УДК 512.816+514.142

Аффинная геометрия как физическая структура

Владимир А.Кыров*
Горно-Алтайский государственный университет,
Ленкина 1, Горно-Алтайск, 649000,
Россия

Получена 15.08.2008, окончательный вариант 10.10.2008, принята к печати 15.11.2008

В данной работе изучается физическая структура максимального ранга в аффинном пространстве V^s над алгеброй гиперкомплексных чисел V. Доказывается, что эту структуру образует группа аффинных преобразований пространства V^s.

Ключевые слова: физическая структура, гиперкомплексные числа.

Введение

Рассмотрим алгебру гиперкомплексных чисел V [1]. Ее элементами являются гиперкомплексные числа: $z = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_s i_s$, где $x_0, x_1, \ldots, x_s$ — действительные числа, $i_1, \ldots, i_s$ — мнимые единицы, умножение которых определяется по формулам $i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta_0} + p_{\alpha\beta_1} i_1 + \cdots + p_{\alpha\beta_s} i_s$, $p_{\alpha\beta_0}, p_{\alpha\beta_1}, \ldots, p_{\alpha\beta_s}$ — действительные числа, $\alpha, \beta = 1, \ldots, s$.

Если $s = 0$, то алгебра гиперкомплексных чисел изоморфна полю действительных чисел R. При $s = 1$ существуют три неизоморфные алгебры гиперкомплексных чисел: это алгебра комплексных чисел ($i^2 = -1$), алгебра двойных чисел ($i^2 = 1$) и алгебра дуальных чисел ($i^2 = 0$). При $s = 2$ имеем 11 неизоморфных ассоциативных алгебр гиперкомплексных чисел [2].

В данной работе изучается физическая структура в аффинном пространстве над алгеброй гиперкомплексных чисел. Примером является полная группа аффинных преобразований вещественной плоскости [3].

1. Определение физической структуры ранга (n + 1,2)

Рассмотрим два множества B и N. Пусть $\Omega_{B^n} \subset B^n$ и $\Omega_N \subset N$ — некоторые максимально допустимые подмножества.

Определение 1. *Говорят, что на множествах B и N определена физическая структура ранга $(n+1,2)$, если существует отображение $f : B \times N \to B$, называемое метрическим, и выполняются аксиомы [4]:*

A1. $\forall \langle i_1, \ldots, i_n \rangle \in \Omega_{B^n}$, $\forall \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in \Omega_{B^n}$, $\exists! \alpha \in N$: $f(i_1, \alpha) = b_1, \ldots, f(i_n, \alpha) = b_n$.

Построим отображение $F_{j_1 \cdots j_n} : N \to \Omega_{B^n}$: $F_{j_1 \cdots j_n}(\alpha) = (f(j_1\alpha), \ldots, f(j_n\alpha))$, *где* $\langle j_1, \ldots, j_n \rangle \in \Omega_{B^n}$, *которое по аксиоме A1 является биекцией.*

A2. $\forall \alpha \in \Omega_N$ *отображение* $f_\alpha : B \to B$, *на элементах задаваемое формулой* $f_\alpha(i) = f(i\alpha)$, *является биекцией.*

*e-mail: kfizika@gasu.ru

А3. (Аксиома феноменологической симметрии.) $\forall\langle i_0, i_1, \ldots, i_n\rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ *и* $\forall\langle\alpha_0, \alpha\rangle \in N \times \Omega_N$ *существует функциональная связь:*

$$f(i_0\alpha_0) = g(f(i_0\alpha), f(i_1\alpha), \ldots, f(i_n\alpha), (i_1\alpha_0), \ldots, f(i_n\alpha_0)),$$

где $g : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B \to B$.

Обозначим $w_1 = f(j_1\alpha), \ldots, w_n = f(j_n\alpha)$, $z = f(i\gamma)$, где $\gamma \in \Omega_N$. Поэтому

$$f(i\alpha) = f(F_\gamma^{-1}(z), F_{j_1\cdots j_3}^{-1}(w_1, \ldots, w_n)) = \overline{f}(z, w_1, \ldots, w_n). \tag{1}$$

Построенное формулой (1) отображение $\overline{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$ удовлетворяет аксиомам А1–А3, т.е. является метрическим отображением физической структуры ранга (n+1,2).

На Ω_{B^n} построим бинарную операцию:

$$(z_1, \ldots, z_n)(w_1, \ldots, w_n) = (\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n), \tag{2}$$

причем $\overline{f}_m = \overline{f}(z_m, w_1, \ldots, w_n)$. В [4] доказывается, что бинарная операция (2) является групповой. Ее можно расширить до отображения $D : B^n \times \Omega_{B^n} \to B^n$, индуцирующее отображение $\overline{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$. Явный вид D совпадает с (2) при условии $(z_1, \ldots, z_n) \in B^n$. Справедливо тождество [4]:

$$(XY)Z = X(YZ), \tag{$*$}$$

где $X \in B^n$, $Y, Z \in \Omega_{B^n}$. Если $X \in \Omega_{B^n}$, то тождество (*) является аксиомой ассоциативности. Отображение D задает действие группы Ω_{B^n} в B^n, что следует из тождества (*) и аксиом А1 и А2 [5]. Оно также индуцирует транзитивное действие в B: $\overline{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$.

