О KT-ПОЛЯХ И ТОЧНО ТРИЖДЫ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ

О. В. Кравцова, А. И. Созутов

Группа G перестановок множества F ($|F| \geq k$) называется *точно k-транзитивной* на F, если для любых двух упорядоченных множеств (α_1, ..., α_k) и (β_1, ..., β_k) элементов из F таких, что $\alpha_i \neq \alpha_j$ и $\beta_i \neq \beta_j$ для $i \neq j$, существует точно один элемент группы G переводящий α_i в β_i ($i = 1$, ..., k).

Точно дважды и трижды транзитивные группы тесно связаны с почти-полями, почти-областями, проективными плоскостями и KT-полями [1, 2]. Г. Цассенхауз [3] дал полную совместную классификацию конечных почти-полей, точно дважды и трижды транзитивных групп [1][стр. 419-421], [2][стр. 215]. Локально конечные точно трижды транзитивные группы классифицировал О. Кегель [4]. Точно дважды и трижды транзитивные группы с дополнительными условиями изучались в [5] — [22] и др. В работах [11, 12] построены примеры точно дважды транзитивных групп характеристики 2 без регулярных абелевых номальных подгрупп, а в работе [13], на основе групп из [11, 12], — примеры точно трижды транзитивных групп. Значит, существуют почти-области характеристики 2 не являющиеся почти-полями и KT-поля (F, σ), в которых почти-области $(F, +, \cdot)$ не почти-поля. Эти результаты вносят неожиданную интригу и дают еще одно основание для изучения указанных структур при дополнительных ограничениях.

Мы изучаем бесконечные KT-поля (F, σ) и группы $T_3(F, \sigma)$ при некоторых дополнительных условиях наложенных на инволюцию σ. Инволюция σ бесконечной группы H называется *конечной в H*, если $|\sigma\sigma^\tau| < \infty$ для каждого элемента $\tau \in H$; инволюция σ называется *совершенной в H*, если любые две неперестановочных инволюции из σ^H сопряжены при помощи инволюции из σ^H. Заметим, что в произвольной точно дважды транзитивной группе характеристики $\neq 2$ инволюции совершенны, а в случае нечетной характеристики — конечны и совершенны. Бесконечные группы с конечными и совершенными инволюциями и некоторыми дополнительными условиями успешно изучались, например, в [15] – [22]. В работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если (F, σ) — бесконечное KT-поле и инволюция σ конечна в группе $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$, то $(F, +, \cdot)$ — локально конечное поле и группа $T_3(F, \sigma)$ локально конечна.*

Следствие 1. *Точно трижды транзитивная группа подстановок с конечной инволюцией, стабилизирующей хотя бы одну точку, локально конечна.*

Теорема 2. *Если (F, σ) — бесконечное KT-поле и инволюция σ совершенна в группе $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$, то $(F, +, \cdot)$ — (коммутативное) поле и $T_3(F, \epsilon) \simeq PGL_2(F)$.*

Следствие 2. *Точно трижды транзитивная группа подстановок с совершенной инволюцией, стабилизирующей хотя бы одну точку, изоморфна группе $PGL_2(F)$ над подходящим полем F.*

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №15-01-04897-а).

1. Определения и предварительные результаты

Алгебраическая система $(F, +, \cdot)$ называется *почти-областью* [2][стр. 216], если:

(1) $(F, +)$ — лупа с нейтральным элементом 0;
(2) $(F^*, \cdot)$ — группа с нейтральным элементом 1 ($F^* = F \setminus \{0\}$);
(3) $a + b = 0 \to b + a = 0$;
(4) $0 \cdot a = 0 \to a \cdot 0 = 0$;
(5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
(6) Существует однозначно определенный элемент $d_{a,b} \in F^*$ такой, что

$$a + (b + x) = (a + b) + d_{a,b} \cdot x$$

для всех $x \in F$ (здесь a, b, c — любые элементы из F).

