Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2019, № 5, с. 40–55 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.М. КЫТМАНОВ, Е.К. МЫШКИНА

ВЫЧЕТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФОРМУЛЫ ВАРИНГА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматриваются алгебраические и трансцендентные системы уравнений общего вида. Определяются вычетные интегралы по циклам, связанным с системой. Приводятся формулы для их вычисления и устанавливаются многомерные аналоги формул Варинга, т. е. связь между коэффициентами уравнений и степенными суммами корней системы.

Ключевые слова: алгебраическая и неалгебраическая системы уравнений, вычетный интеграл, формула Варинга, степенная сумма корней.

УДК: 517.53

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-40-55

Введение

Для систем нелинейных алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ на основе многомерного логарифмического вычета ранее были получены формулы для нахождения степенных сумм корней системы, не вычисляя самих корней [1]–[3]. Для разных типов систем такие формулы имеют разный вид. На этой основе в $\mathbb{C}^n$ построен новый метод исследования систем алгебраических уравнений. Он возник в работе Л.А. Айзенберга [1], а его разработка продолжена в монографиях [2], [4]. Его основная идея заключается в нахождении степенных сумм корней системы (в положительной степени), а затем в использовании одномерных или многомерных рекуррентных формул Ньютона [5]. В отличие от классического метода исключения он менее трудоемок и не увеличивает кратности корней.

В его основе лежит формула [1], полученная с помощью многомерного логарифмического вычета для нахождения суммы значений произвольного многочлена в корнях заданной системы алгебраических уравнений без нахождения самих корней.

Для систем неалгебраических (трансцендентных) уравнений формулы для суммы значений корней системы получить, как правило, нельзя, поскольку корней системы может быть бесконечное число и ряды из координат таких корней расходящиеся. Тем не менее неалгебраические системы уравнений возникают, например, в задачах химической кинетики [6], [7]. Тем самым, актуальной является задача рассмотрения таких систем.

Поступила в редакцию 20.04.2018, после доработки 01.06.2018. Принята к публикации 20.06.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 18-51-41011-Узб_t и 18-31-00019, и грант 14.Y26.31.0006 Правительства Российской Федерации для поддержки научных школ под руководством ведущего ученого в Сибирском федеральном университете.

В работах [8]–[16] рассмотрены степенные суммы корней в отрицательной степени для разных систем трансцендентных уравнений. Для вычисления этих степенных сумм используется вычетный интеграл, интегрирование в котором ведется по остовам поликругов с центром в нуле. Отметим, что этот вычетный интеграл не является, вообще говоря, многомерным логарифмическим вычетом или вычетом Гротендика. Для различного типа младших однородных систем функций, входящих в систему, приведены формулы для нахождения вычетных интегралов, установлена их связь со степенными суммами корней системы в отрицательной степени.

В работах [14], [15] исследованы более сложные системы, у которых младшие однородные части разлагаются на линейные множители и циклы интегрирования в вычетных интегралах, строятся по этим множителям.

В работе [16] исследована система, возникающая в модели Зельдовича–Семенова [6], [7] в химической кинетике.

Объектом исследования данной работы являются алгебраические и трансцендентные системы уравнений, у которых младшие однородные части функций, входящих в систему, образуют невырожденную систему алгебраических уравнений: найдены формулы для вычисления вычетных интегралов, степенные суммы корней в отрицательной степени и установлены многомерные аналоги формул Варинга, т. е. связь коэффициентов уравнений с вычетными интегралами.

1. Вычетные интегралы

Пусть $f_1(z), \dots, f_n(z)$ — система функций, голоморфных в окрестности начала координат в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$.

Разложим функции $f_1(z), \dots, f_n(z)$ в ряды Тейлора в окрестности начала координат и рассмотрим систему уравнений

$$f_j(z) = P_j(z) + Q_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где P_j — младшая однородная часть разложения Тейлора функции $f_j(z)$. Степень всех мономов (по совокупности переменных), входящих в P_j, равна m_j, $j = 1, \dots, n$. В функциях Q_j степени всех мономов строго больше, чем m_j.

Разложение функций Q_j, P_j, $j = 1, \dots, n$, в окрестности нуля в ряды Тейлора, сходящиеся абсолютно и равномерно в этой окрестности, имеют вид

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| > m_j} a^j_\alpha z^\alpha, \tag{2}$$

$$P_j(z) = \sum_{\|\beta\| = m_j} b^j_\beta z^\beta, \tag{3}$$

$j = 1, \dots, n$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндексы, т. е. α_j, β_j — неотрицательные целые числа, $j = 1, \dots, n$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\|\beta\| = \beta_1 + \dots + \beta_n$, мономы $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot z_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{\beta_n}$.

В дальнейшем будем предполагать, что система многочленов $P_1(z), \dots, P_n(z)$ *невырождена*, т. е. ее общим нулем служит только точка нуль — начало координат.

Рассмотрим открытое множество (специальный аналитический полиэдр) вида

$$D_P(r_1, \dots, r_n) = \{z : |P_j(z)| < r_j,\ j = 1, \dots, n\},$$

где $r_1, \dots, r_n$ — положительные числа. Его *остов* имеет вид

$$\Gamma_P(r_1, \dots, r_n) = \Gamma_P(r) = \{z :\ |P_j(z)| = r_j,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Эти множества играют важную роль в теории многомерных вычетов (например, [2]).

Лемма 1 ([2])**.** *Для невырожденных систем многочленов $P_1, \dots, P_n$ множество $D_P(r_1, \dots, r_n)$ относительно компактно, а для почти всех (п. в.) $r_1, \dots, r_n$ остов $\Gamma_P(r_1, \dots, r_n)$ является гладким компактным циклом размерности n.*

Лемма 2. *Пусть система многочленов*

$$P_1(z), \dots, P_n(z) \tag{4}$$

такова, что на координатной плоскости $\{z_1 = 0\}$ в ней найдется невырожденная подсистема, состоящая их $n-1$ многочлена от переменных $z_2, \dots, z_n$. Тогда остов полиэдра $\Gamma_P(r_1, \dots, r_n)$ не пересекается с координатной плоскостью $\{z_1 = 0\}$ для п. в. $r_1, \dots, r_n$.

Доказательство. Можно считать, что невырожденная подсистема имеет вид

$$P_2(0, z_2, \dots, z_n), \dots, P_n(0, z_2, \dots, z_n). \tag{5}$$

Для доказательства используем понятие и свойства результанта, введенного А.К. Цихом ([3], § 18, п. 3) для переопределенных систем функций.

