F(z)$ и

$$\left.\frac{\partial^{\delta+\gamma}\Phi(z, w)}{\partial z^\delta \partial w^\gamma}\right|_{w=\bar{z}} = \frac{\partial^{\delta+\gamma} F(z)}{\partial z^\delta \partial \bar{z}^\gamma}, \quad (10)$$

где

$$\frac{\partial^{\delta+\gamma}\Phi(z, w)}{\partial z^\delta \partial w^\gamma} = \frac{\partial^{\delta_1+\ldots+\delta_n+\gamma_1+\ldots+\gamma_n}\Phi(z, w)}{\partial z_1^{\delta_1} \cdots \partial z_n^{\delta_n} \partial w_1^{\gamma_1} \cdots \partial w_n^{\gamma_n}},$$
$$\frac{\partial^{\delta+\gamma} F(z)}{\partial z^\delta \partial \bar{z}^\gamma} = \frac{\partial^{\delta_1+\ldots+\delta_n+\gamma_1+\ldots+\gamma_n} F(z)}{\partial z_1^{\delta_1} \cdots \partial z_n^{\delta_n} \partial \bar{z}_1^{\gamma_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{\gamma_n}},$$

и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Теорема 3. *Пусть D — ограниченная строго выпуклая круговая область и функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через начало координат, тогда $\Phi(0, w) = \mathrm{const}$ и $\left.\dfrac{\partial^\delta \Phi(z, w)}{\partial z^\delta}\right|_{z=0}$ — многочлен по w степени не выше $\|\delta\|$.*

Доказательство. Пусть $l_{0,b}$ — комплексная прямая, проходящая через начало координат в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$. Рассмотрим

$$Q(bt, z, w) = \frac{h(\bar{b}\bar{t}, z) h(bt, w)}{h(z, w)},$$

тогда

$$h(\bar{b}\bar{t}, z) = \sum_{\alpha \geqslant 0} a_\alpha (\bar{b}z)^\alpha \bar{t}^{\|\alpha\|} \tag{11}$$

и $h(0, 0) = h(\zeta, 0) = a_0$. Отсюда

$$\Phi(0, 0) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{h(\bar{\zeta}, 0) h(\zeta, 0)}{h(0, 0)}\, d\nu =$$

$$= \frac{1}{h(0, 0)} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) h(\bar{\zeta}, 0) h(\zeta, 0)\, d\nu =$$

$$= \frac{c}{h(0, 0)} \int\limits_{\partial D \cap l_{0,b}} \lambda(b) \int\limits_{l_{0,b}} h(\bar{b}\bar{t}, 0) h(bt, 0) \frac{f(bt)}{t}\, dt =$$

$$= \frac{c a_0^2}{a_0} \int\limits_{\partial D \cap l_{0,b}} \lambda(b) \int\limits_{l_{0,b}} \frac{f(bt)}{t}\, dt = c a_0 \int\limits_{\partial D \cap l_{0,b}} \lambda(b) \int\limits_{l_{0,b}} \frac{f(bt)}{t}\, dt.$$

Теперь вычислим

$$\frac{\partial^\gamma h(\zeta, w)}{\partial w^\gamma} = \sum_{\alpha - \gamma \geqslant 0} a_\alpha d_{\alpha,\gamma} \zeta^\alpha w^{\alpha - \gamma},$$

где $d_{\alpha,\gamma}$ — некоторая константа. Тогда при $w = 0$ получим

$$\left.\frac{\partial^\gamma h(\zeta, w)}{\partial w^\gamma}\right|_{w=0} = a_\alpha d_{\gamma,\gamma} \zeta^\gamma.$$

Отсюда получим

$$\left.\frac{\partial^\gamma \Phi(0, w)}{\partial w^\gamma}\right|_{w=0} = c \int\limits_{\partial D \cap l_{0,b}} \lambda(b) \int\limits_{l_{0,b}} f(bt) a_\gamma d_{\gamma,\gamma} b^\gamma t^{\|\gamma\|} \frac{dt}{t} = 0,$$

если $\|\gamma\| > 0$. Таким образом, $\Phi(0, w) = \mathrm{const}$.

Вычислим

$$\frac{\partial^{\delta+\gamma}\big(h(\bar\zeta,z)\cdot h(\zeta,w)\big)}{\partial z^\delta \partial w^\gamma}\bigg|_{\substack{z=0\\w=0}} = \frac{\partial^\delta h(\bar\zeta,z)}{\partial z^\delta}\cdot\frac{\partial^\gamma h(\zeta,w)}{\partial w^\gamma}\bigg|_{\substack{z=0\\w=0}} = \delta! a_\delta \bar\zeta^\delta \gamma! a_\gamma \zeta^\gamma = \delta!\gamma! a_\delta a_\gamma \bar\zeta^\delta \zeta^\gamma,$$

где $\delta! = \delta_1!\cdot\ldots\cdot\delta_n!$, $\gamma! = \gamma_1!\cdot\ldots\cdot\gamma_n!$. Тогда

$$\frac{\partial^{\delta+\gamma} Q(\zeta,z,w)}{\partial z^\delta \partial w^\gamma}\bigg|_{\substack{z=0\\w=0}} = \frac{\partial^{\delta+\gamma}}{\partial z^\delta \partial w^\gamma}\left(\frac{h(\bar\zeta,z)h(\zeta,w)}{h(z,w)}\right)\bigg|_{\substack{z=0\\w=0}} = \sum_{k=1}^N C_k \bar\zeta^{\delta-\varepsilon^k}\zeta^{\gamma-\varepsilon^k}, \tag{12}$$

поскольку при подстановки $z = 0$ и $w = 0$ в производные, отличными от нуля могут быть только те производные, у которых была взята производная одинакового порядка по z и w.

Пусть $\|\delta\| < \|\gamma\|$, тогда из (12) и (9) получим

$$\frac{\partial^{\delta+\gamma}\Phi(z,w)}{\partial z^\delta \partial w^\gamma}\bigg|_{\substack{z=0\\w=0}} = c\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{\partial^{\delta+\gamma} Q(\zeta,z,w)}{\partial z^\delta \partial w^\gamma}\bigg|_{\substack{z=0\\w=0}} d\nu =$$

$$= c\sum_{k=1}^N C_k \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\bar\zeta^{\delta-\varepsilon^k}\zeta^{\gamma-\varepsilon^k} d\nu = c\sum_{k=1}^N C_k \int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}} \lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}} f(bt)\bar t^{\|\delta-\varepsilon^k\|} t^{\|\gamma-\varepsilon^k\|-1} dt =$$

$$= c\sum_{k=1}^N C_k \int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}} \lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}} f(bt)|t|^{\|\delta-\varepsilon^k\|} t^{\|\gamma-\delta\|-1} dt =$$

$$= C_\delta \sum_{k=1}^N C_k \int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}} \lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}} f(bt) t^{\|\gamma-\delta\|-1} dt = 0,$$

поскольку сечение области D прямой $l_{0,b}$ является кругом.

Таким образом, производные $\dfrac{\partial^\delta \Phi(z,w)}{\partial z^\delta}\Big|_{z=0}$ являются многочленами по w степени не выше $\|\delta\|$.

□

Список литературы

[1] Bungart L. Boundary kernel functions for domains on complex manifolds, Pac. J. of Math., 1964, v. 14, no. 4, pp. 1151–1164.

[2] Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968, 280 с.

[3] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[4] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974, 288 с.

[5] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения, Новосибирск, Наука, 1992, 240 с.