УДК 512.7

О числе неприводимых компонент Ведерникова — Эйна пространства модулей стабильных 2-расслоений на проективном пространстве

Н. Н. Осипов, С. А. Тихомиров

Аннотация

В статье предлагается метод нахождения точного числа неприводимых компонент Ведерникова — Эйна первого и второго типов в пространствах модулей $M(0,n)$ стабильных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n \geqslant 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Приведены формулы для числа компонент Ведерникова — Эйна и найден критерий существования этих компонент для произвольного $n \geqslant 1$.

Ключевые слова: стабильные расслоения, классы Черна, пространства модулей, уравнения Пелля.

Содержание

Введение

В последние годы повысился интерес к изучению полустабильных когерентных пучков на трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, в том числе стабильных векторных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ (см., например, [1] — [5]). В этих исследованиях одним из главных является вопрос о географии неприводимых компонент пространств модулей таких расслоений и, в частности, вопрос о точном числе компонент того или иного типа в пространстве модулей.

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в статье [6] и касавшегося неприводимых компонент Эйна в пространствах $M(0,n)$ модулей стабильных расслоений ранга 2 (далее 2-расслоений) с первым классом Черна $c_1 = 0$ и вторым классом Черна $c_2 = n \geqslant 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Как известно [7], компоненты Эйна в $M(0,n)$ определяются тройками (a,b,c) неотрицательных целых чисел, связанных условиями

$$n = c^2 - a^2 - b^2, \quad c > a + b, \quad b \geqslant a.$$

В частных случаях 1) $a = 0$ и 2) $a = b$ эти компоненты рассматривались Ведерниковым в работе [8]. По этой причине мы называем их «компонентами Ведерникова — Эйна» первого типа в случае 1) и, соответственно, второго типа в случае 2). В настоящей статье изучаются теоретико-числовые свойства серий компонент Ведерникова—Эйна первого и второго типов. Нами предложен метод получения точного числа всех компонент Ведерникова—Эйна первого и второго типов и получен критерий существования этих компонент для произвольного $n \geqslant 1$. Основное поле $\mathbf{k}$ в работе считается алгебраически замкнутым характеристики 0.

Статья организована следующим образом.

В первом параграфе приводятся некоторые результаты о решениях $(c, a) \in \mathbb{Z}^2$ диофантова уравнения

$$c^2 - 2a^2 = n, \tag{0.1}$$

удовлетворяющих ограничениям $c > 2a \geqslant 0$. Уравнение (0.1) возникло как частный случай более общего уравнения

$$c^2 - a^2 - b^2 = n,$$

решения которого при $c > a + b$, $b \geqslant a \geqslant 0$ соответствуют компонентам Эйна (подробности см. в статье [6]).

Второй параграф содержит основной теоретико-числовой результат настоящей работы — формулу для числа специальных решений уравнения (0.1) в терминах канонического разложения числа n. Для доказательства формулы привлекаются методы элементарной теории уравнений Пелля (см., например, [9]), а также некоторые неэлементарные факты о представлении чисел бинарными квадратичными формами (см. главу III книги [10]).

В третьем параграфе решается задача о перечислении компонент Ведерникова—Эйна обоих типов в пространствах $M(0, n)$ при заданном n. Здесь главную трудность представляет случай семейств второго типа (отыскание точного их числа опирается на результаты второго параграфа о решениях уравнения (0.1)), тогда как перечислить семейства первого типа удаётся из простых комбинаторных соображений.

1. Об уравнении $c^2 - 2a^2 = n$

Для натурального n обозначим через P_n число пар $(c, a) \in \mathbb{Z}^2$, для которых

$$c^2 - 2a^2 = n, \quad 0 \leqslant 2a < c. \tag{1.1}$$

Существует простой переборный алгоритм, перечисляющий для заданного n все пары (c, a), удовлетворяющие условиям (1.1). А именно, положив $m = c - 2a$, будем искать пары $(m, a) \in \mathbb{Z}^2$, для которых

$$\frac{n + m^2}{2} = (a + m)^2, \quad m \geqslant 1, \quad a \geqslant 0.$$

Ясно, что $m \equiv n \pmod 2$ и $1 \leqslant m \leqslant \sqrt{n}$. Перебирая такие m и вычисляя

$$a = \sqrt{\frac{n + m^2}{2}} - m,$$

можно найти нужные пары (m, a), а затем и все искомые пары $(c, a) = (m + 2a, a)$.