Обозначим $P' = (P_2, \dots, P_n)$, $z' = (z_2, \dots, z_n)$. По лемме 1 полиэдр

$$G'_{P'} = \{z' : |P_j(0, z')| < r_j, \quad j = 2, \dots, n\} \tag{6}$$

является относительно компактным множеством для любых $r_2 > 0, \dots, r_n > 0$. Поскольку система (5) состоит из однородных многочленов, то отображение, определяемое системой (5) из $\mathbb{C}^{n-1}$ в $\mathbb{C}^{n-1}$, является собственным. Это означает, что $P' : G'_{P'} \to B'$ — аналитическое накрытие над поликругом $B' = \{|w_2| < r_2, \dots, |w_n| < r_n\}$: для каждого $w = (w_2, \dots, w_n) \in B'$ прообраз $(P')^{-1}(w')$ состоит из одного и того же (с учетом их кратностей) числа точек $(z')^{(\nu)}(w') \in G'_{P'}$, $\nu = 1, \dots, p$ (т. е. система уравнений $P'(0, z') = w'$ имеет конечное число корней).

Определим результант функции $P_1(0, z') - w_1$ относительно системы $P'(0, z')$ ([3], § 18, п. 3) следующим образом:

$$R(w) = R(w_1, w') = \prod_{\nu=1}^{p} [P_1(0, (z')^{(\nu)}(w')) - w_1]. \tag{7}$$

Как показано в ([3], § 18, п. 3) для собственных отображений, $R(w)$ — многочлен. Ясно, что $R(0) = 0$ и $R(w)$ не обращается в нуль тождественно. Обозначим через A множество

$$A = \{w : R(w) = 0\}.$$

Из определения (7) результанта ясно, что $w \notin A$ тогда и только тогда, когда система уравнений

$$P_1(0, z') = w_1, \dots, P_n(0, z') = w_n \tag{8}$$

не имеет корней.

Так как множество A имеет размерность $2n-2$, то рассматривая остовы $w : |w_1| = r_1, \dots, |w_n| = r_n$, получим, что для п. в. $r_1, \dots, r_n$ эти остовы не пересекаются с A. $\square$

Следствие 1. Если для каждой координатной плоскости $\{z_j = 0\}$ найдется невырожденная подсистема порядка $(n-1)$ системы (5), то для п. в. $r_1, \dots, r_n$ остов $\Gamma_P(r_1, \dots, r_n)$ не пересекает координатные плоскости.

Отметим, что при $n=2$ никаких ограничений на систему (кроме невырожденности) налагать не нужно.

При достаточно малых r_i циклы Γ_P лежат в области голоморфности функций f_i, поэтому ряды

$$\sum_{\|\alpha\|>m_i} |a^i_\alpha| r_1^{\alpha_1}\cdots r_n^{\alpha_n}$$

сходятся, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда на цикле $\Gamma_P(tr)=\Gamma_P(tr_1,tr_2,\ldots,tr_n)$ при достаточно малых $t>0$, имеем

$$|P_i(tr)| = \left|\sum_{\|\beta\|=m_i} b^i_\beta (tr)^\beta\right| = \sum_{\|\beta\|=m_i} t^{\|\beta\|}|b^i_\beta| r^\beta = t^{m_i}\sum_{\|\beta\|=m_i}|b^i_\beta|r^\beta, \quad i=1,\ldots,n,$$

$$|Q_i(tr)| = \left|\sum_{\|\alpha\|>m_i} a^i_\alpha (tr)^\alpha\right| \leqslant \sum_{\|\alpha\|>m_i} t^{\|\alpha\|}|a^i_\alpha| r^\alpha = t^{m_i+1}\sum_{\|\alpha\|>m_i}|a^i_\alpha|r^\alpha t^{\|\alpha\|-(m_i+1)}.$$

Поэтому при достаточно малых t на цикле $\Gamma_P(tr)$ выполняются неравенства

$$|P_i(z)| > |Q_i(z)|, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

Таким образом,

$$f_i(z)\neq 0 \ \text{ на } \ \Gamma_P(tr), \quad i=1,2,\ldots,n.$$

В дальнейшем будем считать, что $t=1$, т.е. неравенство (9) справедливо на цикле $\Gamma_P(r_1,\ldots,r_n)$.

Введем понятие *вычетного интеграла* J_γ ([17]). Определим

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_P}\frac{1}{z^{\gamma+I}}\cdot\frac{df}{f} = \\ = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_P}\frac{1}{z_1^{\gamma_1+1}\cdot z_2^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n}, \tag{10}$$

где $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ — мультииндекс, а мультиндекс $I=(1,\ldots,1)$. Этот вычетный интеграл определен, если $r_1,\ldots,r_n$ выбраны так, что выполнено (9) и цикл Γ_P не пересекается с координатными плоскостями (см. следствие 1). Отметим, что этот интеграл не является многомерным логарифмическим вычетом или вычетом Гротендика.

Теорема 1. *Если система многочленов* (4) *невырождена и для нее выполнены условия следствия* 1, *то для системы вида* (1) *справедливо*

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_P}\frac{1}{z^{\gamma+I}}\cdot\frac{df}{f} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\gamma\|+n}(-1)^{\|\alpha\|}\int_{\Gamma_P}\left[\frac{\Delta\cdot Q^\alpha\cdot dz}{z^{\gamma+I}\cdot P^{\alpha+I}}\right],$$

где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *— мультииндекс,* Δ *— якобиан системы* (1), $Q^\alpha = Q_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot Q_n^{\alpha_n}$, $P^{\alpha+I}=P_1^{\alpha_1+1}\cdot\ldots\cdot P_n^{\alpha_n+1}$.

Доказательство. Используя формулу геометрической прогрессии и условие (9) на Γ_P, получим

$$\frac{1}{f_i} = \frac{1}{P_i+Q_i} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{Q_i^s}{P_i^{s+1}}.$$

Тогда

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} (-1)^{\|\alpha\|} \int_{\Gamma_P} \frac{\Delta}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{\alpha_n}}{P_1^{\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot P_n^{\alpha_n+1}} dz. \tag{11}$$

Полученный ряд абсолютно сходится.

Покажем, что в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Для этого подсчитаем степени (по совокупности переменных) мономов, входящих в числитель и знаменатель подинтегрального выражения.

Степень (по совокупности переменных) $\deg \Delta$ мономов, входящих в Δ, не меньше, чем $m_1 + \cdots + m_n - n$. Для степени мономов, входящих в Q^α, получаем оценку

$$\deg Q_i^{\alpha_i} \geqslant (m_i + 1) \cdot \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому степень числителя не меньше, чем

$$m_1 + \cdots + m_n - n + \sum_{s=1}^n \alpha_s (m_s + 1).$$

Степень знаменателя равна $\|\gamma\| + n + m_1(\alpha_1 + 1) + \cdots + m_n(\alpha_n + 1)$.

В сумме (11) все слагаемые, для которых степень числителя больше степени знаменателя на n, равны нулю. Действительно, сделаем в каждом интеграле из (11) замену переменных $z_j \to e^{\theta\sqrt{-1}} z_j$, $j = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. При такой замене интеграл и циклы интегрирования не изменятся в силу однородности многочленов $P_i(z)$, а в подинтегральном выражении вынесется множитель $e^{\theta\sqrt{-1}}$ в степени, равной разности между степенями числителя (вместе с dz) и знаменателя.

Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$m_1 + \cdots + m_n - n + \alpha_1(1 + m_1) + \alpha_2(1 + m_2) + \ldots + \alpha_n(1 + m_n) \leqslant \\ \leqslant \|\gamma\| + (\alpha_1 + 1)m_1 + \ldots + (\alpha_n + 1)m_n,$$

$$\|m\| + \|\alpha\| + \sum_{s=1}^n \alpha_s m_s \leqslant \|\gamma\| + n + \|m\| + \sum_{s=1}^n \alpha_s m_s,$$

т. е. $\|\alpha\| \leqslant \|\gamma\| + n$. □

Наша дальнейшая цель показать, что интегралы в формуле (11) можно вычислить через коэффициенты Тейлора функций f_i и связать со степенными суммами корней системы (1). Для этого нам нужно наложить некоторые ограничения на функции $Q_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия из пространства теории функций $\overline{\mathbb{C}}^n$, равного произведению n экземпляров сфер Римана $\mathbb{CP}^1$, т. е. $\overline{\mathbb{C}}^n = \mathbb{CP}^1 \times \cdots \times \mathbb{CP}^1$.

Пусть $z_j : w_j$ — однородные координаты в j-м множителе пространства $\overline{\mathbb{C}}^n$ и пусть

$$F_j(z_1, w_1, \ldots, z_n, w_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

— система уравнений, состоящая из многочленов F_j, однородных по каждой паре переменных (z_k, w_k), $k = 1, \ldots, n$. Будем рассматривать только те корни $(z_1, w_1, \ldots, z_n, w_n)$ системы (12), для которых

$$(z_k, w_k) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Корни системы (12) с парами, имеющими пропорциональные координаты, определяют один корень $(z_1 : w_1, \ldots, z_n : w_n)$ в $\overline{\mathbb{C}}^n$.

Пусть
$$a = (z_1^{(0)} : w_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)} : w_n^{(0)})$$
есть корень системы (12), у которого все $w_k^{(0)} \neq 0$. Тогда точка $(z_1, 1, \dots, z_n, 1)$ является корнем системы
$$F_j(z_1, 1, \dots, z_n, 1) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$
в $\mathbb{C}^n$. Корням a, у которых некоторые $w_j^{(0)}$ равны нулю, соответствуют бесконечно удаленные корни в $\overline{\mathbb{C}}^n$.

В дальнейшем будем считать, что система уравнений вида (1) состоит из многочленов $f_j(z)$. Для того, чтобы найти бесконечно удаленные корни этой системы в $\overline{\mathbb{C}}^n$, нужно сначала перейти к однородным координатам, подставляя вместо z_k отношения z_k/w_k и отбрасывая получившийся знаменатель, тем самым получить систему типа (12). Решая ее найдем обычные корни и бесконечно удаленные корни системы (1).

Будем предполагать, что кроме невырожденности система $P_1(z), \dots, P_n(z)$ не имеет бесконечных корней в пространстве $\overline{\mathbb{C}}^n$.

Напомним, что многочлены $Q_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, имеют вид (2), т. е.
$$Q_i(z) = \sum_{\|\alpha\| > m_i} a_\alpha^i z^\alpha.$$
Обозначим через $\operatorname{ord} Q_i$ порядок многочлена Q_i, т. е. наименьшую степень всех мономов, входящих в Q_i.

Предположим, что для каждого i-го уравнения из (1) выполнены условия
$$\deg_{z_i} P_i < \operatorname{ord}_{z_i} Q_i, \quad \deg_{z_j} P_i \geqslant \operatorname{ord}_{z_j} Q_i, \quad j \neq i. \tag{13}$$
Здесь $\deg_{z_i} P(z)$ — степень многочлена P по переменной z_i при фиксированных остальных переменных, а $\operatorname{ord}_{z_i} Q$ — порядок многочлена Q по переменной z_i при фиксированных остальных переменных.

Имеем $\deg P_i = m_i$. Обозначим $\operatorname{ord} Q_i = s_i$, $\deg_{z_j} P_i = m_i^j$, $\operatorname{ord}_{z_j} Q_i = s_i^j$. Тогда $m_i < s_i$, $m_i^i < s_i^i$, $i = 1, \dots, n$. Кроме того, $m_i^j \geqslant s_i^j$ при $j \neq i$. Не исключены случаи, когда $\sum\limits_{j=1}^n m_i^j > m_i$.

Сделаем во всех функциях $f_i(z) = P_i(z) + Q_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, замену $z_i = \dfrac{1}{w_i}$, $i = 1, \dots, n$, предполагая, что все $w_i \neq 0$. Получим
$$P_i\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) = \sum_{\|\beta\| = m_i} b_\beta^i \frac{1}{w_1^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{w_n^{\beta_n}} = \frac{1}{w_1^{m_i^1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{w_n^{m_i^n}} \sum_{\|\beta| = m_i} b_\beta^i w_1^{m_i^1 - \beta_1} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_i^n - \beta_n},$$
$$Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) = \sum_{\|\alpha\| > m_i} a_\alpha^i \frac{1}{w_1^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{w_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{w_1^{s_i^1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{w_n^{s_i^n}} \sum_{\|\alpha\| > m_i} a_\alpha^i w_1^{s_i^1 - \alpha_1} \cdot \ldots \cdot w_n^{s_i^n - \alpha_n}.$$
Имеем
$$f_i\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) = P_i\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) + Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{w_1^{m_i^1} \cdot \ldots \cdot w_i^{s_i^i} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_i^n}} \cdot \left(\widetilde{P}_i(w) + \widetilde{Q}_i(w)\right), \tag{14}$$

где

$$\widetilde{P}_i(w_1,\dots,w_n) = w_1^{m_i^1}\cdot\ldots\cdot w_i^{s_i^i}\cdot\ldots\cdot w_n^{m_i^n}\cdot P_i\left(\frac{1}{w_1},\dots,\frac{1}{w_n}\right) =$$
$$= w_i^{s_i^i-m_i^i}\sum_{\|\beta\|=m_i} b_\beta^i w_1^{m_i^1-\beta_1}\cdot\ldots\cdot w_n^{m_i^n-\beta_n} = w_i^{s_i^i-m_i^i}\cdot\widetilde{\widetilde{P}}_i$$

и

$$\widetilde{\widetilde{P}}_i = \sum_{\|\beta\|=m_i} b_\beta^i w_1^{m_i^1-\beta_1}\cdot\ldots\cdot w_n^{m_i^n-\beta_n}$$