Теорема 1. *Тождество из аксиомы А3 эквивалентно следующему:*

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, A), \tilde{f}(w_1, A), \ldots, \tilde{f}(w_n, A)) = \tilde{f}(\tilde{f}(z, B), \tilde{f}(w_1, B), \ldots, \tilde{f}(w_n, B)), \tag{3}$$

причем $\tilde{f}(z, W) = \overline{f}(z, W^{-1})$, $\forall\, W = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle, A = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, $B = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \Omega_{B^n}$, $\forall z \in B$, W^{-1} *— элемент, обратный к* W *в группе* Ω_{B^n}.

Тождество (3) несложно представить в виде

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, A), \tilde{f}(w_1, A), \ldots, \tilde{f}(w_n, A)) = \tilde{f}(z, W). \tag{3$'$}$$

Доказательство. Из определения отображений $\overline{f}$ и $\tilde{f}$ следует выполнимость аксиомы А2. Поэтому разрешая (3) относительно первого аргумента левой части, получаем тождество из А3. Докажем обратное. Для этого в (*) положим $Y = A$, $Z = (YA)^{-1}$. После приведения подобных имеем $(XA)(YA)^{-1} = XY^{-1}$. Каждая компонента этого тождества совпадает с $(3')$. □

Отметим, что $(3')$ является обобщением тождества Уорда для квазигруппы с бинарной операцией $\bullet$ [6, 7]:

$$(x \bullet a) \bullet (y \bullet a) = x \bullet y.$$

2. Аффинная геометрия как физическая структура ранга $(\mathbf{s+2, 2})$

Полагаем $n = s+1$, $s \in \mathbb{N}$. Пусть $B = V^s$. Метрическое отображение $\bar{f} : V^s \times \Omega_{(V^s)^{s+1}} \to V^s$ задает действие группы $\Omega_{(V^s)^{s+1}}$ в V^s.

Теорема 2. *Физическая структура ранга* $(s+2,2)$, $s \geqslant 1$, *с метрическим отображением* $\bar{f} : V^s \times \Omega_{(V^s)^{s+1}} \to V^s$ *в аффинном пространстве* V^s *над ассоциативной алгеброй гиперкомплексных чисел* V *существует и с точностью до системы аффинных координат единственна. Явный вид метрического отображения:*

$$z'^1 = a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \cdots + a_s^1 z^s + a^1, \ldots, z'^s = a_1^s z^1 + a_2^s z^2 + \cdots + a_s^s z^s + a^s, \tag{4}$$

где $z^1, \ldots, z^s$ *— аффинные координаты точки* z, *матрица коэффициентов системы обратима.*

Заметим, что в аффинной геометрии прямой V метрическое отображение (4) интерпретируется как аффинное преобразование. Если $V = R$, то (4) — аффинное преобразование вещественной прямой [8].

Доказательство. Аффинные координаты в V^s обозначим $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$. Левая часть тождества (3) является записью метрического отображения в аффинных координатах $(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s)$, а правая часть — запись этого же отображения в координатах $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$. Поэтому тождество можно записать системой равенств: $\bar{\lambda}_1 = \lambda'_1, \ldots, \bar{\lambda}_s = \lambda'_s$. В аффинной геометрии такое отображение $\overline{f}$ является аффинным. Две различные аффинные системы координат, как известно, связаны линейными функциями, тогда

$$\lambda'_1 = c_{11}\lambda_1 + \cdots + c_{1s}\lambda_s + c_1, \ldots, \lambda'_s = c_{s1}\lambda_1 + \cdots + c_{ss}\lambda_s + c_s, \tag{**}$$

причем матрица коэффициентов обратима. Поэтому аффинное преобразование $\overline{f}$ задается уравнениями (**) или (4). Этим самым существование доказано. Единственность следует из построения аффинных координат. □

Зафиксируем точки общего положения $e_{k+1}, \ldots, e_{s+1} \in V^s$. Пусть $V^s(e_{k+1}, \ldots, e_{s+1})$ — множество подвижных точек в V^s относительно преобразований, оставляющих неподвижными точки $e_{k+1}, \ldots, e_{s+1}$. Тогда можно показать, что отображение

$$z' = \bar{f}(z, w_1, \ldots, w_k, e_{k+1}, \ldots, e_{s+1}),\ e_l = \bar{f}(e_l, w_1, \ldots, w_k, e_{k+1}, \ldots, e_{s+1}), \tag{5}$$

