Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(1), 31-40

УДК 517.54

Мультипликативные функции с матричными характерами на компактной римановой поверхности

Алена А.Беспоместных
Виктор В.Чуешев*
Математический факультет
Кемеровский государственный университет
Красная 6, Кемерово, 650043,
Россия

Получена 10.07.2008, окончательный вариант 15.10.2008, принята к печати 10.12.2008

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных (скалярных) характеров на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики.

В работе доказывается существование матричных мультипликативных функций и m-дифференциалов Прима для произвольного матричного характера со значениями в $GL(n,\mathbb{C})$ на компактной римановой поверхности.

Ключевые слова: компактная риманова поверхность, мультипликативные функции и дифференциалы Прима, матричные характеры, тэта-ряд Пуанкаре, фуксова группа.

Введение

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики.

В [1] дано построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для общих (одномерных) характеров. В работах [2], [3], [4] начато изучение векторных мультипликативных функций для матричных характеров на компактной римановой поверхности рода $g \geqslant 2$ и на торе $g = 1$.

В [4] изложена схема доказательства существования матричных мультипликативных функций для матричного характера. В нашей работе будет приведено полное развернутое доказательство этого результата. Кроме того, будет доказано существование таких функций без условия регулярности функции, определяющей матричный тэта-ряд Пуанкаре, на границе круга.

1. Предварительные сведения

Риманова поверхность есть пара (F, Σ), состоящая из связного хаусдорфова топологического 2-многообразия F и комплексно-аналитической структуры Σ на F. Первая фундаментальная группа $\pi_1(F, O)$ для компактной римановой поверхности рода $g \geqslant 1$ с базисной

*e-mail: vvchueshev@mail.ru

точкой O имеет алгебраическое представление через образующие и соотношения

$$\pi_1(F, O) = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g : \prod_{k=1}^{g} [a_k, b_k] = 1 \rangle.$$

Теорема 1 (Ф.Клейн, А.Пуанкаре [5], [6])**.** *Любую компактную риманову поверхность F рода $g \geqslant 2$ можно представить как фактор-пространство U/Γ, где Γ — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в единичном круге U, т.е. F конформно эквивалентна $(U/\Gamma, \Sigma)$, причем Σ индуцирована комплексно-аналитической структурой на U, которая задается атласом, состоящим из одной карты $(U, \varphi(z) = z)$.*

Фуксова группа Γ первого рода в U, которая униформизирует компактную риманову поверхность F рода g в U, изоморфна $\pi_1(F, O)$ и имеет алгебраическое представление $\Gamma = \langle A_1, B_1, ..., A_g, B_g : \prod_{j=1}^{g} [A_j, B_j] = 1 \rangle$. Для дальнейшего удобно ввести другое обозначение для образующих этой группы с помощью равенства $\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g\} = \{T_1, T_2, ..., T_{2g}\}$, которое означает равенство упорядоченных наборов. Элементами этой группы являются слова в образующих следующего вида $W(T_1, T_2, ..., T_{2g}) = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot ... \cdot T_{i_r}^{\pm 1}$. Натуральное число r назовем длиной этого слова после всех возможных сокращений в этой группе, учитывая определяющее соотношение.

На U вводим метрику Пуанкаре $ds = \dfrac{|dz|}{1 - |z|^2}$, где $\lambda(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$ и $\lambda(Az)|A'(z)| = \lambda(z), z \in U, A \in \Gamma$. Обозначим через $d(a, b)$ неевклидово расстояние между точками a и b из круга U [7, 8].