— однородные многочлены. В $\widetilde{\widetilde{P}}_i$ за знак суммы не выносится ни $w_1,\dots,$ ни w_n. Многочлены $\widetilde{Q}_i$ имеют вид

$$\widetilde{Q}_i(w_1,\dots,w_n) = w_1^{m_i^1}\cdot\ldots\cdot w_i^{s_i^i}\cdot\ldots\cdot w_n^{m_i^n}\cdot Q_i\left(\frac{1}{w},\dots,\frac{1}{w_n}\right) =$$
$$= w_1^{m_i^1}\cdot\ldots\cdot w_i^{s_i^i}\cdot\ldots\cdot w_n^{m_i^n}\cdot\frac{1}{w_1^{s_i^1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{w_n^{s_i^n}}\sum_{\|\alpha\|>m_i} a_\alpha^i w_1^{s_i^1-\alpha_1}\cdot\ldots\cdot w_n^{s_i^n-\alpha_n} =$$
$$= w_1^{m_i^1-s_i^1}\cdot\ldots\cdot[w_i]\cdot\ldots\cdot w_n^{m_i^n-s_i^n}\cdot\sum_{\|\alpha\|>m_i} a_\alpha^i w_1^{m_i^1-\alpha_1}\cdot\ldots\cdot w_n^{m_i^n-\alpha_n}.$$

Обозначим через $\widetilde{f}_i$ многочлены

$$\widetilde{f}_i(w) = \widetilde{P}_i(w) + \widetilde{Q}_i(w) = w_i^{s_i^i-m_i^i}\cdot\widetilde{\widetilde{P}}_i + \widetilde{Q}_i(w),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{15}$$

Имеем

$$\deg\widetilde{P}_i > \operatorname{ord}\widetilde{Q}_i,\quad i=1,\dots,n. \tag{16}$$

Лемма 3. *Система*

$$\widetilde{\widetilde{P}}_j(w)=0,\quad j=1,\dots,n, \tag{17}$$

имеет только одно нулевое решение, т. е. она невырождена.

Доказательство. Покажем, что система имеет единственный нуль $w_1=w_2=\ldots=w_n=0$. Доказательство ведем от противного, используя тот факт, что система

$$P_j(z)=0,\quad j=1,\dots,n, \tag{18}$$

до замены переменных имела единственный нуль $z_1=z_2=\ldots=z_n=0$.

Пусть система (17) имеет корень, у которого некоторые $w_j=0$. Тогда этот корень является бесконечно удаленным корнем системы уравнений (18), что невозможно по предположению.

Пусть система (17) имеет решение $w_j=\alpha_j\neq 0,\quad j=1,\dots,n$. Тогда, делая обратную замену переменных, получим $z_j=\frac{1}{\alpha_j},\quad j=1,\dots,n$. Поэтому этот корень является корнем системы (18), что невозможно. □

Лемма 4. *Рассмотрим систему*

$$\widetilde{P}_j(w)=0,\quad j=1,\dots,n. \tag{19}$$

Если для любого набора индексов $i_1,\dots,i_k$, $i_1<i_2<\cdots<i_k$, $k=1,\dots,n$, системы уравнений

$$\widetilde{\widetilde{P}}_{j_1}(w)=0,\ \dots,\ \widetilde{\widetilde{P}}_{j_{n-k}}=0$$

при $w_{i_1} = 0, \dots, w_{i_k} = 0$ *и при* $j_p \neq i_q$ *являются невырожденными, то система* (19) *также невырождена.*

Доказательство следует из вида функций $\widetilde{P}_j(w)$ и леммы 3.

Отметим, что при $n = 2$ леммы 3, 4 справедливы без дополнительных предположений на $P_1(z_1, z_2)$ и $P_2(z_1, z_2)$.

3. Некоторые интегральные формулы

Рассмотрим систему уравнений вида (1) с многочленами $Q_i(z)$, удовлетворяющими условиям (13). Пусть система функций (19) удовлетворяет условиям леммы 4 и следствия 1.

Обозначим через $\Gamma_{\widetilde{P}} = \Gamma_{\widetilde{P}}(\varepsilon)$ цикл

$$\Gamma_{\widetilde{P}} = \{w \in \mathbb{C}^n : |\widetilde{P}_i| = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i > 0,\ i = 1, \dots, n\},$$

который в силу следствия 1 не пересекается с кординатными плоскостями при п. в. ε_i, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим вычетный интеграл

$$\widetilde{J}_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w^{\gamma+I} \frac{df(1/w)}{f(1/w)},$$

где $w^{\gamma+I} = w_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1}$, $f(1/w) = f_1(1/w_1, \dots, 1/w_n) \cdot \ldots \cdot f_n(1/w_1, \dots, 1/w_n)$, $df(1/w) = df_1(1/w_1, \dots, 1/w_n) \wedge \dots \wedge df_n(1/w_1, \dots, 1/w_n)$. Фактически $\widetilde{J}_\gamma$ получается из J_γ (10) с помощью замены в подинтегральном выражении $z_j = 1/w_j$, $j = 1, \dots, n$, и замены цикла интегрирования Γ_P на $\Gamma_{\widetilde{P}}$. Но равенство этих интегралов нужно доказывать.

Лемма 5. *Для произвольного мультииндекса* γ *интеграл*

$$\widetilde{J}_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\widetilde{f}_1}{\widetilde{f}_1} \wedge \frac{d\widetilde{f}_2}{\widetilde{f}_2} \wedge \dots \wedge \frac{d\widetilde{f}_n}{\widetilde{f}_n}.$$

Доказательство. В силу формулы (14) справедливо равенство

$$\frac{df_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)}{f_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)} = \frac{d\widetilde{f}_j(w)}{\widetilde{f}_j(w)} - \sum_{k=1}^{n} c_k^j \cdot \frac{dw_k}{w_k},$$

где c_k^j — некоторые константы.

Напомним, что $\widetilde{f}_i = \widetilde{P}_i + \widetilde{Q}_i = w_i^{s_i^i - m_i^i} \cdot \widetilde{\widetilde{P}}_i + \widetilde{Q}_i$. Тогда

$$\widetilde{J}_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w^{\gamma+I} \cdot \frac{df}{f} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w^{\gamma+I} \left(\frac{d\widetilde{f}_1(w)}{\widetilde{f}_1(w)} - \sum_{k=1}^{n} c_k^1 \cdot \frac{dw_k}{w_k}\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\widetilde{f}_n(w)}{\widetilde{f}_n(w)} - \sum_{k=1}^{n} c_k^n \cdot \frac{dw_k}{w_k}\right).$$

Интегралы

$$\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w^{\gamma+I} \frac{dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n}{w_1 \cdot \ldots \cdot w_n} = 0$$

в силу тех же причин, что и интегралы в теореме 1, поскольку степень знаменателя равна n и, следовательно, меньше степени числителя.

