УДК 517.547

Комбинированный вариант гармонического разложения Прони

Максим Н.Завьялов*
Денис В.Елизаров†
Институт фундаментальной подготовки,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 82, Красноярск, 660041
Россия

Получена 10.07.2008, окончательный вариант 15.09.2008, принята к печати 10.10.2008

Рассматривается модификация алгоритма Прони, позволяющая восстанавливать по дискретному набору входных значений экспоненциально-гармонические суммы, стабилизирующиеся со временем к периодическим функциям.

Ключевые слова: метод Прони, экспоненциально-гармонические суммы, аппроксимация.

Хорошо известен принадлежащий Прони метод восстановления квазиполинома по конечному числу его значений на равномерной временной сетке [1]–[3].

В работах [3], [4] исследовался метод гармонического разложения Прони, который позволяет идентифицировать динамический процесс волнового характера. В нем входные данные аппроксимируются с помощью конечных сумм гармоник.

В данной работе идентифицируются более сложные процессы волнового характера, которые аппроксимируются экспоненциально-гармоническими суммами следующего вида:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\alpha_j t} + \sum_{l=1}^{m} (B_l \cos\omega_l t + C_l \sin\omega_l t) + D$$

или:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha_j t} (A_k \cos\beta_j t + B_l \sin\beta_j t) + \sum_{l=1}^{m} (C_l \cos\omega_l t + D_l \sin\omega_l t) + E.$$

Везде считается, что $\alpha_j > 0$. Эти случаи соответствуют динамическим процессам, которые со временем стабилизируются к периодическим.

Авторы выражают благодарность проф. Л.С.Маергойзу за постоянное внимание и помощь при выполнении данной работы.

1. Алгоритм восстановления экспоненциально-гармонических сумм по точным данным

Рассмотрим подробно задачу восстановления функции вида

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\alpha_j t} + \sum_{l=1}^{m} (B_l \cos\omega_l t + C_l \sin\omega_l t) + D, \tag{1}$$

*e-mail: zavyalovmn@mail.ru
†e-mail: denis_elizarov@mail.ru

по ее значениям в узлах равномерной сетки

$$y(t_k) =: y_k, \quad t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad N \geqslant 2(n+2m), \tag{2}$$

где $h > 0$ — заданный временной шаг. Не ограничивая общности рассуждений, всюду далее считаем, что $t_0 = 0$.

Ставится задача — восстановить функцию $y(t)$ (причем именно в виде (1)) по ее входным данным (2). Введем обозначение

$$d = n + 2m.$$

Теорема 1 (существование и единственность)**.** *Пусть заданы входные данные вида (2). Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) существует единственная функция вида (1), для которой выполнены следующие ограничения:

$$\alpha_j > 0, \quad 0 < |\omega_l| < \frac{\pi}{h},$$

и которая удовлетворяет условиям (2);
2) существует единственный вектор

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

такой, что для всех значений $\{y_k\}_{k=0}^N$ функции $y(t)$ выполняется рекуррентное соотношение:

$$y_{d+k} + p_1 y_{d+k-1} + p_2 y_{d+k-2} + \dots + p_d y_k + p_{d+1} = 0, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots N - d, \tag{3}$$

и корни ассоциированного с вектором $\vec{p}$ многочлена

$$P_d(z) := z^d + p_1 z^{d-1} + p_2 z^{d-2} + \dots + p_d \tag{4}$$

(последняя координата $\vec{p}$ не присутствует в многочлене) есть числа вида

$$\{z_j = e^{-\alpha_j d}\}_1^n \quad \text{или} \quad \{z_l = e^{i\omega_l d},\ \bar{z}_l = e^{-i\omega_l d}\}_1^m. \tag{5}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы из [1]. Само восстановление функции $y(t)$ по алгоритму Прони выглядит следующим образом:
1. Находим вектор $\vec{p}$, используя рекуррентное соотношение (3) для $d+1$ значений k (например, при $k = 0, 1, \dots, d$).
2. Находим свободный коэффициент

$$D = -\frac{p_{d+1}}{1 + p_1 + p_2 + \dots + p_d}.$$

3. Составляем многочлен $P_d(z)$ и находим его корни. Первые n корней будут вещественными, а оставшиеся $2m$ – мнимыми, с модулем, равным 1. (Они образуют m комплексно-сопряженных пар.) Обозначим эти корни так:

$$z'_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \text{и} \quad z''_l,\ \bar{z}''_l,\ |z''_l| = 1, \quad 1 \leqslant l \leqslant m.$$