Отображение $t_{a,b} : x \to a + bx$ ($a, b, x \in F,\ b \neq 0$) называется *аффинным преобразованием* почти-области $(F, +, \cdot)$; множество $T_2(F)$ всех таких аффинных преобразований является группой ([2], гл. V, пр. 1.1). Хорошо известно ([2], гл. V, §1, 2) следующее

Предложение 1. (1) *Группа $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области $(F, +, \cdot)$ действует на множестве F точно дважды транзитивно.*

(2) *Если T точно дважды транзитивная группа подстановок множества F, то можно ввести на F такие две операции $+, \cdot$ согласованные с действием группы T, что $(F, +, \cdot)$ будет почти-областью, а T — ее группой $T_2(F)$ аффинных преобразований.*

Следующие результаты доказывали Г. Карзел, Г. Гретцер, Г. Вефельшайд, Ж. Титс, В. Керби, М. Холл, Ж. Титс, В.Д. Мазуров и др. (см. [2][стр. 216-229], [5, 16]).

Предложение 2. (1) *Почти-область $(F, +, \cdot)$ тогда и только тогда является почти-полем, когда $T_2(F)$ обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой.*

(2) *Если $(F, +, \cdot)$ — почти-область и F^* — группа с конечными классами сопряженных элементов, то F либо поле, либо конечное почти-поле.*

KT-поля, введенные В. Керби и Г. Вефельшайдом в [14], расширяют сигнатуру точно трижды транзитивных групп, как и почти-области для точно дважды транзитивных групп. Расширенная сигнатура позволяет получать более компактные доказательства и в ряде случаев продвинуться вперед. Пара (F, σ) называется *KT-полем* [2][стр. 235], если $(F, +, \cdot)$ — почти область, σ — автоморфизм группы $(F^*, \cdot)$ и для всех $x \in F^* \setminus \{1\}$ выполняется равенство

$$\sigma(1 - \sigma(x)) = 1 - \sigma(1 - x), \tag{1}$$

здесь $\sigma(y) = y^\sigma$ обозначает образ элемента $y \in F^*$ относительно автоморфизма σ (экспоненциальное обозначение сопряжения $x^{-1}yx = y^x$ зачастую более удобно).

Предложение 3. *Пусть (F, σ) — бесконечное KT-поле. Если $\sigma(f) = f^\sigma = f^{-1}$ для каждого элемента $f \in F^*$, то группа F^* абелева, почти-область $(F, +, \cdot)$ является (коммутативным) полем и $T_3(F, \sigma)$ изоморфна $PGL_2(F)$* [2]*[п. 2, стр. 236-237].*

Переформулируем теорему 2 из [10] в терминах KT-полей.

Предложение 4. *В бесконечном KT-поле (F, σ) с периодической группой $(F^*, \cdot)$ почти-область $(F, +, \cdot)$ является локально конечным полем, и группа $T_3(F, \sigma)$ локально конечна.*

2. Доказательства теорем

По условиям теорем (F,σ) — KT-поле, $(F,+,\cdot)$ — бесконечная почти-область, σ — автоморфизм порядка 2 мультипликативной группы $F^* = F \setminus \{0\}$, для которого выполняется условие (1). С помощью конструкции описанной в [2][гл. V, §3] перейдем к группе $T_3(F,\sigma)$. Для этого введем дополнительный элемент (символ) $\infty \notin F$, положим $X = F \cup \{\infty\}$ и продолжим действие группы $T = T_2(F)$ аффинных преобразований $t_{a,b} : x \to a + b \cdot x$ $(a,b,x \in F, b \neq 0)$ почти-области $(F,+,\cdot)$ на множество X, полагая $t_{a,b} : \infty \to \infty$. Подстановочное действие σ, как автоморфизма, уже задано на F^*, положим $\sigma :\ 0 \to \infty,\ \infty \to 0$, и пусть G — группа подстановок множества X, порожденная подстановкой σ и группой T. Предложение 3.3 из главы V [2] запишем в виде леммы.

