

УДК 517.9

Coupled Pendulums System Under Control by Vertical Oscillations

**Mikhail E. Semenov^{a,b}, Andrey E. Pigarev^a,
Antonina A. Malinina^b and Mikhail A. Popov^{*b}**

*^aMilitary Education and Research Centre of Military-Air Forces
“Military-Air Academy
named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin”
54a Starykh Bolshevikov Str., Voronezh, 394064, Russia
^bVoronezh State Technical University
84 20 Let Oktyabrya Str., Voronezh, 394006, Russia*

Received 18.01.2019, received in revised form 14.02.2019, accepted 24.03.2019

In this paper we propose a mathematical model consisting of two inverse pendulums with an elastic coupling (by spring). We propose a dynamic programmed control of the model motion, implemented through vertical oscillations of the common pendulums pivot point. We investigate dynamics of this mechanical system, and formulated a condition for identifying stability of the system. We constructed stability zones in the spaces of the original and dimensionless parameters. Also, we obtain evolution of stability zones depending on spring stiffness values. In conclusion, we presented results of numerical software experiments for various system configurations.

Keywords: inverted pendulum, linked oscillators, stabilization, controlling, stability zones.

Citation: Semenov M.E., Pigarev A.E., Malinina A.A., Popov M.A. Coupled pendulums system under control by vertical oscillations, J. Sib. Fed. Univ. Eng. technol., 2019, 12(6), 694-707. DOI: 10.17516/1999-494X-0169.

© Siberian Federal University. All rights reserved

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0).

* Corresponding author E-mail address: soeltic@gmail.com

Система связанных маятников с управлением вертикальными осцилляциями

**М.Е. Семенов^{а,б}, А.Е. Пигарев^а,
А.А. Малинина^б, М.А. Попов^б**

*^аВоенный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»*

Россия, 394064, Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а

*^бВоронежский государственный технический университет
Россия, 394006, Воронеж, ул. 20 лет Октября, 84*

В статье рассматривается математическая модель системы, состоящей из двух обратных маятников с упругой связью (пружиной). Система управляется программно, посредством вертикальных осцилляций точки крепления одного из маятников. Проведено исследование динамики указанной механической системы, сформулированы условия, обеспечивающие ее стабилизацию. Построены зоны устойчивости в пространстве исходных параметров. Представлена эволюция зон устойчивости в зависимости от значений жесткости пружины. В работе также приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих динамику системы.

Ключевые слова: обратный маятник, связанные осцилляторы, стабилизация, управление, зоны устойчивости.

Введение

Теория колебаний нелинейных систем широко применяется при моделировании различных физических процессов и явлений [1], таких как колебания в электрических цепях, состоящих из нескольких взаимосвязанных контуров, молекул в жидкостях и твердых телах и т.д. В таких системах реализуются разнообразные дисперсионные зависимости, на основе которых исследуется распространение волн в нелинейных средах. Большинство таких моделей систем основывается на законах движения простейших связанных осцилляторов и их цепочек, динамика которых формализуется посредством линейных и нелинейных уравнений. Во множестве подобных задач рассматриваются колебания маятников с устойчивым нулевым положением [2-4]. Подробный обзор последних результатов в этой области приведен, например, в [5].

В то же время в ряде практически важных задач (например, колебания поддерживающих контуров в строительстве, проблема стабилизации плазмы, стабилизация синтезированных биологических цепочек и т.п.) нулевое положение является неустойчивым. В связи с этим отметим классическую задачу стабилизации верхнего положения обратного маятника [6]. При решении этой задачи основное внимание уделялось проблеме стабилизации неустойчивого положения равновесия маятника путем движений нижней точки крепления. Этой проблеме посвящено огромное количество публикаций, достаточно подробный обзор которых содержится в [7]. Отметим, что стабилизация верхнего положения может быть достигнута различными способами: периодическими вертикальными осцилляциями нижней точки крепления, с ис-

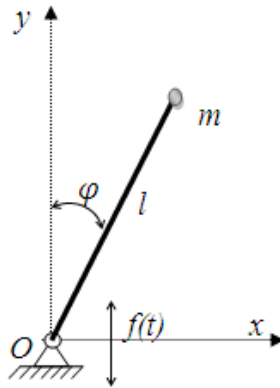


Рис. 1. Модель вертикального маятника с осциллирующим креплением

Fig. 1. Model of a vertical pendulum with an oscillating mount

пользованием принципа обратной связи и др. Задача стабилизации маятника с помощью вертикальных осцилляций точки крепления хорошо изучена (рис. 1). Теоретическое объяснение этого явления было сделано Стефенсоном в 1908 г. [8]. Физическое же объяснение динамической стабилизации перевернутого маятника вертикальными осцилляциями точки крепления было предложено академиком П.Л. Капицей в 1951 г., ученый также дал оценку снизу частоты вибрации, при которой верхнее положение становится устойчивым [9].

Согласно [9, 10], уравнение динамики маятника единичной массы имеет вид

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{l}(g + \ddot{f}(t)) \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали; l – длина маятника; g – ускорение свободного падения; $f(t)$ – закон движения крепления.

При движении нижней точки крепления по гармоническому закону уравнение (1) сводится к хорошо известному уравнению Матье [4]. Для адекватного описания динамики реальных физических и механических систем необходимо учитывать эффекты гистерезисной природы – люфты, упоры [11, 12]. Исследование устойчивости таких систем детально проведено в [13-17].

Отметим, что проблеме стабилизации систем связанных неустойчивых осцилляторов посвящено совсем немного работ. Исследование возможности стабилизации таких систем при помощи горизонтальных движений проведено в [18-20]. Также представляет интерес другая задача – возможность управления различными конфигурациями цепочек с помощью вертикальных осцилляций точки крепления.