4. Показатели экспонент и частоты тригонометрических функций находим по формулам (где используется только главное значение логарифма):

$$\alpha_j = -\frac{\ln z_j}{h}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \omega_l = \frac{|\ln z_l|}{h}, \quad 1 \leqslant l \leqslant m. \tag{6}$$

5. Теперь записываем $y(t)$ в виде (1) с неопределенными коэффициентами A_j, B_l, C_l. Для их нахождения используем входные данные (2), вычисляя значения $y(t)$ в d точках и приравнивая полученные выражения известным y_k. Получится линейная система, в которой d неизвестных и d уравнений. Ее определитель всегда будет ненулевым (определитель Вандермонда).

Таким образом, функция вида (1) полностью восстанавливается, причем однозначно.

Теперь рассмотрим задачу восстановления функции вида

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha_j t} \left(A_j \cos\beta_j t + B_j \sin\beta_j t\right) + \sum_{l=1}^{m} \left(C_l \cos\omega_l t + D_l \sin\omega_l t\right) + E \tag{7}$$

по ее значениям в узлах равномерной сетки

$$y(t_k) =: y_k, \quad t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N, \quad N \geqslant 4(n+m). \tag{8}$$

Здесь $h > 0$ — заданный временной шаг.

Введем обозначение

$$r = 2(n+m).$$

Теорема 2 (существование и единственность)**.** *Пусть заданы входные данные вида (8). Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) существует единственная функция вида (7), для которой выполнены следующие ограничения:

$$\alpha_j > 0, \quad 0 < |\beta_j| < \frac{\pi}{h}, \quad 0 < |\omega_l| < \frac{\pi}{h},$$

и которая удовлетворяет условиям (8);

2) существует единственный вектор

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1},$$

такой, что для всех значений $\{y_k\}_{k=0}^{N}$ функции $y(t)$ выполняется рекуррентное соотношение:

$$y_{r+k} + p_1 y_{r+k-1} + p_2 y_{r+k-2} + \ldots + p_r y_k + p_{r+1} = 0, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots N - r, \tag{9}$$

и многочлен

$$P_r(z) = z^r + p_1 z^{r-1} + p_2 z^{r-2} + \ldots + p_r, \tag{10}$$

имеет корни вида

$$\{z_j' = e^{-(\alpha_j + i\beta_j)d},\ \bar{z}_j' = e^{-(\alpha_j - i\beta_j)d}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\} \tag{11}$$

или

$$\{z_l'' = e^{i\omega_l d},\ \bar{z}_l'' = e^{-i\omega_l d}, \quad 1 \leqslant l \leqslant m\}. \tag{12}$$

Алгоритм восстановления функции $y(t)$ такой же, как и в первом случае, только свободный коэффициент определяется по формуле

$$E = -\frac{p_{r+1}}{1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_r},$$

и

$$\alpha_j + i\beta_j = \frac{\ln z_j}{h}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \omega_l = \frac{\ln z_l''}{h}, \quad 1 \leqslant l \leqslant m. \tag{13}$$

2. Аппроксимация дискретной функции экспоненциально-гармоническими суммами

Пусть дан набор значений дискретной функции в узлах равномерной временной сетки:

$$f(t_k) =: f_k, \quad t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{14}$$

Опять считаем, что $t_0 = 0$, это не ограничивает общности рассуждений.

Ставится задача — аппроксимировать данную дискретную функцию с помощью экспоненциально-гармонических сумм рассмотренного выше вида.

Для начала введем экспоненциально-гармоническую сумму вида (1). Выберем значения n и m так, чтобы

$$N \geqslant 2(n + 2m) = 2d.$$

Будем применять алгоритм Прони для определения остальных неизвестных параметров функции (1). Но так как входные данные (14) не обязаны быть точными значениями функции нужного нам вида, то рекуррентное соотношение (3) не будет выполняться в точности. Поэтому заменим точное рекуррентное соотношение функционалом, показывающим отклонение от точного равенства в (3):

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_{d+1}) = \sum_{k=0}^{N-d} \left(f_{k+d} + p_1 f_{k+d-1} + \ldots + p_d f_k + p_{d+1}\right)^2. \tag{15}$$

В [1] доказано, что существует (не обязательно единственный) вектор

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

который минимизирует этот функционал.