В статье [6] для числа P_n получена оценка

$$P_n \leqslant Q(n), \tag{1.2}$$

где $Q(n)$ — максимальное число попарно не ассоциированных решений $\alpha = c + a\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *норменного уравнения*

$$N(\alpha) = |c^2 - 2a^2| = n \tag{1.3}$$

в кольце целых чисел квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Напомним, что два решения $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ уравнения (1.3) называются *ассоциированными*, если $\alpha' = \alpha\beta$, где $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ и $N(\beta) = \pm 1$. Для $Q(n)$ имеет место равенство

$$Q(n) = \sum_{d|n} \chi(d), \tag{1.4}$$

где χ — *характер* поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, т. е.

$$\chi(d) = \begin{cases} 1, & d \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ -1, & d \equiv \pm 3 \pmod 8, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(см. задачу 17 § 8 гл. III книги [10]).

В статье [6] было доказано, что оценка (1.2) *в среднем* завышена в 2 раза. В следующем разделе мы покажем, что на самом деле эта оценка завышена в 2 раза *для каждого* n.

2. Формула для числа решений

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 2.1. Имеет место равенство

$$P_n = \begin{cases} (Q(n)+1)/2, & \text{если } n = m^2, \\ (Q(n)-1)/2, & \text{если } n = 2m^2, \\ Q(n)/2, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть $\widetilde{P}_n$ — число пар $(c, a) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих условиям

$$c^2 - 2a^2 = n, \quad -c \leqslant 2a < c. \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что

$$P_n = \begin{cases} (\widetilde{P}_n + 1)/2, & \text{если } n = m^2, \\ (\widetilde{P}_n - 1)/2, & \text{если } n = 2m^2, \\ \widetilde{P}_n/2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 2.1. Условия (2.2) равносильны условиям

$$-\sqrt{n/2} \leqslant a < \sqrt{n/2}, \quad c = \sqrt{2a^2 + n}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Действительно, из условий (2.2) находим $c = \sqrt{2a^2 + n}$. Кроме того, система неравенств

$$-\sqrt{2a^2 + n} \leqslant 2a < \sqrt{2a^2 + n}$$

равносильна системе неравенств в (2.3). □

Лемма 2.2. Условия (2.3) определяют полную систему попарно не ассоциированных решений $\alpha = c + a\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ уравнения

$$c^2 - 2a^2 = n. \tag{2.4}$$

Здесь два решения α, $\alpha' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ уравнения (2.4) мы называем *ассоциированными*, если $\alpha' = \alpha\beta$, где $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ и $N(\beta) = 1$.

Доказательство. Из элементарной теории уравнений Пелля (см., например, [9]) известно, что все $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ с условием $N(\beta) = 1$ имеют вид

$$\beta = \pm\varepsilon^j \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

где $\varepsilon = 3 + 2\sqrt{2}$. Положим $q = \sqrt{n/\varepsilon}$. Нетрудно видеть, что все решения (c, a) уравнения (2.4), для которых

$$q \leqslant c + a\sqrt{2} < q\varepsilon, \tag{2.5}$$

образуют полную систему попарно не ассоциированных решений.

Пусть $\alpha = c + a\sqrt{2} > 0$, где (c, a) — решение уравнения (2.4). Тогда

$$a = f(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\alpha - \frac{n}{\alpha}\right), \quad c = \sqrt{2a^2 + n}.$$

Поскольку $f(\alpha)$ возрастает при $\alpha > 0$, условие $q \leqslant \alpha < q\varepsilon$ равносильно условию

$$-\sqrt{n/2} = f(q) \leqslant a < f(q\varepsilon) = \sqrt{n/2}.$$

Следовательно, условия (2.3) равносильны условию (2.5) для решений (c, a) уравнения (2.4), а значит, действительно определяют полную систему попарно не ассоциированных решений этого уравнения. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Очевидно, для доказательства равенства (2.1) достаточно для любого n установить равенство

$$\widetilde{P}_n = Q(n). \tag{2.6}$$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — полная система попарно не ассоциированных решений уравнения (2.4). Тогда она будет системой попарно не ассоциированных решений уравнения (1.3), причём тоже полной. Действительно, если $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ и $N(\beta) = \pm 1$, то

$$\beta = \pm\xi^j \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

где $\xi = 1 + \sqrt{2}$, при этом $N(\xi) = -1$ и $\xi^2 = \varepsilon$. Следовательно, $r = Q(n)$ и для завершения доказательства равенства (2.6) достаточно сослаться на леммы 2.1 и 2.2. $\square$

Укажем формулу для вычисления $Q(n)$ в терминах канонического разложения числа n. Положим

$$n = 2^u \prod_{i=1}^{s} p_i^{v_i} \prod_{j=1}^{t} q_j^{w_j}, \tag{2.7}$$

где $u \geqslant 0$, а $p_i \equiv \pm 1 \pmod 8$ и $q_j \equiv \pm 3 \pmod 8$ суть все нечётные простые делители n.