Характером ρ на фундаментальной группе $\pi_1(F)$ для компактной римановой поверхности F называется гомоморфизм из $\pi_1(F)$ в группу $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Если F имеет род $g > 0$ и положим $\{N_1, ..., N_{2g}\} = \{a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g\}$ (как равенство упорядоченных наборов), то ρ единственно определяется по своим значениям $\rho(N_1), ..., \rho(N_{2g})$ на образующих. Поэтому абелева группа $Hom(\pi_1(F), \mathbb{C}^*)$ изоморфна группе $[\mathbb{C}^*]^{2g}$, где изоморфизм задается отображением $\rho \to (\rho(N_1), ..., \rho(N_{2g}))$. В последней группе строки умножаются покоординатно, а произведение двух характеров ρ_1, ρ_2 в $Hom(\pi_1(F), \mathbb{C}^*)$ определено по правилу: $(\rho_1 \cdot \rho_2)(a) = \rho_1(a) \cdot \rho_2(a), a \in \pi_1(F)$.

Пусть $q \in \mathbb{Z}$. Мероморфным q-дифференциалом ω на римановой поверхности F называется закон, сопоставляющий каждой локальной координате z на F мероморфную функцию $\varphi(z)$ такую, что выражение $\varphi(z) dz^q$ будет инвариантно относительно замен локального параметра z на F [5].

Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 2$. После представления F в виде $F = U/\Gamma$, где Γ — соответствующая фуксова группа первого рода, получим, что каждый дифференциал $\varphi(z) dz^q$ на F можно записать в виде $\omega = \varphi_1(z) dz^q$, где $\varphi_1(z)$ — измеримая в круге U функция, удовлетворяющая соотношению $\varphi_1(Az) A'^q(z) = \varphi_1(z), A \in \Gamma$, т.е. автоморфная форма веса $(-2q)$ на U относительно Γ. При этом голоморфным (мероморфным) дифференциалам на F соответствуют голоморфные (мероморфные) формы на U.

Определение 1. *Мультипликативным q-дифференциалом ω (q-дифференциалом Прима) на компактной римановой поверхности F для характера ρ назовем мероморфную функцию f на U такую, что*

$$f(Tz)\rho(T)T'(z)^q = f(z), z \in U, T \in \Gamma,$$

где Γ *— фуксова группа первого рода на* U.

В пространстве $L_p(E)$ величина

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L_p(E)} = \left(\iint\limits_E |f(z)|^p dxdy \right)^{1/p},$$

$p \geqslant 1$, является нормой. Рассмотрим голоморфную в U функцию $\Phi(z)$ и составим тэта-ряд Пуанкаре:

$$\varphi_q(z) = (\Theta_q \Phi)(z) = \sum_{A \in \Gamma} \Phi(Az) A'^q(z).$$

Лемма 1 ([4]). *Для любой голоморфной на* $\overline{U}$ *функции* $\Phi(z)$ *тэта-ряд Пуанкаре* $\Theta_q\Phi(z)$ *будет голоморфным* q*-дифференциалом на* $F = U/\Gamma$ *рода* $g \geqslant 2$ *при любом* $q \geqslant 2$.

2. Матричные характеры на фуксовой группе

Определение 2. *Матричным характером* $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ *называется гомоморфизм из* Γ *в* $GL(n, \mathbb{C})$, *где* $GL(n, \mathbb{C})$ *— группа всех невырожденных квадратных матриц порядка* n *с комплексными коэффициентами.*

Для матрицы $M = (\alpha_{i,j}), \alpha_{i,j} \in \mathbb{C}, i, j = 1, ..., n$ величина $\|M\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$ будет нормой матрицы M, и она имеет следующие свойства:
1) $|\alpha_{ij}| \leqslant \|M\|$,
2) $\|M_1 + M_2\| \leqslant \|M_1\| + \|M_2\|$,
3) $\|M_1 \cdot M_2\| \leqslant \|M_1\| \cdot \|M_2\|$,
4) $\|aM\| = |a| \cdot \|M\|, a \in \mathbb{C}$.

Определение 3. *Матричным* m*-дифференциалом Прима относительно фуксовой группы* Γ *для* ρ *называется матричнозначный дифференциал* $\omega(z)dz^m$ *такой, что*

$$\omega(Tz)\rho(T)(dTz)^m = \omega(z)dz^m, \quad z \in U, \quad T \in \Gamma, \quad \rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C}).$$

В частности, при $m = 0$ это мультипликативная матричнозначная функция относительно Γ для ρ.