Далее, по вектору $\vec{p}$ строим многочлен $P_d(z)$, находим его корни, затем по формуле (6) определяем показатели экспонент и частоты тригонометрических функций. Потом записываем искомую экспоненциально-гармоническую сумму в виде (1), где α_j и ω_l известны, а постоянные коэффициенты A_j, B_l, C_l, E считаются неопределенными. Для их нахождения минимизируем функционал

$$H(A_j, B_l, C_l, E) = \sum_{k=0}^{N} \left(y(kh) - f_k\right)^2.$$

Таким образом, задача аппроксимации дискретной функции по ее значениям в узлах равномерной сетки с помощью функций вида (1) была бы решенной, если бы не следующая проблема — в вышеприведенном алгоритме требуется, чтобы корни многочлена $P_d(z)$ обязательно имели вид (5). Но вектор $\vec{p}$, определяемый по произвольным входным данным (14), может изменить структуру множества корней многочлена $P_d(z)$. Например, могут появиться кратные корни, некоторые корни могут стать мнимыми, но с модулем, отличным от 1, и т.п. Это приведет к соответствующим изменениям в виде функции $y(t)$, чего нельзя допускать. Чтобы избежать этой проблемы, будем искать корни ассоциированного многочлена $P_d(z)$ сразу в нужном нам виде. Этого можно добиться, если выразить коэффициенты p_k многочлена $P_d(z)$ через его корни или какие-либо функции от корней, и записать минимизируемый функционал Φ с помощью этих функций. Потом просто будем искать минимум функционала на множестве, которое гарантирует нужный вид корней.

Предварительно рассмотрим следующий пример. Пусть $n = 1$ и $m = 1$ ($d = 3$). Функция (1) будет иметь вид

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} + B\cos\omega t + C\sin\omega t + E.$$

В данном случае легко получить зависимость между корнями и коэффициентами ассоциированного многочлена $P_3(z)$. По самому определению $P_3(z)$, его корнями будут числа

$$z_1 = e^{-\alpha h}, \quad z_2 = e^{i\omega h}, \quad z_3 = e^{-i\omega h}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}P_3(z) = z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 = \left(z - e^{-\alpha h}\right)\left(z - e^{i\omega h}\right)\left(z - e^{-i\omega h}\right) = \\ = \left(z - e^{-\alpha h}\right)\left(z^2 - 2z\cos\omega h + 1\right).\end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$U = e^{-\alpha h}, \quad V = -2\cos\omega h, \quad 0 < U < 1, \quad -2 \leqslant V \leqslant 2.$$

Получаем:

$$P_3(z) = (z - U)(z^2 + Vz + 1) = z^3 + (V - U)z^2 + (1 - UV)z - U.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}p_1 &= V - U,\\ p_2 &= 1 - UV,\\ p_3 &= -U.\end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем соотношение на коэффициенты, характеризующее данный случай:

$$p_3^2 - p_1 p_3 + p_2 = 1.$$

Заметим, что в пространстве трех переменных это уравнение задает гиперболический параболоид.

Функционал, заменяющий рекуррентное соотношение (3), примет вид

$$\Phi(U, V, p_4) = \sum_{k=0}^{N-3} \left(f_{k+3} + (V - U)f_{k+2} + (1 - UV)f_{k+1} - Uf_k + p_4\right)^2.$$

Найдя его минимум (с учетом ограничений на U и V), определим

$$\alpha = -\frac{U}{h}, \qquad \omega = \frac{1}{h}\arccos\left(-\frac{V}{2}\right).$$

Теперь искомая функция (точнее, ее постоянные коэффициенты) легко восстанавливается по входным данным.

Теперь найдем зависимость между коэффициентами многочлена $P_d(z)$ и α_j, ω_l в общем случае. Используя (4) и (5), получаем

$$\begin{aligned}P_d(z) = \prod_{j=1}^{n}\left(z - e^{-\alpha_j h}\right) \cdot \prod_{l=1}^{m}\left((z - e^{i\omega_l h})(z - e^{-i\omega_l h})\right) = \\ = \prod_{j=1}^{n}\left(z - e^{-\alpha_j h}\right) \cdot \prod_{l=1}^{m}(z^2 - 2z\cos\omega_l h + 1).\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$U_j = e^{-\alpha_j h}, \quad V_l = -2\cos\omega_l h, \quad 0 < U_j < 1, \quad -2 \leqslant V_l \leqslant 2. \tag{16}$$

Получаем

$$P_d(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - U_j) \cdot \prod_{l=1}^{m}(z^2 + V_l z + 1).$$