Теперь рассмотрим интегралы

$$\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w^{\gamma+I}\frac{d\widetilde{f}_{i_1}(w)}{\widetilde{f}_{i_1}(w)}\wedge\dots\wedge\frac{d\widetilde{f}_{i_l}(w)}{\widetilde{f}_{i_l}(w)}\wedge\frac{dw_{j_1}}{w_{j_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{dw_{j_{n-l}}}{w_{j_{n-l}}}, \tag{20}$$

если $0\leqslant l<n$ и ε_j достаточно велики. Так как

$$\frac{1}{\widetilde{f}_j(w)}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\widetilde{Q}_j^p(w)}{\widetilde{P}_j^{p+1}},$$

то интегралы (20) являются абсолютно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w^{\gamma+I}\frac{\widetilde{Q}_1^{p_1}\cdot\widetilde{Q}_2^{p_2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q}_{i_l}^{p}\cdot h(w)dw_1\wedge dw_2\wedge\dots\wedge dw_n}{\widetilde{P}_1^{p_1+1}\cdot\widetilde{P}_2^{p_2+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{P}_{i_l}^{p_l+1}\cdot w_{j_{i_1}}\cdot\ldots\cdot w_{j_{n-l}}},$$

где $h(w)$ — некоторая функция, голоморфная по w. Все они обращаются в нуль. Действительно, в знаменателе отсутствуют множители w_i, а также какой-то из $\widetilde{P}_j$. Поэтому цикл $\Gamma_{\widetilde{P}}$ является границей цепи $S_j=\{|\widetilde{P}_1(w)|=\varepsilon_1,\ldots,|\widetilde{P}_{j-1}(w)|=\varepsilon_{j-1},|\widetilde{P}_j(w)|<\varepsilon_j,|\widetilde{P}_{j+1}(w)|=\varepsilon_{j+1},\ldots,|\widetilde{P}_n(w)|=\varepsilon_n\}$, лежащей в области голоморфности подинтегрального выражения. Применяя формулу Стокса, получаем требуемое. □

Поскольку для функций из системы (15) справедливы неравенства (16), а система функций $\widetilde{P}_1(w),\ldots,\widetilde{P}_n(w)$ невырождена, то хорошо известна теорема Безу, говорящая о том, что система уравнений

$$\widetilde{f}_j(w)=0,\quad j=1,\ldots,n, \tag{21}$$

имеет конечное число корней (считая каждый корень столько раз какова его кратность) и это число равно произведению степеней многочленов $\widetilde{P}_j(w)$.

Лемма 6. *Пусть $w_{(1)},\ldots,w_{(s)}$ — корни системы* (21) (*с учетом их кратностей*), *где $w_{(j)}=(w_{j1},w_{j2},\ldots,w_{jn})$, $j=1,2,\ldots,s$. Тогда*

$$\widetilde{J}_\gamma=\sum_{j=1}^{s}w_{j1}^{\gamma_1+1}\cdot w_{j2}^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot w_{jn}^{\gamma_n+1}. \tag{22}$$

Утверждение леммы следует из формулы многомерного логарифмического вычета и теоремы Южакова о смещенном остове ([2], § 4).

Если какие-то $w_{(j)}$ имеют нулевые координаты, то в формулу (22) они входить не будут. Тогда, если все координаты корня $w_{(j)}$ не равны нулю, то точка с координатами $z_{jm}=\frac{1}{w_{jm}}$, $m=1,2,\ldots,n$, является корнем системы (1). Количество таких корней с учетом их кратностей равно $p\leqslant s$. Они не лежат на координатных плоскостях.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1}\cdot z_{j2}^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}}=$$

$$=\sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\gamma\|+n}(-1)^{||\alpha||}\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}}\left[\widetilde{\Delta}\cdot w_1^{\gamma_1+1}\cdot w_2^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{\widetilde{Q}_1^{\alpha_1}\cdot\widetilde{Q}_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q}_n^{\alpha_n}}{\widetilde{P}_1^{\alpha_1+1}\cdot\widetilde{P}_2^{\alpha_2+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{P}_n^{\alpha_n+1}}\right]dw,$$

где $\widetilde{\Delta}$ — якобиан системы (15).

Доказательство вытекает из леммы 6 и теоремы 1.

4. Разделяющие циклы

Рассмотрим цикл $\Gamma_P = \Gamma_P(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Перейдем в нем к новым переменным $z_j = \dfrac{1}{w_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Получим

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_P = \{w : |\tilde{\tilde{P}}_j(w)| = |w_1^{m_j^1} w_2^{m_j^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_j^n}| \cdot \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

Этот цикл лежит на множестве

$$X = \{\mathbb{C}^n \setminus \{\{w_1 = 0\} \cup \{w_2 = 0\} \cup \cdots \cup \{w_n = 0\}\}\}$$

(в силу невырожденности системы $\tilde{\tilde{P}}_1(w), \ldots, \tilde{\tilde{P}}_n(w)$), которое является областью голоморфности (многообразием Штейна в $\mathbb{C}^n$).

Определим дивизоры $F_j = \{w : \tilde{\tilde{P}}_j(w) = 0\}$, обозначим

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n.$$

Лемма 7. *Справедливо включение* $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P \subset X \setminus F$.

Доказательство. Имеем

$$P_j\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right) = \frac{1}{w_1^{m_1^j}} \frac{1}{w_2^{m_1^j}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{w_n^{m_1^j}} \tilde{\tilde{P}}_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

(см. раздел 1). Поэтому, если $\tilde{\tilde{P}}_j(w) = 0$, то из вида цикла $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P$ получаем, что хотя бы одно из $w_k = 0$. □

Лемма 8. *Цикл* $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P$ *является разделяющим относительно множества* $X \setminus F$.

Доказательство. По определению [2], [3] цикл $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P$ является *разделяющим* относительно множества $X \setminus F$, если он лежит в $X \setminus F$ и гомологичен нулю на множестве

$$X \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{j-1} \cup F_{j+1} \cup \cdots \cup F_n)$$

для любого $j = 1, \ldots, n$.

Согласно лемме 7 имеем $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P \subset X \setminus F$.

Покажем, например, что $\widetilde{\Gamma}_P$ гомологичен нулю на множестве $X \setminus (F_2 \cup \cdots \cup F_n)$. Для этого достаточно показать, что цикл $\widetilde{\Gamma}_P$ является границей некоторой цепи из $X \setminus (F_2 \cup \cdots \cup F_n)$.

Рассмотрим цепь

$$S = \{w : |\tilde{\tilde{P}}_1| < \varepsilon_1 |w_1^{m_1^1} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_1^n}|,\ |\tilde{\tilde{P}}_2| = \varepsilon_2 |w_1^{m_2^1} \cdot \ldots \cdot w_2^{m_2^n}|, \ldots, |\tilde{\tilde{P}}_n| = \varepsilon_n |w_1^{m_n^1} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_n^n}|\}.$$

Ясно, что S лежит на множестве $X \setminus (F_2 \cup \cdots \cup F_n)$ и его граница совпадает с $\widetilde{\Gamma}_P$.