Лемма 2 (А.Пуанкаре [4]). *Пусть* Γ *— фуксова группа первого рода с образующими* $T_1, T_2, ..., T_{2g}$ *в круге* U, *которая униформизирует компактную риманову поверхность* $F = U/\Gamma$ *рода* $g \geqslant 2$, *тогда для любого*

$$W = W(T_1, T_2, \ldots, T_{2g}) = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot T_{i_r}^{\pm 1}$$

из Γ *верно неравенство*

$$r \leqslant \lambda d(z, W(z)) + \mu$$

для любого z из U, где λ и μ — вещественные числа, независящие от W и z.

Лемма 3 ([4]). *Пусть $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ — произвольный матричный характер для фуксовой группы Γ, которая униформизирует в круге U компактную риманову поверхность F рода $g \geqslant 2$. Тогда для любой точки z_1 на U и любого положительного числа ε существует вещественное число λ_1, не зависящее от z_1 и ε, и положительное число c_1, зависящее от z_1 и ε, такие что для любого $z \in \overline{U}_\varepsilon = \{z : d(z, z_1) \leqslant \varepsilon\}$ и любого $T \in \Gamma$ верно неравенство:*

$$\|\rho(T)\| \leqslant c_1 \left| \frac{dT(z)}{dz} \right|^{\lambda_1}.$$

Лемма 4 ([4]). *Пусть μ_1 — любое вещественное число, $\mu_1 \geqslant 2$. Для любой точки $z_1 \in U$ существует достаточно малое положительное число ε такое, что ряды*

$$\sum_{T \in \Gamma} \left| \frac{dT(z)}{dz} \right|^{\mu_1}$$

сходятся равномерно на круге $\overline{U}_\varepsilon = \{z : d(z, z_1) \leqslant \varepsilon\}$.

Обозначим через $M(z) = (\alpha_{ij}(z))$ функцию на U с матричными значениями порядка n.

Теорема 2 ([4]). *Пусть $\alpha_{ij}(z)$ будут любые аналитические функции на круге $\overline{U} = \{|z| \leqslant 1\}$, кроме конечного числа полюсов в $U, i, j = 1, ..., n$. Тогда для любого матричного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ фуксовой группы Γ первого рода, которая униформизирует компактную риманову поверхность F рода $g \geqslant 2$ в круге U, существует отличная от тождественного нуля матричная мероморфная функция $f(z)$ порядка n для характера ρ :*

$$f(Tz)\rho(T) = f(z), \quad z \in U, \quad T \in \Gamma.$$

В частности, каждая строка матрицы $f(z)$ дает векторнозначную функцию $(u_1, ..., u_n)$ для характера ρ :

$$(u_1(Tz), ..., u_n(Tz)) = (u_1(z), ..., u_n(z)) \cdot \rho(T)$$

для любого $z \in U$ и $T \in \Gamma$.

Доказательство. Для такой функции $M(z)$ и заданного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ определим матричный аналог тэта-ряда Пуанкаре в виде

$$Z(z) = \sum_{T \in \Gamma} M(T(z)) \left(\frac{dT(z)}{dz} \right)^m \rho(T),$$

где m — произвольное натуральное число с условием $m + \lambda_1 \geqslant 2$ и λ_1 определено в лемме 2.

Так как $\alpha_{ij}(z)$ аналитичны на $|z| = 1$, то модули $|\alpha_{ij}(z)|$, а значит $\|M(z)\|$ равномерно ограничены для z, удовлетворяющих неравенству $d(0, z) \geqslant d_1$, где d_1 — положительное достаточно большое число.