Лемма 1. [2] *Верны следующие утверждения:*

(1) *Выполняется равенство $G = T \cup T\sigma T = T_3(F,\sigma)$ и группа G действует точно трижды транзитивно на множестве X;*

(2) *Каждый элемент из $T_3(F,\sigma)$ как подстановка множества X представим либо в виде*

$$\tau_{a,b} : x \to a + b \cdot x, \qquad \tau_{a,b} : \infty \to \infty, \tag{2}$$

либо в виде

$$\tau_{a,b,c} : x \to a + (c + b \cdot x)^{\sigma}, \tag{3}$$

где $a, c \in F$ и $b \in F^*$;

(3) *Группа $T_2(F)$ изоморфно вложима в $T_3(F,\sigma) = G$ в качестве стабилизатора G_∞ точки ∞, а группа F^* — в качестве двойного стабилизатора $G_{0,\infty}$.*

Оформим также в виде леммы хорошо известные свойства инволюций из групп $G = T_3(F,\sigma)$ и $T = T_2(F)$ (см., например, [2][гл. V]).

Лемма 2. *Пусть $G = T_3(F,\sigma)$, $T = T_2(F) = G_\infty$, $F^* = T_0 = G_{0,\infty}$ и $K = N_G(F^*)$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *(T, F^*) — пара Фробениуса, то есть $F^* \cap F^{*t} = 1$ для любого $t \in T \setminus F^*$.*

(2) *Если в F^* есть инволюция τ, то она единственна в F^* и T действует сопряжениями на множестве всех своих инволюций точно дважды транзитивно.*

(3) *$K = F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$ и $F^*\sigma \cap t^G \neq \emptyset$ для каждой инволюции $t \in G$.*

Итак, если в F^* есть инволюция, то все произведения $vk \neq 1$ инволюций $v, k \in T$ сопряжены и имеют один и тот же порядок, либо бесконечный, либо равный простому числу $p > 2$. В первом случае почти-область F и группа T имеют характеристику 0, во-втором $\operatorname{Char} F = \operatorname{Char} T = p$, если же в F^* нет инволюций, то $\operatorname{Char} F = \operatorname{Char} T = 2$.

Лемма 3. *$C_{F^*}(\sigma) = 1$ в том и только том случае, когда $\operatorname{Char} F = 2$. Если $C_{F^*}(\sigma) \neq 1$, то $\operatorname{Char} F \neq 2$ и $C_{F^*}(\sigma) = \langle\tau\rangle$, где τ — единственная инволюция из F^*.*

Доказательство. Инволюция σ, как перестановка множества X, стабилизирует точку $1 \in F^* \subset X$ и, ввиду точной 3-транзитивности группы G на X, возможно еще одну точку $\tau \in F^*$. Каждый неединичный элемент из $C_{F^*}(\sigma)$ должен стабилизировать 1 в первом случае, и блок $\{1,\tau\}$ — во втором случае. Поскольку элементы $b \in F^*$, как подстановки множества X, действуют на F^* сдвигами $b :\ x \to b \cdot x$, то либо $C_{F^*}(\sigma) = 1$, либо $C_{F^*}(\sigma) = \{1,\tau\}$ и $\tau^2 = 1$. Согласно лемме 2 F^* не содержит инволюций тогда и только тогда, когда $\operatorname{Char} F = 2$, и в этом случае $C_{F^*}(\sigma) = 1$. Если же F^* содержит инволюцию τ, то ввиду леммы 2 $\operatorname{Char} F \neq 2$, F^* содержит единственную инволюцию, которая необходимо совпадает с τ, и $C_{F^*}(\sigma) = \langle\tau\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{Char} F = 2$ *и любые две инволюции из* σ^{F^*}*, порядок произведения которых бесконечен, сопряжены при помощи подходящей инволюции из* σ^{F^*}*. Тогда почти-область* $(F, +, \cdot)$ *является квадратично замкнутым полем и* $G \simeq PGL_2(F)$.

Доказательство. По лемме 3 $C_{F^*}(\sigma) = 1$ и по лемме 2.19 из [23] группа $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$ является группой Фробениуса с 2-полным абелевым ядром и дополнением $\langle\sigma\rangle$. При этом очевидно, что ядро в $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$ совпадает с F^* и σ инвертирует каждый элемент из F^*. По предложению 3 почти-область $(F, +, \cdot)$ является полем и $T_3(F, \sigma)$ изоморфна $PGL_2(F)$.