Возвращаясь к переменным z, получим

$$S = \{z : |P_1(z)| < \varepsilon_1,\ |P_2(z)| = \varepsilon_2, \ldots, |P_n(z)| = \varepsilon_n\}.$$

Это множество является относительно компактным в силу леммы 1. □

Отсюда по теореме Циха [2], [3] цикл $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P$ лежит в группе гомологий, порожденной циклом $\Gamma_{\tilde{\tilde{P}}} = \{w : |\tilde{\tilde{P}}_1| = \varepsilon_1, \ldots, |\tilde{\tilde{P}}_n| = \varepsilon_n\}$. Поскольку цикл $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P$ является также порождающим этой группы, то справедлива

Теорема 3. *Циклы* $\tilde{\tilde{\Gamma}}_P$ *и* $\Gamma_{\tilde{\tilde{P}}}$ *гомологичны в* X.

Так как отображение $z_j = 1/w_j$, $j = 1, \ldots, n$, является диффеоморфизмом X, то справедливо

Следствие 2. Циклы Γ_P и $\Gamma_{\widetilde{\widetilde{P}}}$ гомологичны.

Теорема 4. *Цикл*

$$\Gamma_P = \{z \in \mathbb{C}^n : |P_i| = r_i, \quad r_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

гомологичен циклу

$$\Gamma_{\widetilde{P}} = \{w \in \mathbb{C}^n : |\widetilde{P}_i| = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Доказательство. Рассмотрим цикл Γ_P. Сделаем в нем замену переменных $z_1 = 1/w_1, z_2 = = 1/w_2, \ldots, z_n = 1/w_n$. Получим цикл $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_P$, т. е.

$$\left\{w : |\widetilde{\widetilde{P}}_1| = |w_1^{m_1^1} \cdot w_2^{m_1^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_1^n}| \cdot r_1, |\widetilde{\widetilde{P}}_2| = |w_1^{m_2^1} \cdot w_2^{m_2^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_2^n}| \cdot r_2, \ldots |\widetilde{\widetilde{P}}_n| = |w_1^{m_n^1} \cdot w_2^{m_n^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_n^n}| \cdot r_n\right\}.$$

Умножим теперь каждое из этих уравнений на $w_i^{s_i^i - m_i^i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получим

$$|w_1^{s_1^1 - m_1^1} \cdot \widetilde{\widetilde{P}}_1| = |w_1^{s_1^1} \cdot w_2^{m_1^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_1^n}| \cdot r_1, |w_2^{s_2^2 - m_2^2} \cdot \widetilde{\widetilde{P}}_2| = |w_1^{m_2^1} \cdot w_2^{s_2^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_2^n}| \cdot r_2, \ldots,$$

$$|w_n^{s_n^n - m_n^n} \cdot \widetilde{\widetilde{P}}_n| = |w_1^{m_n^1} \cdot w_2^{s_n^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_n^n}| \cdot r_n.$$

Левая часть в них — это $\widetilde{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, поэтому пришли к равенству

$$\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_P = \{w : |\widetilde{P}_1| = |w_1^{s_1^1} \cdot w_2^{m_1^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_1^n}| \cdot r_1, |\widetilde{P}_2| = |w_1^{m_2^1} \cdot w_2^{s_2^2} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_2^n}| \cdot r_2, \ldots, |\widetilde{P}_n| = \\ = |w_1^{m_n^1} \cdot w_2^{m_n^2} \cdot \ldots \cdot w_2^{s_n^n}| \cdot r_n\}.$$

Далее доказательство гомологичности циклов $\Gamma_{\widetilde{P}}$ и Γ_P идет по схеме предыдущих рассуждений. $\square$

5. Алгебраические системы уравнений

Здесь предполагается, что система (18) невырождена, не имеет бесконечно удаленных корней в $\overline{\mathbb{C}}^n$ и удовлетворяет условиям следствия 1 и леммы 4. Отметим, что при $n = 2$ дальнейшие утверждения верны только при предположении невырожденности системы (18).

Лемма 9. *Выполняется равенство*

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_P} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \cdots \wedge \frac{df_n}{f_n} = \\ = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\widetilde{f}_1}{\widetilde{f}_1} \wedge \frac{d\widetilde{f}_2}{\widetilde{f}_2} \wedge \ldots \wedge \frac{d\widetilde{f}_n}{\widetilde{f}_n} = (-1)^n \widetilde{J}_\gamma.$$

Доказательство. Производя в J_γ замену переменных $z_j = 1/w_j$, $j = 1, \ldots, n$, применяя теорему 4 и лемму 5, получаем требуемое. Знак изменился в силу того, что при рассматриваемой замене изменяется ориентация пространства $\mathbb{C}^n$. $\square$

В дальнейшем нам нужна обобщенная формула преобразования вычета Гротендика ([18], а также [4], гл. 2).

Теорема 5 ([18]). *Пусть $h(w)$ — голоморфная функция, а полиномы $f_k(w)$ и $g_j(w)$, $j,k = 1,\dots,n$, связаны соотношениями*

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f_k, \quad j = 1,2,\dots,n,$$

где матрица $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n}$ состоит из многочленов. Рассмотрим циклы

$$\Gamma_f = \{w : \ |f_j(w)| = r_j, \ j = 1,\dots,n\}, \quad \Gamma_g = \{w : \ |g_j(z)| = r_j, \ j = 1,\dots,n\},$$

где все $r_j > 0$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_f} h(w)\frac{dw}{f^{\alpha}} = \sum_{K,\sum\limits_{j=1}^{n} k_{sj} = \beta_s} \frac{\beta!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n}(k_{sj})!} \int_{\Gamma_g} h(w) \frac{\det A \prod\limits_{s,j=1}^{n} a_{sj}^{k_{sj}}\, dw}{g^{\beta}}, \tag{23}$$

где $\beta! = \beta_1!\beta_2!\dots\beta_n!$, $\beta = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$, суммирование в формуле ведется по всем целочисленным неотрицательным матрицам $K = \|k_{sj}\|_{s,j=1}^{n}$ с условиями, что $\sum\limits_{s=1}^{n} k_{sj} = \alpha_j$, а $\beta_s = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{js}$. Здесь $f^{\alpha} = f_1^{\alpha_1}\cdots f_n^{\alpha_n}$, $g^{\beta} = g_1^{\beta_1}\cdots g_n^{\beta_n}$.