Рассмотрим отдельно многочлены

$$\widehat{P}_n(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - U_j) \quad \text{и} \quad \widetilde{P}_{2m}(z) := \prod_{l=1}^{m}(z^2 + V_l z + 1).$$

Известно, что

$$\widehat{P}_n(z) = z^n - S_1 z^{n-1} + S_2 z^{n-2} + \ldots + (-1)^n S_n,$$

где выражения

$$\begin{aligned} S_1 &= U_1 + U_2 + \ldots + U_n, \\ S_2 &= U_1U_2 + U_1U_3 + \ldots + U_{n-1}U_n, \\ &\text{и т.д., до} \\ S_n &= U_1U_2 \cdot \ldots \cdot U_n \end{aligned} \tag{17}$$

есть элементарные симметрические функции от переменных $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Договоримся считать, что $S_0 = 1$, а значения S_j для $j < 0$ и для $j > n$ равны 0.

Для многочлена $\widetilde{P}_{2m}(z)$ тоже можно получить аналогичные формулы. Для этого раскроем скобки и приведем подобные в $\widetilde{P}_{2m}(z)$. Получаем:

$$\widetilde{P}_{2m}(z) = z^{2m} + q_1 z^{2m-1} + q_2 z^{2m-2} + \ldots + q_{2m}.$$

При этом

$$q_j = \sum_{k \geqslant 0}\left(R_{j-2k} \cdot C_{m-j+2k}^{k}\right), \tag{18}$$

где C_{m-j+2l}^{l} — биномиальные коэффициенты, и

$$\begin{aligned} R_1 &= V_1 + V_2 + \ldots + V_m, \\ R_2 &= V_1V_2 + V_1V_3 + \ldots + V_{m-1}V_m, \\ &\text{и т.д., до} \\ R_m &= V_1V_2 \cdot \ldots \cdot V_m \end{aligned} \tag{19}$$

есть элементарные симметрические функции от переменных $V_1, V_2, \ldots, V_m$. Также считаем, что $R_0 = 1$, и R_l равны 0 для $l < 0$, $l > m$. Это гарантирует конечность сумм в (18).

Теперь перемножим многочлены $\widehat{P}_n(z)$ и $\widetilde{P}_{2m}(z)$. После раскрытия скобок и приведения подобных получим, что в многочлене

$$P_d(z) = z^d + p_1 z^{d-1} + p_2 z^{d-2} + \ldots + p_d$$

коэффициенты имеют вид (считаем, что $q_0 = 1$, а для $j < 0,\ j > 2m \quad q_j = 0$):

$$p_k = \sum_{j \geqslant 0}(-1)^j q_{k-j} S_j, \quad k = 1, 2, \ldots, d. \tag{20}$$

Таким образом, коэффициенты ассоциированного многочлена $P_d(z)$ выражаются через числа α_j, ω_l по формулам (16-20), что и требовалось получить.

Минимизируемый функционал Φ будем считать зависящим от $n + m + 1$ переменных $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m, p_{d+1}$. Ограничения на них таковы (см. (16)):

$$0 < U_j < 1, \quad -2 \leqslant V_l \leqslant 2. \tag{21}$$

Это задает множество, на котором мы ищем минимум Φ. Для нахождения минимума функционала составляем систему из его частных производных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U_j} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial V_l} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_{d+1}} = 0,$$

и находим ее решения на множестве (21). Если кратные корни отсутствуют, то находим α_j и ω_l :

$$\alpha_j = -\frac{\ln U_j}{h}, \quad \omega_l = \frac{1}{h} \arccos\left(-\frac{V_l}{2}\right).$$

Наличие же кратных корней означает, что числа n и m изначально выбраны неверно — их надо уменьшать.

Наконец, постоянные коэффициенты A_j, B_l, C_l, E определяем методом наименьших квадратов, используя входные данные. Для этого минимизируем функционал

$$H(A_j, B_l, C_l, E) = \sum_{k=0}^{N} \left(y(kh) - f_k\right)^2,$$

где функция $y(t)$ имеет вид (1) с неопределенными коэффициентами.

