Вычисление сингулярных интегралов

Булгатова Е. Н.
Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ;
belena77@mail.ru

Сингулярный интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \frac{g(x)}{x}dx$ понимается в главном смысле, где $g(0) \neq 0$,т.е. как предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_{-a}^{0-\varepsilon} \frac{g(x)}{x}dx + \int\limits_{0+\varepsilon}^{a} \frac{g(x)}{x}dx \right).$$

Любая непрерывная функция представляется как сумма четной и нечетной функции, т.е.

$$g(x) = \frac{g(x)+g(-x)}{2} + \frac{g(x)-g(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x).$$

Тогда $f_1(x)$ является четной функцией, а $f_2(x)$ нечетной, так как $f_1(-x) = \frac{g(-x)+g(x)}{2} = f_1(x)$, $f_2(-x) = \frac{g(-x)-g(x)}{2} = -f_2(x)$.

Известно, что $\int\limits_{-a}^{a} f_1(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f_1(x)dx$ и $\int\limits_{-a}^{a} f_2(x)dx = 0$.

Если $g(x)$ удовлетворяет условию Гельдера в точке $x = 0$, т.е. $|g(x) - g(0)| \leq A|x|^{\alpha}$, $a > 0$, то сингулярный интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \frac{g(x)}{x}dx$ равен интегралу $\int\limits_{0}^{a} \frac{g(x)-g(-x)}{x}dx$. Если $g(x)$- гладкая функция, то функция $\frac{g(x)-g(-x)}{x}$ является гладкой.

Теорема. *Если* $\int\limits_{0}^{a} \frac{g(x)-g(-x)}{x}dx$ *сингулярный интеграл и* $g(x) \in C^{2m+1}$ *и* $l^h_{(0,a)}(x)$ *функционал с пограничным слоем с шагом* $h = \frac{1}{N}$, *то норма функционала* $l^h_{(0,1)}(x)$ *в пространстве* $W^m_\infty(0,1)$ *удовлетворяет оценке*

$$\left\| l^h_{(0,1)} \right\|_{W^m_\infty(0,1)} \leq B_0 h^m \left(1 + o\left(h^{m+1}\right)\right).$$

Доказательство: Несобственный интеграл преобразуем

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{g(x)}{x}dx = \int\limits_{0}^{a} \frac{g(x)-g(0)}{x}dx.$$

Покажем, что функция $f(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x}$ принадлежит $C^m_{(0,1)}$. Применим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$g(x) - g(0) = g(0) - g(0) + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}x^{\alpha} + \frac{1}{m!}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{m-1}g^{(m+1)}(tx)dtx^{m-1}.$$

Дифференцируя m раз по переменной x,получим

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^m t^m g^{(2m+1)}(tx)dtx^{m-1}.$$

Следовательно, функция $f(x) \in C^m$.

Используя основную оценку для функционала $l^h_{(0,1)}(x)$ с пограничным слоем в пространстве $W^m_\infty(0,1)$ [1], получаем

$$\left\langle l^h_{(0,1)}, f(x) \right\rangle \leq B_0 h^m \left(1 + o\left(h^{m+1}\right)\right).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгатова Е. Н. Построение и исследование кубатурных формул с пограничным слоем для интегрирования функций из пространств* $W^m_p(E_n)$: Дис: канд. физ-мат. наук (01.01.07) / Вост.-Сиб. технолог. ун-т. - Улан-Удэ, 2009. - 109 с.