Теорема 6. *Справедливы формулы*

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1}\cdot z_{j2}^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w_1^{\gamma_1+1}\cdot w_2^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{d\widetilde{f}_1}{\widetilde{f}_1}\wedge\frac{d\widetilde{f}_2}{\widetilde{f}_2}\wedge\ldots\wedge\frac{d\widetilde{f}_n}{\widetilde{f}_n} =$$

$$= \sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\gamma\|+n} \frac{(-1)^{n+\|\alpha\|}}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w_1^{\gamma_1+1}\cdot w_2^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{\widetilde{\Delta}\cdot\widetilde{Q}_1^{\alpha_1}\cdot\widetilde{Q}_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q}_n^{\alpha_n}dw_1\wedge dw_2\wedge\ldots\wedge dw_n}{\widetilde{P}_1^{\alpha_1+1}\cdot\widetilde{P}_2^{\alpha_2+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{P}_n^{\alpha_n+1}} =$$

$$= \sum_{\|K\|\leqslant\|\gamma\|+n} \frac{(-1)^{\|K\|+n}\prod\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_{sj}\right)!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n}(k_{sj})!}\mathfrak{M}\left[\frac{w^{\gamma+I}\cdot\widetilde{\Delta}\cdot\det A\cdot Q^{\alpha}\prod\limits_{s,j=1}^{n} a_{sj}^{k_{sj}}}{\prod\limits_{j=1}^{n} w_j^{\beta_j N_j+\beta_j+N_j}}\right], \tag{24}$$

где $\|K\| = \sum\limits_{s,j=1}^{n} k_{sj}$, а функционал $\mathfrak{M}$ сопоставляет многочлену Лорана его свободный член.

Доказательство. Ранее было доказано (см. теорему 2), что

$$J_{\gamma} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_P}\frac{1}{z_1^{\gamma_1+1}\cdot z_2^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w_1^{\gamma_1+1}\cdot w_2^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{d\widetilde{f}_1}{\widetilde{f}_1}\wedge\frac{d\widetilde{f}_2}{\widetilde{f}_2}\wedge\cdots\wedge\frac{d\widetilde{f}_n}{\widetilde{f}_n} =$$

$$= \sum_{\|\alpha\|\leqslant\|\gamma\|+n} \frac{(-1)^{\|\alpha\|+n}}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w_1^{\gamma_1+1}\cdot w_2^{\gamma_2+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{\widetilde{\Delta}\cdot\widetilde{Q}_1^{\alpha_1}\cdot\widetilde{Q}_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q}_n^{\alpha_n}dw_1\wedge dw_2\wedge\ldots\wedge dw_n}{\widetilde{P}_1^{\alpha_1+1}\cdot\widetilde{P}_2^{\alpha_2+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{P}_n^{\alpha_n+1}}.$$

Поскольку система однородных многочленов $\widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_n$ имеет только один общий нуль — начало координат, то по теореме Гильберта о нулях (например, [19]) существуют такие натуральные числа $N_1, \dots, N_n$, что

$$w_j^{N_j+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f_k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

т. е. в качестве функций $g_j(w)$ можно взять мономы $w_j^{N_j+1}$. По теореме Маколея (см. [20], а также [3]) эти числа N_j можно выбрать с условием $N_j \leqslant k_1 + \dots + k_n - n$.

Используя формулу (23), понятие функционала $\mathfrak{M}$ и подставляя вместо g_j мономы $w_j^{N_j+1}$ в последних интегралах, получаем последнее равенство в теореме. □

Отметим, что теорема 6 при $n = 2$ верна без всяких дополнительных условий на систему многочленов $P_1,\ P_2$, кроме невырожденности.

Формула (24) является многомерным аналогом формулы Варинга для алгебраических систем уравнений.

Отметим, что в работе [21] рассмотрены общие алгебраические системы уравнений, получены разложения их решений в гипергеометрические ряды. Кроме того, в ней доказаны аналоги формул Варинга для систем

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)} \cup \{0\}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda = 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n < m_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

т. е. старшие однородные части являются мономами. Здесь рассмотрены другие (более общие) системы уравнений с функциями вида (15).

6. Трансцендентные системы уравнений

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции f_j мероморфные и имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{25}$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$, разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$, $f_j^{(2)}(0) \neq 0$,

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $P_{j,s}(z) + Q_{j,s}(z)$, а $Q_{j,s}(z)$ — функции, удовлетворяющие условиям (13), $s = 1, 2, \dots$.

Для каждого набора индексов $j_1, \dots, j_n$, где $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \dots, i_n$, где $i_1, \dots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных уравнений

$$f_{1,j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2,j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \ \dots, \ f_{n,j_n}^{(i_n)}(z) = 0 \tag{26}$$

имеют (согласно лемме 6 и теореме 2) конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей):

$$z_{(1)},\ z_{(2)}, \dots, z_{(l)}, \dots .$$

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdot \ldots \cdot z_{n(l)}^{\beta_n+1}}. \tag{27}$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_n$, как и прежде, — неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (26), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{j_s}^{(2)}$, и равен -1, если в систему вида (26), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{j_s}^{(2)}$. Для системы (26), составленной из функций вида (25), точки $z_{(l)}$ являются корнями или особыми точками (полюсами). Все функции f_j голоморфны в окрестности нуля и для них определены интегралы J_β, так как они имеют вид (1).

Существует связь между ростом нулевого множества голоморфной функции конечного порядка роста и самим порядком ([22], гл. 3), похожая на аналогичную связь для функций одного переменного. Но для многих переменных, вообще говоря, отсутствует связь между порядками целых функций и ростом их общих нулей.

Теорема 7. *Для системы уравнений с мероморфными функциями* (25) *ряд* (27) *абсолютно сходится и справедливы формулы*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

Доказательство. Так как

$$d\frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)} = \frac{d\,f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_j^{(2)}(z)}{f_j^{(2)}(z)},$$

то

$$d\frac{f_1^{(1)}(z)}{f_1^{(2)}(z)} \wedge d\frac{f_2^{(1)}(z)}{f_2^{(2)}(z)} \wedge \ldots \wedge d\frac{f_n^{(1)}(z)}{f_n^{(2)}(z)} = \left(\frac{d\,f_1^{(1)}(z)}{f_1^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_1^{(2)}(z)}{f_1^{(2)}(z)}\right) \wedge \left(\frac{d\,f_2^{(1)}(z)}{f_2^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_2^{(2)}(z)}{f_2^{(2)}(z)}\right) \wedge$$
$$\wedge \ldots \wedge \left(\frac{d\,f_n^{(1)}(z)}{f_n^{(1)}(z)} - \frac{d\,f_n^{(2)}(z)}{f_n^{(2)}(z)}\right) = \sum (-1)^s \frac{d\,f_1^{(i_1)}(z)}{f_1^{(i_1)}(z)} \wedge \frac{d\,f_2^{(i_2)}(z)}{f_2^{(i_2)}(z)} \wedge \ldots \wedge \frac{d\,f_n^{(i_n)}(z)}{f_n^{(i_n)}(z)}, \tag{28}$$

где s — число сомножителей, для которых $i_l = 2$, а сумма берется по всевозможным наборам чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$, равным 1 или 2.

Из соотношений (28) видно, что теорему достаточно доказать для целых функций $f_j(z)$.