Предложение 2.1. Пусть число n имеет каноническое разложение (2.7). Тогда

$$Q(n) = \prod_{i=1}^{s}(v_i+1)\prod_{j=1}^{t}\frac{1+(-1)^{w_j}}{2}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Имеем

$$Q(2^u) = 1, \quad Q(p^v) = v+1, \quad Q(q^w) = \frac{1+(-1)^w}{2},$$

где $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ — простые числа. Для доказательства формулы (2.8) достаточно заметить, что функция $Q(n)$, заданная формулой (1.4), является мультипликативной, поскольку таковой является характер χ. $\square$

Следствие 2.1. (i) $Q(n) = 0$ тогда и только тогда, когда в разложении (2.7) хотя бы один из показателей w_j нечётен. **(ii)** $Q(n) = 1$ тогда и только тогда, когда в разложении (2.7) все показатели v_i равны нулю и все показатели w_j чётны.

3. Компоненты Ведерникова — Эйна

В 1984 г. Ведерников в работе [8] построил две серии семейств стабильных 2-расслоений с $c_1 = 0$ на $\mathbb{P}^3$.

Первую серию составляют семейства расслоений, у которых неотрицательная часть (симметричного) спектра имеет вид

$$0^l 1^l \ldots (k-l+1)^l (k-l+2)^{l-1} \ldots (k-1)^2 k^1,$$

где p^q означает, что число p входит в спектр q раз, а пара $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ удовлетворяет условию $0 < l < k+1$. В [8] показано, что эти семейства являются неприводимыми подмногообразиями размерности

$$3lk^2 + (-4l^2+14l)k + \frac{5}{3}l^3 - 8l^2 + \frac{55}{3}l - 4$$

в пространствах $M(0,n)$, где $n = 2kl + 2l - l^2$.

Вторую серию составляют семейства расслоений, у которых неотрицательная часть (симметричного) спектра имеет вид

$$0^{k-2l+1} \ldots (l-2)^{k-l-1}(l-1)^{k-l} l^{k-l+1} \ldots (k-1)^2 k^1,$$

а пара $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ удовлетворяет условию $0 < 2l < k+1$. В [8] показано, что эти семейства также являются неприводимыми подмногообразиями размерности

$$\frac{2}{3}k^3 + 6k^2 + \left(2l^2 + \frac{52}{3}\right)k - 4l^3 - 6l^2 - 11l + 8$$

в пространствах $M(0,n)$, где $n = (k+1)^2 - 2l^2$.

В 1988 г. Эйн в работе [7] рассмотрел когомологические расслоения монад вида

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c) \to 0,$$

где тройка $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ удовлетворяет условиям

$$b \geqslant a \geqslant 0, \quad c > a + b, \quad c^2 - a^2 - b^2 = n, \tag{3.1}$$

и показал, что такие расслоения образуют открытое подмножество неприводимой компоненты $N(a, b, c)$ пространства $M(0, n)$. Там же показано, что условия (3.1) на числа a, b, c являются необходимыми условиями существования компоненты $N(a, b, c)$. Вдобавок, из работы [7] следует, что вышеуказанные семейства Ведерникова являются в действительности открытыми плотными подмножествами компонент $N(a, b, c)$ пространств $M(0, n)$ при специальном выборе чисел a, b, c. А именно, при

$$a = 0, \quad b = k + 1 - l, \quad c = k + 1 \tag{3.2}$$

замыкание в $M(0, n)$ семейства Ведерникова первой серии для данных k, l есть компонента $N(0, k + 1 - l, k + 1)$. Соответственно, при

$$a = b = l, \quad c = k + 1 \tag{3.3}$$

замыкание в $M(0, n)$ семейства Ведерникова второй серии для данных k, l есть компонента $N(l, l, k + 1)$. В соответствии с этими результатами мы называем компоненты $N(0, k + 1 - l, k + 1)$ *компонентами Ведерникова — Эйна первого типа*, а компоненты $N(l, l, k + 1)$ — *компонентами Ведерникова — Эйна второго типа*.

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем, что компоненты Ведерникова — Эйна первого типа в пространствах $M(0, n)$ находятся в биективном соответствии с парами $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, для которых

$$2kl + 2l - l^2 = n, \quad 0 < l < k + 1. \tag{3.4}$$

Обозначим через $V_n^{(1)}$ число пар $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих условиям (3.4). Пусть

$$n = 2^u \prod_{i=1}^{s} p_i^{v_i}, \tag{3.5}$$

где $u \geqslant 0$, а p_i — все нечётные простые делители числа n. Положим

$$q(n) = |u - 1| \prod_{i=1}^{s} (v_i + 1), \tag{3.6}$$

если n имеет каноническое разложение (3.5).