В настоящей работе исследуется система, состоящая из двух перевернутых маятников, соединенных пружиной, с периодическим управляющим воздействием на один из них.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, где основание одного из маятников находится на подвижной планке, которая может перемещаться вдоль вертикальной оси, основание второго статически зафиксировано. Физическая модель изучаемой системы приведена на рис. 2.

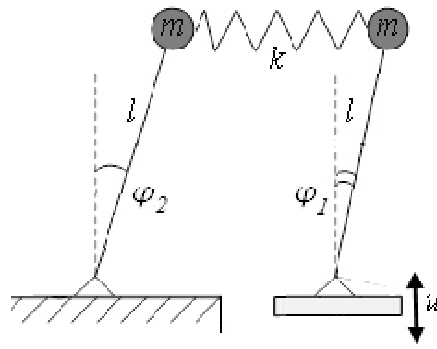


Рис. 2. Физическая модель связанных маятников

Fig. 2. Physical model of coupled pendulums

При этом отметим, что при жесткости пружины $k = 0$ получается система из двух одинаковых маятников с управлением одним из них. В таком случае движение маятника на планке описывается уравнением Матье, второй маятник описывается обычным уравнением гармонических колебаний. В случае $k \rightarrow \infty$ связь становится жесткой (пружину можно заменить нерастяжимым стержнем) и маятники движутся как один. Таким образом, в обоих случаях для стабилизации системы достаточно воспользоваться известными результатами [9, 10].

Ниже рассматривается случай, когда жесткость пружины $k \in (0; \infty)$. Будем считать, что планка осуществляет движение так, что ее ускорение изменяется периодически с частотой ω , а амплитуда колебаний равна $A\omega^2$. Это соответствует тому, что линеаризованное уравнение движения описанной выше системы будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{l}(g + A\omega^2 w(t))\varphi_1 + \frac{kl^2}{J}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{mgl}{J}\varphi_2 - \frac{kl^2}{J}(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} w(t) &= -\text{sign}(\sin(\omega t)), \\ \varphi_1(0) &= \varphi_{11} \quad \dot{\varphi}_1(0) = \varphi_{12}, \\ \varphi_2(0) &= \varphi_{21} \quad \dot{\varphi}_2(0) = \varphi_{22}, \end{aligned}$$

где $w(t)$ – ускорение основания маятников; J – момент инерции маятника; k – жесткость пружины.

Таким образом, задача заключается в следующем:

Выбор такого режима управления, который бы обеспечивал стабилизацию системы.

Определение зон устойчивости в пространстве параметров (амплитуда-частота), обеспечивающих стабилизацию.

2. Основные уравнения динамики

Перейдем к безразмерным единицам, сделав в (2) следующую замену:

$$\tau = \omega t, \quad \alpha = \frac{g}{l}, \quad \beta = \frac{A\omega^2}{l}, \quad \gamma = \frac{kl^2}{J}. \quad (3)$$

В итоге имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = (\alpha + \beta \operatorname{sign}(\sin \tau))\varphi_1 + \gamma(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 = \alpha\varphi_2 - \gamma(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ \varphi_1(0) = \varphi_{11} \quad \dot{\varphi}_1(0) = \varphi_{12}, \\ \varphi_2(0) = \varphi_{21} \quad \dot{\varphi}_2(0) = \varphi_{22}. \end{cases} \quad (4)$$

Перепишем (4) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = p(\tau)z_1 + \gamma z_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = (\alpha - \gamma)z_3 + \gamma z_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \varphi_{11} \quad \dot{\varphi}_1(0) = \varphi_{12}, \\ \varphi_2(0) &= \varphi_{21} \quad \dot{\varphi}_2(0) = \varphi_{22}, \end{aligned}$$

где $p(\tau) = \alpha + \beta \operatorname{sign}(\sin \tau) - \gamma$. Матрица полученной системы имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ p(\tau) & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & (\alpha - \gamma) & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу сделанных предположений матрица $\mathbf{P}(\tau)$ является периодической функцией времени с периодом 2π , так что для любого момента времени τ справедливо равенство $\mathbf{P}(\tau + 2\pi) \equiv \mathbf{P}(\tau)$.

Будем говорить, что уравнение (4) устойчиво или неустойчиво по Лагранжу, если устойчива или, соответственно, неустойчива система (5). То есть все решения $z(\tau)$ ограничены на $[0, \infty)$. В силу периодичности матрицы системы из результатов Флоке [13] следует, что задача исследования устойчивости сводится к нахождению фундаментальной матрицы решений в момент 2π – матрицы монодромии и оценке ее собственных значений (мультипликаторов). Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы значения всех мультипликаторов находились внутри единичного круга:

$$|\lambda| < 1. \quad (6)$$

В силу того, что матрица $\mathbf{P}(\tau)$ кусочно-постоянная, фундаментальная система решений и, следовательно, матрица монодромии могут быть представлены в явном виде. Для этого рассмотрим поведение кусочно-постоянной функции $r(\tau) = \operatorname{sign}(\sin \tau)$ с периодом 2π и соответственно $p(\tau)$ (рис. 3).