Пусть z_1 — произвольная точка в U и ε достаточно малое положительное число, как в лемме 3. Для любой фиксированной точки $z_1 \in U$ существует лишь конечное число элементов орбиты $T(z_1), T \in \Gamma$, которые содержатся в ограниченной области $\{z : d(0, z) \leqslant d_1 + \varepsilon\}$. Следовательно, существует только конечное множество образов $T(\overline{U}_\varepsilon)$ для $\overline{U}_\varepsilon = \{z : d(z, z_1) \leqslant \varepsilon\}$, которое содержит точки z, удовлетворяющие условию $d(0, z) \leqslant d_1$. Исключая конечное множество элементов $T' \in \Gamma$, для некоторого $c_2 > 0$ получим оценку:

$$\|M(T(z))\| \leqslant c_2, \quad z \in \overline{U}_\varepsilon, \quad T \in \Gamma. \tag{1}$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{T\in\Gamma}{}' M(T(z)) \left(\frac{dT(z)}{dz}\right)^m \rho(T),$$

который получен из исходного ряда исключением отмеченного выше конечного множества элементов $T' \in \Gamma$, сходится абсолютно и равномерно на $\overline{U}_\varepsilon$. Учитывая свойства нормы матрицы, достаточно доказать, что на $\overline{U}_\varepsilon$ сокращенный ряд

$$\sum_{T\in\Gamma}{}' \|\rho(T)\|\|M(T(z))\| \left|\frac{dT(z)}{dz}\right|^m$$

сходится равномерно. Из леммы 2 и из (1) получаем оценку:

$$\sum_T{}' \|M(T(z))\|\|\rho(T)\||\frac{dT(z)}{dz}|^m \leqslant c_2 c_1 \sum_T{}' |\frac{dT(z)}{dz}|^{m+\lambda_1}.$$

По лемме 4, с учетом условия $m + \lambda_1 \geqslant 2$, последний ряд сходится равномерно на $\overline{U}_\varepsilon$.

Следовательно, сокращенный ряд сходится абсолютно и равномерно на $\overline{U}_\varepsilon$, причем каждый член этого ряда — аналитическая функция по z на $U_\varepsilon = \{z : d(z, z_1) < \varepsilon\}$.

По теореме Вейерштрасса сумма $Z^*(z)$ сокращенного ряда аналитична на U_ε. Сумма $Z(z)$ отличается от $Z^*(z)$ на конечное число матричных слагаемых, которые имеют лишь конечное число полюсов на U_ε. Таким образом, получаем, что $Z(z)$ есть матрица с мероморфными членами, каждый из которых имеет лишь конечное число полюсов на U_ε. Так как z_1 взято произвольно на круге U, то получаем, что $Z(z)$ — мероморфный дифференциал с матричными значениями на круге U, который имеет конечное число полюсов на круге U.

Пусть S — любой элемент из Γ. Учитывая $\rho(T) = \rho(TS)\rho(S)^{-1}$, получаем соотношение для нашего ряда $Z(z)$:

$$Z(S(z)) = \sum_{T\in\Gamma} M(TS(z)) \left(\frac{dTS(z)}{dS(z)}\right)^m \rho(T) =$$

$$= \sum_{TS\in\Gamma} M(TS(z)) \left(\frac{dTS(z)}{dz}\right)^m \left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^{-m} \rho(TS)\rho(S^{-1}).$$

Когда T пробегает группу Γ, то TS также пробегает группу Γ в некотором другом порядке. Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке в силу теоремы Римана.

Умножение матриц не коммутативно, поэтому в последнем ряде величины, не зависящие от T, можно вынести из-под суммы ряда только вправо. Сделав в оставшемся ряде замену TS на T_1, получим

$$\left(\sum_{T_1\in\Gamma} M(T_1(z))\rho(T_1) \left(\frac{dT_1(z)}{dz}\right)^m\right) \left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^{-m} \rho(S^{-1}) = Z(z) \left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^{-m} \rho(S^{-1}).$$

Таким образом, для любого $S \in \Gamma$

$$Z(S(z)) = Z(z) \left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^{-m} \rho(S^{-1}).$$

Последнее означает, что $Z(z)$ — мероморфный матричнозначный m-дифференциал на U/Γ для характера ρ.