Предложение 3.1. Число $V_n^{(1)}$ компонент Ведерникова — Эйна первого типа для пространства $M(0, n)$ дается формулой

$$V_n^{(1)} = \begin{cases} (q(n) - 1)/2, & \text{если } n = m^2, \\ q(n)/2, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{3.7}$$

где $q(n)$ вычисляется по формуле (3.6).

Доказательство. Условия (3.4) можно записать в виде

$$d_1 d_2 = n, \quad 0 < d_1 < d_2, \quad d_1 \equiv d_2 \pmod 2, \tag{3.8}$$

где $d_1 = l$ и $d_2 = 2k + 2 - l$. Вопрос о числе пар $(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих условиям (3.8), легко решается средствами элементарной комбинаторики и приводит к формуле (3.7). □

Задача о числе компонент Ведерникова — Эйна второго типа в пространствах $M(0, n)$ может быть решена с помощью теоремы 2.1. Подставляя (3.3) в (3.1), получаем, что компоненты Ведерникова — Эйна второго типа в пространствах $M(0, n)$ находятся в биективном соответствии с парами $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющими условиям

$$(k+1)^2 - 2l^2 = n, \quad 0 < 2l < k+1. \tag{3.9}$$

Пусть $V_n^{(2)}$ — число пар $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, для которых выполнены условия (3.9).

Предложение 3.2. Число $V_n^{(2)}$ компонент Ведерникова — Эйна второго типа для пространства $M(0, n)$ дается формулой

$$V_n^{(2)} = \begin{cases} (Q(n)-1)/2, & \text{если } n = m^2 \text{ или } n = 2m^2, \\ Q(n)/2, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{3.10}$$

где $Q(n)$ вычисляется по формуле (2.8).

Доказательство. После замены переменных $k = c - 1$ и $l = a$ условия (3.9) почти совпадут с условиями (1.1). Таким образом, для получения формулы (3.10) достаточно соответствующим образом подправить формулу (2.1). □

В качестве одного из приложений формул (3.7) и (3.10) отметим, что с их помощью легко дать ответ на вопрос о существовании компонент Ведерникова — Эйна первого и/или второго типов в пространствах $M(0, n)$ при заданном n.

Следствие 3.1. **(i)** $V_n^{(1)} = 0$ тогда и только тогда, когда $n \equiv 2 \pmod 4$ или $n \in \{1, 4\}$. **(ii)** $V_n^{(2)} = 0$ тогда и только тогда, когда в разложении (2.7) числа n либо хотя бы один из показателей w_j нечётен, либо все показатели w_j чётны, а все показатели v_i равны нулю.

Доказательство. **(i)** Если $q(n) = 0$, то в соответствии с формулой (3.6) имеем $u = 1$ в разложении (3.5), откуда $n \equiv 2 \pmod 4$. В частности, n не является точным квадратом. Значит, $V_n^{(1)} = q(n)/2 = 0$. Если $q(n) = 1$, то $n \in \{1, 4\}$ и $V_n^{(1)} = (q(n)-1)/2 = 0$. Наконец, если $q(n) > 1$, то $V_n^{(1)} > 0$.

(ii) Аналогично **(i)**, при этом используется следствие 2.1. □

Список литературы

[1] *Choi J., Chung K., Maican M.* Moduli of sheaves supported on quartic space curves // Michigan Math. J. 2016. V. 65. № 3. P. 637 — 671.

[2] *Hauzer M., Langer A.* Moduli spaces of framed perverse instanton sheaves on $\mathbb{P}^3$ // Glasgow Math. J. 2011. V. 53. P. 51 — 96.

[3] *Jardim M., Markushevich D., Tikhomirov A.S.* Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on $\mathbb{P}^3$ // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2017. V. 196. P. 1573 — 1608.

[4] *Тихомиров А.С.* Модули математических инстантонных векторных расслоений с нечетным c_2 на проективном пространстве // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 5. С. 143 — 224.

[5] *Тихомиров А.С.* Модули математических инстантонных векторных расслоений с четным c_2 на проективном пространстве // Изв. РАН. Сер. мат. 2013. Т. 77, № 6. С. 139—168.

[6] *Кытманов А.А., Осипов Н.Н., Тихомиров С.А.* Нахождение компонент Эйна в пространствах модулей стабильных 2-расслоений на проективном пространстве // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 410—419.

[7] *Ein L.* Generalized null correlation bundles // Nagoya Math. J. 1988. V. 111. P. 13—24.

[8] *Ведерников В.К.* Модули стабильных векторных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с фиксированным спектром // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 5. С. 986—998.

[9] *Barbeau E.J.* Pell's equation. New York: Springer-Verlag, 2003.

[10] *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.