где $l = k+1, \ldots, s+1$, на $V^s(e_{k+1}, \ldots, e_{s+1})$ задает физическую структуру ранга $(k+1{,}2)$, т.е. группу преобразований. Если фиксируется другой набор точек общего положения $e^*_{k+1}, \ldots, e^*_{s+1}$, то получаем новое метрическое отображение, также задающее структуру ранга $(k+1{,}2)$ на $V^s(e^*_{k+1}, \ldots, e^*_{s+1})$:

$$z' = \bar{f}(z, w_1, \ldots, w_k, e^*_{k+1}, \ldots, e^*_{s+1}),\ e^*_l = \bar{f}(e^*_l, w_1, \ldots, w_k, e^*_{k+1}, \ldots, e^*_{s+1}). \tag{5'}$$

Заметим, что группа (5) является стационарной подгруппой транзитивной группы преобразований (4) с неподвижными точками $e_{k+1}, \ldots, e_{s+1}$. Известно, что любые две стационарные подгруппы транзитивной группы преобразований изоморфны.

Две физические структуры ранга $(n+1,2)$ с метрическими отображениями $f, f' : B \times N \to B$ называются *эквивалентными*, если группы Ω_B и Ω'_B изоморфны.

Теорема 3. *Две физические структуры ранга* $(k+1{,}2)$ *с метрическими отображениями (5) и (5') эквивалентны.*

Теорема 4. *В аффинном пространстве* V^s *существует физическая структура ранга* $(s+2{,}2)$ *тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел* V *ассоциативна.*

Доказательство. Рассмотрим физическую структуру ранга $(s+2,2)$ в пространстве V^s с метрическим отображением (4). Фиксируя s точек, приходим к физической структуре ранга (2,2), эквивалентной структуре

$$z'^1 = z^1 + a_1 z^s, \dots, z'^{s-1} = z^{s-1} + a_{s-1} z^s, z'^s = a_s z^s.$$

Это метрическое отображение, в которую входит произведение гиперкомплексных чисел, задает квазигрупповую операцию. Данная операция ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел ассоциативна. □

Теорема 5. *Физическая структура ранга* $(n+1,2)$, $n \geqslant s+2$, *с метрическим отображением* $f : V^s \times N \to V^s$ *не существует.*

Доказательство. Пусть физическая структура ранга $(n+1,2)$, $n \geqslant s+2$, существует. В тождестве $(3')$ положим $a_k = e_k$, $k = s+2, \dots, n$, а также зафиксируем произвольные точки w_k:

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, A), \tilde{f}(w_1, A), \dots, \tilde{f}(w_{s+1}, A), w_{s+2}, \dots, w_n) = \tilde{f}(z, W).$$

Тогда метрическое отображение (1) при фиксированных w_k, $k = s+2, \dots, n$ удовлетворяет аксиомам A1, A2, A3 для $n = s+1$, т.е. задает физическую структуру ранга $(s+2,2)$. Поэтому для метрического отображения, согласно теореме 2, получаем

$$z'^1 = a^1_1(w_{s+2}, \dots, w_n) z^1 + \dots + a^1_s(w_{s+2}, \dots, w_n) z^s + a^1(w_{s+2}, \dots, w_n),$$

$$z'^s = a^s_1(w_{s+2}, \dots, w_n) z^1 + \dots + a^s_s(w_{s+2}, \dots, w_n) z^s + a^s(w_{s+2}, \dots, w_n).$$

Это общий вид метрического отображения структуры ранга $(n+1,2)$, $n \geqslant s+2$ в Ω_{V^s}. Данное отображение не содержит точек $w_1, \dots, w_{s+1}$, следовательно, не задает структуру ранга $(n+1,2)$, $n \geqslant s+2$. □

Список литературы

[1] И.Л.Кантор, А.С.Солодовников, Гиперкомплексные числа, М., Наука, 1973.

[2] Р.М.Мурадов, Гиперкомплексные числа ранга 3, Наука. Культура. Образование, Горно-Алтайск, 2004, № 15/16, 107.

[3] В.А.Кыров, Квазигрупповые свойства аффинных групп, Доклады VI Сибирской научной школы-семинара с международным участием „Компьютерная безопасность и криптография — SIBECRYPT'07 Приложение к журналу *Вестник Томского государственного университета. Серия Математика. Кибернетика. Информатика*, 2007, № 23, 37-41.

[4] А.А.Симонов, Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур, Приложение к книге Кулакова Ю.И. "Теория физических структур" , М., 2004.

[5] Л.С.Понтрягин, Непрерывные группы, М., Наука, 1973.

[6] В.Д.Белоусов, Основы теории квазигрупп и луп, М., Наука, 1967.

[7] S.K.Chatterjea, On Ward quasigroups, *Pure Math. Manuscript*, (1987), no. 6, 31-34.

[8] Н.В.Ефимов, Высшая геометрия, М., ФМ, 1961.

Affine Geometry as a Physical Structure

Vladimir A.Kyrov

We consider the physical structure of maximal rank in the affine space V^s over the algebra of hypercomplex numbers V. It is proved that this structure is given by the group of affine transformations of the space V^s.

Keywords: physical structure, hypercomplex numbers.