На рис. 3 видно, что система (4) на промежутке $(0, 2\pi)$ может быть описана двумя линейными системами с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{z}_1^1 = z_2^1 \\ \dot{z}_2^1 = (\alpha + \beta - \gamma)z_1^1 + \gamma z_3^1 \\ \dot{z}_3^1 = z_4^1 \\ \dot{z}_4^1 = (\alpha - \gamma)z_3^1 + \gamma z_1^1 \end{cases} \quad \tau \in [0, \pi] \quad (7)$$

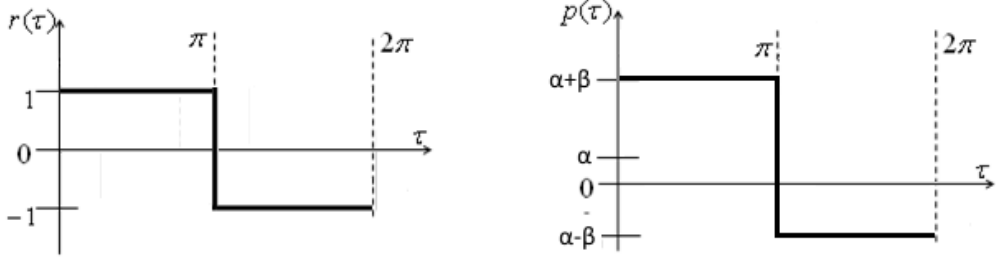

 Рис. 3. Графики функций $r(\tau)$ и $p(\tau)$

 Fig. 3. Function graphs: $r(\tau)$ and $p(\tau)$

$$\begin{cases} \dot{z}_1^1 = z_2^1 \\ \dot{z}_2^1 = (\alpha - \beta - \gamma)z_1^1 + \gamma z_3^1 \\ \dot{z}_3^1 = z_4^1 \\ \dot{z}_4^1 = (\alpha - \gamma)z_3^1 + \gamma z_1^1 \end{cases} \quad \tau \in [\pi, 2\pi] \quad (8)$$

Так как фундаментальная матрица должна быть непрерывна, то решения систем (7)-(8) должны совпадать в момент времени π :

$$Z^1(0) = \mathbf{E}, \quad Z^1(\pi) = Z^2(\pi),$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. Найдем, последовательно интегрируя системы, (7)-(8):

$$Z^1(\tau) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\tau a_1) a_3 + \text{ch}(\tau a_2) a_4 & \text{sh}(\tau a_1) a_7 + \text{sh}(\tau a_2) a_6 & (\text{ch}(\tau a_1) - \text{ch}(\tau a_2)) a_5 & \text{sh}(\tau a_1) a_9 - \text{sh}(\tau a_2) a_8 \\ \text{sh}(\tau a_1) a_{13} + \text{sh}(\tau a_2) a_{12} & \text{ch}(\tau a_1) a_3 + \text{ch}(\tau a_2) a_4 & \text{sh}(\tau a_1) a_{10} + \text{sh}(\tau a_2) a_{11} & (\text{ch}(\tau a_1) - \text{ch}(\tau a_2)) a_5 \\ (\text{ch}(\tau a_1) - \text{ch}(\tau a_2)) a_5 & \text{sh}(\tau a_1) a_9 - \text{sh}(\tau a_2) a_8 & \text{ch}(\tau a_1) a_4 + \text{ch}(\tau a_2) a_3 & \text{sh}(\tau a_1) a_{15} + \text{sh}(\tau a_2) a_{14} \\ \text{sh}(\tau a_1) a_{10} - \text{sh}(\tau a_2) a_{11} & (\text{ch}(\tau a_1) - \text{ch}(\tau a_2)) a_5 & \text{sh}(\tau a_1) a_{17} + \text{sh}(\tau a_2) a_{16} & \text{ch}(\tau a_1) a_4 + \text{ch}(\tau a_2) a_3 \end{pmatrix},$$

$$Z^2(\tau) = Z^1(\pi) \begin{pmatrix} \text{ch}((\tau - \pi) c_1) a_3 + \text{ch}((\tau - \pi) a_1) a_4 & \text{sh}((\tau - \pi) c_1) a_{14} + \text{sh}((\tau - \pi) a_1) a_{15} & (\text{ch}((\tau - \pi) a_1) - \text{ch}((\tau - \pi) c_1)) a_5 & \text{sh}((\tau - \pi) a_1) c_4 - \text{sh}((\tau - \pi) c_1) a_8 \\ \text{sh}((\tau - \pi) a_1) c_5 + \text{sh}((\tau - \pi) c_1) c_6 & \text{ch}((\tau - \pi) c_1) a_3 + \text{ch}((\tau - \pi) a_1) a_4 & \text{sh}((\tau - \pi) a_1) c_2 + \text{sh}((\tau - \pi) c_1) c_3 & (\text{ch}((\tau - \pi) a_1) - \text{ch}((\tau - \pi) c_1)) a_5 \\ \text{ch}((\tau - \pi) a_1) - \text{ch}((\tau - \pi) c_1) a_5 & \text{sh}((\tau - \pi) a_1) c_4 - \text{sh}((\tau - \pi) c_1) a_8 & \text{ch}((\tau - \pi) a_1) a_3 + \text{ch}((\tau - \pi) c_1) a_4 & \text{sh}((\tau - \pi) c_1) a_6 + \text{sh}((\tau - \pi) a_1) a_7 \\ \text{sh}((\tau - \pi) a_1) c_2 + \text{sh}((\tau - \pi) c_1) c_3 & (\text{ch}((\tau - \pi) a_1) - \text{ch}((\tau - \pi) c_1)) a_5 & \text{sh}((\tau - \pi) a_1) c_7 + \text{sh}((\tau - \pi) c_1) c_8 & \text{ch}((\tau - \pi) a_1) a_3 + \text{ch}((\tau - \pi) c_1) a_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда, полагая в $Z^2(\tau)$ $\tau = 2\pi$, получим матрицу монодромии системы (4) в следующем виде:

$$H = Z(2\pi) = Z^1(\tau) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\pi a_1) a_3 + \text{ch}(\pi a_2) a_4 & \text{sh}(\pi a_1) a_7 + \text{sh}(\pi a_2) a_6 & (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi a_2)) a_5 & \text{sh}(\pi a_1) a_9 - \text{sh}(\pi a_2) a_8 \\ \text{sh}(\pi a_1) a_{13} + \text{sh}(\pi a_2) a_{12} & \text{ch}(\pi a_1) a_3 + \text{ch}(\pi a_2) a_4 & \text{sh}(\pi a_1) a_{10} + \text{sh}(\pi a_2) a_{11} & (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi a_2)) a_5 \\ (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi a_2)) a_5 & \text{sh}(\pi a_1) a_9 - \text{sh}(\pi a_2) a_8 & \text{ch}(\pi a_1) a_4 + \text{ch}(\pi a_2) a_3 & \text{sh}(\pi a_1) a_{15} + \text{sh}(\pi a_2) a_{14} \\ \text{sh}(\pi a_1) a_{10} - \text{sh}(\pi a_2) a_{11} & (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi a_2)) a_5 & \text{sh}(\pi a_1) a_{17} + \text{sh}(\pi a_2) a_{16} & \text{ch}(\pi a_1) a_4 + \text{ch}(\pi a_2) a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{ch}(\pi c_1) a_3 + \text{ch}(\pi a_1) a_4 & \text{sh}(\pi c_1) a_{14} + \text{sh}(\pi a_1) a_{15} & (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi c_1)) a_5 & \text{sh}(\pi a_1) c_4 - \text{sh}(\pi c_1) a_8 \\ \text{sh}(\pi a_1) c_5 + \text{sh}(\pi c_1) c_6 & \text{ch}(\pi c_1) a_3 + \text{ch}(\pi a_1) a_4 & \text{sh}(\pi a_1) c_2 + \text{sh}(\pi c_1) c_3 & (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi c_1)) a_5 \\ (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi c_1)) a_5 & \text{sh}(\pi a_1) c_4 - \text{sh}(\pi c_1) a_8 & \text{ch}(\pi a_1) a_3 + \text{ch}(\pi c_1) a_4 & \text{sh}(\pi c_1) a_6 + \text{sh}(\pi a_1) a_7 \\ \text{sh}(\pi a_1) c_2 + \text{sh}(\pi c_1) c_3 & (\text{ch}(\pi a_1) - \text{ch}(\pi c_1)) a_5 & \text{sh}(\pi a_1) c_7 + \text{sh}(\pi c_1) c_8 & \text{ch}(\pi a_1) a_3 + \text{ch}(\pi c_1) a_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } b_1 &= \sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2}, \quad b_2 = 2\alpha + \beta - 2\gamma, \quad b_3 = b_1 + \beta, \quad b_4 = b_1 - \beta, \quad b_5 = b_1\sqrt{2(b_1 + b_2)}, \quad b_6 = b_1\sqrt{2(b_2 - b_1)}, \quad a_1 = \frac{b_5}{2b_1}, \\
 a_2 &= \frac{b_6}{2b_1}, \quad a_3 = \frac{b_3}{2b_1}, \quad a_4 = \frac{b_4}{2b_1}, \quad a_5 = \frac{\gamma}{b_1}, \quad a_6 = \frac{b_4}{b_6}, \quad a_7 = \frac{b_3}{b_5}, \quad a_8 = \frac{2\gamma}{b_6}, \quad a_9 = \frac{2\gamma}{b_5}, \quad a_{10} = \frac{\gamma b_5}{2b_1^2}, \\
 a_{11} &= \frac{\gamma(2\alpha - 2\gamma - b_4)}{b_6}, \quad a_{12} = \frac{b_4(\alpha + \beta - \gamma) - 2\gamma^2}{b_6}, \quad a_{13} = \frac{b_3(\alpha + \beta - \gamma) + 2\gamma^2}{b_5}, \quad a_{14} = \frac{b_3}{b_6}, \quad a_{15} = \frac{b_4}{b_5}, \quad a_{16} = \frac{b_3(\alpha - \gamma) - 2\gamma^2}{b_6}, \\
 a_{17} &= \frac{2\gamma^2 - \alpha b_3 - b_4\gamma}{b_5}, \quad d_1 = \alpha - 4\gamma, \quad d_2 = d_1 - \beta, \quad c_1 = \sqrt{\alpha - \gamma - \frac{b_3}{2}}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{2}\gamma(\alpha - \gamma + \sqrt{2}b_4)}{b_5}, \quad c_3 = \frac{2\gamma(\gamma - \alpha + 2b_3)}{b_6}, \\
 c_4 &= \frac{2\sqrt{2}\gamma}{b_5}, \quad c_5 = \frac{b_4 d_2 + 2\sqrt{2}\gamma^2}{b_5}, \quad c_6 = \frac{b_3 d_2 - 2\gamma^2}{b_6}, \quad c_7 = \frac{b_3 d_1 + 2\sqrt{2}\gamma^2}{b_5}, \quad c_8 = \frac{b_4 d_1 - 2\gamma^2}{b_6}.
 \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для матрицы $Z(2\tau)$ имеет вид

$$\det(H - \lambda E) = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} - \lambda & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + q_1\lambda^3 + q_2\lambda^2 + q_3\lambda + q_4 = 0, \quad (10)$$

где $q_4 = (-1)^4 e^0 \int_0^T \text{Sp}(P(\tau)) d\tau = 1$ [14].

Для идентификации зон устойчивости в пространстве параметров можно воспользо-

ваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого необходимо сделать замену $\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}$ (это ото-

бражение сопоставляет единичному кругу левую часть комплексной плоскости), получив уравнение с комплексными коэффициентами вида $u_0\mu^4 + u_1\mu^3 + u_2\mu^2 + u_3\mu + u_4 = 0$. Для того чтобы корни соответствующего уравнения лежали в левой части комплексной плоскости, а, как следствие, корни уравнения (10) лежали внутри единичного круга, достаточно, чтобы определители главных миноров матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов $u_0 \dots u_4$, были положительными. Второй способ связан с прямым вычислением корней характеристического уравнения (10).