Рассмотрим $n = 1$ и $\rho(T) = 1$ для всех $T \in \Gamma$, т.е. ρ — тривиальный характер ($\rho \equiv 1$). Здесь можем взять $\lambda_1 = 0$ в лемме 2. Для произвольной аналитической (скалярной) функции $\widetilde{M}(z)$, которая имеет только конечное число полюсов в круге U и аналитична на границе круга, определим тэта-ряд Пуанкаре:

$$\Theta(z) = \sum_{T \in \Gamma} \widetilde{M}(T(z)) \left(\frac{dT(z)}{dz} \right)^m .$$

По лемме 1 для $m \geqslant 2$ $\Theta(z)$ — мероморфный m-дифференциал на U/Γ, удовлетворяющий

$$\Theta(S(z)) = \Theta(z) \left(\frac{dS(z)}{dz} \right)^{-m}, \quad S \in \Gamma, \quad z \in U.$$

В классической литературе эта функция называется дзета-фуксов ряд или тэта-фуксов ряд Пуанкаре.

Для m, удовлетворяющих $m + \lambda_1 \geqslant 2$ и $m \geqslant 2$, отношение $Z(z)$ и $\Theta(z)$

$$f(z) = \frac{Z(z)}{\Theta(z)}$$

есть матричная функция с мероморфными членами для характера ρ на $F = U/\Gamma$. Это означает, что

$$f(T(z))\rho(T) = f(z), \quad T \in \Gamma, \quad z \in U.$$

При этом детерминант $|f(z)| = \Theta(z)^{-n} \cdot |Z(z)|$ не будет тождественным нулем, если выбрать полюсы у $M(z)$ и у $\widetilde{M}(z)$ различными. □

Теорема 3. *Пусть $M(z) = (\alpha_{ij}(z))$ — матричнозначная мероморфная функция на U с конечным числом полюсов и условием*

$$\iint_U \|M(z)\| dxdy < \infty,$$

тогда для любого матричного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ для фуксовой группы Γ первого рода, которая униформизирует компактную риманову поверхность F рода $g \geqslant 2$ в круге U, существует отличная от тождественного нуля мультипликативная мероморфная матричная функция $f(z)$ порядка n для характера ρ :

$$f(T(z))\rho(T) = f(z), \quad T \in \Gamma, \quad z \in U.$$

Доказательство. Для функции $M(z)$ и заданного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ определим матричный аналог тэта-ряда Пуанкаре в виде

$$Z(z) = \sum_{T \in \Gamma} M(T(z)) \left(\frac{dT(z)}{dz} \right)^m \rho(T), \tag{2}$$

где m — натуральное число с условием $m + \lambda_1 \geqslant 2$ и λ_1 определено в лемме 2.

Сначала предположим, что $M(z)$ не имеет полюсов в U. Нам нужно доказать, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно в любом круге $|z| \leqslant R < 1$ и верно равенство

$Z(A(z))\rho(A) = Z(z)A'^{-m}(z), z \in U, A \in \Gamma$. Этим будет доказано, что $Z(z)$ — голоморфный матричный m-дифференциал (матричная автоморфная форма веса $(-2m)$).

Пусть $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_l, ...\}$ (занумеруем в последовательность элементы фуксовой группы Γ) и Δ — компактный связный фундаментальный многоугольник группы Γ в U.

В силу свойств гиперболической метрики $\lambda(z)|dz|$ и по лемме 2 имеем неравенство

$$\iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \left\| \sum_{k=1}^{N} M(A_k z) A_k'^m(z) \rho(A_k) \right\| dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \|\rho(A_k)\| \|M(A_k z)\| \cdot |A_k'(z)|^m dxdy \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \|M(A_k z)\| |A_k'(z)|^m \cdot |A_k'(z)|^{\lambda_1} dxdy \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \iint\limits_{A_k(\Delta)} \lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \|M(z)\| dxdy =$$

$$= c_1 \iint\limits_{U} \lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \|M(z)\| dxdy \leqslant c_1 \iint\limits_{U} \|M(z)\| dxdy < \infty.$$