Ввиду 2-полноты группы $(F^*, \cdot)$ поле F квадратично замкнуто. Лемма доказана.

В связи с результатами из [13] уделим больше внимания случаю $\mathrm{Char} F = 2$. В [13] построены точно трижды транзитивные группы вида

$$G = \big(((\langle a\rangle \times F(U)) *_{\langle a\rangle} G_0 *_{\langle t\rangle} ((\langle t\rangle \times F(S)))\big) * F(R),$$

где $F(R)$, $F(S)$, $F(U)$ — свободные группы с непересекающимися множествами порождающих R, S, U, причем $|R|$, $|S|$, $|U| = \max\{|G_0|, XXX\}$, a — элемент порядка 3, t — инволюция, $\langle a, t\rangle$ подгруппа изоморфная S_3 группы G_0 действующей на множестве X_0, причем a регулярна на X, t фиксирует точно одну точку $x_0 \in X$ и только единица из G_0 стабилизирует три точки из X_0. Понятно, что

$$C_G(t) = C_{G_0}(t) *_{\langle t\rangle} (\langle t\rangle \times F(S)), \qquad C_G(a) = C_{G_0}(a) *_{\langle a\rangle} (\langle a\rangle \times F(U)).$$

Лемма 5. *Пусть* $\mathrm{Char} F = 2$ *и любые две инволюции из* σ^{F^*}*, порядок произведения которых бесконечен, сопряжены при помощи подходящей инволюции из* $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$*. Тогда почти-область* $(F, +, \cdot)$ *является (коммутативным) полем и* $G \simeq PGL_2(F)$.

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент из $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$ не являющийся инволюцией. В силу леммы 3 $\sigma^g \neq \sigma$ и если порядок элемента $\sigma\sigma^g$ конечен, то он нечетен и $\sigma^g = \sigma^t$ для некоторой инволюции t из группы диэдра $\langle\sigma, \sigma^g\rangle$. Если же порядок элемента $\sigma\sigma^g$ бесконечен, то $\sigma^g = \sigma^t$ для некоторой инволюции $t \in F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$ по условиям леммы. Значит, в любом случае $\sigma^{gt} = \sigma$ для подходящей инволюции $t \in F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$.

Если $gt \in F^*$, то ввиду равенства $C_{F^*}(\sigma) = 1$ (лемма 3) $gt = 1$ и $g = t$ — инволюция, что противоречит выбору g. Следовательно, $gt \notin F^*$ и, значит, $gt = \sigma$, $g = \sigma t$ и $g^\sigma = g^{-1}$.

Итак, σ инвертирует каждый элемент из F^*, и лемма верна по предложению 3.

Следующие две леммы представляют независимый интерес.

Лемма 6. *При* $\mathrm{Char} F \neq 2$ *множество всех 2-элементов группы* F^* *инвертируемых инволюцией* σ *вместе с единицей составляет (локально) циклическую 2-подгруппу* S.

Доказательство. Лемма очевидно верна, когда τ — единственный 2-элемент в F^*, инвертируемый инволюцией σ. В более общем случае пусть $x, y \in F^*$, $x^2 = y^2$, $x^\sigma = x^{-1}$, $y^\sigma = y^{-1}$ и $|x^2| = 2^n \geq 2$. Допустим, что $\langle x\rangle \neq \langle y\rangle$, $L = \langle x, y, \sigma\rangle$ и $\overline{L} = L/\langle x^2\rangle$. Тогда $\overline{L} = \langle\overline{x}, \overline{y}\rangle \times \langle\overline{\sigma}\rangle$ и полный прообраз $D = \langle x^2, \sigma\rangle$ подгруппы $\langle\overline{\sigma}\rangle$ нормален в группе L. Из равенства $C_{F^*}(\sigma) = \langle\tau\rangle$ (лемма 3) заключаем, что $(xy)^2 \in \langle x^2\rangle$ и $(xy)^\sigma = (xy)^{-1}$. Итак, с одной стороны, $Q = \langle x, y\rangle$ конечная не циклическая 2-группа с единственной инволюцией, а с другой стороны $f^\sigma = f^{-1}$ для каждого элемента f из Q и, значит, Q абелева. Полученное противоречие означает, что $\langle x\rangle = \langle y\rangle$.