Решения уравнения (10) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -\frac{q_1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{y_4 + y_5} - \frac{1}{2}\sqrt{2y_4 - y_5 + \frac{y_3}{4\sqrt{y_4 + y_5}}}, \\
 \lambda_2 &= -\frac{q_1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{y_4 + y_5} + \frac{1}{2}\sqrt{2y_4 - y_5 + \frac{y_3}{4\sqrt{y_4 + y_5}}}, \\
 \lambda_3 &= -\frac{q_1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{y_4 + y_5} - \frac{1}{2}\sqrt{2y_4 - y_5 - \frac{y_3}{4\sqrt{y_4 + y_5}}}, \\
 \lambda_4 &= -\frac{q_1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{y_4 + y_5} + \frac{1}{2}\sqrt{2y_4 - y_5 - \frac{y_3}{4\sqrt{y_4 + y_5}}},
 \end{aligned} \quad (11)$$

где $y_1 = 12 + q_2^2 - 3q_1q_3$, $y_2 = 27q_1^2 - 72q_2 + 2q_2^3 - 9q_1q_2q_3 + 27q_3^2$, $y_3 = -q_1^3 + 4q_1q_2 - 8q_3$,

$$y_4 = \frac{q_1^2}{4} - \frac{2q_2}{3}, y_3 = \frac{\sqrt[3]{2}y_1}{3\sqrt[3]{y_2 + \sqrt{-4y_1^3 + y_2^2}}} + \frac{\sqrt[3]{y_2 + \sqrt{-4y_1^3 + y_2^2}}}{\sqrt[3]{32}}.$$

С учетом (6) и (11) для устойчивости системы необходимо выполнение неравенства $\max_i |\lambda_i| < 1$. Имея в виду функциональную зависимость параметров характеристического уравнения от амплитуды, частоты и жесткости пружины, построим зоны устойчивости в пространстве параметров.

3. Построение зон устойчивости и анализ результатов

Границами зоны устойчивости являются линии в пространстве параметров, соответствующие значениям максимального собственного числа, равного единице. Для построения этих

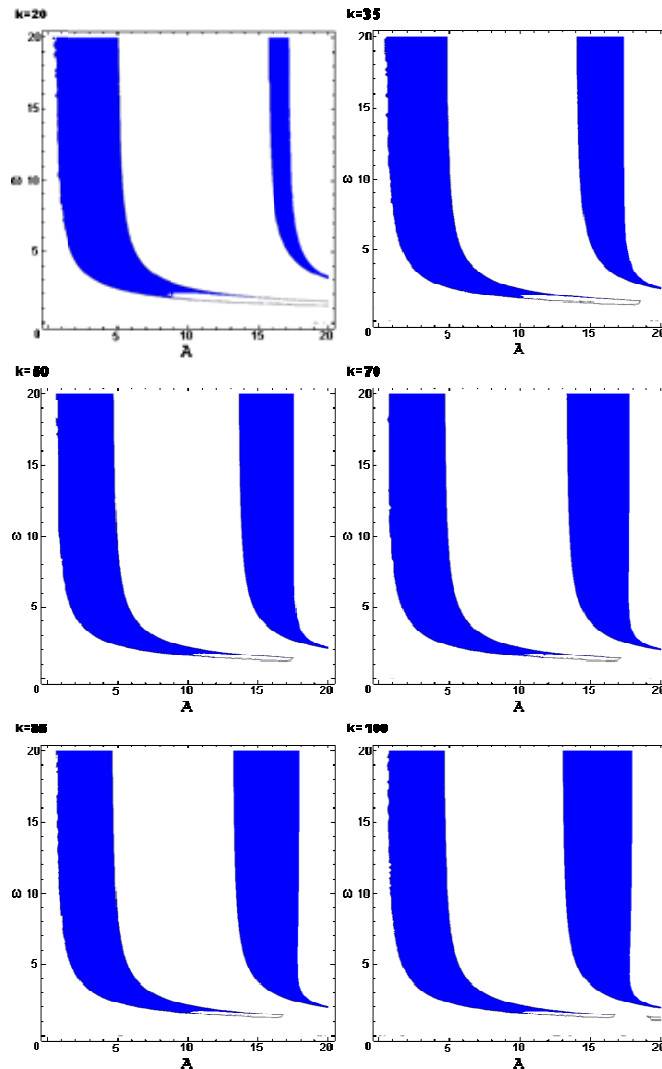


Рис. 4. Графики областей устойчивости при различных жесткостях пружины k

Fig. 4. Plots of stability zones with different spring stiffness k

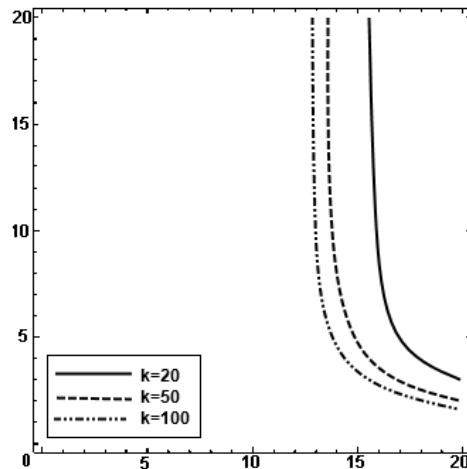


Рис. 5. Верхняя и нижняя границы областей устойчивости при различных k
 Fig. 5. The upper and lower bounds of the stability regions for different k values

областей последовательно зафиксируем значения жесткости пружины на уровнях $k = 20, 35, 50, 70, 85, 100$. Результаты получены численно, с помощью пакета Wolfram Mathematica.