Откуда при $N \to \infty$, по лемме Фату и следствию из теоремы Леви для рядов с положительными членами, получаем неравенство

$$\|\lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \cdot Z(z)\|_{L_1(\Delta)} \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \sum_{k=1}^{\infty} \|\rho(A_k)\| \|M(A_k(z))\| |A_k'(z)|^m dxdy \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(m+\lambda_1)}(z) \sum_{k=1}^{\infty} \|M(A_k(z))\| |A_k'(z)|^{m+\lambda_1} dxdy \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \iint\limits_{U} \|M(z)\| dxdy = c_1 \|M\|_{L_1(U)} < \infty.$$

Отсюда следует абсолютная сходимость ряда (2) в U и справедливость на множестве $\Delta_{\delta_0} = \Delta \bigcap \{|z| < 1 - \delta_0\}, 0 < \delta_0 < 1$, для матричных функций

$$Z_N(z) = \sum_{k=1}^{N} M(A_k(z))(A_k'(z))^m \rho(A_k)$$

следующей оценки

$$\|Z_N(z)\|_{L_1(\Delta_{\delta_0})} \leqslant c(\delta_0) < \infty, N = 1, 2, \dots.$$

Применив теперь к $Z_N(z)$ формулу среднего значения для голоморфных функций

$$h(z) = \frac{1}{\pi \delta^2} \iint\limits_{|\zeta - z| \leqslant \delta} h(\zeta) d\xi d\eta, \zeta = \xi + i\eta (0 < \delta < \delta_0, |z| \leqslant 1 - 2\delta_0)$$

и лемму Гейне-Бореля, получим

$$|Z_N(z)| \leqslant c_1(\delta_0) < \infty, |z| \leqslant 1 - 2\delta_0, N = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда по принципу компактности для голоморфных функций существует подпоследовательность $Z_{N_j}(z)$, сходящаяся к $Z(z)$ равномерно при $|z| \leqslant 1 - 2\delta_0$. Применяя формулу среднего значения для остатка $r_{N_j}(z) = Z(z) - Z_{N_j}(z)$, получим, что $r_{N_j}(z) \rightrightarrows 0$, $N_j \to \infty$ равномерно в любом круге $|z| \leqslant 1 - 2\delta_0$. По теореме Вейерштрасса $Z(z)$ голоморфна в U.

Если $M(z)$ имеет в U конечное число полюсов, то, после удаления их из круга U вместе с достаточно малыми окрестностями, функция $M(z)$ абсолютно интегрируема по оставшейся области. Следовательно, $Z(z)$ будет мероморфным матричным m-дифференциалом на U/Γ.

Пусть S — любой элемент из Γ. Учитывая $\rho(T) = \rho(TS)\rho(S^{-1})$, получаем соотношение для нашего ряда $Z(z)$:

$$Z(S(z)) = \sum_{T\in\Gamma} M(TS(z)) \left(\frac{dTS(z)}{dS(z)}\right)^m \rho(T) =$$

$$= \sum_{TS\in\Gamma} M(TS(z)) \left(\frac{dTS(z)}{dz}\right)^m \left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^{-m} \rho(TS)\rho(S^{-1}).$$

Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке в силу теоремы Римана. Таким образом, для любого $S \in \Gamma$ получим, что

$$Z(S(z)) = Z(z) \left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^{-m} \rho(S^{-1}).$$

Последнее означает, что $Z(z)$ — мероморфный матричнозначный m-дифференциал на U/Γ для характера ρ.

Рассмотрим случай $n = 1$ и $\rho(T) \equiv 1$ для всех $T \in \Gamma$. Для произвольной аналитической (скалярной) функции $\widetilde{M}(z)$, которая имеет только конечное число полюсов в круге U и аналитична на границе круга, определим тэта-ряд Пуанкаре

$$\Theta(z) = \sum_{T\in\Gamma} \widetilde{M}(T(z)) \left(\frac{dT(z)}{dz}\right)^m .$$

Для $m \geqslant 2, \Theta(z)$ — мероморфный m-дифференциал на U, т.е.