Далее, ввиду единственности инволюции τ в F^* (лемма 2) любые две циклические 2-подгруппы в F^* пересекаются нетривиально. Поэтому из доказанного следует, что для любого числа $2^n \geq 2$ в F^* существует не более одной циклической 2-подгруппы порядка 2^n, каждый элемент которой инвертируется инволюцией σ. Поэтому различные циклические 2-подгруппы инвертируемые инволюцией σ составляют возрастающую цепочку

$$\langle\tau\rangle = S_1 < S_2 < ..., \qquad |S_n| = 2^n, \tag{4}$$

обьединение S которой является либо конечной циклической, либо бесконечной квазициклической 2-группой. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $x \in F^* \setminus S$ и $s = x^2 \in S$, то порядок элемента $x^{-1}\sigma^{-1}x\sigma$ бесконечен.*

Доказательство. Пусть $L = \langle x, \sigma\rangle$ и $\overline{L} = L/\langle s\rangle$. Допустим, что фактор-группа $\overline{L}$ — конечна. Очевидно, что инволюции $\overline{x}$ и $\overline{\sigma}$ не сопряжены в $\overline{L}$ и либо $\overline{L}$ — четверная группа Клейна, либо в $\langle\overline{x\sigma}\rangle$ есть центральная инволюция $\overline{z}$. Первый случай невозможен, так как из $\langle x^\sigma\rangle = \langle x\rangle$ и $C_{F^*}(\sigma) = \langle\tau\rangle$ следует $x^\sigma = x^{-1}$, что противоречит лемме 6. Во втором случае $1 \neq z^2 \in \langle s\rangle$, где z — прообраз элемент в L, и, как и выше, $z^\sigma = z^{-1}$, что снова противоречит лемме 6. Следовательно, группа диэдра $\overline{L}$ не может быть конечной, и порядок элемента $x^{-1}\sigma^{-1}x\sigma$ бесконечен. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Когда $\mathrm{Char}\, F = 2$, $C_{F^*}(\sigma) = 1$ (лемма 3) и по лемме 2.20 из [23] группа $F^*\leftthreetimes\langle\sigma\rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $\langle\sigma\rangle$ и периодическим абелевым ядром, очевидно совпадающим с F^*. И теорема 1 вытекает из предложения 4.

Пусть $\mathrm{Char}\, F \neq 2$. Очевидно, что условие конечности инволюции σ в группе K равносильно условию конечности порядков элементов $x^{-1}\sigma^{-1}x\sigma$ при $x \in F^*$. Поэтому при наших условиях из включений $x \in F^*$ и $x^2 \in S$ по лемме 7 следует включение $x \in S$. А это в свою очередь означает, что подгруппа S, определенная в лемме 6, нормальна в K.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{K} = K/S = \overline{F}^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$. Пусть $\overline{1} \neq \overline{c} \in C_{\overline{F}^*}(\overline{\sigma})$, тогда $c \in N_K(S \leftthreetimes \langle\sigma\rangle)$. Если подгруппа S конечна, то $c^2 \in S$ и по лемме 7 порядок элемента $c^{-1}\sigma^{-1}c\sigma$ бесконечен, что невозможно. Если подгруппа S бесконечна, то $S\sigma = \sigma^S$ и $cx \in C_{F^*}(\sigma)$ для некоторого $x \in S$, что также невозможно. Следовательно, $C_{\overline{F}^*}(\overline{\sigma}) = \overline{1}$ и $(\overline{K}, \langle\overline{\sigma}\rangle)$ — пара Фробениуса. Очевидно, что инволюция $\overline{\sigma}$ конечна в $\overline{K}$, и по лемме 2.20 из [23] группа $\overline{K} \leftthreetimes \langle\overline{\sigma}\rangle$ является группой Фробениуса с периодическим абелевым ядром и дополнением $\langle\overline{\sigma}\rangle$. Отсюда следует, что F^* также периодическая группа, и теорема 1 вытекает из предложения 4.