На рис. 4 видно, что геометрия зон устойчивости претерпевает изменения, соответствующие увеличению площади второй зоны. Заметим также, что полученные результаты схожи с графиками в [16, 21, 22].

Чтобы проиллюстрировать эволюцию изменения зон устойчивости в зависимости от жесткости пружины, приведем сдвиг левой границы правой зоны устойчивости (рис. 5).

Параметрам, удовлетворяющим неравенству (6), соответствуют почти периодические колебания [23] маятников относительно верхнего положения. Для иллюстрации динамики системы приведем фазовые портреты и зависимости фазовых координат (размерных) от времени для значений параметров системы: $l = 1$ м, $k = 95$ Н/м, $A = 10$ м, $\omega = 20$ Гц, $\varphi_1(0) = 0.01$, $\dot{\varphi}_1(0) = -0.01$, $\varphi_2 = -0.03$, $\dot{\varphi}_2 = 0.02$ (рис. 6).

В заключение отметим, что полученные движения соответствуют почти периодическим функциям: спектры решений имеют две ярко выраженные и две побочные гармоники (рис. 7).

4. Периодические режимы

Рассмотрим поведение движения маятника при параметрах, лежащих на границах области устойчивости, что, возвращаясь к характеристическому уравнению матрицы монодромии (9), относится к трем случаям: когда $q_1 = -4$, $q_1 = 0$, $q_1 = 4$. Тогда мультипликаторы будут принимать следующие значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ соответственно.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, то соответствующее нормальное решение будет удовлетворять равенству $Z(t + 2\pi) = Z(t)$, следовательно, уравнение (2) имеет периодическое решение, период

которого совпадает с периодом его коэффициентов $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$.

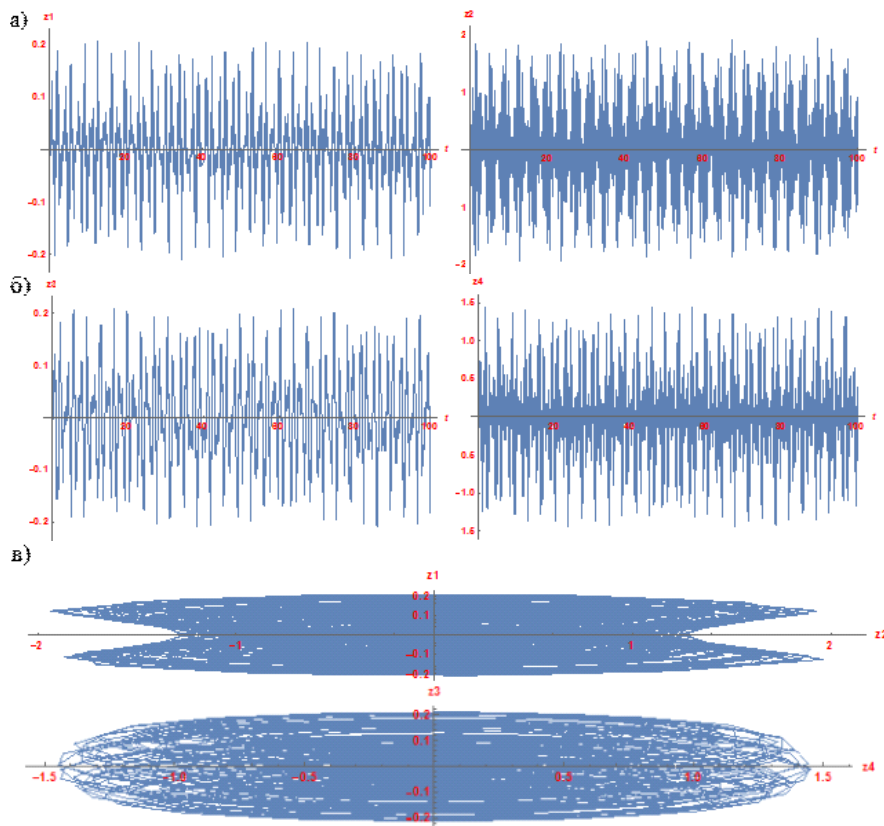


Рис. 6. Графики характеристик движения первого маятника (а); графики характеристик движения второго маятника (б); фазовые плоскости (в)

Fig. 6. Graphs of the motion characteristics for the first pendulum (a); graphs of the motion characteristics for the second pendulum (b); phase planes (c)

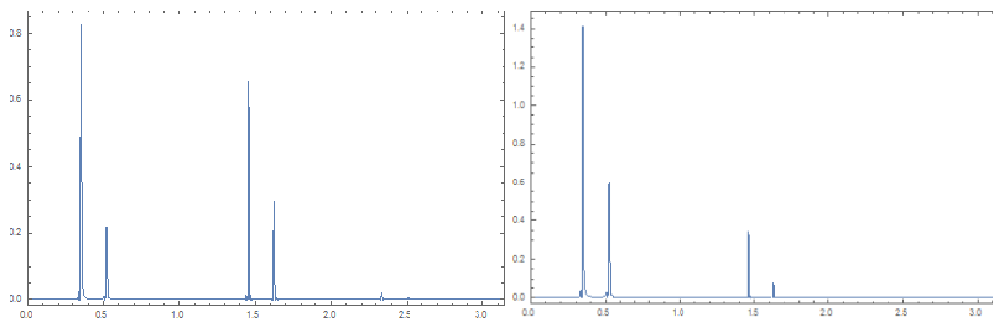


Рис. 7. Спектры решений: слева z_1 , справа z_3

Fig. 7. Spectra of solutions: z_1 (left) and z_3 (right)

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$, то соответствующее нормальное решение будет удовлетворять равенству $Z(t + 2\pi) = -Z(t)$, а еще через один период $Z(t + 4\pi) = -Z(t + \pi) = Z(t)$,

следовательно, уравнение (2) имеет периодические решения, период которых $T_{2,3} = \frac{4\pi}{\omega}$ [24].