$$\Theta(S(z)) = \Theta(z) \left(\frac{dS(z)}{dz}\right)^{-m}, \quad S \in \Gamma, \quad z \in U.$$

Для m, удовлетворяющих $m + \lambda_1 \geqslant 2$ и $m \geqslant 2, f(z) = \dfrac{Z(z)}{\Theta(z)}$, есть матричная функция с мероморфными членами для характера ρ на $F = U/\Gamma$, т.е.

$$f(T(z))\rho(T) = f(z), \quad T \in \Gamma, \quad z \in U.$$

При этом детерминант $|f(z)| = \Theta(z)^{-n} \cdot |Z(z)|$ не будет тождественным нулем, если выбрать полюсы у $M(z)$ и у $\widetilde{M}(z)$ различными. □

Замечание 1. *Как видно из предыдущих оценок, для фиксированного* $q = m + \lambda_1 > 2$ *вместо*

$$\iint\limits_U \|M(z)\| dxdy < \infty, \quad z = x + iy,$$

достаточно выполнения более слабого условия

$$\iint\limits_U (1 - |z|^2)^{q-2} \|M(z)\| dxdy < \infty.$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 существует отличный от тождественного нуля мероморфный матричный* m*-дифференциал* $\omega = \omega(z)dz^m$ *порядка* n *для* ρ*, удовлетворяющий условию* $\omega(T(z))\rho(T)(T'(z))^m = \omega(z), T \in \Gamma, z \in U$*, где* m *— натуральное число такое, что* $m + \lambda_1 \geqslant 2$ *и* λ_1 *определено в лемме 3.*

Замечание 2. *Если характер будет матрично нормирован, т.е.* $\|\rho(T)\| = 1$ *для любого* $T \in \Gamma$*, то в оценке ряда для* $Z(z)$ *можно избавиться от характера. Таким образом, сходимость мультипликативного матричного ряда будет следовать из сходимости матричного тэта-ряда для тривиального характера* $\rho \equiv 1$.

Замечание 3. *Теорема 3, в частности, дает связь между аддитивными и мультипликативными (скалярными) функциями на* F *или на* U *относительно группы* Γ [4].

Замечание 4. *В случае тора решение матричной задачи для матричного характера может быть сведено к скалярной задаче для скалярного характера, т.е. выражается через явные формулы Эрмита и Аппеля* [2], [4].

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ N 08-01-90700 моб-ст и грантами СФУ по НМ проект №45.2007 и РФФИ проект N 06-01-00153.

Список литературы

[1] В.В.Чуешев, Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности, Часть 2, Кемерово, КемГУ, 2003.

[2] P.Appell, Generalisation des fonctions doublement periodiques de seconde espece, *J. Math. Pures et Appl.*, (Ser.3), **9**(1883), 5-24.

[3] O.Haupt, Zur theorie der Prymschen Funktionen 1 und N Ordnung, *Math. Ann.*, **77**(1916), 24-64.

[4] K.Iwasawa, Algebraic functions, *Trans. of Math. Monographs.,* **188**, Providence, Rhode Island, 1993.

[5] H.M.Farkas, I.Kra, Riemann surfaces, *Graduate Texts in Mathematics,* **71**, Springer-Verlag, 1992.

[6] В.В Чуешев, Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности, Кемерово, КемГУ, 2005.

[7] С.Л.Крушкаль, Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосибирск, Наука, 1975.

[8] Дж.Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, М., ИЛ, 1960.

Multiplicative Functions with Matrix Characters on Compact Riemann Surfaces

Alena A.Bespomestnych
Victor V.Chueshev

The theory of multiplicative functions and Prym differentials for special (scalar) characters on compact Riemann surfaces has many applications in the theory of functions, in analytic numbers theory and in mathematical physics.

In this article we proove existence of matrix multiplicative functions and Prym m-differentials for every matrix characters with values in $GL(n, \mathbb{C})$ on compact Riemann surfaces.

Keywords: compact Riemann surface, multiplicative functions and Prym differentials, matrix characters, theta Poincare series, Fuchsian group.