УДК 512.5

ОРБИТЫ ФИГУР ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА ПРИ ДЕЙСТВИИ КОНЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУПП

Михайлов А.Н.
Научный руководитель д-р физ.-мат. наук Тимофеенко А.В.
Сибирский федеральный университет

Для создания интегрированной программной среды систем GAP и Maple,позволяющей строить орбиты ломанных линий при действии конечных представлений кристаллографических групп, потребовались следующее предложение и его аналоги для больших размерностей.

Предложение 1. *Если S_n — кристаллографическая группа размерности 2 и с номером n в кристаллографической таблице, T — ее подгруппа параллельных переносов и точечная группа P изоморфна фактор-группе S_n/T, то $S_n \ncong P \leftthreetimes T$ только для n = 4, 5, 7, 8,12, а для других n действие порождающих элементов группы P = □p,r,q□ на порождающие x, y группы T показывает*

Таблица 1 определяющих соотношений группы S_n (без $[x, y] = 1$)

n	Соотношения группы P	Действие P на T
2	p^2	$x^p x, y^p y$
3	p^2	$x^p x, y^p y^{-1}$
6	$[p, r], p^2, r^2$	$[x, p], x^r x, y^r y, y^p y$
9	$p^2, r^2, [p, r]$	$x^p y^{-1}, x^r x, y^r y, y^p x^{-1}$
10	$p^2 r^{-1}, r^2, [p, r]$	$x^p y, x^r x, y^r y, y^p x^{-1}$
11	$p^2, r^2 q^{-1}, q^2, [p, q],$ $[r, q], r^p r^{-1} q^{-1}$	$[x, p], x^r y, x^q x, y^r x^{-1}, y^p y, y^q y$
13	p^3	$x^p yx, y^p x^{-1}$
14	$p^3, r^2, p^r p^{-2}$	$x^r y, x^p yx, y^r x, y^p x^{-1}$
15	$p^3, r^2, p^r p^{-2}$	$x^r y^{-1}, x^p yx, y^r x^{-1}, y^p x^{-1}$
16	$p^3, r^2, [p, r]$	$x^r x, x^p yx, y^r y, y^p x^{-1}$
17	$p^3, r^2, q^2, [r, q], [p, r], p^q p^{-2}$	$x^q y^{-1}, x^r x, x^p yx, y^q x^{-1}, y^r y, y^p x^{-1}$

Доказательство.

Определяющие соотношения табл.1 получены с помощью системы GAP и последующей ручной обработки. Например, генетический код группы S_{14} = □x,y,p,r | $[x,y], p^3, r^2, p^r p^{-2}, x^r y, x^p yx, y^r x, y^p x^{-1}$□ возник из линейного представления группы S_{14} в системе GAP, для которого по алгоритму Тодда-Коксетера эта система выдала следующее определяющие соотношения: $xyx^{-1}y^{-1}$, $r^2, p^3, p^{-1}r^{-1}prp^{-1}$, $x^{-1}r^{-1}xryx$, $x^{-1}p^{-1}xpyx^2$, $y^{-1}r^{-1}yryx$, $y^{-1}p^{-1}ypyx^{-1}$.

Докажем, что $S_n \cong P \leftthreetimes T$ для $n = 2$, 3, 6, 9,10, 11,13,14,15,16,17.

Теперь каждую группу S_n рассматриваем как абстрактную группу, заданную генетическим кодом, т.е. изоморфный образ группы $S\boldsymbol{n}$ сохраняет ее обозначение.

Представим группу S_n в виде произведения групп $S_n = PT$, где $P \simeq S_n/T$, T = □x,y / $[x,y] = 1$□. Действительно, система порождающих группы S_n состоит из порождающих ее подгрупп T и P элементов. Например, $S_{17} = \langle x, y, p, r, q\rangle$, причем $T = \langle x,y\rangle$, $P = \langle p, r, q\rangle$. Следовательно $S_n = TP$, что и требовалось доказать.

Докажем, что T— нормальная подгруппа S, т.е. $T \lhd S_n$. Для этого нам надо показать, что $T^{S_n} \subseteq T$, то есть $g^{-1}Tg = T$, для любого $g \in S_n$. Из табл.1 видно, что, сопрягая элементами группы Sn элементы подгруппы T, получаем элемент подгруппы T, то есть для каждого $g \in S_n$ и каждого $t_1 \in T$ найдётся такой $t_2 \in T$, что $t_1^g = t_2$. Например, действие P на T для группы S_{14}: $x^r = y^{-1}$, $x^p = x^{-1}y^{-1}$, $y^r = x^{-1}$, $y^p = x$, где $x, y \in T$, $p, r \in P$. Из этих соотношений видно, сопрягая элемент подгруппы T элементом из P, получаем элементы этой группы. Таким же образом, рассматривая определяющие соотношения остальных групп из таблице 1, увидим, что в любой группе S_n, сопрягая элемент группы T элементом из P, останемся в группе T, то есть $g^{-1}Tg = T$, следовательно $T \lhd S_n, n = 2$, 3, 6, 9,10,11,13,14,15,16,17.

Докажем, что $T \cap P = 1$ для групп из табл.1. Пусть Z — кольцо целых чисел. Из таблицы 1 видно, что для этих групп нет соотношений вида $p^k = t, t^k = p, t^g = p, p^g = t, t \in T, p \in P, k \in Z, g \in S_n$, то есть не существует такого элемента $g \in S$, что $g \in P$ и $g \in T$, кроме единицы. Из этого следует, что $T \cap P = 1$ для групп S_n, n = 2, 3, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17. Следовательно группы S_n, n = 2, 3, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 являются полупрямым произведением T и P, т.е. $S_n \cong P \leftthreetimes T$ по определению, т.к. $S_n = PT$, где $P \simeq S_n/T$, $T \lhd S_n, T \cap P = 1$.

Теперь докажем, что $S_n \ncong P \leftthreetimes T$ только для $n = 4, 5, 7, 8,$12. Посмотрим на таблицу определяющих соотношений группы S_n, n = 4, 5, 7, 8, 12.

Таблица 2 определяющих соотношений группы $S_n, n = 4, 5, 7, 8, 12$ (без $[x, y] = 1$)

n	Определяющие соотношения группы S_n (без $[x, y] = 1$)
4	p^2y^{-1}, x^px
5	$p^2, x^py^{-1}, y^px^{-1}$
7	$p^2, r^2, [x, p], r^pr^{-1}y, x^rx, y^ry, y^py$
8	$r^2, p^2x^{-1}, [x, p], x^rx, r^pyx^{-1}r^{-1}, y^ry, y^py$
12	$q^2, r^2q^{-1}, [r, q], p^2x^{-1}, r^pxq^{-1}r^{-1}, q^pxy^{-1}q^{-1}, [x, p],$ $x^ry, x^qx, y^rx^{-1}, y^py, y^qy$

Из таблицы 2 видно, что в группах S_n, $n = 4, 5, 7, 8, 12$ есть определяющие соотношения вида $p^k = t$, где $p \in P, t \in T, k \in$ Z, то есть существует такой элемент $g \in S$, что $g \in T$ и $g \in P$. Из этого следует, что в группе P есть элементы из группы T, т.е. $T \cap P = g$, где $P \simeq S_n/t$, $g \in S_n$ для $n = 4, 5, 7, 8,$12. Отсюда следует, что $S_n \ncong P \leftthreetimes T$ только для $n = 4, 5, 7, 8,$12.

Доказано.

Применены конечные представления $P \leftthreetimes \mathbb{Z}_m^d$, $m = 1, 2, \ldots$, аппроксимирующие группу S_n.