Теперь рассмотрим случай аппроксимации дискретной функции с помощью экспоненциально-гармонической суммы вида (7):

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha_j t} \left(A_j \cos \beta_j t + B_j \sin \beta_j t\right) + \sum_{l=1}^{m} \left(C_l \cos \omega_l t + D_l \sin \omega_l t\right) + E.$$

Выберем значения n и m так, чтобы

$$N \geqslant 2(2n + 2m) = 2r.$$

Схема действий такая же, как и в предыдущем случае — рекуррентное соотношение (9) заменяется функционалом

$$\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}) = \sum_{k=0}^{N-d} \left(f_{k+r} + p_1 f_{k+r-1} + \ldots + p_r f_k + p_{r+1}\right)^2. \tag{22}$$

Определяется вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1}$, который минимизирует этот функционал. Далее, по вектору $\vec{p}$ строится многочлен $P_r(z)$, находятся его корни, затем определяются показатели экспонент и частоты тригонометрических функций, и, наконец, по входным данным (используя метод наименьших квадратов) восстанавливаются постоянные коэффициенты в $y(t)$.

Но при этом опять возникает проблема — нет никаких гарантий, что корни многочлена $P_r(z)$ будут иметь нужный нам вид (11)-(12). Поэтому будем искать корни $P_r(z)$ сразу в нужном виде. Для этого выразим коэффициенты p_k многочлена $P_r(z)$ через функции от его корней и запишем функционал Φ с помощью этих функций. Потом будем искать минимум функционала на множестве, которое гарантирует нужный вид корней.

Рассмотрим пример. Пусть $n = 1$ и $m = 1$ ($r = 4$). Функция (7) будет иметь вид

$$y(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right) + C\cos\omega t + D\sin\omega t + E.$$

Корнями ассоциированного многочлена $P_4(z)$ будут числа

$$z_1 = e^{-(\alpha+i\beta)h}, \quad z_2 = e^{-(\alpha-i\beta)h}, \quad z_3 = e^{i\omega h}, \quad z_4 = e^{-i\omega h}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} P_4(z) &= z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4 = \\ &= \left(z - e^{-(\alpha+i\beta)h}\right)\left(z - e^{-(\alpha-i\beta)h}\right)\left(z - e^{i\omega h}\right)\left(z - e^{-i\omega h}\right) = \\ &= \left(z^2 - 2ze^{-\alpha h}\cos\beta h + e^{-2\alpha h}\right)\left(z^2 - 2z\cos\omega h + 1\right). \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$a = -2e^{-\alpha h}\cos\beta h, b = \quad e^{-2\alpha_j h}, \quad V = -2\cos\omega h.$$

Получаем

$$\begin{aligned} P_4(z) &= (z^2 + az + b)(z^2 + Vz + 1) = \\ &= z^4 + (a+V)z^3 + (1 + b + aV)z^2 + (a + Vb)z + b. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p_1 &= a + V, \\ p_2 &= 1 + b + aV, \\ p_3 &= a + Vb, \\ p_4 &= b. \end{aligned}$$

Минимизируемый функционал будет иметь вид

$$\Phi(a, b, V, p_5) = \sum_{k=0}^{N-4}\left(f_{k+4} + (a+V)f_{k+3} + (1+b+aV)f_{k+2} + (a+Vb)f_{k+1} + bf_k + p_5\right)^2.$$

Теперь найдем зависимость между коэффициентами многочлена $P_r(z)$ и $\alpha_j, \beta_j, \omega_l$, в общем случае. Используя (11) и (12), получаем

$$\begin{aligned} P_r(z) &= \prod_{j=1}^{n}\left(z - e^{-(\alpha_j - i\beta_j)h}\right)\cdot\left(z - e^{-(\alpha_j+i\beta_j)h}\right)\cdot\prod_{l=1}^{m}\left((z - e^{i\omega_l h})(z - e^{-i\omega_l h})\right) = \\ &= \prod_{j=1}^{n}\left(z^2 - 2ze^{-\alpha_j h}\cos\beta_j h + e^{-2\alpha_j h}\right)\cdot\prod_{l=1}^{m}(z^2 - 2z\cos\omega_l h + 1). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$a_j = -2e^{-\alpha_j h}\cos\beta_1 h, \quad b_j = e^{-2\alpha_j h}, \quad V_l = -2\cos\omega_l h. \tag{23}$$

Получаем
$$P_r(z) = \prod_{j=1}^{n}\left(z^2 + a_j z + b_j\right) \cdot \prod_{l=1}^{m}(z^2 + V_l z + 1).$$
Рассмотрим отдельно многочлены
$$\widehat{P}_{2n}(z) = \prod_{j=1}^{n}\left(z^2 + a_j z + b_j\right) \quad \text{и} \quad \widetilde{P}_{2m}(z) = \prod_{l=1}^{m}(z^2 + V_l z + 1).$$