Таким образом, периодические режимы будут иметь место, если будет выполнено одно из соотношений:

$$q_1 = 4, \text{ для периода колебаний } T_1; \quad (12)$$

$$q_1 = -4 \text{ или } q_1 = 0, \text{ для периода колебаний } T_2. \quad (13)$$

Это необходимые, но не достаточные условия, поскольку не для любых начальных значений при заданном управлении с параметрами, удовлетворяющими одному из указанных равенств, будут существовать периодические решения.

Отметим, что для рассматриваемого здесь класса управлений начальные условия лежат в I и III четвертях.

Определим следующее начальное условие $(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{30}, \varphi_{40})$ и рассмотрим периодические колебания с периодом T_1 ; тогда должно быть справедливо равенство $Z(0 + T) = HZ(0) = Z(0)$, т.е. соответствующий вектор является собственным вектором матрицы монодромии, отвечающим единичному собственному значению:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ \varphi_{30} \\ \varphi_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ \varphi_{30} \\ \varphi_{40} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Следовательно, начальные условия должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \frac{h_{12}}{1-h_{11}}\varphi_{20} + \frac{h_{13}}{1-h_{11}}\varphi_{30} + \frac{h_{14}}{1-h_{11}}\varphi_{40}, \\ \varphi_{20} &= \frac{h_{21}}{1-h_{22}}\varphi_{10} + \frac{h_{23}}{1-h_{22}}\varphi_{30} + \frac{h_{24}}{1-h_{22}}\varphi_{40}, \\ \varphi_{30} &= \frac{h_{31}}{1-h_{33}}\varphi_{10} + \frac{h_{32}}{1-h_{33}}\varphi_{20} + \frac{h_{34}}{1-h_{33}}\varphi_{40}, \\ \varphi_{40} &= \frac{h_{41}}{1-h_{44}}\varphi_{10} + \frac{h_{42}}{1-h_{44}}\varphi_{20} + \frac{h_{43}}{1-h_{44}}\varphi_{30}. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем новые параметры посредством следующих обозначений: $\frac{h_{12}}{1-h_{11}} = n_{12}$, $\frac{h_{13}}{1-h_{11}} = n_{13}$,

..., $\frac{h_{43}}{1-h_{44}} = n_{43}$, тогда:

$$\begin{aligned} \varphi_{20} &= \frac{n_{21} + n_{24}n_{41}}{1 - n_{24}n_{42}}\varphi_{10} + \frac{n_{23} + n_{24}n_{43}}{1 - n_{24}n_{42}}\varphi_{30}, \\ \varphi_{40} &= \frac{n_{41} + n_{42}n_{21}}{1 - n_{42}n_{24}}\varphi_{10} + \frac{n_{43} + n_{42}n_{23}}{1 - n_{42}n_{24}}\varphi_{30}, \end{aligned} \quad (16)$$

т.е. начальные условия, отвечающие периодическим решениям, лежат на плоскости

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{20} &= K_{11}^1\varphi_{10} + K_{12}^1\varphi_{30}, \\ \dot{\varphi}_{40} &= K_{21}^1\varphi_{10} + K_{22}^1\varphi_{30}, \end{aligned}$$

где коэффициенты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} K_{11}^1 &= \frac{h_{21}(1-h_{44})+h_{24}h_{41}}{(1-h_{22})(1-h_{44})-h_{24}h_{42}}, & K_{12}^1 &= \frac{h_{23}(1-h_{44})+h_{24}h_{43}}{(1-h_{22})(1-h_{44})-h_{24}h_{42}}, \\ K_{21}^1 &= \frac{h_{41}(1-h_{22})+h_{42}h_{21}}{(1-h_{44})(1-h_{22})-h_{42}h_{24}}, & K_{22}^1 &= \frac{h_{43}(1-h_{22})+h_{42}h_{23}}{(1-h_{44})(1-h_{22})-h_{42}h_{24}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если для начальных условий $(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{30}, \varphi_{40})$ можно найти пару параметров A и ω , лежащих на границе области устойчивости, удовлетворяющей равенству (17), то эта пара единственна. Обратное также верно.

Аналогично определяется плоскость, соответствующая начальным условиям, отвечающим периодическим решениям с периодом T_2 .

Заключение

В работе рассматривалась динамика системы, состоящей из неустойчивых связанных маятников, находящихся под воздействием сил инерции, обусловленных вертикальными осцилляциями нижней точки крепления одного из них. Было показано, что наличие жесткой упругой связи между маятниками коренным образом меняет динамику системы. Были построены зоны устойчивости в пространстве естественных параметров, а также исследована эволюция зон устойчивости в зависимости от жесткости пружины. Установлено наличие неустойчивых периодических режимов на границах зон устойчивости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 17-01-00251, 19-08-00158.