В этом случае

$$\frac{d\,f_j(z)}{f_j(z)} = \frac{d\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d\,f_{js}(z)}{f_{js}(z)}.$$

Причем рассматриваемый ряд сходится равномерно на γ_r. Действительно, легко проверить, что если задана последовательность непрерывных функций f_m на компакте K, равномерно на нем сходящаяся к функции f, и $f \neq 0$ на K, то начиная с некоторого номера функции $f_m \neq 0$ на K и последовательность $1/f_m$ равномерно сходится к $1/f$ на K. Точно также проверяется, что последовательности функций, равномерно сходящиеся на компакте, можно почленно умножать и равномерная сходимость остается.

По условию все $\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)$ сходятся равномерно к ненулевой на $\Gamma_f(r)$ функции. Поэтому ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{d\, f_{js}(z)}{f_{js}(z)} = \frac{d \prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \lim_{m\to\infty} \frac{d \prod\limits_{s=1}^{m} f_{js}}{\prod\limits_{s=1}^{m} f_{js}}$$

сходится равномерно на $\Gamma_f(r)$. Таким образом, интеграл J_β определен и равен сходящемуся ряду из интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_f(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{d\, f_{1s_1}(z)}{f_{1s_1}(z)} \wedge \frac{d\, f_{2s_2}(z)}{f_{2s_2}(z)} \wedge \ldots \wedge \frac{d\, f_{ns_n}(z)}{f_{ns_n}(z)},$$

в котором суммирование ведется по кубам. Поэтому ряд из $\sigma_{\beta+I}$ сходится. А поскольку сумма этого ряда не зависит от перестановок его членов, то его сходимость абсолютная.

Для каждого из этих интегралов нужная формула доказана (см. теорему 6). □

Теорема 7 является аналогом формулы Варинга для трансцендентных систем уравнений.

Вопрос о представлении функции в виде произведения целых функций хорошо изучен на комплексной плоскости. Ответ на него дает классическая теорема Адамара. Для многих переменных также известны аналоги теоремы Адамара (см. [22], [23], но, вообще говоря, функции в них не представляются в виде бесконечных произведений. Одно достаточное условие такого разложения в виде бесконечного произведения дано в [24].

Литература

[1] Айзенберг Л.А. *О формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений*, ДАН СССР **234** (3), 505–508 (1977).

[2] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе* (Наука, Новосибирск, 1979).

[3] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения* (Наука, Новосибирск, 1988).

[4] Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М.З. *Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов* (Наука, М., 1991).

[5] Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. *Многомерные аналоги формул Ньютона для систем нелинейных алгебраических уравнений и некоторые их приложения*, Сиб. матем. журн. **22** (2), 19–30 (1981).

[6] Быков В.И. *Моделирование критических явлений в химической кинетике* (Комкнига, М., 2006).

[7] Быков В.И., Цыбенова С.Б. *Нелинейные модели химической кинетики* (КРАСАНД, М., 2011).

[8] Кытманов А.М., Потапова З.Е. *Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций*, Изв. вузов. Матем., № 8, 39–48 (2005).

[9] Быков В.И., Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *Степенные суммы нелинейных систем уравнений*, Докл. РАН **416** (3), 1–4 (2007).

[10] Кытманов А.М., Мышкина Е.К. *Нахождение степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений в* $\mathbb{C}^n$, Изв. вузов. Матем., № 12, 36–50 (2013).

[11] Кытманов А.М., Мышкина Е.К. *О степенных суммах корней систем целых функций конечного порядка роста*, Вест. НГУ. Матем., механ., информатика **14** (3), 62–82 (2014).

[12] Kytmanov A.A., Kytmanov A.M., Myskina E.K. *Finding residue integrals for systems of non-algebraic equations in* $\mathbb{C}^n$, J. Symbolic Comput. **66**, 98–110 (2015).

[13] Kytmanov A.M., Khodos O.V. *On systems of non-algebraic equation in* $\mathbb{C}^n$, Contemp. Math. **662**, 77–88 (2016). Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[14] Кытманов А.М., Мышкина Е.К. *О вычислении степенных сумм корней одного класса систем неалгебраических уравнений*, Сиб. электрон. матем. изв. **12**, 190–209 (2015).

[15] Kytmanov A.A., Kytmanov A.M., Myskina E.K. *Residue integrals and Waring's formulas for a class of systems of transcendental equations in* $\mathbb{C}^n$, J. Complex variables and Elliptic Equat. **64** (1), 93–111 (2019).

[16] Khodos O.V. *On some systems of non-algebraic equations in* $\mathbb{C}^n$, J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. **7** (4), 455–465 (2014).

[17] Passare M., Tsikh A. *Residue integrals and their Mellin transforms*, Can. J. Math. **47** (5), 1037–1050 (1995).
[18] Кытманов А.М. *О формуле преобразования вычета Гротендика и некоторых ее приложениях*, Сиб. матем. журн. **29** (3), 198–202 (1988).
[19] Ван-дер-Варден Б.Л. *Алгебра* (Мир, М., 1976).
[20] Macaulay F.S. *Algebraic theory of modular systems* (Cambridge, 1916; Berlin–Heidelberg–New-York, 1971).
[21] Куликов В.Р., Степаненко В.А. *О решениях и формулах Варинга для систем n алгебраических уравнений от n неизвестных*, Алгебра и анализ **26** (5), 200–214 (2014).
[22] Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных* (Мир, М., 1989).
[23] Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных* (Наука, М., 1971).
[24] Myshkina E.K. *On one condition for the decomposition of an entire function into an infinite product*, J. Sib. Fed. Univ. Math. and Phys. **7** (1), 91–94 (2014).

Александр Мечиславович Кытманов

Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, д. 79, г. Красноярск, 660041, Россия,

e-mail: akytmanov@sfu-kras.ru

Евгения Константиновна Мышкина

Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, д. 79, г. Красноярск, 660041, Россия,

e-mail: elfifenok@mail.ru

A.M. Kytmanov and E.K. Myshkina

Residue integrals and Waring formulas for algebraical and transcendental systems of equations

Abstract. We discuss a system of algebraical and transcendental systems of equations of general form. We determine residue integrals over the cycles, connected with the system. We give formulas for their calculation and give multi-dimensional analogs of Waring formulas, i. e., connection between the coefficients of equations with power sums of the roots of system.

Keywords: algebraical and non-algebraical system of equations, residue integral, Waring formula, power sum of roots.

Aleksandr Mechislavovich Kytmanov

Siberian Federal University,
79 Svobodnyi Ave., Krasnoyarsk, 660041 Russia,

e-mail: akytmanov@sfu-kras.ru

Evgeniya Konstantinovna Myshkina

Siberian Federal University,
79 Svobodnyi Ave., Krasnoyarsk, 660041 Russia,

e-mail: elfifenok@mail.ru