Многочлен $\widetilde{P}_{2m}(z)$ уже рассмотрен подробно выше. Исследуем $\widehat{P}_{2n}(z)$. Раскроем скобки и сгруппируем по степеням z. Получаем, что
$$\widehat{P}_{2n}(z) = z^{2n} + \widehat{S}_1 z^{2n-1} + \widehat{S}_2 z^{2n-2} + \ldots + \widehat{S}_{2n},$$
где
$$\widehat{S}_k = \sum\nolimits' c_1^{(j_1)} c_2^{(j_2)} c_3^{(j_3)} \cdot \ldots \cdot c_n^{(j_n)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2n, \tag{24}$$
и
$$c_i^{(j_i)} = \begin{cases} 1, & j_i = 2 \\ a_i, & j_i = 1 \\ b_i, & j_i = 0. \end{cases} \tag{25}$$
Суммирование в формуле (24) происходит по всем возможным комбинациям индексов $j_1, j_2, \ldots, j_n$, таким, что любое j_i равно 0, 1 или 2 и сумма $j_1 + j_2 + \ldots + j_n = k$.

Теперь, перемножим многочлены $\widehat{P}_{2n}(z)$ и $\widetilde{P}_{2m}(z)$. После раскрытия скобок и приведения подобных получим, что в многочлене
$$P_r(z) = z^r + p_1 z^{r-1} + p_2 z^{r-2} + \ldots + p_r$$
коэффициенты имеют вид ($\widehat{S}_0 = 1$, $\widehat{S}_j = 0$, если $j < 0$ или $j > 2n$):
$$p_k = \sum_{j \geqslant 0} q_{k-j} \widehat{S}_j, \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{26}$$
Таким образом, коэффициенты многочлена $P_r(z)$ выражаются через числа $\alpha_j, \beta_j, \omega_l$ по формулам (18,19,23-26), что и требовалось получить.

Минимизируемый функционал Φ будем считать зависящим от $2n + m + 1$ переменных $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, V_1, \ldots, V_m, p_{r+1}$ Ограничения на них таковы (см. (23)):
$$-2 \leqslant a_j \leqslant 2, \quad 0 < b_j < 1, \quad -2 \leqslant V_l \leqslant 2. \tag{27}$$
Это задает множество, на котором мы ищем минимум Φ. Для нахождения минимума функционала составляем систему из его частных производных
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_j} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial V_l} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_{r+1}} = 0$$
и находим ее решения на множестве (25). При этом надо следить за тем, чтобы не было кратных корней. Затем находим α_j, β_j и ω_l :
$$\alpha_j = -\frac{1}{2h}\ln b_j, \quad \beta_j = \frac{1}{h}\arccos\left(-\frac{a_j}{2}e^{\alpha_j h}\right), \quad \omega_l = \frac{1}{h}\arccos\left(-\frac{V_l}{2}\right).$$

Наконец, постоянные коэффициенты A_j, B_j, C_l, D_l, E определяем методом наименьших квадратов, используя входные данные. Для этого минимизируем функционал

$$H(A_j, B_j, C_l, D_l, E) = \sum_{k=0}^{N} (y(kh) - f_k)^2 ,$$

где функция $y(t)$ имеет вид (7) с неопределенными коэффициентами.

Работа выполнена при поддержке грантов СФУ по НМ №45.2007 и №54.2007.

Список литературы

[1] G.R.B.Prony, Essai experimental et analytique: sur les lois de la dilatabilite de fluides elastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a differentes temperatures, *J. de L'Ecole Polytechnique,* **1**(1795), № 2, 24-76.

[2] С.Л.Марпл-мл, Цифровой спектральный анализ и его приложения, М., Мир, 1990.

[3] L.S.Maergoiz, Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Applications in Mathematics and Biophysics, Kluwer academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2003.

[4] Л.С.Маергойз, Б.Н.Варава, О методе гармонического разложения Прони, Комплексный анализ и дифференциальные операторы, Сб. науч. тр. Красноярс. гос. ун-т, Красноярск, 1996, 136-144.

A Combined Variant of Prony's Harmonic Expansion

Maxim N.Zavyalov
Denis V.Elizarov

The paper deal with a modification of Prony's algorithm. We approximate a discrete function by an exponential-harmonic function.

Keywords: Prony's method, exponential-harmonic function, approximation