Лемма 8. *Пусть $\mathrm{Char}F \neq 2$ и любые две неперестановочные инволюции из σ^{F^*} сопряжены при помощи подходящей инволюции из $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$. Тогда почти-область $(F, +, \cdot)$ является (коммутативным) полем и $G \simeq PGL_2(F)$.*

Доказательство. Пусть, как и в доказательстве леммы 5, g — произвольный элемент из K не являющийся инволюцией. По лемме 3 $C_{F^*}(\sigma) = \langle\tau\rangle$, где τ — единственная инволюция из F^*, и $C_K(\sigma) = \langle\tau\rangle \times \langle\sigma\rangle$. Если $\sigma^g = \sigma\tau$, то $(\sigma\tau)^g = \sigma$, $g^2 = \tau$ и $g^\sigma = g \cdot g^{-1}\sigma g\sigma = g\tau = g^{-1}$. Если же $\sigma^g \neq \sigma\tau$, то $\sigma^g\sigma \neq \sigma\sigma^g$, по условиям леммы $\sigma^g = \sigma^t$ для некоторой инволюции $t \in K$ и, значит, $gt \in C_K(\sigma)$. Так как $gt \neq 1$, то $gt \in \{\tau, \sigma, \tau\sigma\}$, элемент g содержится в группе диэдра $D = \langle t, gt\rangle$ и $g^t = g^{gt} = g^{-1}$. Поскольку $g\tau = \tau g$ и $g \neq g^{-1}$, то $gt \neq \tau$. Значит, либо $gt = \sigma$, либо $gt = \tau\sigma$, и в любом случае $g^\sigma = g^{-1}$.

Если $g \notin F^*$, то $g\sigma \in F^*$ и ввиду доказанного выше $|g\sigma| = 2$. Но тогда $g\sigma = \tau$ в силу единственности инволюции τ в F^*, $g = \tau\sigma$ и $|g| = 2$, что противоречит выбору элемента g. Отсюда заключаем, что каждый элемент из $K \setminus F^*$ является инволюцией и $f^\sigma = f^{-1}$ для каждого элемента $f \in F^*$. Остается применить предложение 3. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 вытекает из лемм 4, 5 и 8.

Доказательство следствий. Пусть G — бесконечная группа, действующая точно трижды транзитивно на множестве X, ∞ — символ из X и $F = X \setminus \{\infty\}$. Тогда $T = G_\infty$

действует точно 2-транзитивно на F и согласно предложению 1 на F можно ввести такие две операции $+, \cdot$ согласованные с действием группы T, что $(F, +, \cdot)$ будет почти-областью с нейтральным элементом 0 относительно операции сложения и нейтральным элементом 1 относительно операции умножения. В группе G есть единственный элемент σ переводящий упорядоченную тройку $(1, 0, \infty)$ в упорядоченную тройку $(1, \infty, 0)$, причем σ — инволюция. По предложению 3.1 гл. V [2] (F, σ) — KT-поле. Согласно лемме 2 любая инволюция из G, стабилизирующая хотя бы одну точку из X, сопряжена с σ. Поэтому условия конечности или совершенности некоторой инволюции в следствиях 1, 2 выполняются и для инволюции σ.

Согласно условиям следствия 1 инволюция σ конечна в группе G, значит, σ конечна и в группе $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$. По теореме 1 группа $G = T_3(F)$ локально конечна и следствие 1 доказано.