Список литературы

- [1] Андронов А.А. Витт А.А. Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. М.: Наука, 1981. 568 с. [Andronov A.A. Witt A.A. Khaikin S.E. *Theory of oscillations*. Moscow, Nauka, 1981. 568 p. (in Russian)]
- [2] Баутин Н.Н. О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра, *Математический сборник*, 1952, 30(72), 181–196 [Bautin N.N. On the number of limit cycles appearing when the coefficients change from an equilibrium state of the focus or center type, *Matematicheskii sbornik*, 1952, 30 (72), 181–196 (in Russian)]
- [3] Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. *Линейные колебания и волны*. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001. 416 с. [Trubetskov D.I., Rozhnev A.G. *Linear oscillations and waves*. Moscow, Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 2001. 416 p. (in Russian)]
- [4] Магнус К. *Колебания: Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем.* М.: Мир, 1982. 304 с. [Magnus K. *Oscillations: Introduction to research of oscillatory systems. Translation from German*. Moscow, Mir, 1982. 304 p. (in Russian)]
- [5] Осипов Г.В. *Синхронизация в неоднородных сетях осцилляторов*. Нижний Новгород, 2014. 135 с. [Osipov G.V. *Synchronization in heterogeneous networks of oscillators*. Nizhny Novgorod, 2014. 135 p. (in Russian)]

- [6] Колмогоров А.Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, *Доклады АН СССР*, 1954, 98(4), 527530 [Kolmogorov A.N. On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in the Hamiltonian function, *Doklady Akad. Nauk USSR*, 1954, 98 (4), 527–530 (in Russian)]
- [7] Бутиков Е.И. Стабилизация перевернутого маятника (60 лет маятнику Капицы), *Компьютерные инструменты в образовании*, 2010, 5, 3951 [Butikov E.I. Stabilization of the inverted pendulum (60 years of Kapitza's pendulum), *Computer tools in education*, 2010, 5, 39–51 (in Russian)]
- [8] Stephenson A. On an induced stability, *Phil. Mag*, 1908, 15(233)
- [9] Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом, *УФН*, 1951, 44, 720 [Kapitsa P.L. A pendulum with a vibrating suspension, *UFN*, 1951, 44, 7–20 (in Russian)]
- [10] Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса, *ЖЭТФ*, 1951, 21, 588–597 [Kapitsa P.L. Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension, *JETP*, 1951, 21, 588–597 (in Russian)]
- [11] Нелепин Р.А. *Методы исследования нелинейных систем автоматического управления*. М.: Наука, 1979. 447 с. [Nelepin R.A. *Research methods for nonlinear automatic control systems*. Moscow, Nauka, 1979. 447 p. (in Russian)]
- [12] Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом*. М.: Наука, 1983. 271 с. [Krasnoselsky M.A., Pokrovsky A.V. *Systems with hysteresis*. Moscow, Nauka, 1983. 271 p. (in Russian)]
- [13] Плисс В.А. *Нелокальные проблемы теории колебаний*. М.: Наука, 1964. 367 с. [Pliss V.A. *Nonlocal problems of the theory of oscillations*. Moscow, Nauka, 1964. 367 p. (in Russian)]
- [14] Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения*. М.: Наука, 1987. 304 с. [Merkin D.R. *Introduction to the theory of stability of motion*. Moscow, Nauka, 1987. 304 p. (in Russian)]
- [15] Матвеев М.Г., Семенов М.Е., Шевлякова Д.В., Канищева О.И. Зоны устойчивости и периодические решения перевернутого маятника с гистерезисным управлением, *Мехатроника, Автоматизация, Управление*, 2012, 11, 8-14 [Matveev M.G., Semenov M.E., Shevlyakova D.V., Kanishcheva O.I. Zone of Stability and Periodic Solutions of the Inverted Pendulum with Hysteretic Control, *Mechatronics, Automation, Control*, 2012, 11, 8–14 (in Russian)]
- [16] Семенов М.Е., Хатиф З., Решетова О.О., Демчук А.А., Мелешенко П.А. Модель динамики обратного маятника с гистерезисным управлением, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2016, 4, 165-177 [Semenov M.E., Hatif Z., Reshetova O.O., Demchuk A.A., Meleshenko P.A. The model of the dynamics with the inverted pendulum hysteretic control, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, 4, 165–177 (in Russian)]
- [17] Семенов М.Е., Матвеев М.Г., Лебедев Г.Н., Соловьев А.М. Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами, *Мехатроника, Автоматизация, Управление*, 2017, 8, 516-525. [Semenov M.E., Matveev M.G., Lebedev G.N., Solovyev A.M. Stabilization of a Flexible Inverted Pendulum with the Hysteretic Properties, *Mechatronics, Automation, Control*, 2017, 8, 516–525 (in Russian)]

- [18] Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы, *Труды МАИ*, 2017, 93 [Semenov M.E., Solovyov A.M., Popov M.A. Stabilization of unstable objects: coupled oscillators, *Trudy MAI*, 2017, 93 (in Russian)]
- [19] Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O., Popov M.A., Kabulova E.G. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems, *Procedia Engineering*, 2017, 201, 549-555.
- [20] Semenov M.E., Solovev A.M., Popov M.A., Meleshenko P.A. Coupled inverted pendulums: stabilization problem, *Archive Of Applied Mechanics*, 2018, 88, 517-524.
- [21] Семенов М.Е., Попов М.А., Канищева О.И. Управление системой нелинейно связанных перевернутых маятников, *Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника И Технологии*, 2018, 11(3), 280-290 [Semenov M.E., Popov M.A., Kanishcheva O.I. Nonlinear Related System of Inverted Pentulums Control. *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*, 2018, 11(3), 280-290 (in Russian)]
- [22] Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. *Динамические модели теории управления*. М.: Наука, 1985. 400 с. [Neimark Yu.I., Kogan N.Ya., Savelyev V.P. *Dynamic models of control theory*. Moscow, Nauka, 1985. 400 p. (in Russian)]
- [23] Красносельский М.А. *Нелинейные почти периодические колебания*. М.: Наука, 1970. 304с. [Krasnoselsky M.A. *Nonlinear almost periodic oscillations*. Moscow, Nauka, 1970. 304 p. (in Russian)]
- [24] Мирошник И.В. *Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы*. СПб.: Питер, 2006. 272 с. [Miroshnik I.V. *Theory of automatic control. Nonlinear and optimal systems*. St. Petersburg, Piter, 2006. 272 p. (in Russian)]