Согласно условиям следствия 2 инволюция σ совершенна в группе G и ввиду теоремы 2 достаточно доказать, что σ совершенна в группе $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$. Пусть $t \in \sigma^K$ и $t\sigma \neq \sigma t$. По определению совершенной инволюции в σ^G найдется инволюция k такая, что $\sigma^k = t$, $t^k = \sigma$ и $(t\sigma)^k = (t\sigma)^{-1}$. Ввиду леммы 3 $t \notin F^*$ и $t\sigma \in F^* = G_{0,\infty}$. Отсюда заключаем, что инволюция k пару $(0, \infty)$ переводит в пару $(\infty, 0)$ и $k \in F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$. Это означает, что σ совершенна в $F^* \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$. Следствие доказано.

Замечание. *Опираясь на результаты из* [15], [16], [21], [22] *(см., также* [23]*) доказательства можно изложить более компактно, но менее доступно.*

Список литературы

[1] Холл М. Теория групп// М.: ИЛ, 1962.

[2] Wähling H. Theorie der Fastkörper.– Essen: Thalen Ferlag.– 1987.

[3] Zassenhaus H. Uber endliche Fastkorper// Hamb. Abh.– 1936.– B. 11.– S. 187-220.

[4] Kegel O. H. Zur Structur lokal endlicher Zassenhausgruppen.– Arch. Math.– 18 (1967).– S. 337-348.

[5] Мазуров В.Д. О точно дважды транзитивных группах// Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН. Вопросы алгебры и логики. 1996. С. 233-236.

[6] Grundhöfer T., Jabara E., Fixed-point-free 2-finite automorphism groups, Arch. Math., 97 (2011), July 7, P. 219-223.

[7] Созутов А.И., О группах Шункова действующих свободно на абелевых группах// Сиб. мат. журн.– Том 54, №1 (2013).– С. 188-198.

[8] Durakov E.B., Bugaeva E.V., Sheveleva I.V. On Sharply Doubly-Transitive Groups// Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика, Т. 6, 2013, С. 28-32.

[9] Созутов А.И., Дураков Е.Б., Бугаева Е.В. О некоторых почти-областях и точно дважды транзитивных группах // Труды института математики и механики УрО РАН, 2014, Т. 20, №2, С. 277-283.

[10] А.И. Созутов, Е.Б. Дураков, О локальной конечности периодических точно трижды транзитивных групп// Алгебра и логика.– Т. 54, №1 (2014). С.

[11] Eliyahu Rips, Yoav Segev, Katrin Tent, A sharply 2-transitive group without a non-trivial abelian normal subgroup// arXiv:1406.0382v4 [math.GR], 22 Oct. 2014, 1-17.

[12] Katrin Tent and Martin Ziegler, Sharply 2-transitive groups// arXiv:1408.5612v1 [math.GR], 24 Aug 2014, 1-5.

[13] Tent K., Sharply 3-tranzitive groups// 2015

[14] Kerby, W. und Wefelscheid, H. *Ü*ber tine scharf 3-fach transitive Gruppen zugeordnete algebraische Structur.– Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37 (1972), 287-290.

[15] Беляев В.В. Группы с почти регулярной инволюцией// Алгебра и логика.– 1987.– Т. 26, №5.– С. 531-535.

[16] Мазуров В.Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций, Алгебра и логика, 39, №1 (2000), 74-86.

[17] Созутов А.И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой// Алгебра и логика.– 2000.– Т. 39, №5.– С. 602-617.

[18] Созутов А.И., Сучков Н.М. О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой// Мат. заметки.– Т. 68.– Вып. 2.– август 2000.– С. 272 – 285.

[19] Сучков Н.М. О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп// Алгебра и логика.– 2001.– Т. 40, №3.– С. 344-351.

[20] Созутов А.И. О парах Фробениуса с совершенными инволюциями// Алгебра и логика.– 2005.– Т. 44, №6.– С. 751-762.

[21] А.И. Созутов, А.С. Крюковский, Группы с элементарными абелевыми централизаторами инволюций.– Алгебра и логика.– 2007.– Т. 46, №1.– С. 75-82.

[22] А.И. Созутов, О группах с почти регулярной инволюцией.– Алгебра и логика.– 2007.– Т. 46, №3.– С. 360-368.

[23] Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. Бесконечные группы с инволюциями.– Красноярск, Сибирский федеральный университет, 2011. 149 с.